5. Übungsaufgaben.

1. Der Leser möge den allgemeinen Fünfgruppensatz mit Hilfe von Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{Z}$ (§ 18, Nr. 5, 1) realisieren.

2. Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ beliebige Untergruppen in $\mathfrak{G}$ und $A \supset B$, $C \supset D$ ihre Felder. Wir setzen voraus, daß die linksseitigen Nebenklassenzerlegungen $(\bar{A} =)\, \mathfrak{A}/_l \mathfrak{B}$, $(\bar{C} =)\, \mathfrak{C}/_l \mathfrak{D}$ in bezug auf B, D adjungiert sind. Es soll die in § 4, Nr. 2 beschriebene Konstruktion von verknüpften Überdeckungen $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ der Zerlegungen $\bar{A}_1 = C \sqsubset \mathfrak{A}/_l \mathfrak{B}$, $\bar{C}_1 = A \sqsubset \mathfrak{C}/_l \mathfrak{D}$ durchgeführt werden.

§ 24. Invariante Untergruppen (Normalteiler)

1. Definition. Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ Untergruppen in $\mathfrak{G}$. Wenn die linksseitige und die rechtsseitige Nebenklasse jedes Punktes $a \in \mathfrak{A}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{B}$ zusammenfallen, wenn also $a\mathfrak{B} = \mathfrak{B}a$ gilt, so heißt $\mathfrak{B}$ *invariante* oder *normale Untergruppe in* $\mathfrak{A}$; man nennt $\mathfrak{B}$ auch *Normalteiler in* $\mathfrak{A}$. *In diesem Fall sind natürlich die beiden Nebenklassenzerlegungen* $\mathfrak{A}/_l \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}/_r \mathfrak{B}$ *identisch, also* $\mathfrak{A}/_l \mathfrak{B} = \mathfrak{A}/_r \mathfrak{B}$; man spricht einfach von der *Nebenklassenzerlegung der Gruppe* $\mathfrak{A}$ *in bezug auf die* (*invariante*) *Untergruppe* $\mathfrak{B}$.

Bei Betrachtungen über invariante Untergruppen, die in derselben Untergruppe $\mathfrak{A}$ liegen, können wir offenbar $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$ annehmen.

2. Grundlegende Eigenschaften invarianter Untergruppen. In der Gruppe $\mathfrak{G}$ gibt es mindestens zwei (eventuell zusammenfallende) Untergruppen. die in $\mathfrak{G}$ invariant sind: die *größte* (mit $\mathfrak{G}$ identische) *Untergruppe* und die *kleinste* (aus dem einzigen Element $\underline{1}$ bestehende) *Untergruppe* $\{\underline{1}\}$. Diese stellen die *extremen invarianten Untergruppen in* $\mathfrak{G}$ dar. In der Gruppe $\mathfrak{G}$ kann es sehr wohl Untergruppen geben, die nicht in $\mathfrak{G}$ invariant sind; z. B. ist die aus den Permutationen $\underline{1}$, $\boldsymbol{f}$ (wir wenden dieselbe Bezeichnung wie in § 22, Nr. 1 an) bestehende Untergruppe $\mathfrak{A}$ der Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_3$ in $\mathfrak{S}_3$ nicht invariant, wie z. B. aus $\boldsymbol{a}\mathfrak{A} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}$, $\mathfrak{A}\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}\}$, $\boldsymbol{a}\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}\boldsymbol{a}$ zu ersehen ist.

Es seien $(\mathfrak{G} \supset)\, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ Untergruppen in $\mathfrak{G}$. Ist die Untergruppe $\mathfrak{B}$ invariant in $\mathfrak{G}$, so hat sie natürlich dieselbe Eigenschaft auch in $\mathfrak{A}$. Ist jedoch umgekehrt die Untergruppe $\mathfrak{B}$ invariant in $\mathfrak{A}$, so braucht sie keineswegs auch in der Gruppe $\mathfrak{G}$ invariant zu sein, da die Beziehung $x\mathfrak{B} = \mathfrak{B}x$ wohl für alle Punkte x in $\mathfrak{A}$ erfüllt sein kann, nicht aber für alle Punkte in $\mathfrak{G}$ zu gelten braucht. Ist z. B. die Untergruppe $\mathfrak{A}$ nicht invariant in $\mathfrak{G}$, so ist sie zwar in $\mathfrak{A}$, nicht aber in $\mathfrak{G}$ invariant.

