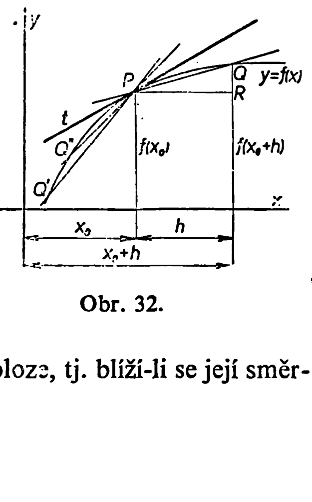
Kapitola VIII

DERIVACE

Tato kapitola je věnována základnímu pojmu diferenciálního počtu, totiž pojmu derivace.

§ 1. Definice derivace. Napřed proberu dva příklady, jež ukáží užitečnost pojmu, jejž potom zavedeme; až do definice 24 jde o orientační předběžné úvahy, jež si nečiní nároku na přesnost.

Příklad 1. Budiž dána funkce f a proveďme její grafické znázornění. Na „křivce" $y = f(x)$ zvolme pevný bod P. Budeme se snažit zavést nějakým přirozeným způsobem pojem „tečny" ke křivce $y = f(x)$ v bodě P. K tomu cíli zvolíme na křivce $y = f(x)$ libovolný jiný bod Q.[1]) Přímka PQ prochází bodem P a její směrnice se rovná podílu úseček $\overline{RQ} : \overline{PR}$ (který ovšem nutno brát i s příslušným znamením). Označíme-li abscisu bodu P znakem x_0, abscisu bodu Q znakem $x_0 + h$, je tato směrnice (viz obr. 32) rovna podílu



Obr. 32.

$$(1) \qquad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Blíží-li se bod Q bodu P,[2]) mění se obecně poloha přímky PQ; blíží-li se přitom přímka PQ jisté limitní poloze, tj. blíží-li se její směrnice (1) jisté limitě

$$(2) \qquad k = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

nazýváme tuto limitní polohu přímky PQ *tečnou* ke křivce $y = f(x)$ v bodě P. Tato tečna (na obr. 32 označená písmenem t) prochází tedy bodem $P = [x_0, f(x_0)]$ a má směrnici k danou vzorcem (2), takže její rovnice je $y - f(x_0) = k(x - x_0)$. Poznamenejme: bod P byl pevně zvolen, bod Q byl libovolný (proměnný) bod, jenž se blížil bodu P. Ve výrazu (1) je tedy x_0 pevné číslo, kdežto h je proměnná; zlomek

[1]) Na obr. 32 je bod Q vpravo od P; může být též vlevo od P; např. bod Q' na obrázku.

[2]) Tj. blíží-li se číslo h nule.

(1) je tedy funkcí proměnné h a my hledáme limitu této funkce v bodě 0 (že právě pro hodnotu $h = 0$ zlomek (1) nemá smyslu, ovšem nevadí, viz text v kap. V, § 5 za definicí 19).

Příklad 2. Představme si bod P pohybující se nějakým způsobem po přímce. Na této přímce zvolme počátek; čas měřme od jistého okamžiku třeba ve vteřinách. Poloha bodu P v libovolném okamžiku t je dána jeho souřadnicí x (měřenou třeba v centimetrech; x je ovšem kladné nebo záporné, podle toho, na které straně počátku bod P leží). Souřadnice bodu P závisí ovšem na čase: $x = f(t)$. Jsou-li t_1, t_2 dva okamžiky $(t_1 < t_2)$, nazýváme podíl $\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ střední rychlostí[2a]) bodu P v době od okamžiku t_1 do okamžiku t_2 (je to dráha, kterou bod za tu dobu urazil, dělená počtem vteřin, který bod P k tomu potřeboval). *Okamžitou rychlost* bodu P v určitém okamžiku t_1 definujeme pak takto: zvolíme libovolný jiný okamžik $t_2 = t_1 + h\,(h \neq 0)$, stanovíme střední rychlost v době mezi okamžiky $t_1, t_1 + h$,[3]) tj. zlomek

$$\frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h} \tag{3}$$

a necháme h se blížit nule; blíží-li se přitom zlomek jisté limitě

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h}, \tag{4}$$

nazýváme tuto limitu okamžitou rychlostí bodu P v okamžiku t_1.

Ježto jsme v obou těchto – pro matematiku i fyziku jistě důležitých – příkladech dospěli k limitě (2) nebo (4) téhož tvaru (že jsme ono pevně zvolené číslo značili jednou x_0, po druhé t_1, je ovšem lhostejné), jeví se účelným, dát této limitě zvláštní název:

Definice 24. *Budiž f funkce, x_0 číslo. Limitu*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{5}$$

nazýváme derivací funkce f v bodě x_0. Obdobně nazýváme limitu

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \left(\text{popř.} \quad \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right) \tag{6}$$

derivací funkce f v bodě x_0 zprava (popř. zleva). *Neexistuje-li první, popř. druhá, popř. třetí z těchto limit, říkáme, že funkce f nemá v bodě x_0 derivaci, popř. derivaci*

[2a]) Znaménko tohoto podílu udává, zda konečná poloha bodu P je „vpravo" či „vlevo" od počáteční polohy.

[3]) Je-li $h > 0$, začíná tato doba okamžikem t_1 a končí okamžikem $t_1 + h$; je-li $h < 0$, začíná tato doba okamžikem $t_1 + h$ a končí okamžikem t_1.

zprava, popř. zleva. Limity (5), (6) *mohou být vlastní nebo nevlastní; mluvíme pak o vlastní nebo nevlastní derivaci.*

Příklad 3. Funkce x^2 má v každém bodě x_0 derivaci $2x_0$; neboť $((x_0 + h)^2 - x_0^2) : h = 2x_0 + h$ pro $h \neq 0$ a dále $\lim_{h \to 0} (2x_0 + h) = 2x_0$.

Poznámka 1. Z definice 24 a z poznámek na str. 169 plyne: I. Má-li funkce f derivaci v bodě x_0, existuje číslo $\delta > 0$ tak, že funkce $f(x)$ je definována v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. II. Derivace je opět „lokální pojem" podobně jako spojitost: existuje-li $\delta > 0$ tak, že pro $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ je $f(x) = g(x)$ a existuje-li derivace funkce f v bodě x_0, existuje též derivace funkce g v bodě x_0 a rovná se derivaci funkce f v bodě x_0. III. Obdobně pro derivaci zprava a zleva; pouze místo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je nutno psát $\langle x_0, x_0 + \delta)$, popř. $(x_0 - \delta, x_0\rangle$.

Poznámka 2. Limity (5), (6) lze ovšem též psát ve tvaru

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Poznámka 3. Ježto se vlastní limita a vlastní derivace budou v následujícím častěji vyskytovat než nevlastní limita a nevlastní derivace, budou slova „limita" a „derivace" v této knize znamenat v dalším *vlastní* limitu a vlastní derivaci, pokud nebude výslovně jinak zdůrazněno.

Poznámka 4. Derivace funkce f v určitém bodě x je limita $\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ (že místo písmena x_0 z definice užívám písmena x, je ovšem lhostejné). Zvolím-li jinou hodnotu x, může také tato limita mít jinou hodnotu; jinými slovy: derivace funkce f v bodě x závisí na tom, kterou hodnotu x jsme zvolili; derivace funkce f v bodě x je tedy funkcí proměnné x, kterou budeme značit f', takže $f'(x)$ značí hodnotu derivace funkce f v bodě x;[4]) tohoto označení užíváme i pro nevlastní derivace. Např. $f'(3) = 7$, $f'(a) = b$, $\varphi'(t) = 2t$, $g'(5) = +\infty$ značí: hodnota derivace funkce f v bodě 3 je 7, v bodě a je b; hodnota derivace funkce φ v bodě t je $2t$; v bodě 5 má funkce g nevlastní derivaci $+\infty$. Např. je-li $f(x) = x^2$, je $f'(x) = 2x$ pro každé x; místo toho píšeme též $(x^2)' = 2x$, a obdobně $(x^2 + 2x)'$, $(\cos t)'$ bude značit derivaci funkce $x^2 + 2x$ v bodě x nebo derivaci funkce $\cos t$ v bodě t apod. Značíme-li funkci $f(x)$ jediným písmenem y nebo z, píšeme též y' nebo z' místo $f'(x)$. Jiné obvyklé označení je $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ místo $f'(x)$ (nebo obdobně $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}(x^2 + 2x)}{\mathrm{d}x}$ apod.; např. $\frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}x} = 2x$). Přitom $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ je prozatím pro nás nedílný znak (připomínající ovšem svou podobou zlomek, o čemž později), znamenající

[4]) Oborem funkce f' je ovšem množina všech bodů, v nichž funkce f má vlastní derivaci.

podle naší úmluvy číslo $f'(x)$. Dole je znak dx, při čemž x je symbol označující „nezávisle proměnnou"; kdybychom tuto proměnnou značili jiným písmenem, třeba t, musili bychom psát např. $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ atd., např. $\frac{\mathrm{d}t^2}{\mathrm{d}t} = 2t$ (závorka u t^2 nebo u podobných jednoduchých výrazů se často vynechává).[5] Pro derivaci funkce f v bodě x zprava a zleva budeme nejčastěji užívat znaků $f'_+(x), f'_-(x)$.

