KAPITOLA VII.

PARCIÁLNÍ DERIVACE A TOTÁLNÍ DIFERENCIÁLY

V této kapitole bude slovo „funkce" znamenati vždy konečnou komplexní funkci několika (řekněme r) reálných proměnných. Jejím oborem je tedy nějaká množina $M \subset \mathbf{E}_r$, jejími hodnotami jsou čísla z $\mathbf{K}_1$. Některé z vět této kapitoly platí jenom tehdy, omezíme-li se na reálné funkce; tato okolnost je ve znění věty vždy výslovně uvedena. Ale pozor! Také u některých vět, platných pro komplexní funkce, je důkaz proveden tak, že je správný jen pro reálné funkce. V tom případě si čtenář doplní výsledek pro komplexní funkci $f = f_1 + if_2$ tak, že užije dokázaného výsledku zvlášť na reálnou část f_1 a zvlášť na imaginární část f_2. Příklad: Hned v § 1 věta 182 platí jen pro reálné funkce. Naproti tomu věty 183, 184 jsou vysloveny i pro funkce komplexní (neboť v jejich znění se nikde realita nepožaduje). V jejich důkazech se však užívá věty 182, t. j. podané důkazy jsou správné jen pro reálné funkce. Použitím vět 183, 184 na reálnou a imaginární část komplexní funkce ověří si čtenář sám (obyčejně se o tom vůbec nezmiňuji), že věty 183, 184 platí i pro komplexní funkce. Některé důkazy jsou však podány také tak (na př. u věty 202), že platí přímo pro komplexní funkce.

Prostor $\mathbf{E}_r$ pojímáme jako normovaný reálný lineární prostor (kap. VI, § 1, příkl. 4). Jsou-li $x = [x_1, \ldots, x_r]$, $y = [y_1, \ldots, y_r]$ body z $\mathbf{E}_r$, $\alpha \in \mathbf{E}_1$, značí $x + y = [x_1 + y_1, \ldots, x_r + y_r]$, $\alpha x = [\alpha x_1, \ldots, \alpha x_r]$. Za normu $\|x\|$ bodu x budeme vždy bráti některé z čísel

$$\|x\| = \operatorname*{Max}_{1 \leqq j \leqq r} |x_j| \text{ nebo } \|x\| = \Big(\sum_{j=1}^{r} |x_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \ (p \geqq 1)\,;$$

vzdáleností bodů x, y rozumím pak číslo $\varrho(x, y) = \|x - y\|$. Metriky v $\mathbf{E}_r$, které odpovídají uvedeným normám, jsou „skoro stejné" ve smyslu kap. VI, § 1, pozn. 4, a pro většinu našich problémů bude lhostejno, pro kterou z nich se rozhodneme. Pokud nebude řečeno nic jiného, budeme stále počítati s normou $\|x\| = \operatorname*{Max}_{1 \leqq j \leqq r} |x_j|$ a tedy s metrikou $\varrho(x, y) = \|x - y\| = \operatorname*{Max}_{1 \leqq j \leqq r} |x_j - y_j|$, načež ovšem „koule"

$\Omega(a, \delta) = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in \mathbf{E}_r, \ |x_j - a_j| < \delta$ pro $j = 1, \ldots, r)$ je interval tvaru „krychle".

Slova „uzávěr", „uzavřený" a pod. znamenají „uzavřený v $\mathbf{E}_r$" atd. Podobně slova „funkce spojitá v bodě c", „limita funkce v bodě c" (bez dalšího dodatku) znamenají spojitost a limitu vzhledem k $\mathbf{E}_r$. Ovšem slova „funkce spojitá v množině M" zachovávají svůj význam podle def. 16 (funkce spojitá v každém bodě množiny M vzhledem k M). Pokud není jinak řečeno, míním slovem limita a znakem lim vždy konečnou neboli vlastní limitu; kde jde výjimečně o nekonečnou neboli nevlastní limitu, jde vždy o limitu $+\infty$ nebo $-\infty$ (nikdy o limitu ∞); podobně pro derivace.

Hodnoty vyšetřovaných funkcí jsou čísla z $\mathbf{E}_1$ nebo z $\mathbf{K}_1$; vzdálenost takových dvou čísel x, y měřím ovšem číslem $|x - y|$ (neužívám tedy redukovaných metrik ϱ^*, $^*\varrho$ z kap. VI, § 4, příkl. 1, 2). Ve shodě s tím značí slova „Posloupnost funkcí f_n konverguje k f stejnoměrně v množině M" toto:

Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $(x \in M, n \in \mathbf{N}, n \geqq n_0) \Rightarrow$ $\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Podobně stejnoměrná spojitost funkce f v množině M značí, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(x \in M, \ \ y \in M, \ \ \|x - y\| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

Místo $\|x - y\|$ lze ovšem psáti $\max\limits_{1 \leqq i \leqq r} |x_i - y_i|$.

Pro čtenáře, kterým se v kap. I, § 8, pozn. 5 snad nelíbilo, že pro kartézské součiny vlastně neplatil asociativní zákon (obešli jsme to jakýmsi „ztotožňováním"), podotýkám, že u prostorů $\mathbf{E}_r$ se můžeme této obtíži vyhnouti takto: Definuji $\mathbf{E}_r$ jako množinu všech r-členných posloupností $[x_1, \ldots, x_r]$ konečných reálných čísel. Je-li na př. $A \subset \mathbf{E}_r$, $B \subset \mathbf{E}_s$, $C \subset \mathbf{E}_t$, definuji $A \times B \times C$ jako množinu všech posloupností $[x_1, x_2, \ldots, x_{r+s+t}]$ takových, že $[x_1, \ldots, x_r] \in A$, $[x_{r+1}, \ldots, x_{r+s}] \in B$, $[x_{r+s+1}, \ldots, x_{r+s+t}] \in C$. Speciálně $\mathbf{E}_r \times \mathbf{E}_s \times \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{r+s+t}$, $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_1 \times$ $\times \ldots \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_r$ (r činitelů vlevo) a pod. Je zřejmo, že při této definici platí asociativní zákon: $(A \times B) \times C = A \times B \times C = A \times$ $\times (B \times C)$ a pod. Podobně lze postupovati u $\mathbf{K}_r = \mathbf{K}_1 \times \ldots \times \mathbf{K}_1$ nebo u prostorů $\mathbf{E}_1^* \times \ldots \times \mathbf{E}_1^*$, $^*\mathbf{K}_1 \times \ldots \times {}^*\mathbf{K}_1$ a u jejich částí.

Podotkněme ještě, že $\mathbf{E}_r$, $\mathbf{K}_r$ jsou separabilní úplné prostory (viz def. 30 a 18). Každá množina, uzavřená v $\mathbf{E}_r$ (resp. v $\mathbf{K}_r$), je tedy také úplná (věta 148). Množina $M \subset \mathbf{E}_r$ (nebo $M \subset \mathbf{K}_r$) je kompaktní tehdy a jen tehdy, je-li omezená a uzavřená (věta 156).

Budeme užívati znaků O, o ve smyslu kap. VI, § 13 (napíši-li na př. $f(x) = O(g(x))$ pro $x \to c$, míním tím „pro $x \to c$ v $\mathbf{E}_r$"). Bod $[0, 0, \ldots, 0] \in \mathbf{E}_r$ budeme nazývati **počátkem** nebo **nulovým bodem** v $\mathbf{E}_r$; mohli bychom jej značit o_r, ale budeme jej značiti prostě o, bez obavy, že by došlo k záměně na př. mezi $o_2 = [0, 0]$ a $o_3 = [0, 0, 0]$ nebo k záměně se symbolem $o(g(x))$.

Značíme-li určitou funkci znakem f, značíme její hodnotu v bodě x znakem $f(x)$ nebo $f(x_1, \ldots, x_r)$. Často si však dovolujeme „licenci" a užíváme posledních dvou znaků i pro funkci, píšíce na př.: „funkce $x_1 x_2^2 \sin (x_1 x_2 x_3)$" a pod.

§ 1. Parciální derivace (viz též **DI**, kap. XIII, § 3). Budiž f reálná funkce r proměnných, definovaná v bodě $a = [a_1, \ldots, a_r]$. Zaveďme funkci g jedné proměnné, definovanou rovnicí $g(x_j) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_r)$ (pokud pravá strana má smysl). Existuje-li derivace $g'(a_j)$, nazýváme číslo $g'(a_j)$ parciální derivací funkce f podle j-té proměnné v bodě a (tato derivace může také býti nevlastní, ale od tohoto okamžiku budeme už míniti výhradně vlastní derivace). Tato parciální derivace závisí na a, je to tedy jistá funkce r proměnných, označíme ji třeba znakem f_j a nazveme ji prostě **parciální derivací** (1. řádu) funkce f podle j-té proměnné; její hodnotu v bodě x (nebo a, nebo z, ...) značíme pak ovšem $f_j(x)$ (nebo $f_j(a)$, nebo $f_j(z)$, ...). Tato funkce f_j může míti v některých bodech opět derivaci na př. podle k-té proměnné, kterou potom značíme $f_{j,k}$ nebo f_{jk}, to je t. zv. parciální derivace druhého řádu funkce f, a to (napřed) podle j-té, potom podle k-té proměnné. Obdobně můžeme definovati a značiti parciální derivace vyšších řádů. Tohoto označení někdy budeme užívat; ale někdy je nepohodlné, poněvadž na př. indexy potřebujeme také k tomu, abychom rozlišovali různé funkce (a bylo by trochu drahé, tisknout na př. indexy, znamenající derivování, zelenou barvou). Proto zavádíme často jiná označení, známá čtenáři z **DI**, kap. XIII, § 3. Značíme-li hodnoty funkce f znakem $f(x)$ nebo $f(x_1, \ldots, x_r)$,

píšeme místo f_j, $f_{j,k}$ často $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ nebo f'_{x_j}, $f''_{x_j x_k}$ nebo f_{x_j}, $f_{x_j x_k}$ (to jsou tedy funkce).[1]) Hodnoty těchto derivací v bodě $x = [x_1, \ldots, x_r]$ značíme pak ovšem na př. $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \, \partial x_k}$ nebo $\dfrac{\partial^2 f(x_1, \ldots, x_r)}{\partial x_j \, \partial x_k}$.
Někdy si dovolujeme ještě další licenci a označujeme na př. posledním znakem funkci $f_{j,k}$ a nikoliv hodnotu $f_{j,k}(x)$. Čtenáři je právě tento způsob (ne zcela důsledný) běžný z **DI**, kde jsme ho převážně užívali; na př. je mu jasné, co rozumíme rovnicí

$$\frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} (\sin (x^2yz)) = 2xz \cos (x^2yz) - 2x^3yz^2 \sin (x^2yz) .$$

Hrozí-li někde nedorozumění, pomáháme si připojováním vysvětlujících symbolů; na př. $\left[\dfrac{\partial^2 f(t, x, z)}{\partial x \, \partial t}\right]_{\substack{t=0\\ x=2\\ z=1}}$ je rozhodně jasnější než $\dfrac{\partial^2 f(0, 2, 1)}{\partial x \, \partial t}$; ovšem zcela jasný je zde též symbol $f_{21}(0, 2, 1)$. Víte z **DI**, kap. XIII, § 4, příkl. 1, že funkce r proměnných, jež má v nějakém bodě parciální derivace (1. řádu) podle všech proměnných, nemusí býti v tom bodě spojitá, je-li $r > 1$. Napišme ještě explicite definici parciální derivace v bodě $x = [x_1, \ldots, x_r]$:

$$(1) \qquad f_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_r)}{\partial x_j} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_r) - f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_r)).$$

Týmž způsobem definujeme (a označujeme) parciální derivace komplexní funkce reálných proměnných $f = \varphi + i\psi$; definujeme $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ rovnicí (1) nebo — což je totéž — rovnicí $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j} + i \dfrac{\partial \psi}{\partial x_j}$. Abychom

[1]) V tomto označení je jistá nedůslednost: Jestliže f je funkce dvou proměnných a napíši-li znak f_x, bude tím čtenář asi rozuměti derivaci funkce f podle první proměnné (představuje si asi označení $f(x, y)$). Ale někdy se myslí na př. na označení $f(t, x)$, a potom se znakem f_x míní derivace podle druhé proměnné. Proto budeme těchto označení užívat jen tam, kde nedorozumění je vyloučeno.