Ist die Untergruppe $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{G}$ *invariant, so ist sie mit jedem Komplex* $C \subset \mathfrak{G}$ *vertauschbar.* In der Tat, ist $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ invariant, so gilt $x\mathfrak{A} = \mathfrak{A}x$ für jeden Punkt $x \in \mathfrak{G}$, also auch für jeden Punkt $x \in C$. Daraus folgt $C\mathfrak{A} = \mathfrak{A}C$. Insbesondere sehen wir, daß *zwei Untergruppen* $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \subset \mathfrak{G}$, *von denen eine in* $\mathfrak{G}$ *invariant ist, stets miteinander vertauschbar sind.*

Sind umgekehrt zwei Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \subset \mathfrak{G}$ miteinander vertauschbar, so braucht nicht eine von ihnen invariant in $\mathfrak{G}$ zu sein; eine solche Situation tritt z. B. dann ein, wenn die Untergruppe $\mathfrak{A}$ nicht in $\mathfrak{G}$ invariant ist und $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{A}$ zusammenfällt.

Ferner gilt der folgende Satz:
Es seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ invariante Untergruppen in $\mathfrak{G}$. Dann stellen der Durchschnitt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ und das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ der beiden Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ ebenfalls invariante Untergruppen in $\mathfrak{G}$ dar.

Beweis. Nach Voraussetzung gelten für jeden Punkt $x \in \mathfrak{G}$ die Gleichheiten $x\mathfrak{A} = \mathfrak{A}x$, $x\mathfrak{C} = \mathfrak{C}x$. Aus ihnen schließen wir (nach § 20, Nr. 2, Satz 6 und dem analogen Satz für rechtsseitige Nebenklassen), daß die Gleichheiten

$$x(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}) = x\mathfrak{A} \cap x\mathfrak{C} = \mathfrak{A}x \cap \mathfrak{C}x = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})x$$

gelten; wir sehen, daß die Untergruppe $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ tatsächlich in $\mathfrak{G}$ invariant ist. Ferner haben wir (im Hinblick auf § 12, Nr. 8, 8)

$$x(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) = (x\mathfrak{A})\mathfrak{C} = (\mathfrak{A}x)\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(x\mathfrak{C}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{C}x) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C})x,$$

also $x(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C})x$; wir sehen, daß auch das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ eine in $\mathfrak{G}$ invariante Untergruppe darstellt.

Aus der Erkenntnis, daß je zwei in $\mathfrak{G}$ invariante Untergruppen miteinander vertauschbar sind, und aus den Eigenschften von miteinander vertauschbaren Untergruppen (§ 22, Nr. 2) folgen unmittelbar weitere Resultate über invariante Untergruppen. Wir wollen hier die folgenden anführen:

1. *Der Satz von* DEDEKIND-ORE. *Für je drei in der Gruppe $\mathfrak{G}$ invariante Untergruppen $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ gilt*

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}\mathfrak{B} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\mathfrak{B}.$$

2. *Das von allen in der Gruppe $\mathfrak{G}$ invarianten Untergruppen gebildete System ist bezüglich der Durchschnitts- und Produktbildung abgeschlossen und stellt zusammen mit den mittels der Durchschnitts- und Produktbildung definierten Multiplikationen einen modularen Verband mit extremen Elementen dar.*

3. Erzeugende Zerlegungen auf Gruppen. 1. *Erster Satz.* Es sei $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ eine beliebige Untergruppe in $\mathfrak{G}$. Wir wissen, daß durch die Untergruppe $\mathfrak{A}$ die beiden Nebenklassenzerlegungen $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt sind. Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, unter welchen Umständen z. B. die linksseitige Nebenklassenzerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ erzeugend ausfällt.

Wir nehmen zunächst an, die linksseitige Nebenklassenzerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ sei erzeugend, und betrachten zwei Elemente $p\mathfrak{A}, q\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ der Zerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, wobei $p, q \in \mathfrak{G}$ beliebige Punkte in $\mathfrak{G}$ darstellen. Da nach unserer Voraussetzung die Zerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ erzeugend ist, gibt es ein Element $r\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}\,(r \in \mathfrak{G})$, für das