Poznámka 5. Ježto jsme v přípravných úvahách v příkl. 1 mluvili o tečně, zaveďme nyní — majíce již řádnou definici pojmu derivace — definici tečny: Nechť funkce f má vlastní derivaci $f'(x_0)$ v bodě x_0. Potom „tečnou ke křivce $y = f(x)$ v bodě $P = [x_0, f(x_0)]$" nazýváme přímku procházející bodem P a mající směrnici $f'(x_0)$. Rovnice této tečny je tedy $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

§ 2. Počítání derivací. I. *Derivace konstanty je v každém bodě rovna nule.* Důkaz: je-li $f(x) = c$ pro všechna x, je $\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim \frac{c - c}{h} = \lim \frac{0}{h} = \lim 0 = 0$ (nehrozí-li nedorozumění, vynechávám leckdy znak $h \to 0$).

II. $(x)' = 1$ *pro každé* x. Důkaz: je-li $f(x) = x$, je $\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$ $= \lim \frac{x + h - x}{h} = \lim \frac{h}{h} = \lim 1 = 1$.

III. $(e^x)' = e^x$ *pro každé* x. Důkaz: $\lim \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x$ (neboť $\lim e^x = e^x$, ježto x je třeba pojímat jako pevně zvolené číslo, a dále jest $\lim \frac{e^h - 1}{h} = 1$ podle kap. V, § 5, příklad 3).

IV. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ *pro každé* x. Důkaz: pro $h \neq 0$ je

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = 2\cos(x + \tfrac{1}{2}h)\,\frac{\sin \frac{1}{2}h}{h},$$

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -2\sin(x + \tfrac{1}{2}h)\,\frac{\sin \frac{1}{2}h}{h}.$$

Zde je $\lim_{h\to 0} \sin(x + \frac{1}{2}h) = \sin x$, $\lim_{h\to 0} \cos(x + \frac{1}{2}h) = \cos x$ (plyne ze spojitosti. věta 111) a dále

$$\lim_{h\to 0} 2\,\frac{\sin \frac{1}{2}h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} = \lim_{k\to 0} \frac{\sin k}{k} = 1$$

(podle 4. základní vlastnosti v kap. VI, § 1). Odtud plyne výsledek.

[5]) Oba znaky $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ mají své výhody a nevýhody, o čemž si promluvíme později.

V. *Je-li n celé kladné, je $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro každé x.* Důkaz: pro $h \neq 0$ dává binomická poučka

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}h + \ldots + \binom{n}{n} h^{n-1}.$$

Pro $h \to 0$ mají všechny členy vpravo, vyjma první člen, limitu 0.

Tím jsme vypočetli derivace některých jednoduchých funkcí; derivace dalších dostaneme z obecných vět, jež nyní odvodíme.

Věta 122. *Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci (popř. vlastní derivaci zprava, popř. zleva), je funkce f v bodě x_0 spojitá (popř. spojitá zprava, popř. zleva).*

Důkaz. Existuje-li vlastní derivace $f'(x_0)$, je

$$\lim (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \,.\, h\text{[6]}) =$$

$$= \lim \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \,.\, \lim h = f'(x_0) \,.\, 0 = 0 ,$$

tedy $\lim f(x_0 + h) = f(x_0)$, tj. f je spojitá v bodě x_0. Obdobně „zprava" a „zleva".

Příklad 1. Je-li $f'(x_0)$ *nevlastní,* nemusí být f spojitá v bodě x_0. Příklad: $f(x) = -1$ pro $x < 0$, $f(0) = 0$, $f(x) = 1$ pro $x > 0$. Pro $h \neq 0$ je $\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{|h|}$ (rozvažte si to!), takže $f'(0) = +\infty$ existuje, ale f zřejmě není spojitá v bodě 0 (dokonce ani zprava ani zleva).

Poznámka 1. Věta 122 se nedá obrátit: funkce spojitá v bodě x_0 nemusí mít derivaci v bodě x_0; viz příkl. 2.

Věta 123. *Rovnice $f'(x) = A$ (přičemž připouštím i nevlastní derivaci) platí tehdy a jen tehdy, je-li $f'_+(x) = f'_-(x) = A$.*

Důkaz plyne z definice 24 a z věty 102, jež (viz text za větou 109) platí i pro nevlastní limity.

Příklad 2. Budiž $f(x) = |x|$; pro $x \geqq 0$ je tedy $f(x) = x$, pro $x \leqq 0$ je $f(x) = -x$, tedy

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0+} 1 = 1 ,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0-} (-1) = -1 .$$

[6]) Mějte stále na paměti, že při hledání limity pro $h \to 0$ si nevšímáme hodnoty $h = 0$.

Funkce f je tedy spojitá v bodě 0 (neboť je tam spojitá zprava i zleva podle věty 122), ale derivace $f'(0)$ podle věty 123 neexistuje (vlastní ani nevlastní).

Věta 124. *Buďte c_1, c_2 dvě konstanty, f, g dvě funkce; nechť existují vlastní derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$. Potom funkce $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ má v bodě x_0 derivaci $c_1 f'(x_0) + c_2 g'(x_0)$; funkce $f(x) g(x)$ má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$; je-li $g(x_0) \neq 0$, má funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ v bodě x_0 derivaci*

$$\frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Poznámka 2. Pamatujme si větu 124 v tomto znění: označme $u = f(x)$, $v = g(x)$. Potom je (značí-li c, c_1, c_2 konstanty)

$$\left\{\begin{array}{l} (c_1 u + c_2 v)' = c_1 u' + c_2 v', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad (cu)' = c \, . \, u', \\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}. \text{ [7]} \end{array}\right. \tag{7}$$

Přitom mají rovnice (7) tento smysl: má-li pro nějakou hodnotu x pravá strana některé z těchto rovnic smysl, má pro tuto hodnotu smysl i levá strana a rovná se pravé straně.

Důkaz. Pro $h \neq 0$ jest (volíme-li zároveň $|h|$ tak malé, aby $g(x_0 + h)$, $f(x_0 + h)$ měly smysl)

$$\frac{1}{h}(c_1 f(x_0 + h) + c_2 g(x_0 + h) - c_1 f(x_0) - c_2 g(x_0)) =$$

$$= c_1 \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + c_2 \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}, \tag{8}$$

$$\frac{f(x_0 + h) g(x_0 + h) - f(x_0) g(x_0)}{h} =$$

$$= g(x_0 + h) \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + f(x_0) \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}. \tag{9}$$

Z předpokládané existence vlastní derivace $g'(x_0)$ plyne (viz větu 122) $\lim g(x_0 + h) = g(x_0)$. Předpokládám-li tedy speciálně $g(x_0) \neq 0$, je pro dosti malá $|h|$ též $g(x_0 +$

[7]) Třetí rovnice plyne z druhé pro $v = c$ (tedy $v' = 0$); pátá plyne z čtvrté pro $u = 1$ (tedy $u' = 0$).

$+ h) \neq 0$ (viz pozn. 4 v kap. V, § 5), a tedy

$$\frac{1}{h}\left(\frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right) =$$

$$(10) \qquad = \frac{1}{g(x_0)\,g(x_0 + h)} \cdot \frac{f(x_0 + h)\,g(x_0) - g(x_0 + h)\,f(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{1}{g(x_0 + h)\,g(x_0)}\left(g(x_0)\,\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f(x_0)\,\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}\right).$$

Ježto $\lim g(x_0 + h) = g(x_0)$, $\lim \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$,

$\lim \dfrac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0)$, plyne vskutku, že levé strany rovnic (8), (9), (10) mají v bodě $h = 0$ limity $c_1 f'(x_0) + c_2 g'(x_0)$, $f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$, $\dfrac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Poznámka 3. Z rovnic (7) plyne okamžitě: mají-li funkce $u_1, u_2, \ldots, u_n$ v nějakém bodě vlastní derivace, platí v tomto bodě rovnice ($c_1, c_2, \ldots, c_n$ jsou konstanty)

$$(c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n)' = c_1 u_1' + c_2 u_2' + \ldots + c_n u_n',$$

$$(u_1 u_2 \ldots u_n)' = u_1' u_2 \ldots u_n + u_1 u_2' u_3 \ldots u_n + \ldots + u_1 u_2 \ldots u_{n-1} u_n'.$$

Důkaz úplnou indukcí si provede čtenář sám. Např. je $(3 \cos x + 2e^x + x^3)' = - 3 \sin x + 2e^x + 3x^2$, $(3 \cos x \,.\, e^x \,.\, x^3)' = - 3 \sin x \,.\, e^x \,.\, x^3 + 3 \cos x \,.\, e^x \,.\, x^3 + 3 \cos x \,.\, e^x \,.\, 3x^2$ pro každé x.

VI. $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ *pokud* $\cos x \neq 0$; $(\mathrm{cotg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, *pokud* $\sin x \neq 0$.

Důkaz:

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \,.\, \cos x - \sin x \,.\, (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Druhý vzorec si čtenář dokáže sám.