Čtenář zná také z **DI** označení typu

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x_1^3 \, \partial x_2^2} = \frac{\partial^5 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_1 \partial x_2 \partial x_2} \text{ a pod.}$$

nemusili vylučovati funkce jedné proměnné ($r = 1$), připouštíme i pro ně znaky $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dots$ vedle obvyklejších $\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x}, \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d} x^2}, \dots$

Dokážeme nyní větu, analogickou větě o přírůstku funkce (věta 133 v **DI**):

Věta 182. *Budiž $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ reálná funkce, mající parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ $(j = 1, \dots, r)$ v jistém intervalu I. Buďte $a = [a_1, \dots, a_r]$, $b = [b_1, \dots, b_r]$ dva body z I. Potom existují body $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(r)}$ $(\xi^{(j)} = [\xi_1^{(j)}, \dots, \xi_r^{(j)}])$ s těmito vlastnostmi:*

$$f(b) - f(a) = \sum_{j=1}^{r} (b_j - a_j) \frac{\partial f(\xi^{(j)})}{\partial x_j}, \tag{2}$$

$$\operatorname{Min}(a_k, b_k) \leqq \xi_k^{(j)} \leqq \operatorname{Max}(a_k, b_k) \text{ pro } j = 1, \dots, r;\ k = 1, \dots, r.$$

Načrtněte si obrázek pro $r = 2$, $r = 3$.

Důkaz. Jest

$$f(b) - f(a) = \tag{3}$$

$$= \sum_{j=1}^{r} (f(b_1, \dots, b_j, a_{j+1}, \dots, a_r) - f(b_1, \dots, b_{j-1}, a_j, \dots, a_r)).$$

Pro každé j má funkce

$$g_j(\xi) = f(b_1, \dots, b_{j-1}, \xi, a_{j+1}, \dots, a_r)$$

derivaci v $\langle a_j, b_j \rangle$[2]) (a je tam tedy spojitá). Podle věty 133 v **DI** je tedy j-tý sčítanec v (3) roven

$$g_j(b_j) - g_j(a_j) = (b_j - a_j)\, g_j'(\zeta_j) = (b_j - a_j) \frac{\partial f(\xi^{(j)})}{\partial x_j},$$

kde $\xi^{(j)} = [b_1, \dots, b_{j-1}, \zeta_j, a_{j+1}, \dots, a_r]$, a ζ_j leží mezi a_j, b_j. Stačí nyní dosadit do (3).

Odtud plynou dva důsledky:

Věta 183. *Parciální derivace 1. řádu funkce f buďte omezené v otevřené množině M. Potom f je spojitá v M.*

Důkaz. Budiž $a \in M$. Je-li b dosti blízko a, platí (2) a odtud ihned $\lim_{b \to a} f(b) = f(a)$.

[2]) Pro $b_j < a_j$ bych měl psáti $\langle b_j, a_j \rangle$; pro $b_j = a_j$ je j-tý člen v (3) roven nule.

Věta 184. *Pro funkci* $f(x_1, \ldots, x_r)$ *budiž* $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_r} = 0$ *ve všech bodech otevřené souvislé množiny* M. *Potom* f *je konstantní v* M.

Poznámka 1. Budiž $M = (0, 1) \cup (2, 3)$; $f(x) = 0$ v $(0, 1)$, $f(x) = 1$ v $(2, 3)$. Zde je $f' = 0$ v M, ale f není konstantní v M. Ovšem M není souvislá; předpoklad o souvislosti je tedy podstatný.

Důkaz. Budiž předně M otevřený interval. Buďte a, b dva body z M. Vzorec (2) ihned dává $f(b) = f(a)$, takže f je konstantní v M.

Vezměme za druhé obecný případ. Buďte opět a, b dva body z M. Podle věty 172 existují otevřené intervaly $I_1, \ldots, I_n$ tak, že $a \in I_1$, $b \in I_n$, $I_j \subset M$, $I_j I_{j+1} \neq \emptyset$. V každém I_j je f rovno jisté konstantě c_j. Ve společném bodě intervalů I_j, I_{j+1} je $f(x) = c_j$, $f(x) = c_{j+1}$, tedy $c_j = c_{j+1}$, tedy $f(a) = c_1 = c_2 = \ldots = c_n = f(b)$.

Důsledek. Mají-li funkce f, g v otevřené souvislé množině M stejné parciální derivace 1. řádu (stále ovšem míním vlastní derivace), je rozdíl $f - g$ konstantní v M.

Příklad 1. Budiž f funkce r proměnných v oboru $B \subset \mathbf{E}_r$, kde B je otevřená, a nechť funkce f nezávisí na posledních $r - s$ proměnných ($1 \leqq s < r$)[2a]) (viz kap. VI, § 10, pozn. 10). To tedy znamená toto: Je-li A „projekce" množiny B, t. j. množina oněch bodů $[x_1, \ldots, x_s]$, k nimž existuje aspoň jeden systém $x_{s+1}, \ldots, x_r$ tak, že $[x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_r] \in B$, potom existuje funkce g v oboru A tak, že

$$[x_1, \ldots, x_r] \in B \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_r) = g(x_1, \ldots, x_s) .$$

Podle kap. VI, § 10, pozn. 8 je A rovněž otevřená.

Snadno dokážeme: f má v B všechny parc. derivace až do n-tého řádu tehdy a jen tehdy, má-li g v A všechny parciální derivace až do n-tého řádu, načež platí toto:

Je-li některé z čísel $j_1, \ldots, j_m$ ($m \leqq n$) větší než s, je

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}} = 0 \text{ v } B .$$

[2a]) Také se říká, že f závisí jen na prvních s proměnných.

Jsou-li však $j_1, \ldots, j_m$ nejvýše rovna s, je pro každé $x = [x_1, \ldots, x_r] \in B$

$$\frac{\partial^m f(x_1, \ldots, x_r)}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}} = \frac{\partial^m g(x_1, \ldots, x_s)}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}} .$$

Pro $n = 1$ plyne důkaz ihned z rovnice (1): poslední závorka vpravo je nula pro $j > s$, a je rovna obdobnému rozdílu pro funkci g, je-li $j \leqq s$. Další důkaz indukcí podle n.

§ 2. Totální diferenciál. Definujme podobně, jako jsme to učinili pro $r = 2$ v **DI**, kap. XIII, § 4:

Definice 37. *Budiž f funkce r proměnných, definovaná v jistém okolí bodu $a = [a_1, \ldots, a_r]$. Zvolme čísla $A_1, \ldots, A_r$ a definujme funkci η (píšeme $\eta(h) = \eta(h_1, \ldots, h_r)$) rovnicemi*

$$f(a + h) - f(a) = A_1 h_1 + \ldots + A_r h_r + \|h\| \cdot \eta(h) , \tag{4}$$

$$\eta(o) = 0 .\text{[3]} \tag{5}$$

Lze-li čísla $A_1, \ldots, A_r$ voliti tak, že funkce η je spojitá v bodě o (t. j. že $\lim\limits_{h \to o} \eta(h) = 0$), nazýváme funkci bodu h, danou výrazem

$$A_1 h_1 + \ldots + A_r h_r ,\text{[4]} \tag{6}$$

úplným nebo totálním diferenciálem funkce f v bodě a a říkáme, že f má totální diferenciál v bodě a.

Poznámka 1. Užijeme-li symbolu o z kap. VI, § 13, můžeme definici 37 vysloviti stručněji též takto: Funkci bodu h, danou výrazem (6), nazýváme totálním diferenciálem funkce f v bodě a, jestliže je

$$f(a + h) - f(a) = A_1 h_1 + \ldots + A_r h_r + o(\|h\|) \text{ pro } h \to o . \tag{7}$$

Neboť tato rovnice neznamená nic jiného, než že její poslední člen, dělený $\|h\|$ — což je právě $\eta(h)$ z rovnice (4) — má pro $h \to o$ limitu 0.

Z (7) je vidět, že smysl definice 37 by se nezměnil, kdybychom normu $\|h\|$ nahradili některou z norem, uvedených na počátku této kapitoly. Neboť okolnost, že pro nějakou funkci g je $g(h) = o(\|h\|)$,

[3]) Pro $h = o$ není $\eta(h)$ rovnicí (4) definováno — rovnice je splněna, ať volím $\eta(o)$ jakkoliv.

[4]) Při čemž A_j jsou tak volena, že η je spojitá v bodě o.

t. j. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(h)}{\|h\|} = 0$, znamená totéž, ať pod normou $\|h\|$ rozumíme $\operatorname*{Max}\limits_{1\leqq j\leqq r} |h_j|$ či $(\sum\limits_{j=1}^{r} |h_j|^p)^{\frac{1}{p}}$, kde $p \geqq 1$, neboť podíl těchto čísel leží v intervalu $\left\langle \dfrac{1}{r}, 1 \right\rangle$ (viz nerovnosti (8) v kap. VI, § 1, příkl. 3).

Poznámka 2. Podrobný výklad k této definici (pro $r = 2$) byl podán v **DI**, kap. XIII, § 4; tam jsme v definici 33 užili normy $|h_1| + \ldots + |h_r|$, ale víme, že na tom nezáleží. Definice 37 se užívá také tehdy, je-li f komplexní funkce r reálných proměnných (viz k tomu pozn. 3). U funkcí jedné proměnné znamená existence diferenciálu (slovo „totální" se pro $r = 1$ obyčejně vynechává) v bodě a totéž jako existence vlastní derivace $f'(a)$ (viz **DI**, kap. VIII, § 4).