$$p\mathfrak{A} \cdot q\mathfrak{A} \subset r\mathfrak{A}$$

gilt. Hieraus folgen die weiteren Beziehungen $pq\mathfrak{A} = (p\,\underline{1})\cdot q\mathfrak{A} \subset r\mathfrak{A}$, also $pq\mathfrak{A} \subset r\mathfrak{A}$; aus dieser letzten erhalten wir $pq = pq \cdot \underline{1} \in r\mathfrak{A}$ und folglich nach § 20,2, Satz 1 und Satz 4, die Beziehung $r\mathfrak{A} = pq\mathfrak{A}$. Auf diese Weise ergibt sich zunächst $p\mathfrak{A} \cdot q\mathfrak{A} \subset pq\mathfrak{A}$. Ferner ist jeder Punkt in der linksseitigen Nebenklasse $pq\mathfrak{A}$ das Produkt pqa des Punktes pq mit einem Punkt $a \in \mathfrak{A}$, und es gilt $pqa = (p\,\underline{1})(qa) \in p\mathfrak{A} \cdot q\mathfrak{A}$; daraus folgt die Beziehung $p\mathfrak{A} \cdot q\mathfrak{A} \supset pq\mathfrak{A}$. Somit haben wir

$$p\mathfrak{A} \cdot q\mathfrak{A} = pq\mathfrak{A} \tag{1}$$

und sehen, daß das Produkt der linksseitigen Nebenklasse $p\mathfrak{A}$ mit der linksseitigen Nebenklasse $q\mathfrak{A}$ die linksseitige Nebenklasse $pq\mathfrak{A}$ darstellt.

Aus (1) erhalten wir für $q = p^{-1}$

$$p\mathfrak{A}p^{-1} = p\mathfrak{A} \cdot (p^{-1}\underline{1}) \subset p\mathfrak{A} \cdot p^{-1}\mathfrak{A} = pp^{-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{A},$$

also $p\mathfrak{A}p^{-1} \subset \mathfrak{A}$. Da nun p ein beliebiger Punkt in $\mathfrak{G}$ ist, gilt die letzte Beziehung auch für den Punkt p^{-1}, so daß gleichzeitig die Beziehung $p^{-1}\mathfrak{A}p \subset \mathfrak{A}$ besteht. Daraus folgt $\mathfrak{A} = (pp^{-1})\mathfrak{A}(pp^{-1}) = p(p^{-1}\mathfrak{A}p)p^{-1} \subset p\mathfrak{A}p^{-1}$, also $p\mathfrak{A}p^{-1} \supset \mathfrak{A}$. Somit ergibt sich

$$p\mathfrak{A}p^{-1} = \mathfrak{A},$$

und wir haben $p\mathfrak{A} = \mathfrak{A}p$. Damit ist gezeigt, daß die linksseitige Nebenklasse $p\mathfrak{A}$ jedes Punktes $p \in \mathfrak{G}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A}$ mit der rechtsseitigen Nebenklasse $\mathfrak{A}p$ zusammenfällt. Folglich ist die Untergruppe $\mathfrak{A}$ in der Gruppe $\mathfrak{G}$ invariant.

Zweitens wollen wir voraussetzen, daß die Untergruppe $\mathfrak{A}$ in der Gruppe $\mathfrak{G}$ invariant ist. In diesem Fall schließen wir zunächst, daß die linksseitige Nebenklasse jedes Punktes $p \in \mathfrak{G}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A}$ mit der rechtsseitigen Nebenklasse $\mathfrak{A}p$ zusammenfällt. Ferner ist für je zwei linksseitige Nebenklassen $p\mathfrak{A}$, $q\mathfrak{A}$

$$p\mathfrak{A} \cdot q\mathfrak{A} = p(\mathfrak{A}q)\mathfrak{A} = p(q\mathfrak{A})\mathfrak{A} = pq(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) = pq\mathfrak{A},$$

woraus $p\mathfrak{A} \cdot q\mathfrak{A} = pq\mathfrak{A}$ folgt. Wir sehen, daß das Produkt aus der linksseitigen Nebenklasse $p\mathfrak{A}$ und der linksseitigen Nebenklasse $q\mathfrak{A}$ durch die linksseitige Nebenklasse $pq\mathfrak{A}$ dargestellt wird. Damit ist gezeigt, daß die linksseitige Nebenklassenzerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ und auch natürlich die mit ihr übereinstimmende rechtsseitige Nebenklassenzerlegung $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ erzeugend ist.

Die obigen Überlegungen können wir in dem folgenden S a t z zusammenfassen:

Die linksseitige (rechtsseitige) Nebenklassenzerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A}$ ist genau dann erzeugend, wenn $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ invariant ist. In diesem Fall ist das Produkt $p\mathfrak{A} \cdot q\mathfrak{A}$ jeder zweigliedrigen Folge von Elementen der Nebenklassenzerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A}$ gleich $pq\mathfrak{A}$, also $p\mathfrak{A} \cdot q\mathfrak{A} = pq\mathfrak{A}$.