VII. *Pro $x \neq 0$ a pro celé záporné n je* $(x^n)' = nx^{n-1}$. Důkaz: Klaďme $m = - n$, takže m je celé kladné. Podle (7) a V je pak pro $x \neq 0$:

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = - \frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = - \frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = - mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

Příklad 3. Dovedeme-li derivovat některé funkce, dovedeme derivovat i všechny funkce, jež z těchto funkcí dostaneme konečným počtem těchto výkonů: sčítání, odčítání, násobení, dělení. Např.

$$\left(\frac{\sin x \,.\, e^x - \operatorname{tg} x \,.\, x^3}{x^2 + 1}\right)' =$$

$$= \frac{(\sin x \,.\, e^x - \operatorname{tg} x \,.\, x^3)'\,(x^2 + 1) - (\sin x \,.\, e^x - \operatorname{tg} x \,.\, x^3)\,(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{\left(\cos x \,.\, e^x + \sin x \,.\, e^x + \dfrac{x^3}{\cos^2 x} - 3 \operatorname{tg} x \,.\, x^2\right)(x^2 + 1) - 2x\,(\sin x \,.\, e^x - x^3 \operatorname{tg} x)}{(x^2 + 1)^2};$$

to platí pro všechna x, pro něž $\cos x \neq 0$.

Dosud jsme nevypočítali derivace funkcí $\lg x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$, jež jsou inverzní k funkcím e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$. To provedeme na základě této obecné věty:

Věta 125. *Budiž x_0 vnitřní bod intervalu J. Budiž f funkce v oboru J, jež je buďto spojitá a rostoucí nebo spojitá a klesající v J. Položme $f(x_0) = y_0$. Nechť funkce φ, inverzní k f, má v bodě y_0 vlastní derivaci různou od nuly. Potom má funkce f v bodě x_0 derivaci* $f'(x_0) = \dfrac{1}{\varphi'(y_0)}$.

Důkaz. Je $y_0 = f(x_0)$, $x_0 = \varphi(y_0)$. Budiž $x \neq x_0$, $x \in J$; položme $y = f(x)$, tedy $x = \varphi(y)$; je ovšem $y \neq y_0$. Tedy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{\varphi(y) - \varphi(y_0)} = 1 : \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0}.$$

Zde je ovšem $y = f(x)$, takže obšírně

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1 : \frac{\varphi(f(x)) - \varphi(y_0)}{f(x) - y_0}. \tag{11}$$

Položme pro zkrácení

$$\psi(y) = \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0}.$$

Je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, dále $f(x) \neq y_0$ pro $x \neq x_0$, $x \in J$ a konečně $\lim\limits_{y \to y_0} \psi(y) = \varphi'(y_0)$

Podle věty 108 o limitě složených funkcí je tedy

$$\lim_{x \to x_0} \psi(f(x)) = \varphi'(y_0), \quad \text{tj.} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(f(x)) - \varphi(y_0)}{f(x) - y_0} = \varphi'(y_0).$$

Podle (11) je tedy vskutku

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

VIII. *Pro* $x > 0$ *je* $(\lg x)' = \dfrac{1}{x}$. Důkaz: v intervalu $(0, +\infty)$ je $\lg x$ rostoucí a spojitá; inverzní funkce je e^y. Položme ve větě 125 $f(x) = \lg x$, $\varphi(y) = e^y$; je $\varphi'(y) = e^y \neq 0$. Zvolíme-li nějaké kladné x (píši krátce x, y místo x_0, y_0) a položíme $y = f(x) = \lg x$, je podle věty 125 $(\lg x)' = \dfrac{1}{e^y}$; zde vyjádříme ještě e^y proměnnou x; je $y = \lg x$, tedy $x = e^y$, takže $(\lg x)' = \dfrac{1}{x}$.

IX. *Pro* $|x| < 1$ *je* $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Důkaz: $\arcsin x$ je rostoucí a spojitá v $\langle -1, +1\rangle$; k ní inverzní je funkce $\sin y$ v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$. Je-li $|x| < 1$, je $|\arcsin x| < \frac{1}{2}\pi$; položíme-li tedy $y = \arcsin x$, je $|y| < \frac{1}{2}\pi$ a tedy $(\sin y)' = \cos y > 0$. Tedy mohu užít věty 125 a vyjde

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(neboť $\sin y = x$; znamení je správně zvoleno, ježto $\cos y > 0$). Druhý vzorec plyne z rovnice $\arccos x = \frac{1}{2}\pi - \arcsin x$.

X. *Pro každé* x *je* $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$. Důkaz: $\operatorname{arctg} x$ je spojitá a rostoucí v $(-\infty, +\infty)$; k ní inverzní je funkce $\operatorname{tg} y$ v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Položíme-li $y = \operatorname{arctg} x$, je $x = \operatorname{tg} y$ a máme $\left(\text{ježto } (\operatorname{tg} y)' = \dfrac{1}{\cos^2 y} > 0\right)$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Druhý vzorec plyne z rovnice $\operatorname{arccotg} x = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg} x$.

Další důležitou větou je věta o derivování složených funkcí:

Věta 126. *Nechť funkce* $\varphi(x)$ *má vlastní derivaci v bodě* x_0; *nechť funkce* $f(y)$ *má vlastní derivaci v bodě* $y_0 = \varphi(x_0)$. *Potom má funkce* $f(\varphi(x))$ *v bodě* x_0 *derivaci* $f'(y_0)\,\varphi'(x_0)$.

Důkaz. Jde o limitu podílu

$$\frac{f(\varphi(x_0 + h)) - f(\varphi(x_0))}{h} \tag{12}$$

pro $h \to 0$. Položili jsme již $\varphi(x_0) = y_0$; položme ještě

$$\lambda(h) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0), \quad \text{tj.} \quad \varphi(x_0 + h) = y_0 + \lambda(h).\text{[8]} \tag{13}$$

Ježto funkce $\varphi(x)$ má v bodě x_0 vlastní derivaci, je $\varphi(x)$ spojitá v bodě x_0, a tedy $\lambda(h)$ je funkce spojitá v bodě $h = 0$; mimoto je $\lambda(0) = 0$.

Definujme ještě funkci $F(k)$ takto: Pro $k \neq 0$ klaďme

$$F(k) = \frac{f(y_0 + k) - f(y_0)}{k}, \tag{14}$$

pro $k = 0$ pak položme $F(0) = f'(y_0)$;[9]) je tedy

$$f(y_0 + k) - f(y_0) = k\,F(k), \tag{15}$$

a to i pro $k = 0$ (neboť potom obě strany rovnice (15) jsou rovny nule).

Podle (14) jest $\lim\limits_{k \to 0} F(k) = f'(y_0) = F(0)$, takže funkce F je spojitá v bodě $k = 0$ (viz větu 103).

Ve výrazu (12) je $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi(x_0 + h) = y_0 + \lambda(h)$, takže čitatel v (12) má hodnotu (viz (15))

$$f(y_0 + \lambda(h)) - f(y_0) = \lambda(h)\,F(\lambda(h)).$$

Dosadíme-li za $\lambda(h)$ podle (13), vidíme, že zlomek (12) má pro $h \neq 0$ hodnotu

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}\,F(\lambda(h)). \tag{16}$$

Zde je předně

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = \varphi'(x_0). \tag{17}$$

Za druhé: Funkce $\lambda(h)$ je v bodě $h = 0$ spojitá a má v něm hodnotu $\lambda(0) = 0$; funkce $F(k)$ je pak spojitá v bodě $k = 0$. Tedy podle věty 98 (o spojitosti složených funkcí) je funkce $F(\lambda(h))$ spojitá v bodě $h = 0$, takže podle věty 103 je

$$\lim_{h \to 0} F(\lambda(h)) = F(\lambda(0)) = F(0) = f'(y_0). \tag{18}$$

[8]) $\lambda(h)$ je ovšem definováno pro ony hodnoty h, pro něž je definováno $\varphi(x_0 + h)$.

[9]) $F(k)$ je ovšem definováno pro ony hodnoty k, pro něž je definováno $f(y_0 + k)$.

Tedy: první činitel v (16) má podle (17) pro $h \to 0$ limitu $\varphi'(x_0)$, druhý má podle (18) limitu $f'(y_0)$, takže podle věty 106 (o limitě součinu) má výraz (16) (neboli výraz (12)) pro $h \to 0$ limitu $f'(y_0)\ \varphi'(x_0)$, čímž je důkaz proveden.

Poznámka 4. Věta 126 praví toto: budiž z funkcí y, tj. $z = f(y)$; budiž y funkcí x, tj. $y = \varphi(x)$. Tím se nám jeví z jako funkce x, totiž $z = f(\varphi(x))$. Nechť má y jakožto funkce x v jistém bodě derivaci $\varphi'(x)$ $\left(\text{čili } \dfrac{dy}{dx}\right)$; nechť má z (jakožto funkce proměnné y) v příslušném bodě $y = \varphi(x)$ derivaci $f'(y)$ $\left(\text{čili } \dfrac{dz}{dy}\right)$. Potom má také z, pojímané jako funkce proměnné x, v bodě x derivaci $\dfrac{dz}{dx}$ (čili $(f(\varphi(x)))'$) a tato derivace je dána podle věty 126 rovnicí

$$(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x))\ \varphi'(x)$$

(za y jsem do $f'(y)$ dosadil hned příslušnou hodnotu $\varphi(x)$), čili rovnicí

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}. \tag{19}$$

V tvaru (19) se snad věta 126 nejsnáze pamatuje; pamatujme ovšem, že $\dfrac{dz}{dy} = f'(y)$ se nám napřed jeví jako funkce proměnné y, do níž za y jest dosadit $\varphi(x)$.