Věta 185. *Je-li výraz* (6) *totálním diferenciálem funkce f v bodě a, je*

$$A_j = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right]_{x=a} \quad \textit{pro } 1 \leqq j \leqq r\,.$$

Důkaz. V (4) volte $h_1 = \ldots = h_{j-1} = 0$, $h_j \neq 0$, $h_{j+1} = \ldots = h_r = 0$, dělte číslem h_j a přejděte k limitě $h_j \to 0$.

Poznámka 3. Má-li tedy f totální diferenciál v bodě a, má tento diferenciál nutně tvar

$$\sum_{j=1}^{r} \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right]_{x=a} h_j\,, \tag{8}$$

a rovnici (7) lze psáti ve tvaru

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f(a)}{\partial x_j} h_j + o(\|h\|)\,. \tag{9}$$

(Nehrozí-li nedorozumění, označuji parc. derivaci funkce f v bodě a podle j-té proměnné znakem $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_j}$ a pod.)

Všimněme si ještě komplexních funkcí $f = \varphi + i\psi$ (φ, ψ reálné funkce). Aby f měla totální diferenciál v bodě a, k tomu je podle definice 37 a podle věty 185 nutno a stačí, aby funkce η, definovaná rovnicí

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f(a)}{\partial x_j} h_j + \|h\|\, \eta(h)\,,$$

měla pro $h \to o$ limitu 0. Rozepíšeme-li zde reálnou a imaginární část (píšíce $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, η_1, η_2 reálné), obdržíme

$$\varphi(a + h) - \varphi(a) = \sum \frac{\partial\varphi(a)}{\partial x_j} h_j + \|h\| \eta_1(h) ,$$

$$\psi(a + h) - \psi(a) = \sum \frac{\partial\psi(a)}{\partial x_j} h_j + \|h\| \eta_2(h) .$$

Ale $\lim \eta(h) = 0$ tehdy a jen tehdy, je-li $\lim \eta_1(h) = \lim \eta_2(h) = 0$. Tedy: f má v bodě a totální diferenciál tehdy a jen tehdy, mají-li φ, ψ v bodě a totální diferenciál, načež totální diferenciál (8) se vyjádří takto totálními diferenciály funkcí φ, ψ:

$$\sum \frac{\partial f(a)}{\partial x_j} h_j = \sum \frac{\partial\varphi(a)}{\partial x_j} h_j + i \sum \frac{\partial\psi(a)}{\partial x_j} h_j .$$

Věta 186. *Má-li f v bodě a totální diferenciál, je f spojitá v bodě a.*

Důkaz. Z (7) plyne $\lim\limits_{h \to o} f(a + h) = f(a)$.

Věta 187. *Jsou-li parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ $(j = 1, \ldots, r)$ spojité v bodě $a = [a_1, \ldots, a_r]$, má funkce f v bodě a totální diferenciál.*

Důkaz. Parciální derivace existují jistě v jistém okolí bodu a. Pro dosti malé $\|h\|$ platí tedy (2), kde klademe $b = a + h$. Ze spojitosti derivací plyne $\frac{\partial f(\xi^{(j)})}{\partial x_j} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]_{x=a} + o(1)$ pro $h \to o$, takže podle (2) je (vzhledem k nerovnosti $|h_j| \leqq \|h\|$) $f(a + h) - f(a) = = \sum\limits_{j=1}^{r} \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_j} + o(1)\right) h_j = \sum\limits_{j=1}^{r} \frac{\partial f(a)}{\partial x_j} h_j + o(\|h\|)$, což je (7).

Poznámka 4. Mezi f, g budiž týž vztah jako v § 1, příkl. 1, t. j.

$$f(x_1, \ldots, x_r) = g(x_1, \ldots, x_s) .$$

Potom platí: f má totální diferenciál v bodě $a = [a_1, \ldots, a_r] \in B$ tehdy a jen tehdy, má-li g totální diferenciál v bodě $[a_1, \ldots, a_s] = a'$, načež totální diferenciál funkce f v bodě a je

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial g(a')}{\partial x_j} h_j , \tag{10}$$

Důkaz: Jest — kladu-li $h' = [h_1, \ldots, h_s]$ —

$$f(a + h) - f(a) = g(a' + h') - g(a') . \tag{11}$$

I. Má-li g v a' totální diferenciál, je

$$g(a' + h') - g(a') = \Phi(h') + o(\|h'\|) , \tag{12}$$

kde $\Phi(h')$ je výraz (10). Ježto $\|h'\| \leqq \|h\|$ a ježto pro $h' = o$ je v (11) vpravo i vlevo nula, je poslední člen v (12) $o(\|h\|)$, a tedy

$$f(a + h) - f(a) = \Phi(h') + o(\|h\|) . \tag{13}$$

II. Má-li f v a totální diferenciál, volme $h_1, \ldots, h_s$ libovolně, $h_{s+1} = \ldots = h_r = 0$, načež z (9) a z příkl. 1 v § 1 plyne rovnice (13), což je totožné s (12).

Poznámka 5. Budiž $a = [a_1, \ldots, a_r]$. Z funkce f (r proměnných) vytvořme funkci g (s proměnných, $s \leqq r$) rovnicí

$$g(x_1, \ldots, x_s) = f(x_1, \ldots, x_s, \ a_{s+1}, \ldots, a_r) . \tag{14}$$

Totální diferenciál funkce g v bodě $[a_1, \ldots, a_s]$ — existuje-li — nazývá se parciálním diferenciálem funkce f v bodě $[a_1, \ldots, a_r]$ vzhledem k proměnným $x_1, \ldots, x_s$ (nebo: vzhledem k první až s-té proměnné). To tedy znamená (píši-li $h' = [h_1, \ldots, h_s]$), že jest (pro $h' \to o$)

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, \ldots, a_s + h_s, \ a_{s+1}, \ldots, a_r) - f(a_1, \ldots, a_r) = \\ = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial f(a)}{\partial x_j} h_j + o(\|h'\|) . \end{aligned} \tag{15}$$

Existuje-li v bodě a parciální diferenciál vzhledem k $x_1, \ldots, x_s$, existuje též parciální diferenciál vzhledem k $x_1, \ldots, x_{s-1}$ v bodě a (důkaz: v (15) klaďme $h_s = 0$); parciální diferenciál vzhledem k $x_1, \ldots, x_r$ znamená totéž jako totální diferenciál. Existence parciálního diferenciálu vzhledem k jedné proměnné x_1 (v bodě a) značí totéž jako existence $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ v bodě a.[5])

Přirozeně, že parciální diferenciály definujeme obdobně, jestliže jde o jiné proměnné než je právě prvních s proměnných.

[5]) Neboť u funkcí jedné proměnné značí existence totálního diferenciálu totéž jako existence derivace.

Poznámka 6. Je-li $f(x_1, \ldots, x_r)$ funkce závislá „jen na $x_1, \ldots, x_s$" (ve smyslu pozn. 4), platí toto: funkce f má v bodě a totální diferenciál tehdy a jen tehdy, má-li tam parciální diferenciál vzhledem k $x_1, \ldots, x_s$, načež oba tyto diferenciály jsou dány týmž výrazem $f_1(a)\, h_1 + \ldots + f_s(a)\, h_s$ (v případě totálního diferenciálu jest ovšem tento výraz pojímati jako funkci r proměnných, nezávislou na $h_{s+1}, \ldots, h_r$).

Poznámka 7. Všechny dosavadní výsledky tohoto paragrafu platí i pro komplexní funkce (stačí, aplikujeme-li je zvlášť na reálnou a zvlášť na imaginární část).

Poznámka 8. Místo „totální diferenciál" budeme pro zkrácení obyčejně říkati „diferenciál".

Poznámka 9. Podejme ještě jednu geometricky zabarvenou interpretaci pojmu totálního diferenciálu **reálné** funkce f. Graf této funkce je dán rovnicí

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_r)\,, \tag{16}$$

t. j. je to množina těch bodů $[x_1, \ldots, x_r, y] \in \mathsf{E}_{r+1}$, které vyhovují této rovnici. Grafem lineární funkce $A_1x_1 + \ldots + A_rx_r + A_0$ je „nadrovina", daná rovnicí

$$y = A_1x_1 + \ldots + A_rx_r + A_0\,. \tag{17}$$

Zvolme bod $a = [a_1, \ldots, a_r]$, sestrojme bod $P = [a_1, \ldots, a_r, f(a)]$ (ležící v grafu funkce f) a ptejme se, zda existuje nadrovina tvaru (17), procházející bodem P, která se přimyká ke grafu (16) v okolí bodu a tak těsně, že

$$f(x) - (A_1x_1 + \ldots + A_rx_r + A_0) = o(\|x - a\|) \tag{18}$$

pro $x \to a$; takovou nadrovinu, existuje-li, nazveme **tečnou nadrovinou** ke grafu funkce f v bodě P.[6]) Ale (ježto (17) prochází bodem P) rovnice (17) má nutně tvar

$$y = A_1(x_1 - a_1) + \ldots + A_r(x_r - a_r) + f(a)\,,$$

takže (18) lze též psáti

$$f(x) - f(a) - A_1(x_1 - a_1) - \ldots - A_r(x_r - a_r) = o(\|x - a\|)\,. \tag{19}$$

[6]) To je zobecnění otázky, položené v **DI**, kap. XI, § 3, I (str. 320 v 1. vyd., str. 326 v 2. vyd.).

Píšeme-li $x = a + h$, je (19) totožná s (7). Tedy: *hledaná tečná nadrovina existuje tehdy a jen tehdy, má-li f v bodě a totální diferenciál, načež rovnice tečné nadroviny je*

$$y = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f(a)}{\partial x_j} (x_j - a_j) + f(a) .$$

Cvičení

V těchto cvičeních výjimečně zavádím normu $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_r^2}$. Je-li $\|x\| = 1$, říkáme, že x je „směr". Všechny směry v E_r vyplňují kompaktní množinu, totiž „jednotkovou kulovou plochu" $\underset{x}{\mathcal{E}}(x_1^2 + \ldots + x_r^2 = 1)$. Jsou-li x, y dva různé body z E_r, je $\dfrac{y - x}{\|y - x\|}$ směr; říkáme mu směr od x do y. Je-li x bod, s směr, je množina všech bodů $x + ts$ (kde číslo t probíhá interval $(0, +\infty)$) polopřímka o počátečním bodě x.

1. Budiž $M \subset E_r$, $a \in MM'$. Sestrojme všechny směry od a do x, kde x probíhá množinu $M \dot{-} (a)$. Existuje-li posloupnost $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ tak, že $x^{(n)} \neq a$, $\lim x^{(n)} = a$, $x^{(n)} \in M$, $\lim \dfrac{x^{(n)} - a}{\|x^{(n)} - a\|} = s$, říkáme, že polopřímka $a + ts$ $(0 \leqq t < < +\infty)$ je polotečnou množiny M v bodě a. Ukažte, že v každém bodě $a \in MM'$ aspoň jedna taková polotečna existuje.