2. *Zweiter Satz.* Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Gruppen besteht darin, daß jede erzeugende Zerlegung einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ stets durch die

Nebenklassenzerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$ in bezug auf eine in ihr invariante Untergruppe dargestellt ist.

Um dies zu zeigen, nehmen wir an, $\bar{G}$ sei eine erzeugende Zerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$. Da jeder Punkt der Gruppe $\mathfrak{G}$ in einem gewissen (einzigen) Element der Zerlegung $\bar{G}$ liegt, gibt es insbesondere ein das Einselement $\underline{1} \in \mathfrak{G}$ enthaltendes Element $A \in \bar{G}$ der Zerlegung $\bar{G}$. Wir wollen zeigen, daß A das Feld einer in $\mathfrak{G}$ invarianten Untergruppe $\mathfrak{A}$ darstellt und daß die erzeugende Zerlegung $\bar{G}$ mit der Nebenklassenzerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$ in bezug auf diese Untergruppe $\mathfrak{A}$ übereinstimmt.

Zu diesem Zweck wollen wir zunächst beachten, daß es ein der Beziehung $AA \subset \bar{a}$ genügendes Element $\bar{a} \in \bar{G}$ gibt, da die Zerlegung $\bar{G}$ erzeugend ist. Wegen $\underline{1} = \underline{1} \cdot \underline{1} \in AA \subset \bar{a}$ und $\underline{1} \in A$, haben wir $\bar{a} = A$, also $AA \subset A$, und sehen, daß der Komplex $A \subset \mathfrak{G}$ gruppoidal ist. Das auf dem Feld A bestehende Untergruppoid $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ enthält offenbar das Einselement $\underline{1}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ und ferner, wie wir jetzt zeigen wollen, mit jedem Element $a \in \mathfrak{A}$ auch das inverse Element a^{-1}, so daß $a^{-1} \in \mathfrak{A}$ gilt.

Es sei also $a \in A$ und ferner $\bar{b} \in \bar{G}$ dasjenige Element der Zerlegung $\bar{G}$, in dem a^{-1} liegt. Wegen $\underline{1} = aa^{-1} \in A\bar{b}$ liegt das Element $\underline{1}$ in dem Produkt $A\bar{b}$ und natürlich zugleich in A. Da die Zerlegung $\bar{G}$ erzeugend ist und da beide Untermengen $A\bar{b}, A$ das Einselement $\underline{1}$ enthalten, haben wir $A\bar{b} \subset A$. Daraus folgt $\underline{1} \cdot a^{-1} \in A$, also $a^{-1} \in A$. Somit ist gezeigt, daß $\mathfrak{A}$ eine Untergruppe in $\mathfrak{G}$ darstellt.

Es bleibt festzustellen, daß die Untergruppe $\mathfrak{A}$ in der Gruppe $\mathfrak{G}$ invariant ist und daß jedes Element $\bar{a} \in \bar{G}$ die Nebenklasse jedes Punktes $a \in \bar{a}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A}$ darstellt. Es sei $a \in \mathfrak{G}$ und ferner $\bar{a} \in \bar{G}$ das den Punkt a enthaltende Element der Zerlegung $\bar{G}$, also $a \in \bar{a} \in \bar{G}$. Für jeden Punkt $x \in \bar{a}$ haben wir $x = \underline{1} \cdot x \in A\bar{a}$, woraus $\bar{a} \subset A\bar{a}$ folgt; da ferner die Zerlegung $\bar{G}$ erzeugend ist und der Punkt a in beiden Komplexen $A\bar{a}, \bar{a}$ in $\mathfrak{G}$ vorkommt, gilt auch $A\bar{a} \subset \bar{a}$. Wir erhalten also $A\bar{a} = \bar{a}$ und analog $\bar{a}A = \bar{a}$. Folglich gilt

$$\bar{a} = A\bar{a} = \bar{a}A\,. \tag{2}$$

Offenbar ist $aA \subset \bar{a}A$. Wir wollen zeigen, daß zugleich $\bar{a}A \subset aA$ ist. Es sei $\bar{b} \in \bar{G}$ das den Punkt a^{-1} enthaltende Element in $\bar{G}$. Da die Zerlegung $\bar{G}$ erzeugend ist und das Einselement $\underline{1}$ in beiden Komplexen $\bar{b}\bar{a}, A$ vorkommt, ist $\bar{b}\bar{a} \subset A$; wir sehen, daß für jeden Punkt $x \in \bar{a}$ das Produkt $a^{-1}x$ in dem Komplex A enthalten ist. Es gilt also $x = a(a^{-1}x) \in aA$ und folglich auch $\bar{a} \subset aA$. Daraus schließen wir, daß die Beziehungen $\bar{a}A \subset aAA = aA$ gelten. Wir haben also $\bar{a}A = aA$. Durch eine analoge Überlegung erhalten wir $A\bar{a} = Aa$. Daraus und aus den Formeln (2) folgt