Příklad 4. Hledejme derivaci funkce $\sin(x^2 + 1)$. Klademe-li $z = \sin y$, $y = x^2 + 1$, obdržíme $(\sin(x^2 + 1))' = \dfrac{dz}{dx} = \cos y \,.\, 2x = 2x \,.\, \cos(x^2 + 1)$ pro každé x.

Příklad 5. Derivace funkce $(x^3 + 2x + 1)^{10}$ by se mohla nalézt tak, že bychom provedli umocnění a derivovali jako mnohočlen; pohodlnější je však postup podle věty 126: položíme-li $z = y^{10}$, $y = x^3 + 2x + 1$, obdržíme[10]) $\dfrac{d}{dx}(x^3 + 2x + 1)^{10} = 10y^9(3x^2 + 2) = 10(x^3 + 2x + 1)^9 (3x^2 + 2)$.

Poznámka 5. Věty 126 můžeme užít také ke studiu funkcí vícenásobně složených. Budiž např. $z = f(\varphi(\psi(x)))$, takže lze klást $z = f(y)$, $y = \varphi(u)$, $u = \psi(x)$. Má-li $\psi(x)$ vlastní derivaci $\psi'(x) = \dfrac{du}{dx}$ v jistém bodě x a má-li $\varphi(u)$ vlastní derivaci $\varphi'(u) = \dfrac{dy}{du}$ v bodě $u = \psi(x)$, je podle věty 126 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$. Má-li ještě funkce

---

[10]) Místo $\dfrac{df(x)}{dx}$ píšeme často $\dfrac{d}{dx} f(x)$, aby se vzorce příliš neroztahovaly.

$f(y)$ v bodě $y = \varphi(u) = \varphi(\psi(x))$ vlastní derivaci $\dfrac{dz}{dy} = f'(y)$, je podle věty 126 $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}$ a tedy celkem $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$. Přitom $\dfrac{du}{dx} = \psi'(x)$ obsahuje přímo číslo x, kdežto do $\dfrac{dy}{du} = \varphi'(u)$, $\dfrac{dz}{dy} = f'(y)$ je nutné za u, y dosadit příslušné hodnoty $u = \psi(x)$, $y = \varphi(u) = \varphi(\psi(x))$.

Příklad 6. Hledejme $\dfrac{d}{dx} e^{\cos((x-1)/(x+1))}$ pro $x \neq -1$. Položíme-li $z = e^y$, $y = \cos u$, $u = \dfrac{x-1}{x+1}$, máme

$$\frac{d}{dx} e^{\cos((x-1)/(x+1))} = e^y \, . \, (-\sin u) \, . \, \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} =$$

$$= -2e^{\cos((x-1)/(x+1))} \sin \frac{x-1}{x+1} \, . \, \frac{1}{(x+1)^2} \, .$$

Příklad 7. Zručný počtář bude ovšem u příkladů tohoto druhu psát ihned výsledek, např.

$$\frac{d}{dx} \sqrt{e^{x^2}+1} = \tfrac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{e^{x^2}+1}} \, . \, e^{x^2} \, . \, 2x = \frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}+1}} \, .$$

Příklad 8. Často se vyskytuje tento speciální případ věty 126: $z = f(y)$, $y = ax + b$. Vychází: *jsou-li a, b konstanty a má-li $f(y)$ vlastní derivaci v bodě $y = ax + b$, má $f(ax + b)$ vlastní derivaci v bodě x, a to* $\dfrac{d}{dx} f(ax + b) = a f'(ax + b)$ (ovšem $f'(ax + b)$ znamená hodnotu funkce $f'(y)$ pro $y = ax + b$). Např.

$$\frac{d}{dx}(e^{3x-2}) = 3e^{3x-2}, \quad \frac{d}{dx}(e^{-x}) = -e^{-x}, \quad \frac{d}{dx}(\sin(2x+1)) =$$

$$= 2\cos(2x+1), \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arctg}(2x+1)) = \frac{2}{(2x+1)^2+1} \, .$$

XI. *Je-li $a > 0$, je $(a^x)' = a^x \lg a$ pro každé x*; to plyne ihned z příkl. 8, ježto $a^x = e^{x \lg a}$.

XII. *Pro $x > 0$ a pro libovolné n je $(x^n)' = nx^{n-1}$.*[11] Neboť $x^n = e^{n \lg x}$, $(x^n)' = e^{n \lg x} \, . \, \dfrac{n}{x} = \dfrac{nx^n}{x} = nx^{n-1}$.

[11] V V, VII jsme probrali pouze celá n, zato však pro obecnější hodnoty x.

Příklad 9. Funkci $f(x)^{g(x)}$ nelze derivovat jako mocninu, ježto mocnitel není konstantní, ani jako exponenciální funkci, ježto základ není konstantní. Věta 126 dává však ihned tuto metodu: je-li $f(x) > 0$ v jistém bodě x a existují-li v onom bodě vlastní derivace $f'(x)$, $g'(x)$, dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)^{g(x)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{g(x)\lg f(x)}\right) = e^{g(x)\lg f(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g(x)\lg f(x)\right) =$$
$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\lg f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

Příklad: pro $x > 0$ je $(x^x)' = (e^{x \lg x})' = e^{x \lg x}(\lg x + 1) = x^x(\lg x + 1)$.

Věty a pravidla tohoto paragrafu, sloužící k výpočtu derivací, musí čtenář ovládat zcela mechanicky jako násobilku. Jsou to tyto vzorce a metody: především vzorce I–XII, napišme je ještě jednou: Derivace konstanty je nula (pro každé x), $(x)' = 1$ pro každé x; $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro $x > 0$ (je-li n celé kladné, platí tento vzorec dokonce pro každé x vůbec, je-li n celé záporné, platí pro každé $x \neq 0$); $(e^x)' = e^x$ pro každé x; $(a^x)' = a^x \,.\, \lg a$ pro každé x, je-li $a > 0$; $(\lg x)' = \dfrac{1}{x}$ pro $x > 0$; $(\sin x)' = \cos x$ pro každé x; $(\cos x)' = -\sin x$ pro každé x; $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, je-li $\cos x \neq 0$; $(\operatorname{cotg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$, je-li $\sin x \neq 0$; $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ pro $|x| < 1$; $(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arccotg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ pro každé x. Dále rovnice (7), poznámka 3, věta 125 a věta 126 (nejlépe ve tvaru poznámek 4, 5). Konečně je dobře mít na paměti příkl. 8, 9 (z příkladu 9 stačí ovšem si pamatovat, že píšeme $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\lg f(x)}$; další postup je jasný). K procvičení slouží cvičení připojená k tomuto paragrafu.

Vezměme ještě dva příklady dosti často se vyskytující:

Příklad 10. $\left(\dfrac{ax + b}{cx + d}\right)' = \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$, pokud $cx + d \neq 0$.

Příklad 11. $(\lg f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, pokud $f'(x)$ existuje a $f(x) > 0$.

Ještě malou poznámku k označení. Je-li funkce označena jediným písmenem, třeba f, je označení f' zcela zřetelné. Např. $f'(x)$, $f'(t)$, $f'(3)$ značí hodnotu derivace funkce f v bodě x, v bodě t, v bodě 3. Je-li však funkce f nějak vypsána, mohou nastat nejasnosti. Např. $(2(3x + 2)^7)'$ je ještě zcela jasné označení; ale ze symbolu $(2(3 \,.\, 2 + 2)^7)'$ by asi nikdo nepoznal, že jde o hodnotu derivace funkce $2(3x + 2)^7$ v bodě 2; proto píšeme raději např. $(2(3x + 2)^7)'_{x=2}$ a rozumíme tím hodnotu derivace funkce

$(3x+2)^7$ v bodě 2; nebo píšeme $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2(3x+2)^7)\right)_{x=2}$. Ještě jindy může označení čárkou být nebezpečné. Např. co značí $(t^2z)'$? Je zde nezávisle proměnná t a z je konstanta nebo naopak? Zde je lepší označení $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$; je totiž

$$\frac{\mathrm{d}(t^2z)}{\mathrm{d}t} = 2tz \text{ (jako proměnná je vyznačena } t\text{)},$$

$$\frac{\mathrm{d}(t^2z)}{\mathrm{d}z} = t^2 \text{ (jako proměnná je vyznačena } z\text{)}.$$

Cvičení

Prvních 50 cvičení slouží k mechanickému nacvičení derivování; je vždy udána funkce, jejíž derivace se má nalézt. Výsledky jsou uvedeny na konci těchto cvičení.