2. Budiž $f(x_1, \ldots, x_r)$ reálná funkce, spojitá v bodě a. Sestrojme graf této funkce, t. j. množinu $M \subset E_{r+1}$ všech bodů $[x_1, \ldots, x_r, f(x)]$. Dokažte: f má v bodě a totální diferenciál tehdy a jen tehdy, jestliže všechny polotečny množiny M v bodě $[a_1, \ldots, a_r, f(a)]$ vyplňují právě jednu nadrovinu tvaru $x_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} A_i(x_i - - a_i) + f(a)$ (tedy nikoliv rovnoběžnou s $(r + 1)$-ní osou souřadnic). Totální diferenciál v bodě a je pak forma $A_1 h_1 + \ldots + A_r h_r$. To je další geometrická interpretace pojmu totálního diferenciálu.

3. Předpoklad spojitosti v bodě a v cvič. 2 nelze vynechat. Příklad: Budiž $f(x, y) = 0$ všude, vyjma v bodech $x < 0$, $y = 0$, kde nechť $f(x, 0) = 1$. Vyšetřujte bod $a = [0, 0]$.

§ 3. Totální diferenciál složené funkce. Početní operace se zjednoduší, zavedeme-li trochu jinou formulaci pro existenci diferenciálu (E. Čech):

Věta 188. *Funkce f má v bodě $a = [a_1, \ldots, a_r]$ diferenciál*[7]) *tehdy*

[7]) Rozuměj ovšem: totální diferenciál. Viz pozn. 8 v § 2.

a jen tehdy, existují-li funkce r proměnných $B_1, \ldots, B_r$, spojité v bodě o a takové, že je

$$f(a + h) - f(a) = B_1(h)\, h_1 + \ldots + B_r(h)\, h_r \tag{20}$$

v jistém okolí počátku (t. j. pro dosti pro malá $\|h\|$). Totálním diferenciálem funkce f v bodě a je pak funkce bodu h, daná výrazem

$$B_1(o)\, h_1 + \ldots + B_r(o)\, h_r\,, \quad \textit{takže}^{8)} \quad \frac{\partial f(a)}{\partial x_j} = B_j(o)\,.$$

D ů k a z. I. Nechť tato podmínka je splněna. Ježto B_j jsou spojité v bodě o, je $B_j(h) = B_j(o) + o(1)$, takže z (20) plyne

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{j=1}^{r} B_j(o)\, h_j + o(\|h\|)\,, \tag{21}$$

což je (7) s $A_j = B_j(o)$.

II. Nechť f má diferenciál v bodě a, takže platí (4), (5), kde η je spojitá v bodě o. Tyto okolnosti se podle pozn. 1 v § 2 nezmění, jestliže pod normou $\|h\|$ rozumím na chvíli číslo $|h_1| + \ldots + |h_r|$.[9] Ale potom lze psáti (a to zřejmě i pro $h = o$)

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{j=1}^{r} (A_j + \eta(h) \operatorname{sgn} h_j)\, h_j\,,$$

a funkce $B_j(h) = A_j + \eta(h) \operatorname{sgn} h_j$ jsou spojité v bodě o.

Hlavní věta tohoto paragrafu je

Věta 189. *Buďte $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ reálné funkce s proměnných, mající diferenciál v bodě $a = [a_1, \ldots, a_s]$; položme $b_j = \varphi_j(a)$ $(j = 1, \ldots, r)$. Budiž f funkce r proměnných, mající diferenciál v bodě $b = [b_1, \ldots, b_r]$. Potom funkce F (s proměnných), definovaná rovnicí*

$$F(t) = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t))\,, \tag{22}$$

[8]) Viz větu 185.

[9]) Číslo $\eta(h)$ $(h \neq o)$ se tím změní: násobí se činitelem $\dfrac{\operatorname{Max} |h_j|}{|h_1| + \ldots + |h_r|}$, který však je nejméně roven $\dfrac{1}{r}$ a nejvýše 1.

má v bodě a diferenciál, který (jakožto funkce bodu $[h_1, \ldots, h_s]$) je dán výrazem[10])

$$(23) \qquad \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f(b)}{\partial x_j} \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \varphi_j(a)}{\partial t_k} h_k .$$

Tedy (věta 185) *je pro* $k = 1, \ldots, s$

$$(24) \qquad \frac{\partial F(a)}{\partial t_k} = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f(b)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j(a)}{\partial t_k} .$$

Poznámka 1. f smí být komplexní; φ_j musí být reálné, protože se jejich hodnoty dosazují do $f(x_1, \ldots, x_r)$ místo (reálných) čísel $x_1, \ldots, x_r$.

Poznámka 2. Důslednější je ovšem toto psaní rovnice (24):

$$(25) \qquad F_k(a) = \sum_{j=1}^{r} f_j(b)\, \varphi_{jk}(a) ,$$

kde F_k je derivace funkce F podle k-té proměnné, podobně f_j; naproti tomu φ_{jk} je derivace funkce φ_j podle k-té proměnné; tady je jenom nepříjemné, že indexy j (pořadové číslo funkce φ_j) a k (symbol derivování) mají zcela odlišný smysl. O jiných způsobech označení viz pozn. 3.

Důkaz věty 189. Pro dosti malá $\|h\|$, $\|H\|$ $(h = [h_1, \ldots, h_s]$, $H = [H_1, \ldots, H_r])$ je podle předpokladu a podle věty 188

$$(26) \qquad \varphi_j(a + h) - \varphi_j(a) = \sum_{k=1}^{s} A_{jk}(h)\, h_k \; (1 \leqq j \leqq r)$$

$(A_{jk}(h)$ spojité v bodě $h = o$, $A_{jk}(o) = \varphi_{jk}(a))$,[11])

$$(27) \qquad f(b + H) - f(b) = \sum_{j=1}^{r} B_j(H)\, H_j$$

$(B_j(H)$ spojitá v bodě $H = o$, $B_j(o) = f_j(b))$.

---

[10]) Zde vidíme trochu nedůslednost našeho označení. $\frac{\partial f(b)}{\partial x_j}$ značí parc. derivaci funkce f v bodě b podle j-té proměnné; $\frac{\partial \varphi_j(a)}{\partial t_k}$ značí parc. derivaci funkce φ_j v bodě a podle k-té proměnné. Ale proč jsme si zvolili právě písmena x, t?

[11]) Užívám označení z (25).

Dále je

$$F(a+h) - F(a) = f(\varphi_1(a+h), \ldots, \varphi_r(a+h)) - \\ - f(\varphi_1(a), \ldots, \varphi_r(a)) . \tag{28}$$

Zde je $\varphi_j(a) = b_j$; definujme funkce $H_j(h)$ rovnicemi $H_j(h) = \varphi_j(a + + h) - \varphi_j(a) = \varphi_j(a + h) - b_j$. Dosazením do (28) a (27) plyne

$$F(a+h) - F(a) = f(b_1 + H_1(h), \ldots) - f(b_1, \ldots) = \\ = \sum_{j=1}^{r} B_j(H_1(h), \ldots, H_r(h))\, H_j(h) .$$

Ale podle definice $H_j(h)$ a podle (26) vychází

$$F(a+h) - F(a) = \sum_{j=1}^{r} B_j(H_1(h), \ldots) \sum_{k=1}^{s} A_{jk}(h)\, h_k . \tag{29}$$

Uvážíme-li, že $H_j(h) = \varphi_j(a+h) - \varphi_j(a)$ jsou spojité v bodě o (neboť φ_j mají diferenciál v bodě a, viz větu 186), že $H_j(o) = \varphi_j(a) - \varphi_j(a) = = 0$, a že konečně B_j jsou funkce spojité v bodě $H = o$, vidíme, že koeficient při h_k v (29), t. j. součet

$$C_k(h) = \sum_{j=1}^{r} B_j(H_1(h), \ldots)\, A_{jk}(h) , \tag{30}$$

je funkcí spojitou v bodě $h = o$; ježto podle (29) je

$$F(a+h) - F(a) = \sum_{k=1}^{s} C_k(h)\, h_k ,$$

má podle věty 188 funkce F diferenciál v bodě a, a jest

$$F_k(a) = C_k(o) = \sum_{j=1}^{r} B_j(o)\, A_{jk}(o) = \sum_{j=1}^{r} f_j(b)\, \varphi_{jk}(a) ,$$

což je rovnice (25).

Poznámka 3. Mimo označení (24) nebo (25) se hojně užívá — hlavně v početní praxi — jiného označení, které teď vyložím. Nechť z závisí na r proměnných $x_1, \ldots, x_r$, pišme

$$z = f(x_1, \ldots, x_r) ; \tag{31}$$

dosadíme-li sem za x_j jisté funkce

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_s), \ldots, x_r = \varphi_r(t_1, \ldots, t_s) , \tag{32}$$

jeví se z jakožto funkce $t_1, \ldots, t_s$:

$$(33)\qquad z = F(t_1, \ldots, t_s) = f(\varphi_1(t_1, \ldots, t_s), \ldots, \varphi_r(t_1, \ldots, t_s)) .$$

Mají-li x_j jako funkce $t_1, \ldots, t_s$[12]) v jistém bodě $t = [t_1, \ldots, t_s]$[13]) diferenciál, a má-li z jakožto funkce $x_1, \ldots, x_r$[14]) v „příslušném" bodě $x = [x_1, \ldots, x_r]$, daném rovnicemi (32),[15]) diferenciál, má i z jakožto funkce $t_1, \ldots, t_s$[16]) v bodě t diferenciál a jest

$$(34)\qquad \frac{\partial z}{\partial t_k} = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial z}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_k} .$$

Při tom tato rovnice je míněna takto:

$$(35)\qquad \frac{\partial F(t)}{\partial t_k} = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j(t)}{\partial t_k}$$

nebo ještě jinak psáno:

$$(36)\qquad F_k(t) = \sum_{j=1}^{r} f_j(x)\, \varphi_{jk}(t) .$$

Označení (34) je velmi výrazné, vzorec se snadno pamatuje, a proto se ho často užívá. Není však dosti důsledné, a proto někdy může vésti k vážným nedorozuměním. V takových případech užijeme ovšem označení (35) nebo (36) nebo konečně podáme v textu příslušnou vysvětlivku. O označení (34) jsem dosti mluvil v **DI**, kap. XIII, § 5; čtenáři to jistě stačí.