$$\bar{a} = a\mathfrak{A} = \mathfrak{A}a\,.$$

Diese Formeln enthalten zunächst das Resultat, daß die Untergruppe $\mathfrak{A}$ in der Gruppe $\mathfrak{G}$ invariant ist. Da sie für jeden Punkt $a \in \mathfrak{G}$ und für das diesen Punkt a enthaltende Element $\bar{a} \in \bar{G}$ gelten, ist ihre Gültigkeit für jedes Element $\bar{a} \in \bar{G}$ und für jeden in a enthaltenen Punkt $a \in \bar{a}$ gesichert. Die erwähnten

Formeln zeigen also auch, daß jedes Element $\bar{a} \in \bar{G}$ der erzeugenden Zerlegung $\bar{G}$ die Nebenklasse jedes Punktes $a \in \bar{a}$ in bezug auf die (invariante) Untergruppe $\mathfrak{A}$ darstellt.

Somit haben wir alle erzeugenden Zerlegungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ bestimmt: *Alle erzeugenden Zerlegungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ sind genau durch die Nebenklassenzerlegungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ in bezug auf die einzelnen in der Gruppe $\mathfrak{G}$ invarianten Untergruppen dargestellt.*

4. Eigenschaften der erzeugenden Zerlegungen auf Gruppen. Auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ gibt es stets zwei erzeugende Zerlegungen, nämlich die beiden extremen Zerlegungen $\bar{G}_{\max}$ und $\bar{G}_{\min}$ (§ 14, Nr. 1); dieselben stellen die Nebenklassenzerlegungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ in bezug auf die extremen invarianten Untergruppen $\mathfrak{G}$, $\{\underline{1}\}$ in $\mathfrak{G}$ dar (Nr. 2).

Es seien $\bar{A}, \bar{B}$ beliebige erzeugende Zerlegungen der Gruppe $\mathfrak{G}$. Nach dem obigen Satz stellt $\bar{A}(\bar{B})$ die Nebenklassenzerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$ in bezug auf eine in $\mathfrak{G}$ invariante Untergruppe $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ dar. Die Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind miteinander vertauschbar (Nr. 2). Aus den Resultaten über linksseitige und rechtsseitige Nebenklassenzerlegungen von Gruppen (§ 21, Nr. 3–6) schließen wir auf folgende Eigenschaften der erzeugenden Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$:

Die Zerlegung $\bar{A}(\bar{B})$ ist dann und nur dann eine Überdeckung (Verfeinerung) der Zerlegung $\bar{B}(\bar{A})$, wenn $\mathfrak{A}$ eine Obergruppe auf der Gruppe $\mathfrak{B}$ darstellt, wenn also $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ ist.

Die größte gemeinsame Verfeinerung $(\bar{A}, \bar{B})$ der Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ ist die Nebenklassenzerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$ in bezug auf die in $\mathfrak{G}$ invariante Untergruppe $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.

Die kleinste gemeinsame Überdeckung $[\bar{A}, \bar{B}]$ der Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ ist die Nebenklassenzerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$ in bezug auf die in $\mathfrak{G}$ invariante Untergruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Die Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ sind zueinander komplementär.

Ferner gilt (§ 22, Nr. 3) der folgende

Satz. *Das aus allen erzeugenden Zerlegungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ bestehende System ist in bezug auf die Operationen (), [] abgeschlossen und stellt zusammen mit den mittels dieser Operationen definierten Multiplikationen einen modularen Verband mit extremen Elementen dar. Dieser Verband ist demjenigen, der von allen in $\mathfrak{G}$ invarianten Untergruppen gebildet wird* (Nr. 2), *isomorph.*

5. Weitere Eigenschaften invarianter Untergruppen. Die in § 24, Nr. 3 bewiesenen Sätze über erzeugende Zerlegungen in Gruppen führen in Verbindung mit den früheren Resultaten über erzeugende Zerlegungen in Gruppoiden und Nebenklassenzerlegungen in Gruppen zu weiteren Erkenntnissen hinsichtlich der Eigenschaften der invarianten Untergruppen.