1. $y = 4x^3 + \pi x^2 - 7x$.
2. $y = x^5 - 2 \cdot 3^x + 7 \operatorname{tg} x$.
3. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.
4. $y = \dfrac{2x+5}{x^3+7x-5}$.
5. $y = \dfrac{1}{\sin x}$.
6. $y = \dfrac{1}{\cos x}$.
7. $y = \dfrac{e^x(\sin x + 2\cos x)}{x^2 \arcsin x + \operatorname{arctg} x}$.
8. $y = \lg(x^2+1)$.
9. $y = \lg x^3$.
10. $y = \lg^3 x$.[12]
11. $y = \lg \sin x$.
12. $y = \lg \cos x$.
13. $y = \lg \operatorname{tg} x$.
14. $y = \lg \operatorname{cotg} x$.
15. $y = \lg(x + \sqrt{x^2+1})$.
16. $y = \sin^3 x$.
17. $y = \sin x^3$.
18. $y = \arcsin \dfrac{x}{x^2+1}$.
19. $y = \lg \dfrac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}$ $(a > b)$.
20. $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.
21. $y = \operatorname{arctg}(x^2+1)$.
22. $y = \arcsin(n \sin x)$.
23. $y = \sin(\arccos mx)$.
24. $y = \arcsin(\operatorname{tg} x)$.
25. $y = \lg(\sin(x^3 - 2x + 1))$.
26. $y = \lg(e^x + e^{-x})$.
27. $y = \dfrac{2x+7}{(x^3+2x+5)^2}$[13].
28. $y = \dfrac{x}{x + \sqrt{a^2+x^2}}$ $(a \neq 0)$.
29. $y = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$.
30. $y = a^{\sqrt{x}}$ $(a > 0)$.
31. $y = x \lg x$.
32. $y = \dfrac{1}{x + \sqrt{a^2+x^2}}$ $(a \neq 0)$.
33. $y = \operatorname{tg}(\arccos mx)$.
34. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}$.
35. $y = (ax+b)^m (cx+d)^n$.
36. $y = \arccos \dfrac{a\cos x + b}{b \cos x + a}$ $(0 < b < a)$.

[12]) Užívám běžného označení: $\lg x^3$ znamená $\lg(x^3)$; $\lg^3 x$ znamená $(\lg x)^3$; podobně při $\sin x$ atd.

[13]) Výrazy typu $\frac{u}{v^k}$ se často derivují pohodlněji jako součin $u \cdot v^{-k}$.

37. $y = \arccos \sqrt{\dfrac{ax^2+1}{Ax^2+1}}$ $(0 < a < A)$.

38. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x^2+1}$.

39. $y = \dfrac{(a^2+x^2)^3}{(a^3+x^3)^2}$.

40. $y = \sin x \,.\, \sin (x - \alpha)$.

41. $y = \frac{1}{2}\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2}x - \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

42. $y = 2x + \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})$.

43. $y = x^{\sin x}$.

44. $y = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{(1-x)/(1+x)}$.

45. $y = x^{1/x}$.

46. $y = \lg (x^2 + x + 1) + \dfrac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

47. $y = \sqrt{1 + 2x - x^2} - \arcsin \dfrac{x-1}{\sqrt{2}}$.

48. $y = \arccos \sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}$.

49. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{a+x}{1-ax}$.

50. $y = \arcsin (2x\sqrt{1-x^2})$.

51. Jiné řešení cvičení 48: y jest ono číslo („úhel") intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, jehož kosinus je $\sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}$; pro $x \neq 0$ je kosinus kladný a menší než 1, tedy $\cos y = \sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}$, $0 < y < \frac{1}{2}\pi$. Odtud snadno $\operatorname{tg} y = |x|$, tj. $y = \operatorname{arctg} |x|$; tedy $y = \pm \operatorname{arctg} x$ (horní znamení pro $x > 0$, dolní pro $x < 0$); odtud najdete y'.

52. Obdobnou úvahou najděte y' též v cvičení 49 (viz kap. VII, § 2, cvičení 8) a cvičení 50 $(\sin 2\alpha = \pm 2 \sin \alpha \,.\, \sqrt{1 - \sin^2 \alpha})$.

53. Z definicí na začátku cvičení ke kap. VI, § 3 odvoďte: $(\sinh x)' = \cosh x$; $(\cosh x)' = \sinh x$; $(\operatorname{tgh} x)' = \cosh^{-2} x$; $(\operatorname{cotgh} x)' = -\sinh^{-2} x$ (poslední vzorec jen pro $x \neq 0$).

54. Z cvičení 53, dále z cvičení 9 až 12 v kap. VII, § 2 a z věty o derivování inverzních funkcí odvoďte $(\operatorname{argsinh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pro všechna x; $(\operatorname{argcosh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ pro $x > 1$; $(\operatorname{argtgh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ pro $|x| < 1$; $(\operatorname{argcoth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ pro $|x| > 1$.

55. Výsledky cvičení 54 odvoďte znovu, používajíce vyjádření $\operatorname{argsinh} x = \lg (x + \sqrt{x^2+1})$ atd. (kap. VII, § 2, cvičení 9 až 12).

56. Napište rovnici tečny ke křivce $y = \sin x$ v bodě $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}]$; totéž pro křivku $y = e^x$ v bodě $[0, 1]$ a v bodě $[1, e]$; totéž pro křivku $y = x^3 + 2x$ v bodě $[2, 12]$. Výsledky: $y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}(x - \frac{1}{6}\pi)$; $y = x + 1$; $y = ex$; $y = 14x - 16$.

57. Doplňte větu 125 o derivaci inverzních funkcí takto. Budiž $f(x)$ spojitá a ryze monotónní v intervalu J; φ budiž funkce inverzní k f.

I. Je-li x_0 vnitřní bod intervalu J, $y_0 = f(x_0)$, platí toto: je-li $f'(x_0)$ nevlastní ($+\infty$ nebo $-\infty$), je $\varphi'(y_0) = 0$; je-li $f'(x_0) = 0$, je $\varphi'(y_0) = +\infty$ nebo $-\infty$ podle toho, je-li f rostoucí nebo klesající.[14])

[14]) Zde vyjadřuji φ' pomocí f', ve větě 125 jsem vyjadřoval f' pomocí φ'; ale to je lhostejné (φ je inverzní k f, f je inverzní k φ).

II. Je-li $x_0 \in J$ a není-li x_0 koncovým bodem intervalu J (smí být počátečním bodem) a existuje-li vlastní derivace zprava $f'_+(x_0) \neq 0$, existuje v bodě $y_0 = f(x_0)$ derivace *zprava* $\varphi'_+(y_0) = \frac{1}{f'_+(x_0)}$, je-li f rostoucí; je-li však f klesající, existuje derivace *zleva* $\varphi'_-(y_0) = \frac{1}{f'_+(x_0)}$.

III. Obdobný výsledek pro $f'_-(x_0)$.

IV. Body II, III lze zobecnit na případy, že $f'_+(x_0)$ (popř. $f'_-(x_0)$) je 0 nebo $+\infty$ nebo $-\infty$.

58. Příklady k cvičení 57: $\sin x$ je v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ rostoucí a má v bodě $-\frac{1}{2}\pi$ derivaci zprava 0; tedy má $\arcsin x$ v bodě -1 derivaci zprava $+\infty$. Funkce $\cos x$ je v $\langle 0, \pi\rangle$ klesající a má v bodě 0 derivaci zprava 0; tedy má $\arccos x$ v bodě 1 derivaci zleva $-\infty$.

59. Derivace sudé funkce (viz kap. VI, § 3 na konci) je lichá funkce, derivace liché funkce je sudá funkce.

Následující cvičení 60 až 65 obsahují několik vět o nevlastních derivacích.

60. Má-li $f(x)$ v bodě x_0 derivaci $+\infty$, má funkce $af(x)$ v bodě x_0 derivaci $+\infty$ pro $a > 0$, $-\infty$ pro $a < 0$. Obdobně pro $f'(x_0) = -\infty$.

61. Je-li $f'(x_0) = +\infty$ a $g'(x_0)$ buďto vlastní nebo $+\infty$, má funkce $f(x) + g(x)$ v bodě x_0 derivaci $+\infty$. Obdobně pro $-\infty$.

62. Buďte $f(x)$, $g(x)$ spojité v bodě x_0; budiž $f'(x_0) = +\infty$, $g'(x_0)$ vlastní, $g(x_0) > 0$. Potom má funkce $f(x)\,g(x)$ v bodě x_0 derivaci $+\infty$. Ostatní kombinace znamének zvládnete podle cvičení 60.

Důkaz zde i v následujícím cvičení veďte podobně jako důkaz věty 124.

63. Budiž $f(x)$ spojitá v bodě x_0, $f(x_0) \neq 0$, $f'(x_0) = +\infty$. Potom má funkce $1 : f(x)$ v bodě x_0 derivaci $-\infty$. Podobně pro $f'(x_0) = -\infty$.