Poznámka 4. Uveďme příklad, který se často vyskytuje. Budiž $r = s + q$ a budiž f funkce r proměnných, pišme

$$(37)\qquad f(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_q) .$$

Sem za y_i dosaďme $\psi_i(x_1, \ldots, x_s)$; dostaneme funkci F, definovanou rovnicí

$$(38)\quad F(x_1, \ldots, x_s) = f(x_1, \ldots, x_s, \psi_1(x_1, \ldots, x_s), \ldots, \psi_q(x_1, \ldots, x_s)) .$$

Chceme-li míti totéž označení jako ve větě 189, musíme psáti

$$\varphi_n(x) = x_n \ (n = 1, \ldots, s),\ \varphi_{s+m}(x) = \psi_m(x) \ (m = 1, \ldots, q) ,$$

[12]) T. j. funkce φ_j.
[13]) Ve větě 189 to byl bod a.
[14]) T. j. funkce f.
[15]) Ve větě 189 to byl bod b.
[16]) T. j. funkce F.

načež

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{m=1}^{q} \frac{\partial f}{\partial y_m} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k}. \tag{39}$$

Derivace funkcí ψ_m, F se počítají v bodě x, v němž se předpokládá existence diferenciálů funkcí ψ_m; derivace funkce f se počítají v bodě $[x_1, \ldots, x_s, \psi_1(x), \ldots, \psi_q(x)]$, v němž se předpokládá existence diferenciálu funkce f.

Způsob psaní (34) by zde vedl k nesrozumitelné formuli

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \frac{\partial z}{\partial x_k} + \sum_{m=1}^{q} \frac{\partial z}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_k}; \tag{40}$$

pomoci si můžeme třeba také tak, že vlevo píšeme $\dfrac{\partial z^*}{\partial x_k}$ nebo podobně, rozumějíce tím derivace funkce F.

Poznámka 5. Jestliže ve větě 189 předpokládáme pouze existenci parciálních diferenciálů funkcí φ_j vzhledem k prvním p proměnným ($1 \leqq p < s$), vyjde nám existence parciálního diferenciálu funkce F vzhledem k prvním p proměnným, a (24) platí pro $k = 1, \ldots, p$.[17] Předpokládáme-li pouze existenci parciální derivace funkcí φ_j podle, řekněme, l-té proměnné, platí (24) právě pro hodnotu $k = l$. U „vnější“ funkce f musíme ovšem zachovati předpoklad existence totálního diferenciálu (neboť změní-li se na př. t_l, mohou se změnit hodnoty všech funkcí φ_j).

Následují tři velmi důležité příklady.

Příklad 1. Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$ množina, mající tuto vlastnost: Je-li $x = [x_1, \ldots, x_r] \in M$ a je-li t libovolné kladné číslo, je též $tx = [tx_1, \ldots \ldots, tx_r] \in M$ (krátce: množina M se skládá z „polopřímek“, majících krajní bod v o). Pro jednoduchost předpokládejme, že o neleží v M. Budiž k reálné číslo. O funkci f (r proměnných) říkáme, že je *homogenní* k-tého stupně v M, jestliže pro každé $x \in M$ a každé $t > 0$ je $f(tx) = t^k f(x)$.

Nechť f je funkce r proměnných, mající totální diferenciál v každém

[17]) Důkaz: Do věty 189 místo funkcí φ_j dosadím funkce $\psi_j(t_1, \ldots, t_p) = \varphi_j(t_1, \ldots, t_p, a_{p+1}, \ldots, a_s)$.

bodě $x \in M$. Potom f je homogenní k-tého stupně v M tehdy a jen tehdy, jestliže pro každé $x \in M$ je

$$\sum_{j=1}^{r} x_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = kf(x) \tag{41}$$

(Euler).

Důkaz. I. Nechť f je homogenní k-tého stupně v M. Budiž $x \in M$ pevně zvoleno. Derivováním rovnice $f(tx) = t^k f(x)$ podle t dostáváme pro $t > 0$ (věta 189)

$$\sum_{j=1}^{r} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = kt^{k-1} f(x)\,, \tag{42}$$

kde $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ značí derivaci funkce f podle j-té proměnné v bodě tx. Dosazením $t = 1$ plyne (41).

II. Nechť platí (41) pro každé $x \in M$. Zvolme pevně $x \in M$, položme $F(t) = f(tx)$ a počítejme pro $t > 0$ derivaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(t^{-k}F(t)) = t^{-k-1}(tF'(t) - kF(t))\,. \tag{43}$$

Ale závorka vpravo je podle věty 189 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right.$ značí opět derivaci v bodě $\left.tx\right)$ $t \sum_{j=1}^{r} x_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - kf(tx)$. Ale tento výraz je roven nule podle (41) (neboť také bod tx leží v M).

Tedy je levá strana v (43) nula, t. j. $t^{-k}F(t) = t^{-k}f(tx)$ nezávisí na t; tedy $t^{-k}f(tx) = 1^{-k}f(1\,.\,x) = f(x)$, takže f je homogenní k-tého stupně v M.

Příklad 2. Jacobiovým nebo funkčním determinantem funkcí $f_1, \ldots, f_r$ podle proměnných $x_1, \ldots, x_r$ nazýváme determinant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f_2}{\partial x_r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{vmatrix} = \frac{D(f_1, \ldots, f_r)}{D(x_1, \ldots, x_r)}\,.$$

Pro $r = 1$ je ovšem $\dfrac{D(f)}{D(x)} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$. Přitom nevadí, jestliže vedle $x_1, \ldots, x_r$ závisí funkce $f_1, \ldots, f_r$ ještě na jiných proměnných; tak na př. píšeme

$$\frac{D(x + y + z, xyz)}{D(z, x)} = 1 \,.\, yz - 1 \,.\, xy \,.$$

Dokažme toto důležité pravidlo: Nechť reálné funkce $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ (r proměnných) mají diferenciál v bodě $a = [a_1, \ldots, a_r]$ a nechť funkce $f_1, \ldots, f_r$ (r proměnných) mají diferenciál v bodě $b = [b_1, \ldots \ldots, b_r]$, kde $b_j = \varphi_j(a)$. Položme $F_j(t_1, \ldots, t_r) = F_j(t) = f_j(\varphi_1(t), \ldots \ldots, \varphi_r(t))$. Potom jest

$$\left[\frac{D(F_1, \ldots, F_r)}{D(t_1, \ldots, t_r)}\right]_{t=a} = \left[\frac{D(f_1, \ldots, f_r)}{D(x_1, \ldots, x_r)}\right]_{x=b} \cdot \left[\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)}{D(t_1, \ldots, t_r)}\right]_{t=a} . \tag{44}$$

Důkaz: Podle věty 189 stojí vlevo determinant z prvků

$$\frac{\partial F_m(a)}{\partial t_k} = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f_m(b)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_j(a)}{\partial t_k} ;$$

věta o násobení determinantů dává ihned hledaný výsledek.

Vzorec (44) se obvykle psává ve tvaru

$$\frac{D(z_1, \ldots, z_r)}{D(t_1, \ldots, t_r)} = \frac{D(z_1, \ldots, z_r)}{D(x_1, \ldots, x_r)} \cdot \frac{D(x_1, \ldots, x_r)}{D(t_1, \ldots, t_r)} . \tag{45}$$

Je to zobecnění pravidla pro derivování složené funkce: $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Viz ještě cvič. 1, 2.

Příklad 3. Determinant

$$D = \begin{vmatrix} x_{11} \ldots x_{1r} \\ x_{21} \ldots x_{2r} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{r1} \ldots x_{rr} \end{vmatrix}$$

je lineární funkcí prvků j-tého řádku, koeficient při x_{jk} je jeho doplněk X_{jk}. Tedy $\dfrac{\partial D}{\partial x_{jk}} = X_{jk}$. Jsou-li x_{jk} funkce jedné proměnné t, mající v jistém bodě derivaci, je podle pravidla (24)

$$D'(t) = \sum_{j,k=1}^{r} x'_{jk} \,.\, X_{jk} \tag{46}$$

(čárka značí derivaci). Ale součet vpravo je zřejmě součet r determinantů: j-tý z nich vznikne z D tím, že se prvky j-tého řádku nahradí derivacemi $x'_{j1}, \ldots, x'_{jr}$. Závisí-li na př. pouze prvky prvního řádku na t (a ostatní jsou konstanty), je

$$D'(t) = \begin{vmatrix} x'_{11} \ldots x'_{1r} \\ x_{21} \ldots x_{2r} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{r1} \ldots x_{rr} \end{vmatrix} . \tag{47}$$

Roli řádků a sloupců možno ovšem zaměnit. Podobně, kdyby x_{jk} závisely na několika proměnných.

Ježto jsme užili věty 189, zdálo by se, že výsledek platí jen tehdy, jsou-li x_{jk} reálné funkce. Ale D je součet jistých součinů (se znamením $\pm$) prvků x_{jk}. Jde tedy vlastně jen o derivování součtu a součinů — ale příslušná pravidla platí i pro komplexní funkce (viz **DI**, text za větou 184). Tedy výsledek příkladu 3 platí i pro komplexní funkce x_{jk}; rozmyslete si to podrobně (viz cvič. 4).

Cvičení

1. Buďte dány funkce $f_j(x_1, \ldots, x_s)$ $(j = 1, \ldots, r)$, $\varphi_k(t_1, \ldots, t_r)$ $(k = 1, \ldots, s)$. Položme $F_j(t_1, \ldots, t_r) = F_j(t) = f_j(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_s(t))$. Za předpokladů obdobných jako v příkl. 2 jest

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_r)}{D(t_1, \ldots, t_r)} = \sum_{1 \leqq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leqq s} \frac{D(f_1, \ldots, f_r)}{D(x_{j_1}, \ldots, x_{j_r})} \frac{D(\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_r})}{D(t_1, \ldots, t_r)} . \tag{48}$$

(Pro $r > s$ značí pravá strana nulu; pro $r = s$ obdržíte výsledek příkladu 2.)

2. Rovnici (48) ověřte přímým výpočtem předně pro $f_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $f_2 = x_1x_2x_3x_4$, $\varphi_1 = t_1$, $\varphi_2 = t_1^2$, $\varphi_3 = t_1t_2$, $\varphi_4 = t_2^2$ $(r = 2, s = 4)$, za druhé pro $f_1 = x_1$, $f_2 = x_1^2$, $f_3 = x_1x_2$, $f_4 = x_2^2$, $\varphi_1 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$, $\varphi_2 = t_1t_2t_3t_4$ $(r = 4, s = 2)$.