Satz 1. *Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ Untergruppen in $\mathfrak{G}$, wobei $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ invariant ist. Dann ist die Untergruppe $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ invariant. Ferner sind die Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ miteinander vertauschbar, und die Untergruppe $\mathfrak{B}$ stellt eine invariante Untergruppe in $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}$ dar.*

Beweis. a) Da die Untergruppe $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ invariant ist, ist die linksseitige Nebenklassenzerlegung $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$ der Gruppe $\mathfrak{A}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{B}$ erzeugend (Nr. 3, 1). Nach § 21, Nr. 2, (1) haben wir die Formel

$$\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}),$$

und aus § 14, Nr. 3, 2 wissen wir, daß diese linksseitige Nebenklassenzerlegung der Gruppe $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ erzeugend ist. Folglich ist die Untergruppe $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ invariant (Nr. 3, 1).

b) Nach § 19, Nr. 5, 1 stellt der Durchschnitt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ der beiden Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ eine Untergruppe in $\mathfrak{A}$ dar. Da $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ invariant ist, sind die beiden Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}, \mathfrak{B}$ miteinander vertauschbar (Nr. 2). Nach § 21, Nr. 2, (2) haben wir die Formel

$$\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{B}/_l\mathfrak{B},$$

und aus § 14, Nr. 3, 2 wissen wir, daß diese Nebenklassenzerlegung der Gruppe $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{B}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{B}$ erzeugend ist. Folglich ist die Untergruppe $\mathfrak{B}$ in $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}$ invariant (Nr. 3, 1).

Insbesondere gilt für $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$ der folgende

Satz. *Es seien $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ Untergruppen in $\mathfrak{G}$, wobei $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{G}$ invariant ist. Dann ist die Untergruppe $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ in $\mathfrak{C}$ invariant.*

Satz 2. *Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ Untergruppen in $\mathfrak{G}$, wobei die Untergruppe $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ und die Untergruppe $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{C}$ invariant ist. Dann sind die Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}, \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ invariant. Ist ferner $\mathfrak{U}$ eine den Beziehungen*

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} \supset \mathfrak{U} \supset (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}) \qquad (1)$$

genügende invariante Untergruppe in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, so sind die Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$ mit jeder der beiden Untergruppen $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ vertauschbar, und die Untergruppe $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{U}\mathfrak{D}$ ist in $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}$ bzw. in $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{D}$ invariant. Außerdem gelten (nach § 23, Nr. 2(1)) *die Gleichheiten*

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B} \cap \mathfrak{U}\mathfrak{D} = \mathfrak{U} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{D} \cap \mathfrak{U}\mathfrak{B}.$$

Beweis. Nach Satz 1 sind die Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}, \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ invariant. Da $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{U}$ Untergruppen in $\mathfrak{A}$ bzw. in $\mathfrak{C}$ darstellen und die Untergruppe $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{C}$ invariant ist, sind die Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{U}$ mit jeder der beiden Untergruppen $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ vertauschbar.

Nach Satz 1 stellt $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{D}$ eine invariante Untergruppe in $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{C}' = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{D}$ dar. Nach Nr. 3, 1 sind die linksseitigen Nebenklassenzerlegungen $\bar{A} = \mathfrak{A}'/_l\mathfrak{B}, \bar{C} = \mathfrak{C}'/_l\mathfrak{D}$ erzeugend, und nach § 14, Nr. 3, 2 gilt dasselbe auch für die Zerlegungen

$$\bar{A} \sqcap \mathfrak{C}' = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}), \qquad \bar{C} \sqcap \mathfrak{A}' = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}).$$

Wegen der Beziehungen (1) stellt die linksseitige Nebenklassenzerlegung $\bar{B} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l\mathfrak{A}$ eine gemeinsame Überdeckung der Zerlegungen $\bar{A} \sqcap \mathfrak{C}', \bar{C} \sqcap \mathfrak{A}'$

dar und ist, da $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ invariant ist, eine erzeugende Zerlegung. Folglich sind die durch die Zerlegung $\bar{B}$ erzwungenen Überdeckungen

$$\mathring{A} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}/_l\,\mathfrak{U}\mathfrak{B}, \quad \mathring{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{D}/\mathfrak{U}\mathfrak{D}$$

von $\bar{A}, \bar{C}$ erzeugend (§ 14, Nr. 3,3), und wir sehen, daß die Untergruppe $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{U}\mathfrak{D}$ in $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}$ bzw. in $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{D}$ invariant ist (Nr. 3, 1).