64. Z cvičení 62, 63 odvoďte pravidlo o derivaci podílu. Předpokládáme f, g spojité a různé od nuly v bodě x_0; dále nechť existují $f'(x_0)$, $g'(x_0)$; jedna z těchto derivací budiž nevlastní, jedna vlastní. Předpokládejme, že $f(x_0) > 0$, $g(x_0) > 0$ (při jiných kombinacích znamének užijme cvičení 60). Potom je výsledek: $(f(x) : g(x))'_{x=x_0} = +\infty$, je-li $f'(x_0) = +\infty$, $g'(x_0)$ vlastní nebo $g'(x_0) = -\infty$, $f'(x_0)$ vlastní; $(f(x) : g(x))'_{x=x_0} = -\infty$, je-li $f'(x_0) = -\infty$, $g'(x_0)$ vlastní nebo $g'(x_0) = +\infty$, $f'(x_0)$ vlastní.

65. Budiž $\varphi(x)$ spojitá v bodě x_0, $f(y)$ spojitá v bodě $y_0 = \varphi(x_0)$. Nechť existují derivace $\varphi'(x_0) \neq 0$, $f'(y_0) \neq 0$, z nichž aspoň jedna je nevlastní. Potom má funkce $f(\varphi(x))$ v bodě x_0 nevlastní derivaci, a to $+\infty$, mají-li čísla $\varphi'(x_0)$, $f'(y_0)$ totéž znamení, ale $-\infty$, mají-li opačná znamení (při posuzování znamení považuji ovšem $+\infty$ za kladné, $-\infty$ za záporné). Důkaz jako ve větě 126; v případě $f'(y_0) = \pm\infty$ je však nutná jistá modifikace.

66. Proberme některé příklady z kap. V, § 1. Funkce z příkl. 3 má derivaci $+1$ pro $x > 0$, -1 pro $x < 0$; v bodě 0 má derivaci zprava $+1$, zleva -1. Funkce z příkl. 7 má pro $x < 0$ derivaci 1, pro $x > 0$ derivaci 0; v bodě 0 má derivaci zleva $+1$, zprava $-\infty$ (nespojitost!). Funkce z příkladu 8 má v bodě x derivaci 0, není-li x celé; je-li x celé, je derivace zprava rovna 0, zleva $+\infty$. Funkce z příkladu 9 nemá v žádném bodě derivaci zprava ani zleva (vlastní ani nevlastní).

67. Příklad na spojitou funkci, jež má nevlastní derivaci: je-li n liché, $n > 1$, je $\sqrt[n]{x}$ spojitá v $(-\infty, +\infty)$ a má v bodě 0 derivaci $+\infty$.

68. Funkce x^n má v bodě 0 derivaci zprava: 0, je-li $n > 1$; 1, je-li $n = 1$; $+\infty$, je-li $0 < n < 1$.

69. Budiž $f(x) = x : (1 + e^{1/x})$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Funkce $f(x)$ je spojitá všude, i v počátku (neboť $|f(x)| \leq |x|$, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$). Je $f'_+(0) = 0$, $f'_-(0) = 1$ (vyšetřuje se limita podílu $f(x) : x$).

70. Věta 124 o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu platí též pro derivace zprava a pro derivace zleva (stačí omezit se v důkazu na $h > 0$ nebo na $h < 0$). Též výsledky cvičení 60 až 64 platí pro derivace zprava a derivace zleva.

71. Věta 126 (o derivaci složené funkce) naproti tomu *neplatí*, nahradím-li v ní slovo „derivace" všude slovy „derivace zprava". Příklad: Budiž $\varphi(x) = -x$, $f(y) = |y|$. Definujeme-li F rovnicí $F(x) = f(\varphi(x))$, je $F(x) = |-x| = |x|$. Je $\varphi(0) = 0$; $\varphi'_+(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$. Přesto není $F'_+(0) = -1 \,.\, 1$, nýbrž je $F'_+(0) = +1$.

Výsledky k cvičením 1—50

1. $y' = 12x^2 + 2\pi x - 7$.

2. $y' = 5x^4 - 2 \,.\, \lg 3 \,.\, 3^x + 7 \cos^{-2} x$, pokud $\cos x \neq 0$.

3. $y' = \dfrac{4x}{(x^2 + 1)^2}$.

4. $y' = \dfrac{-4x^3 - 15x^2 - 45}{(x^3 + 7x - 5)^2}$, pokud jmenovatel $\neq 0$.

5. $y' = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$, pokud $\sin x \neq 0$,

6. $y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$, pokud $\cos x \neq 0$.

7. $$y' = e^x \,.\, (x^2 \arcsin x + \operatorname{arctg} x)^{-2} \left\{ \sin x \left(-x^2 \arcsin x - 2x \arcsin x - \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{1 + x^2} \right) + \cos x \left(3 \operatorname{arctg} x + 3x^2 \arcsin x - 4x \arcsin x - 2 \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{2}{1 + x^2} \right) \right\},$$ pokud $0 < |x| < 1$.

8. $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

9. $y' = \dfrac{3}{x}$ pro $x > 0$.

10. $y' = \dfrac{3}{x} \lg^2 x$ pro $x > 0$.

11. $y' = \operatorname{cotg} x$ pro $\sin x > 0$.

12. $y' = -\operatorname{tg} x$ pro $\cos x > 0$.

13. $y' = \dfrac{2}{\sin 2x}$ pro $\operatorname{tg} x > 0$.

14. $y' = \dfrac{-2}{\sin 2x}$ pro $\operatorname{cotg} x > 0$.

15. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

16. $y' = \dfrac{3}{2} \sin x \sin 2x$.

17. $y' = 3x^2 \cos x^3$.

18. $y' = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}(1 + x^2 + x^4)^{-1/2}$.

19. $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$ pro $x > -b$. Pro $a \leqq b$ by nemělo y vůbec smyslu; proč?

20. $y' = \dfrac{1}{1+\cos x}$ pro $\cos x \neq -1$.

21. $y' = \dfrac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$.

22. $y' = \dfrac{n \cos x}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 x}}$ pro $|n \sin x| < 1$.

23. $y' = \dfrac{-m^2 x}{\sqrt{1 - m^2 x^2}}$ pro $|mx| < 1$.

24. $y' = \dfrac{1}{|\cos x| \cdot \sqrt{\cos 2x}}$ pro $|\operatorname{tg} x| < 1$.[15])

25. $y' = (3x^2 - 2) \operatorname{cotg}(x^3 - 2x + 1)$ pro $\sin(x^3 - 2x + 1) > 0$.

26. $y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

27. $y' = \dfrac{-10x^3 - 42x^2 - 4x - 18}{(x^3 + 2x + 5)^3}$ pro $x^3 + 2x + 5 \neq 0$.

28. $y' = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}\,(x + \sqrt{a^2+x^2})^2}$.

29. $y' = \dfrac{2 \sin x}{(1 + \cos x)^2}$ pro $\cos x > -1$.

30. $y' = \dfrac{\lg a}{2\sqrt{x}} \cdot a^{\sqrt{x}}$ pro $x > 0$.

31. $y' = \lg x + 1$ pro $x > 0$.

32. $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{a^2+x^2}\,(x + \sqrt{a^2+x^2})}$.

33. $y' = \dfrac{-1}{mx^2 \sqrt{1 - m^2 x^2}}$ pro $0 < |mx| < 1$.

[15]) Při cvičeních tohoto druhu pamatujte, že $\sqrt{a^2} = |a|$.

34. $y' = \dfrac{a}{(x^2 + a)^{\frac{3}{2}}}$ pro $x^2 > -a$.

35. $y' = (ax + b)^{m-1}(cx + d)^{n-1}((m + n)\,acx + mad + nbc)$. Podmínky pro platnost této rovnice závisí na hodnotách m, n; stanovte je!

36. $y' = \pm \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b \cos x + a}$ pro $\sin x \neq 0$; horní znamení pro $\sin x > 0$ dolní pro $\sin x < 0$.

37. $y' = \pm \sqrt{\dfrac{A - a}{ax^2 + 1}}\,\dfrac{1}{Ax^2 + 1}$ pro $x \neq 0$; horní znamení pro $x > 0$, dolní pro $x < 0$.

38. $y' = \dfrac{1 - x^2}{1 + 3x^2 + x^4}$.

39. $y' = 6a^2x(a - x)\,\dfrac{(a^2 + x^2)^2}{(a^3 + x^3)^3}$ pro $x \neq -a$.

40. $y' = \sin(2x - \alpha)$.

41. $y' = \dfrac{1}{\sin^3 x}$ pro $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} > 0$.

42. $y' = (e^x + e^{-x})^2$.

43. $y' = x^{\sin x}(\cos x \lg x + x^{-1} \sin x)$ pro $x > 0$.

44. $y' = \dfrac{2y}{(1 + x)^2}\left(1 - \lg \dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$ pro $|x| < 1$.

45. $y' = x^{1/x - 2}(1 - \lg x)$ pro $x > 0$.

46. $y' = \dfrac{2x + 2}{x^2 + x + 1}$.

47. $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}$ pro $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$.

48. $y' = \pm \dfrac{1}{1 + x^2}$ pro $x \neq 0$; znamení jako v 37.

49. $y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ pro $ax \neq 1$.

50. $y' = \pm \dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$ pro $|x| < 1$, $|x| \neq \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (umocněním snadno ukážete, že pro tato x je $|2x\sqrt{1 - x^2}| < 1$); znamení horní pro $x^2 < \frac{1}{2}$, dolní pro $x^2 > \frac{1}{2}$.