3. Rovnici (41) ověřte přímým výpočtem pro homogenní funkce

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2}, \quad \frac{x_1x_2 \ldots x_r}{x_1^r + x_2^r + \ldots + x_r^r}, \quad \sqrt{x_1 + x_2},$$

$$\operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}, \quad \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_r}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2} .$$

4. Že výsledek příkl. 3 platí i pro komplexní funkce $x_{jk}(t)$, nahlédnete snadno takto: Derivujete-li D podle pravidla o derivování součtu a součinu, dostanete D' vyjádřeno jako jistý polynom P (v $2n^2$ proměnných x_{jk}, x'_{jk}). Vzorec (46), platný pro reálné funkce x_{jk}, nám dává D' rovněž jako jakýsi polynom v x_{jk}, x'_{jk}; tento polynom (t. j. pravá strana v (46)) se tedy rovná polynomu P pro všechny reálné hodnoty x_{jk}, x'_{jk} (snadno sestrojíte funkce x_{jk}, mající v bodě t libovolně předepsané hodnoty $x_{jk}(t), x'_{jk}(t)$); podle pozn. 1 v kap. VI, § 23 se tedy pravá strana v (46) rovná polynomu P, t. j. derivaci $D'(t)$, i pro komplexní funkce x_{jk}.

§ 4. Diferenciál funkce vzhledem k množině. Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$, $a = [a_1, \ldots, a_r] \in M$. Definujme množinu M_1 „posunutím“: $h \in M_1$ tehdy a jen tehdy, je-li $a + h \in M$. Funkce f (r proměnných) budiž definována buďto v celé množině M nebo alespoň v množině $M \,.\, \Omega(a, \delta)$, kde δ je jisté kladné číslo. Buďte $A_1, \ldots, A_r$ nějaká čísla a definujme funkci η (r proměnných) rovnicemi

$$\eta(o) = 0\,, \tag{49}$$

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{j=1}^{r} A_j h_j + \|h\|\, \eta(h) \tag{50}$$

pro $h \neq o$, $a + h \in M \,.\, \Omega(a, \delta)$. Jestliže η je spojitá vzhledem k M_1 v bodě o,[18]) nazýváme funkci bodu h

$$A_1 h_1 + \ldots + A_r h_r \tag{52}$$

diferenciálem funkce f v bodě a vzhledem k množině M.

Poznámka 1. Je-li a vnitřním bodem M, je to prostě totální diferenciál. Je-li na př.

$$M = \mathop{\mathcal{E}}_{x}(x_{s+1} = a_{s+1}, \ldots, x_r = a_r)\,,$$

souvisí náš pojem velmi úzce s pojmem parciálního diferenciálu vzhledem k $x_1, \ldots, x_s$. Zároveň je patrno, že v tomto případě $a + h \in M \Rightarrow h_{s+1} = \ldots = h_r = 0$, takže na volbě čísel $A_{s+1}, \ldots, A_r$ v (52) nezáleží (na rozdíl od totálního diferenciálu, kde čísla A_j jsou určena jednoznačně větou 185); viz o tom cvič. 3, 4.

[18]) Je-li $a \in M'$, značí to

$$\lim_{\substack{h \to o \\ a+h \in M}} \eta(h) = 0\,; \tag{51}$$

je-li a isolovaným bodem M, je vše triviální.

Poznámka 2. Je-li speciálně f funkce jedné proměnné ($r = 1$), $a \in MM'$, nazýváme limitu (existuje-li)

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ a+h \in M}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_M(a) \tag{53}$$

derivací funkce f v bodě a vzhledem k M (a to i když je to nevlastní limita).[19]) Pro $M = \langle a, +\infty)$ je to t. zv. derivace zprava, pro $M = (-\infty, a\rangle$ derivace zleva, které jsme zavedli již v **DI**, kap. VIII, § 1, def. 24.

Existence diferenciálu v bodě $a \in MM'$ vzhledem k M značí pro $r = 1$ zřejmě totéž jako existence vlastní derivace (53) (v (50) pro $r = 1$ stačí děliti číslem h_1 a přejíti k limitě).

Poznámka 3. Je-li $a \in N_1 \subset M$ a má-li f v bodě a vzhledem k M diferenciál (52), má také f v bodě a diferenciál (52) vzhledem k N_1. Podobně pro derivaci (ve smyslu pozn. 2).

Poznámka 4. Nechť f má v a vzhledem k M diferenciál (52). Definujme funkci g (r proměnných) takto: Pro $x \in M \,.\, \Omega(a, \delta)$ klaďme $g(x) = f(x)$, pro $x \in \Omega(a, \delta) \dot{-} M$ klaďme

$$g(x) = f(a) + A_1(x_1 - a_1) + \ldots + A_r(x_r - a_r) \,. \tag{54}$$

Tedy

$$g(a+h) - g(a) = A_1 h_1 + \ldots + A_r h_r + o(\|h\|) \,; \tag{55}$$

neboť pro $a + h \in M \,.\, \Omega(a, \delta)$ to plyne z (50), a pro $a + h \in \Omega(a, \delta) \dot{-} M$ člen $o(\|h\|)$ podle (54) vůbec odpadne. T. j. výraz (52) je totálním diferenciálem funkce g v bodě a. Definici funkce f lze tedy tak „rozšířit" na celou množinu $\Omega(a, \delta)$, že nová funkce bude míti v a totální diferenciál (52).

Věta 190. *Budiž $a \in M \subset \mathbf{E}_s$, $b \in N \subset \mathbf{E}_r$. Nechť reálná funkce $\varphi_j(t_1, \ldots, t_s)$ ($j = 1, \ldots, r$) má v a vzhledem k M diferenciál*

$$\sum_{k=1}^{s} A_{jk} h_k \,. \tag{56}$$

[19]) V případě nevlastní limity se omezuji na reálné funkce.

Nechť $b_j = \varphi_j(a)$, $b = [b_1, \ldots, b_r]$. *Nechť funkce* $f(x_1, \ldots, x_r)$ *má v* b *vzhledem k* N *diferenciál*

$$\sum_{j=1}^{r} B_j h_j \,. \tag{57}$$

Nechť existuje $\delta > 0$ *tak, že*

$$t \in M \,.\, \Omega(a, \delta) \Rightarrow [\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t)] \in N \,.$$

Potom „složená funkce"

$$F(t) = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t))$$

má v a *vzhledem k* M *diferenciál*

$$\sum_{j=1}^{r} B_j \sum_{k=1}^{s} A_{jk} h_k \,. \tag{58}$$

Tedy totéž formální pravidlo jako ve větě 189.

Důkaz. Ve smyslu pozn. 4 najdu funkce ψ_j tak, aby $t \in M\Omega(a, \delta) \Rightarrow$ $\Rightarrow \psi_j(t) = \varphi_j(t)$ a aby (56) byl totálním diferenciálem (v a) funkce ψ_j. Podobně najdu funkci g a číslo $\delta_1 > 0$ tak, aby $x \in N\Omega(b, \delta_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow g(x) = f(x)$ a aby (57) byl totálním diferenciálem (v b) funkce g. Složená funkce $G(t) = g(\psi_1(t), \ldots, \psi_r(t))$ má podle věty 189 v bodě a totální diferenciál (58). Ale pro všechna $t \in M$, jež jsou dostatečně blízká bodu a, je zřejmě $G(t) = F(t)$, a odtud plyne výsledek.

Poznámka 5. Pro $r = s = 1$ (a pro vlastní derivace) dostáváme speciálně rovnici

$$F'_M(a) = f'_N(b)\, \varphi'_M(a) \tag{58a}$$

($F(t) = f(\varphi(t))$, $b = \varphi(a)$; předpoklady si doplní čtenář).

Na př.: Jestliže φ zobrazuje interval M do intervalu N, jestliže φ má v každém bodě intervalu M konečnou derivaci vzhledem k M a jestliže funkce f má v každém bodě intervalu N konečnou derivaci vzhledem k N, potom platí (58a) v každém bodě $a \in M$. V tomto výsledku je na př. obsažena věta 11 z **JI**.

Cvičení

1. Buďte φ, f dvě funkce jedné proměnné (φ budiž reálná). Nechť φ má v bodě a derivaci zleva, $0 > \varphi'_-(a) > -\infty$, nechť f má v bodě $b = \varphi(a)$ konečnou derivaci zprava. Potom složená funkce $f(\varphi(t))$ má v bodě a derivaci zleva $f'_+(b)\,\varphi'_-(a)$. (Proč smíme užíti vzorce (58a)?) Vyšetřete, v kterých dalších případech (derivace zprava — zleva, derivace funkce φ kladná — záporná) dostanete obdobné výsledky.

2. Budiž (v prostoru E_2) M_1 první kvadrant (včetně hranice, t. j. množina všech bodů $[x, y]$, kde $x \geqq 0$, $y \geqq 0$; obdobně u ostatních kvadrantů), budiž M_2 druhý kvadrant atd. Budiž $f(x, y) = |x| + |y|$. Tato funkce má na př. v každém bodě uvnitř druhého kvadrantu totální diferenciál $-h_1 + h_2$; v každém bodě $[-a, 0]$ $(a > 0)$ má diferenciál $-h_1 + h_2$ vzhledem k M_2, $-h_1 - h_2$ vzhledem k M_3. V bodě $[0, 0]$ má vzhledem k M_1, M_2, M_3, M_4 postupně diferenciály $h_1 + h_2$, $-h_1 + h_2$, $-h_1 - h_2$, $h_1 - h_2$. Vyšetřete též ostatní body.

3. Budiž (v E_2) M parabola $y = x^2$; $f(x, y)$ nechť má totální diferenciál ve všech bodech množiny M. Potom všechny funkce $Ah_1 + Bh_2$, jež jsou v bodě $[x, x^2]$ diferenciály funkce f vzhledem k M, jsou dány podmínkou: B libovolné, $A = \dfrac{\partial f}{\partial x} + 2x\left(\dfrac{\partial f}{\partial y} - B\right)$; nejsou tedy A, B jednoznačně stanoveny.

4. Budiž $M \subset \mathsf{E}_3$; budiž $a \in M$ a nechť funkce $f(x_1, x_2, x_3)$ má v bodě a vzhledem k M totální diferenciál $A_1h_1 + A_2h_2 + A_3h_3$.

Cvič. 3 ukazuje, že A_1, A_2, A_3 nemusí být jednoznačně určena. Dokažte: α) Je-li a isolovaným bodem množiny M, lze A_1, A_2, A_3 volit libovolně. β) Má-li M v bodě a právě jednu polotečnu (viz cvič. k § 2) nebo právě dvě, ležící v jedné přímce, lze dvě z čísel A_i voliti libovolně, třetí je jimi určeno. γ) Leží-li všechny polotečny množiny M v bodě a v jedné rovině, ale nikoliv v jedné přímce, lze jedno z čísel A_i volit libovolně, ostatní dvě jsou jím určena. δ) Neleží-li jmenované polotečny v žádné rovině, jsou čísla A_i jednoznačně určena.

Zobecněte na funkce r proměnných.