Insbesondere gilt (für $\mathfrak{U} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})$) der folgende

Satz. *Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ Untergruppen in $\mathfrak{G}$, wobei die Untergruppe $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ und die Untergruppe $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{C}$ invariant ist. Dann sind die Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}, \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ invariant. Ferner sind die Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}, \mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{B}$ und analog die Untergruppen $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}, \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{D}$ vertauschbar. Schließlich ist die Untergruppe $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\mathfrak{B}$ in $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}$ und die Untergruppe $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{D}$ in $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{D}$ invariant. Außerdem gilt* (nach § 23, Nr. 2 (2))

$$(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{B} \cap (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{D} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{D} \cap (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\mathfrak{B}.$$

6. Reihen von invarianten Untergruppen. In der klassischen Gruppentheorie wird die Theorie der Reihen von invarianten Untergruppen in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ im allgemeinen auf Grund der Voraussetzung, daß jede Untergruppe der Reihe (mit Ausnahme des Anfangsgliedes) in der unmittelbar vorangehenden Untergruppe invariant ist, entwickelt. Die diesbezüglichen Resultate sind lokaler Natur, da sie auf die Beschreibung der Verhältnisse in der „Umgebung" des Einselements von $\mathfrak{G}$ beschränkt bleiben. Wir werden uns hier der Einfachheit halber nur mit dem spezielleren Fall, daß jede Untergruppe der Reihe in der (ganzen) Gruppe $\mathfrak{G}$ invariant vorausgesetzt wird, beschäftigen. Unsere bisherigen Resultate über Reihen von Untergruppen (§ 23, Nr. 4) ermöglichen es, den Kern dieser Theorie unmittelbar zu erfassen. Im Gegensatz zu der klassischen Theorie sind unsere Resultate globaler Natur, da sie die Verhältnisse in den „Umgebungen" aller Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$ im gleichen Maß berücksichtigen.

Wir betrachten zwei Reihen von Untergruppen in der Gruppe $\mathfrak{G}$,

$$((\mathfrak{A} =) \quad \mathfrak{A}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_\alpha \quad (\alpha \geqq 1),$$
$$((\mathfrak{B} =) \quad \mathfrak{B}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{B}_\beta \quad (\beta \geqq 1),$$

und setzen voraus, daß alle in diesen Reihen vorkommenden Untergruppen in $\mathfrak{G}$ invariant sind.

Dann gilt der folgende

Satz. *Die Reihen $(\mathfrak{A}), (\mathfrak{B})$ besitzen gleichbasig verkettete Verfeinerungen $(\mathfrak{A}_*), (\mathfrak{B}_*)$ mit übereinstimmenden Anfangs- bzw. Endgliedern, und alle in diesen Verfeinerungen vorkommenden Untergruppen sind in der Gruppe $\mathfrak{G}$ invariant. Die Verfeinerungen $(\mathfrak{A}_*), (\mathfrak{B}_*)$ sind durch die in Teil* a) *des Beweises aus* § 23, Nr. 4, 5 *beschriebene Konstruktion gegeben.*

Beweis. Aus der Invarianz der einzelnen Glieder der Reihen $(\mathfrak{A}), (\mathfrak{B})$ in der Gruppe $\mathfrak{G}$ schließen wir, daß diese Reihen komplementär sind (Nr. 4 und § 23, Nr. 4,4). Folglich ist die in Teil a) des Beweises aus § 23,4,5 beschriebene Konstruktion der gleichbasig verketteten Verfeinerungen $(\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{B}_*)$ der Reihen $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ mit übereinstimmenden Anfangs- bzw. Endgliedern $\mathfrak{U} = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$ bzw. $\mathfrak{V} = \mathfrak{A}_\alpha \cap \mathfrak{B}_\beta$ anwendbar. Nach dieser Konstruktion werden die Verfeinerungen $(\mathfrak{A}_*)$, $(\mathfrak{B}_*)$ von den Untergruppen

$$\mathfrak{A}_{\gamma,\nu} = \mathfrak{A}_\gamma(\mathfrak{A}_{\gamma-1} \cap \mathfrak{B}_\nu) = \mathfrak{A}_{\gamma-1} \cap \mathfrak{A}_\gamma \mathfrak{B}_\nu,$$
$$\mathfrak{B}_{\delta,\mu} = \mathfrak{B}_\delta(\mathfrak{B}_{\delta-1} \cap \mathfrak{A}_\mu) = \mathfrak{B}_{\delta-1} \cap \mathfrak{B}_\delta \mathfrak{A}_\mu,$$
$$(\gamma, \mu = 1, \ldots, \alpha+1;\ \delta, \nu = 1, \ldots, \beta+1;\ \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{G};\ \mathfrak{A}_{\alpha+1} = \mathfrak{B}_{\beta+1} = \mathfrak{V})$$

in $\mathfrak{G}$ gebildet. Nach Nr. 2 sind die Untergruppen $\mathfrak{A}_{\gamma,\nu}$, $\mathfrak{B}_{\delta,\mu}$ in $\mathfrak{G}$ invariant. Damit ist der Satz bewiesen.