§ 3. Derivace vyšších řádů. Budiž $f(x)$ funkce; derivace $f'(x)$ čili $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ je také funkce proměnné x; jejím oborem je množina všech hodnot x, pro něž vlastní derivace existuje. Derivaci funkce $f'(x)$ (pokud existuje) nazýváme druhou derivací funkce f

… značíme ji $f''(x)$ nebo též $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ $\left(\text{označíme-li } f(x) \text{ jediným písmenem } y, \text{ píšeme též } y'' \text{ nebo } \frac{d^2 y}{dx^2}\right)$. Derivaci funkce $f''(x)$ nazýváme třetí derivací; obecně: derivaci $(n-1)$-vé derivace nazýváme n-tou derivací[16]) funkce $f(x)$ a značíme ji $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $y^{(n)}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$ (nahoře píšeme n hned za znak d, dole až za znak dx). Je zřejmé, že $(f^{(m)}(x))^{(n)} = f^{(m+n)}(x)$; neboť derivuji-li m-tou derivaci ještě n-kráte, derivoval jsem funkci f celkem $(m+n)$-kráte. Je někdy účelné psát $f^{(0)}$ místo f („nultá" derivace funkce f je funkce f sama).

Poznámka 1. Existuje-li $f^{(n)}(x_0)$, tj. má-li funkce $f^{(n-1)}(x)$ derivaci v bodě x_0, je funkce $f^{(n-1)}(x)$ podle § 1, poznámky 1 definována nejenom v bodě x_0, nýbrž v celém intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kde δ je vhodně zvolené kladné číslo. Tím spíše jsou v tomto intervalu definovány funkce $f^{(n-2)}(x), f^{(n-3)}(x), \ldots, f'(x), f(x)$.

Příklad 1. $(e^x)' = e^x$, tedy $(e^x)'' = (e^x)' = e^x$ atd., tedy $(e^x)^{(n)} = e^x$ pro každé x a každé přirozené n.

Příklad 2. $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(x^n)'' = n(n-1)\,x^{n-2}$, $(x^n)''' = n(n-1)(n-2)\,.\,x^{n-3}$, obecně pro $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$(x^n)^{(k)} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\,x^{n-k}. \tag{20}$$

Vzorec (20) platí pro každé $x > 0$, při celém n dokonce pro každé $x \neq 0$.

Příklad 3. Předpokládejme nyní n celé kladné; potom vzorec (20) platí pro $k \leqq n$ vůbec pro všechna x; pro $k = n$ obdržíme $(x^n)^{(n)} = n!$, což je konstanta; dalším derivováním obdržíme $(x^n)^{(k)} = 0$ pro $k > n$ a pro všechna x, ovšem jen je-li n přirozené číslo.[17])

Příklad 4. Mají-li funkce $u_1, \ldots, u_k$ v nějakém bodě x derivace až do řádu n-tého, platí v onom bodě

$$\begin{aligned}
(c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_ku_k)' &= c_1u_1' + c_2u_2' + \ldots + c_ku_k' \\
(c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_ku_k)'' &= c_1u_1'' + c_2u_2'' + \ldots + c_ku_k'' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_ku_k)^{(n)} &= c_1u_1^{(n)} + c_2u_2^{(n)} + \ldots + c_ku_k^{(n)}
\end{aligned}$$

($c_1, \ldots, c_k$ jsou konstanty; důkaz úplnou indukcí).

Příklad 5. Mají-li funkce u, v v jistém bodě x_0 derivace 2. řádu, dostaneme postupně v onom bodě $(uv)' = uv' + u'v$, $(uv)'' = uv'' + 2u'v' + u''v$. To připo-

[16]) Nebo též derivací n-tého řádu.

[17]) Vzorec (20) dává ovšem též $(x^n)^{(k)} = 0$ pro n přirozené; $k > n$, neboť mezi čísly $n, n-1, \ldots, n-k+1$ je jedno rovno nule. Vzorec (20) má však v tomto případě tu nevýhodu, že jeho pravá strana ztrácí pro $x = 0$ smysl, ač víme, že levá strana smysl má a rovná se nule.

míná vzorec pro dvojmoc dvojčlenu; tušíme tedy, že asi platí tato věta (Leibnizova formule): *mají-li u, v v bodě x_0 derivace až do řádu n-tého, je v tomto bodě*

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)} . \tag{21}$$

Důkaz úplnou indukcí: I. pro $n = 1$ víme, že věta je správná (viz § 2, (7)). II. Budiž věta správná pro nějaké přirozené n. Předpokládejme, že v bodě x_0 existují $u^{(n+1)}$, $v^{(n+1)}$ (takže $u^{(n)}$, $v^{(n)}$ existují v celém intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, takže vzorec (21) podle předpokladu platí v celém tomto intervalu). Pravá strana rovnice (21) má v bodě x_0 derivaci, tedy i levá, a to

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k+1)} v^{(n-k)} \tag{22}$$

(každý sčítanec v (21) vpravo derivujeme jako součin). Máme ukázat, že pravá strana v (22) je

$$\sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} u^{(l)} v^{(n-l+1)} ,$$

ale to je snadné, viz cvičení 23 v kap. I, § 2.

Příklad 6. $((ax + b)\, e^x)^{(n)} = (ax + b + na)\, e^x$. Důkaz: ze vzorce (21) zbudou jen první dva členy $\binom{n}{0}(ax + b)\, e^x + \binom{n}{1} a e^x$.

Příklad 7. *Má-li funkce $f(y)$ derivaci n-tého řádu v bodě $y = ax + b$, kde x je nějaké číslo, je v bodě x*

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(ax + b) = a^n f^{(n)}(ax + b) \tag{23}$$

($f^{(n)}(ax + b)$ je ovšem hodnota funkce $f^{(n)}(y)$ v bodě $ax + b$). Důkaz: pro $n = 1$ je vzorec správný. Nechť platí pro jistou hodnotu n. Předpokládejme, že $f(y)$ má v bodě $y = ax + b$ derivaci řádu $n + 1$. Jestliže položíme $f^{(n)}(y) = g(y)$, je $g'(y) = f^{(n+1)}(y)$. Derivováním rovnice (23) dostaneme[18])

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} f(ax + b) = a^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(ax + b) = a^n . a . g'(ax + b)$$

(podle § 2, příkl. 8); tedy platí rovnice (23) i pro derivaci řádu $n + 1$, neboť $g'(ax + b) = f^{(n+1)}(ax + b)$. Tím je vzorec (23) dokázán úplnou indukcí.

Např.:

$$\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4} (3x + 2)^6 = 3^4 . 6 . 5 . 4 . 3 . (3x + 2)^2 ;$$

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (e^{3x+2}) = 3^n e^{3x+2} .$$

[18]) Jako v příkl. 5 uvažme, že (23) platí v celém intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$.

Poznámka 2. Pohybuje-li se bod P po přímce, je jeho souřadnice x funkcí času t, tj. $x = x(t)$; derivaci $v(t) = x'(t)$ nazýváme rychlostí bodu P v okamžiku t. Podíl $(v(t + h) - v(t)) : h$ („změna rychlosti, připadající na jednu vteřinu") nazýváme středním zrychlením bodu P v časovém intervalu mezi okamžiky t, $t + h$; limitu tohoto podílu pro $h \to 0$, tj. derivaci $v'(t)$, nazýváme okamžitým zrychlením $a(t)$ bodu P v okamžiku t, tedy $a(t) = v'(t) = x''(t)$. Odtud vidíte důležitost druhé derivace ve fyzice, neboť zrychlení má základní úlohu v dynamice.

Poznámka 3. Snad se čtenář v minulých kapitolách divil, že jsme věnovali tolik místa pojmu „limita funkce v bodě x_0". Ale vidíte, že derivace $f'(x)$ není nic jiného než limita funkce $(f(x + h) - f(x)) : h$ v bodě $h = 0$. Důležitost pojmu derivace je pak jistě čtenáři jasná již z této kapitoly a vysvitne ještě jasněji v kapitolách následujících. Také další základní pojem, totiž spojitost funkce, lze zavést pomocí pojmu limity; z pedagogických důvodů jsem sice napřed zavedl spojitost a potom teprve limitu, ale z věty 103 je vidět, že jsme mohli též napřed zavést limitu funkce definicí 19 a potom definovat spojitost takto: funkci $f(x)$ nazýváme spojitou v bodě x_0, je-li $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$; podobně pro spojitost zprava a zleva. Snad stačí tato poznámka k tomu, aby čtenáři objasnila důležitost pojmu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Vedle pojmu „limita funkce" jsme měli v kap. II pojem „limita posloupnosti"[19]) — ale dokonce i tyto dva pojmy lze převést jeden na druhý; o tom si však povíme až v druhém svazku tohoto díla.

Cvičení

1. $\dfrac{d^3}{dx^3}(\operatorname{tg} x) = \dfrac{2 + 4\sin^2 x}{\cos^4 x}$, pokud $\cos x \neq 0$.