§ 5. Diferenciální symbolika. Podle definice 37 a věty 185 má funkce f v bodě $x = [x_1, \ldots, x_r]$ totální diferenciál, jestliže pro $h = [h_1, \ldots, h_r] \to o$ je

$$f(x + h) - f(x) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} h_j + o(\|h\|) . \tag{59}$$

Výraz

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} h_j \tag{60}$$

je (při pevném x) funkcí bodu h, kterou jsme nazvali diferenciálem funkce f v bodě x. Budiž $M_1 \subset \mathsf{E}_r$ množina oněch bodů x, v nichž f má totální diferenciál. Potom výraz (60) se jeví funkcí dvou bodů x, h

(t. j. $2r$ proměnných) v oboru $M_1 \times \mathbf{E}_r$ (t. j. pro $x \in M_1$ a libovolné h). Tuto funkci (s oborem $M_1 \times \mathbf{E}_r$) nazveme (totálním) **diferenciálem funkce** f a označíme ji $\mathrm{d}f$.[20]) Hodnotu funkce $\mathrm{d}f$ v bodě $[x, h]$ bychom měli značit $\mathrm{d}f(x, h)$,[21]) ale bude pro nás pohodlnější psáti $\mathrm{d}_h f(x)$ ($x \in M_1$, h libovolné). Při pevném $x \in M_1$ je (60) funkcí bodu h; budeme ji značiti $\mathrm{d}f(x)$[21a]) (je to právě ta funkce, kterou jsme v def. 37 nazvali diferenciálem funkce f v bodě x). Při pevném h je naopak (60) funkcí bodu x v oboru M_1, a tuto funkci označíme $\mathrm{d}_h f$.

Zaveďme tyto speciální funkce $V_1, \ldots, V_r$ v oboru $\mathbf{E}_r$:

$$V_j(x_1, \ldots, x_r) = x_j \tag{61}$$

(prostě: Hodnota funkce V_j v libovolném bodě se rovná j-té souřadnici tohoto bodu). Funkci V_j můžeme říkati „j-tá nezávisle proměnná" (prostoru $\mathbf{E}_r$). Ze spojitosti parciálních derivací funkce V_j $\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_k}\right.$ je 0 pro $k \neq j$, 1 pro $k = j$) plyne pro každé $x \in \mathbf{E}_r$, $h \in \mathbf{E}_r$ existence totálního diferenciálu

$$\mathrm{d}_h V_j(x) = h_j\,. \tag{62}$$

Z (60) je tedy patrno, že je

$$\mathrm{d}f = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\mathrm{d}V_j = \sum_{j=1}^{r} f_j\,\mathrm{d}V_j \quad \text{v} \quad M_1 \times \mathbf{E}_r\,.^{22)} \tag{63}$$

Při tom jsme si dovolili malou „licenci": funkce $\frac{\partial f}{\partial x_j} = f_j$ musíme důsledně pojímati jako funkce dvou bodů x, h, „nezávislé" na h.

Až na tuto nepatrnou licenci (jež nemůže vésti k nedorozumění) je označení v (63) zcela důsledné. Ale v praxi by tato symbolika byla často těžkopádná a nevýrazná. Proto si často dovolujeme podobnou

---

[20]) Pozor! $\mathrm{d}f$ je definováno — podle naší definice — pouze v $M_1 \times \mathbf{E}_r$; ovšem výraz (60) může míti smysl i pro některá x neležící v M_1 (neboť se v bodě x může státi, že parciální derivace existují, ale diferenciál neexistuje — viz **DI**, kap. XIII, § 4, příkl. 1).

[21]) $\mathrm{d}f$ je nedělitelný znak, označující jistou funkci, podobně jako sin, lg a pod.

[21a]) Podle označení v kap. I, § 8, pozn. 3 bychom mohli též psáti $\mathrm{d}f^{x,*}$.

[22]) To znamená (viz kap. I, § 9), že rovnice platí po dosazení libovolného bodu $x \in M_1$, $h \in \mathbf{E}_r$.

licenci jako v označování funkcí. Místo „funkce f v oboru E_3, definovaná pro všechna reálná x, y, z rovnicí

(64) $$f(x, y, z) = x^2y - 3xyz\text{“}$$

říkáme často „funkce $x^2y - 3xyz$“. Podobně píšeme často

(65) $$\mathrm{d}(x^2y - 3xyz)$$

a míníme tím „$\mathrm{d}f$, kde f je funkce svrchu popsaná.“ Při tom ještě se někdy výrazem (65) míní diferenciál $\mathrm{d}f$, jindy diferenciál v určitém bodě (t. j. $\mathrm{d}f(x, y, z)$). Užíváme-li této licence, potom místo „j-té nezávisle proměnné“, t. j. místo funkce V_j, definované rovnicí (61), píšeme x_j, a místo diferenciálu j-té proměnné $\mathrm{d}V_j$ píšeme $\mathrm{d}x_j$, takže se psává

(66) $$\mathrm{d}f = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j$$

(licence vpravo), na př.

$$\mathrm{d}(x_1^2x_2 - x_1^3) = (2x_1x_2 - 3x_1^2)\,\mathrm{d}x_1 + x_1^2\,\mathrm{d}x_2\,,$$
$$\mathrm{d}\sin(t^2u) = 2tu\cos(t^2u)\,\mathrm{d}t + t^2\cos(t^2u)\,\mathrm{d}u$$

(licence na obou stranách).

Při tom ovšem, hrozí-li nedorozumění, je nutno podati vysvětlivky nebo se vrátit k důslednějšímu označení (63).

Diferenciální označení, jak uvidíme později, je velmi výhodné a umožňuje dalekosáhlé zmechanisování mnohých početních výkonů. Vezměme zatím jediný příklad. Má-li funkce f (r proměnných) v bodě x totální diferenciál, je[23])

(67) $$\mathrm{d}f(x) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j\,.$$

(Vpravo bych měl psáti $\mathrm{d}V_j(x)$; ale ježto $\mathrm{d}_hV_j(x) = h_j$ nezávisí na x, nehrozí nedorozumění, píši-li $\mathrm{d}V_j$, načež použiji „licence“ a píši $\mathrm{d}x_j$.)

(67) platí pro každé $x \in M_1$, což mohu psáti

(68) $$\mathrm{d}f = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \quad \text{v} \quad M_1 \times \mathsf{E}_r\,.$$

[23]) Do formule (66) dosazuji pevný bod x, kdežto bod h zůstává „proměnný“.

Položme nyní $z = f(x)$, t. j. hodnoty funkce f označujme z, a pišme (68) ve tvaru

$$\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial z}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \quad \text{v} \quad M_1 \times \mathbf{E}_r \tag{69}$$

(to vlastně není žádná nová „licence" — stačilo by funkci označit znakem z místo f).

Ale nyní si mysleme, že do rovnice $z = f(x) = f(x_1, \ldots, x_r)$ dosadíme za $x_1, \ldots, x_r$ podle vzorců

$$x_j = \varphi_j(t_1, \ldots, t_s)\,, \tag{70}$$

načež z se „jeví funkcí proměnných $t_1, \ldots, t_s$":

$$z = f(\varphi_1(t_1, \ldots, t_s), \ldots, \varphi_r(t_1, \ldots, t_s)) = F(t_1, \ldots, t_s) \tag{71}$$

(samé „licence" v psaní).

Má-li (reálná) funkce φ_j pro $j = 1, \ldots, r$ diferenciál v bodě t a má-li f diferenciál v „příslušném" bodě

$$x = [\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t)]\,, \tag{72}$$

má F v bodě t diferenciál, který podle věty 189 má pro každé h hodnotu

$$\mathrm{d}_h F(t) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \varphi_j(t)}{\partial t_k} h_k \right), \tag{73}$$

neboli

$$\mathrm{d}_h F(t) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \mathrm{d}_h \varphi_j(t)\,. \tag{74}$$

Je-li N množina oněch bodů t, v nichž svrchu zmíněné předpoklady jsou splněny, je tedy

$$\mathrm{d}F = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_j} \mathrm{d}\varphi_j = \sum_{j=1}^{r} f_j \, \mathrm{d}\varphi_j \quad \text{v} \quad N \times \mathbf{E}_s\,; \tag{75}$$

zde je jenom jedna licence: dosazuji-li do této formule určitý bod t, musím sestrojiti $f_j(x) = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}$, kde x je bod (72) (a ne snad $f_j(t)$). Při pevném $t \in N$ jsou levá i pravá strana lineární formy v $h_1, \ldots, h_s$.

Ale zde se obyčejně užívá této „licence". Ježto jsem $f(x)$ označil z, budu psáti $\frac{\partial z}{\partial x_j}$ místo $\frac{\partial f}{\partial x_j}$; ježto jsem sem za x_j dosadil $\varphi_j(t)$, budu psáti $\mathrm{d}x_j$ místo $\mathrm{d}\varphi_j$ (to by bylo v pořádku: stačilo by zvolit označení x_j místo φ_j). Ježto se po tomto dosazení z stane funkcí $t_1, \ldots, t_s$ (totiž $F(t)$), píši $\mathrm{d}z$ místo $\mathrm{d}F$, a dostávám (75) v obvyklém tvaru

$$\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial z}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \quad \text{v} \quad N \times \mathbf{E}_s . \tag{76}$$

Je to velmi výrazný tvar, ovšem vzhledem k mnoha „licencím" je nutno jej čísti opatrně. Vzhledem k tomu, že vpravo z značí f a vlevo z značí F, bylo by snad jasnější, psáti z^* místo F a napsati (76) ve tvaru

$$\mathrm{d}z^* = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial z}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \quad \text{v} \quad N \times \mathbf{E}_s . \tag{77}$$

Pozoruhodné je, že (69) i (76) mají týž tvar, ač jednou byly x_j „nezávisle proměnné" a po druhé to byly funkce „nezávisle proměnných" $t_1, \ldots, t_s$. To je důležitý zákon „invariantnosti formy totálního diferenciálu". Ovšem pozor na smysl! Dosadíme-li do (69) za x pevný bod z M_1, platí (69) pro všechna $h_1, \ldots, h_r$, t. j. pro všechny hodnoty „diferenciálů nezávisle proměnných" $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r$. Naproti tomu, dosadím-li do (76) (nebo zřetelněji do (77)) za t pevný bod z N, neplatí rovnice obecně pro všechny hodnoty $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r$, nýbrž pro všechny hodnoty „diferenciálů nezávisle proměnných" $\mathrm{d}t_1, \ldots, \mathrm{d}t_s$. Při pevně zvoleném $t \in N$ značí totiž rovnice (77) přesně toto: vztah

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{\partial z^*(t)}{\partial t_k} h_k = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial z(x)}{\partial x_j} \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial x_j(t)}{\partial t_k} h_k \tag{78}$$

platí pro všechna $h_1, \ldots, h_s$, a zde mohu psáti $h_k = \mathrm{d}t_k$, značím-li „nezávisle proměnné" $t_1, \ldots, t_s$ (aby se písmeno x nepletlo).