7. Übungsaufgaben.

1. In der aus allen Permutationen der Menge $\{a, b, c, d\}$ bestehenden Gruppe $\mathfrak{S}_4$ bilden alle Permutationen, die das Element d unverändert lassen, eine Untergruppe $\mathfrak{S}_3'$. Alle Permutationen, die die Elemente a, b, c genau so wie die in § 11, Nr. 4,2 definierten Permutationen $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ abbilden und zugleich das Element d unverändert lassen, bilden eine Untergruppe in $\mathfrak{S}_4$, die in der Untergruppe $\mathfrak{S}_3'$, nicht aber in $\mathfrak{S}_4$ invariant ist.

2. Es sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige Untergruppe in $\mathfrak{G}$. Die der Gleichheit $p\mathfrak{A} = \mathfrak{A}p$ genügenden Elemente $p \in \mathfrak{G}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ bilden das Feld N einer Untergruppe $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$. Die Untergruppe $\mathfrak{N}$ heißt der *Normalisator* von $\mathfrak{A}$. Der Normalisator $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{A}$ stellt die größte Obergruppe auf $\mathfrak{A}$ dar, in der die Untergruppe $\mathfrak{A}$ invariant ist, d. h., die Untergruppe $\mathfrak{A}$ ist in $\mathfrak{N}$ enthalten und dort invariant und zugleich liegt jede Obergruppe auf $\mathfrak{A}$, in der $\mathfrak{A}$ invariant ist, in $\mathfrak{N}$.

3. Das Zentrum der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist eine invariante Untergruppe in $\mathfrak{G}$.

4. Wenn es in einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ von der Ordnung $N (\geqq 2)$ eine Untergruppe von der Ordnung $\frac{1}{2}N$ gibt, so ist diese in $\mathfrak{G}$ invariant. Zum Beispiel haben wir in der diëdrischen Permutationsgruppe von der Ordnung $2n$ $(n \geqq 3)$ eine invariante Untergruppe von der Ordnung n, die von allen den Drehungen der Eckpunkte um den Mittelpunkt eines regulären n-Ecks entsprechenden Elementen gebildet wird (§ 19, Nr. 7,2).

5. Wenn man jedem Element $p \in \mathfrak{G}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ alle Elemente $x^{-1}px \in \mathfrak{G}$ zuordnet, wobei $x \in \mathfrak{G}$ die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$ durchläuft, so erhält man eine symmetrische Kongruenz auf $\mathfrak{G}$. Die zu dieser Kongruenz gehörige Zerlegung $\bar{G}$ auf $\mathfrak{G}$ heißt die *Hauptzerlegung* der Gruppe $\mathfrak{G}$. Das Feld jeder in $\mathfrak{G}$ invarianten Untergruppe ist die Summe einiger Elemente von $\bar{G}$. Die Hauptzerlegung $\bar{G}$ ist zu jeder erzeugenden Zerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$ komplementär.

6. Es sei $p \in G$ ein beliebiges Element der Gruppe $\mathfrak{G}$ und $\mathring{\mathfrak{G}}$ die mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ assoziierte (p)-Gruppe (§ 19, Nr. 7,9). Wir betrachten eine beliebige invariante Untergruppe $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}$. Es sei $\mathring{\mathfrak{A}} \subset \mathring{\mathfrak{G}}$ die zum Feld $p\mathfrak{A}$ $(= \mathfrak{A}p)$ gehörende Untergruppe in $\mathring{\mathfrak{G}}$ (§ 20, Nr. 3,3; § 21, Nr. 8,7). Es soll gezeigt werden: a) Die Untergruppe $\mathring{\mathfrak{A}}$ ist in $\mathring{\mathfrak{G}}$ invariant; b) alle erzeugenden Zerlegungen der Gruppe $\mathring{\mathfrak{G}}$ stimmen mit denjenigen der Gruppe $\mathfrak{G}$ überein.