2. $\dfrac{d^2}{dx^2}(\arcsin x) = \dfrac{x}{(1 - x^2)^{3/2}}$, pokud $|x| < 1$.

3. $\dfrac{d^3}{dx^3}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}$.

4. Pro $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ je $(\sin x)^{(4k)} = \sin x$, $(\sin x)^{(4k+1)} = \cos x$, $(\sin x)^{(4k+2)} = -\sin x$, $(\sin x)^{(4k+3)} = -\cos x$. Návod: vypočtěte první až čtvrtou derivaci; čtvrtá derivace je opět $\sin x$, takže se dále celý postup opakuje. Odvoďte obdobný výsledek pro derivace funkce $\cos x$. Ukažte, že tento výsledek lze též psát ve tvaru $(\sin x)^{(k)} = \sin(x + \frac{1}{2}k\pi)$, $(\cos x)^{(k)} = \cos(x + \frac{1}{2}k\pi)$ pro $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

5. Pro $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ je $(\sin x \cdot e^x)^{(4k)} = (-4)^k \sin x \cdot e^x$, $(\sin x \cdot e^x)^{(4k+1)} = (-4)^k \cdot (\sin x + \cos x)\, e^x$, $(\sin x \cdot e^x)^{(4k+2)} = 2 \cdot (-4)^k \cos x \cdot e^x$, $(\sin x \cdot e^x)^{(4k+3)} = 2 \cdot (-4)^k \cdot (-\sin x + \cos x)\, e^x$. Návod: derivujete-li čtyřikráte, dostanete $-4 \sin x \cdot e^x$, načež se dále celý postup opakuje. Odvoďte obdobné vzorce pro derivace funkce $\cos x \cdot e^x$.

6. $(x^2 e^x)^{(n)} = (x^2 + 2nx + n(n - 1))\, e^x$ (Leibnizova formule).

[19]) „Součet nekonečné řady" není již podstatně nový pojem: je to limita posloupnosti částečných součtů.

7. $(x^n e^x)^{(n)} = e^x \sum_{k=0}^{n} \frac{(n!)^2}{(k!)^2 (n-k)!} x^k$ (Leibnizova formule).

8. Budiž $f(x) = |x+1| + 2|x| - 4|x-2|$. Potom je $f'(x) = 1$ pro $x < -1$, $f'(x) = 3$ pro $-1 < x < 0$, $f'(x) = 7$ pro $0 < x < 2$, $f'(x) = -1$ pro $x > 2$. Derivace zleva v bodech $-1, 0, 2$, jsou po řadě $1, 3, 7$; derivace zprava v těchto bodech jsou $3, 7, -1$. Druhá derivace $f''(x)$ v bodech $-1, 0, 2$ neexistuje; pro ostatní x je $f''(x) = 0$.

9. Budiž $f(x) = |x^3|$. Klaďme $\operatorname{sgn} a = 1$ pro $a > 0$, $\operatorname{sgn} a = -1$ pro $a < 0$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$ (sgn je zkratka slova signum = znamení). Potom je $f'(x) = 3x^2 . \operatorname{sgn} x$, $f''(x) = 6x \operatorname{sgn} x$. Dále $f'''(x) = 6$ pro $x > 0$, $f'''(x) = -6$ pro $x < 0$. Naproti tomu $f'''(0)$ neexistuje, ježto funkce $f''(x)$ má v bodě 0 derivaci zprava 6 a derivaci zleva -6. Je-li $k > 3$, k celé, je $f^{(k)}(x) = 0$ pro $x \neq 0$, kdežto $f^{(k)}(0)$ neexistuje.

§ 4. Diferenciál funkce[20]**).** Budiž f funkce, x_0 pevně zvolený bod. Přejdu-li z bodu x_0 do jiného (proměnného) bodu $x_0 + h$,[21]) změní se hodnota funkce f o číslo $f(x_0 + h) - f(x_0)$. Ptáme se nyní, zda je tento „přírůstek funkce“ $f(x_0 + h) - f(x_0)$ pro malé hodnoty $|h|$ přibližně úměrný číslu h; přesněji: ptáme se, zda existuje číslo A (nezávislé na h) takové, aby chyba, které se dopustíme, nahradíme-li rozdíl $f(x_0 + h) - f(x_0)$ číslem Ah, byla pro malé hodnoty $|h|$ podstatně menší než $|h|$.[22]) Zcela přesně: ptáme se, zda existuje číslo A tak, aby bylo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0 . \tag{24}$$

Ještě jinak řečeno: definujme (při daném A) funkci $\tau(h)$ rovnicí

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + h . \tau(h) . \tag{25}$$

Ptáme se, zda je možno nalézt číslo A takové, aby funkce $\tau(h)$ (jež ovšem závisí na A) splňovala rovnici

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = 0.\text{[23])} \tag{26}$$

Existuje-li takové A, nazýváme výraz Ah (což je funkce proměnné h) diferenciálem funkce f v bodě x_0. Význam diferenciálu pro malé hodnoty $|h|$ je patrný z rovnic (25), (26): jednoduchý výraz Ah dává přírůstek funkce $f(x_0 + h) - f(x_0)$ s chybou $h\,\tau(h)$, jež pro malé hodnoty $|h|$ je v prosté hodnotě mnohokráte menší než $|h|$.

Kdy existuje diferenciál funkce f v bodě x_0? Rovnice (24) znamená totéž co $A = \lim_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) : h$. Tedy: číslo A žádaných vlastností existuje tehdy a jen tehdy, existuje-li vlastní $f'(x_0)$, a potom je $A = f'(x_0)$, takže diferenciál je $f'(x_0) . h$.

[20]) Tento paragraf může čtenář zatím vynechat, musí si jej však přečíst před studiem kap. XIII, § 4.

[21]) h je tedy proměnná.

[22]) Číslo $|h|$ je právě vzdálenost bodů x_0, $x_0 + h$.

[23]) Obor funkce $\tau(h)$ je ovšem množina oněch hodnot $h \neq 0$, pro něž je $f(x_0 + h)$ definováno. Že rovnice (25) pro $h = 0$ nedefinuje číslo $\tau(h)$, ovšem nevadí.

Ježto bod x_0 byl libovolný, pišme dále x místo x_0. Diferenciál funkce f v bodě x značme $\mathrm{d}f(x)$,[24]) takže je

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,h\,, \tag{27}$$

má-li ovšem pravá strana smysl. Je-li $f(x)$ dáno nějakým početním výrazem, píšeme za znakem d místo $f(x)$ tento výraz; tak např. diferenciál funkce $x^3 + x^2$ v bodě x píšeme ve tvaru $\mathrm{d}(x^3 + x^2) = (3x^2 + 2x)\,h$. Pro funkci $f(x) = x$ je $f'(x) = 1$ a tedy $\mathrm{d}x = 1 \,.\, h = h$. Proto píšeme v (27) místo h znak $\mathrm{d}x$ a proměnnou $\mathrm{d}x$ nazýváme diferenciálem nezávisle proměnné. Rovnici (27) lze tedy psát

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x \tag{28}$$

a rovnice (25), (26) lze psát (píši x místo x_0)

$$f(x + \mathrm{d}x) - f(x) = \mathrm{d}f(x) + \tau(\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x, \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \tau(\mathrm{d}x) = 0\,.$$

V rovnici (28) je ovšem x a tedy i $f'(x)$ dané číslo, $\mathrm{d}x$ nezávisle proměnná; $\mathrm{d}f(x)$ je pak funkce (velmi jednoduchá) proměnné $\mathrm{d}x$. Z (28) je dále patrné, že dosud nedělitelný znak $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ pro derivaci můžeme nyní vskutku pojímat jako *podíl* diferenciálu funkce a diferenciálu proměnné.

Ježto existence vlastní derivace $f'(x)$ znamená totéž co existence diferenciálu $\mathrm{d}f(x)$ a ježto je mezi nimi jednoduchý vztah (28), zeptá se možná čtenář, zda není zavedení pojmu diferenciálu zbytečné. Vskutku je tento pojem u funkcí *jedné* proměnné málo důležitý; plný význam pojmu diferenciálu vysvitne až u funkcí několika proměnných v kap. XIII, § 4.

Cvičení

1. Sestrojme v bodě $[x_0, y_0]$ ke křivce $y = f(x)$ tečnu T o rovnici $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Přejdu-li z bodu o abscise x_0 k bodu o abscise $x_0 + \mathrm{d}x$, změní se ordináta bodu na křivce $y = f(x)$ o $f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$, kdežto ordináta bodu na tečně T se změní právě o diferenciál $f'(x_0)\,\mathrm{d}x$. Nahradíme-li přírůstek funkce diferenciálem, je to tedy v podstatě totéž, jako bychom nahradili křivku tečnou.

2. Budiž $z = f(y)$, $y = \varphi(x)$, takže z je funkcí proměnné x. Podle věty o derivování složených funkcí ihned zjistíte, že je $\mathrm{d}z = f'(y)\,\mathrm{d}y$, což je stejný vzorec, jako kdyby y byla nezávisle proměnná.

[24]) Píšeme-li $y = f(x)$, značíme diferenciál funkce f v bodě x též znakem $\mathrm{d}y$ apod.