P ř í k l a d 1. Kladu-li $z = xy^2$, $x = u + v$, $y = uv$, je všude

$$\mathrm{d}z = y^2 \,\mathrm{d}x + 2xy \,\mathrm{d}y = (y^2 + 2xyv) \,\mathrm{d}u + (y^2 + 2xyu) \,\mathrm{d}v . \tag{79}$$

Spočítejte přímo: $z = (u + v)\,u^2v^2$,

$$dz = (3u^2v^2 + 2uv^3)\,du + (2u^3v + 3u^2v^2)\,dv\,. \tag{80}$$

Dosadíte-li do (79) $x = u + v$, $y = uv$, dostanete ovšem opět (80).

Poznámka 1. Budiž f funkcí r proměnných. Zjistíme-li, že v nějakém bodě x je

$$df(x) = A_1\,dx_1 + \ldots + A_r\,dx_r \tag{81}$$

(kde $A_1, \ldots, A_r$ — při pevně zvoleném x — jsou čísla) pro všechny hodnoty $dx_1, \ldots, dx_r$, potom nutně $A_j = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ pro $j = 1, \ldots, r$. Neboť levá strana v (81) je $\sum_{j=1}^{r} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}\,dx_j$, a volba $dx_1 = 1$, $dx_2 = 0, \ldots$, $dx_r = 0$ dává $A_1 = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}$, a podobně dále.

Jestliže na př. v jistém bodě $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ je

$$df(x) = 7dx_1 + 12dx_2 - dx_3\,, \tag{82}$$

je v tomto bodě

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 7\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 12\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_3} = -1\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0\,. \tag{83}$$

Jediná rovnice (82) zastupuje tedy čtyři rovnice (83).

Zároveň je z této poznámky vidět, proč nám musily koeficienty při du, dv vyjíti v (79) tytéž jako v (80).

Příklad 2 (dosti důležitý). Výpočtem parciálních derivací ihned dostaneme diferenciály těchto funkcí (u, v jsou nezávisle proměnné; A, B, m reálné konstanty): $d(Au + Bv) = A\,du + B\,dv$; $d(uv) = v\,du + u\,dv$; $d(u^m) = mu^{m-1}\,du$ $(u > 0)$, $d(u^v) = vu^{v-1}\,du + u^v \lg u\,dv$ $(u > 0)$, $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{1}{v}\,du - \dfrac{u}{v^2}\,dv = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

Podle zákona o invariantnosti formy totálního diferenciálu platí tedy tyto vzorce i tehdy, jsou-li u, v nějaké reálné funkce r proměnných, a to platí v těch bodech, v nichž u, v mají diferenciál. Na př. pro $r = 1$ máme $d(u(x)\,v(x)) = v(x)\,du(x) + u(x)\,dv(x)$; ježto $df(x) = f'(x)\,dx$, dostáváme (buďto tím, že dělíme dx nebo že klademe

$\mathrm{d}x = 1$) známé pravidlo $(u(x)\,v(x))' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$. (K důkazu jsme potřebovali jenom triviální fakt, že $\frac{\partial(uv)}{\partial u} = v$, $\frac{\partial(uv)}{\partial v} = u$.) Podobně dostáváme bez jakýchkoliv umělých obratů

$$(u(x)^{v(x)})' = v(x)\,u(x)^{v(x)-1}\,.\,u'(x) + u(x)^{v(x)}\lg u(x)\,.\,v'(x)\,.$$

Ale vzorce pro $\mathrm{d}(Au + Bv)$, $\mathrm{d}(uv)$, $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)$ (pro $v(a) \neq 0$), $\mathrm{d}(u^m)$ (pro celé m; pro $m \leqq 0$ nutno předpokládati $u(a) \neq 0$) platí i pro komplexní funkce u, v (r reálných proměnných) a komplexní konstanty A, B v takových bodech a, ve kterých u, v mají totální diferenciál. V tomto případě se ovšem nemůžeme opříti o větu 189 — musíme provésti důkaz přímo; bude to užitečné cvičení se symboly O, o. Nechť tedy u, v mají v bodě a diferenciál, takže (užívám stále rovnic tvaru (7))

$$u(a + h) - u(a) = \sum_{j=1}^{r} C_j h_j + o(\|h\|)\,,$$

$$v(a + h) - v(a) = \sum D_j h_j + o(\|h\|)\,.$$

Odtud ihned

$$(Au(a + h) + Bv(a + h)) - (Au(a) + Bv(a)) =$$
$$= \sum (AC_j + BD_j)\,h_j + o(\|h\|)\,,$$

čímž dokázán vzorec pro $\mathrm{d}(Au + Bv)$. Dále

$$u(a + h)\,v(a + h) - u(a)\,v(a) =$$
$$= u(a + h)(v(a + h) - v(a)) + v(a)(u(a + h) - u(a))\,;$$

ježto $u(a + h) = u(a) + o(1)$ (u je spojitá v bodě a podle věty 186), dostáváme vpravo

$$(u(a) + o(1))(\sum D_j h_j + o(\|h\|)) + v(a)(\sum C_j h_j + o(\|h\|))\,;$$

ježto $\sum D_j h_j = O(\|h\|)$, je poslední výraz roven $u(a) \sum D_j h_j +$ $+ v(a) \sum C_j h_j + o(\|h\|)$, čímž dokázán vzorec pro $\mathrm{d}(uv)$.

Konečně, je-li $v(a) \neq 0$, je $\frac{1}{v(a + h)} - \frac{1}{v(a)} = -\frac{v(a + h) - v(a)}{v(a)\,v(a + h)}$.

Ježto v je spojitá a různá od nuly v bodě a, je $\frac{1}{v(a + h)} = \frac{1}{v(a)} + o(1)$,

tedy $\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)} = -\frac{1}{v(a)}\left(\frac{1}{v(a)} + o(1)\right)(\sum D_j h_j + o(\|h\|)) =$
$= -\frac{1}{v^2(a)}\sum D_j h_j + o(\|h\|)$, čímž je dokázán vzorec $\mathrm{d}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{\mathrm{d}v}{v^2}$.
Odtud a ze vzorce pro $\mathrm{d}(uv)$ plynou obvyklým způsobem vzorce pro $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \mathrm{d}\left(u \cdot \frac{1}{v}\right)$, $\mathrm{d}(u^m)$ (m celé).

§ 6. Záměnnost parciálních derivací druhého řádu. Věta 191.

Budiž f funkce r proměnných ($r > 1$), $a \in \mathbf{E}_r$. Nechť funkce $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}$, $f_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}$ mají v bodě a parciální diferenciál vzhledem k prvním dvěma proměnným. Potom

$$f_{12}(a) = f_{21}(a) \tag{84}$$

Poznámka 1. Užívám ovšem označení

$$f_{lmn} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_l \partial x_m \partial x_n} \text{ a pod.}$$

Věta platí ovšem tím spíše, mají-li f_1, f_2 v bodě a totální diferenciál. V důkazu smím a budu předpokládati, že $r = 2$, neboť ostatní proměnné jsou během celé úvahy konstantní: $x_3 = a_3, \ldots, x_r = a_r$.

Důkaz. Ježto funkce f_1, f_2 mají v a diferenciál (předpokládám $r = 2$), existují tyto funkce v jistém okolí $\Omega(a, \delta)$. Pro $0 < h < \delta$ položme

$$F(h) = \frac{1}{h^2}\left(f(a_1 + h, a_2 + h) - f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2 + h) + f(a_1, a_2)\right). \tag{85}$$

Zvolme h a položme $f(x_1, a_2 + h) - f(x_1, a_2) = \varphi(x_1)$; věta o přírůstku funkce (**DI**, věta 133) dává

$$F(h) = \frac{1}{h^2}(\varphi(a_1 + h) - \varphi(a_1)) = \frac{1}{h}\varphi'(a_1 + \Theta_1 h) \quad (0 < \Theta_1 < 1),$$

$$F(h) = \frac{1}{h}\left(f_1(a_1 + \Theta_1 h, a_2 + h) - f_1(a_1 + \Theta_1 h, a_2)\right). \tag{86}$$

Ježto f_1 má v bodě $a = [a_1, a_2]$ totální diferenciál a ježto body $[\Theta_1 h, h]$, $[\Theta_1 h, 0]$ mají normu nejvýše h, je

$$f_1(a_1 + \Theta_1 h, a_2 + h) = f_1(a) + f_{11}(a)\,\Theta_1 h + f_{12}(a)\,h + o(h)\,,$$
$$f_1(a_1 + \Theta_1 h, a_2) = f_1(a) + f_{11}(a)\,\Theta_1 h + o(h)\,,$$

takže z (86) plyne $F(h) = f_{12}(a) + o(1)$, t. j.

$$\lim_{h \to 0+} F(h) = f_{12}(a)\,. \tag{87}$$

Položíme-li za druhé $f(a_1 + h, x_2) - f(a_1, x_2) = \psi(x_2)$, máme obdobně $(0 < \Theta_2 < 1)$

$$F(h) = \frac{1}{h^2}(\psi(a_2 + h) - \psi(a_2)) = \frac{1}{h}\psi'(a_2 + \Theta_2 h) =$$
$$= \frac{1}{h}(f_2(a_1 + h, a_2 + \Theta_2 h) - f_2(a_1, a_2 + \Theta_2 h))\,.$$

Odtud úplně podobně jako před tím (pouze úlohy první a druhé proměnné jsou vyměněny) plyne

$$F(h) = f_{21}(a) + o(1)\,,\quad \lim_{h \to 0+} F(h) = f_{21}(a)\,.$$

Srovnáním s (87) plyne (84).

V praxi je často užitečnější tato věta:

Věta 192. *Budiž f funkce r $(r > 1)$ proměnných. Nechť f_1, f_2 existují v jistém okolí $\Omega(a, \delta)$ bodu $a = [a_1, \ldots, a_r] \in \mathsf{E}_r$ a nechť f_{12} je spojitá v bodě a. Potom v bodě a je definována i f_{21} a jest*

$$f_{12}(a) = f_{21}(a)\,.\text{[24]} \tag{88}$$

Poznámka 2. Je zřejmo, že jsem mohl větu poněkud zobecnit: místo f bych mohl vyšetřovati pouze funkci dvou proměnných $f(x_1, x_2, a_3, \ldots, a_r)$. Zároveň je vidět, že se můžeme v důkazu omezit na případ $r = 2$, což učiníme (viz obdobnou pozn. 1).

Důkaz. Volím-li δ dosti malé, mohu dosáhnouti toho, že také funkce f_{12} (jež je spojitá v bodě $a = [a_1, a_2]$) je definována v $\Omega(a, \delta)$. Máme dokázati, že existuje

---

[24]) To je podstatné zobecnění věty 170 v **DI**, kde se existence parciální derivace f_{21} (a dokonce i její spojitost) v bodě a předpokládala.

$$(89) \qquad \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(f_2(a_1 + h, a_2) - f_2(a_1, a_2)\right)$$

a že má hodnotu $f_{12}(a)$.

Z existence f_2 plyne: Je-li $0 < |h| < \delta$, lze výraz za znamením limitním v (89) psáti

$$(90) \quad \lim_{k\to 0} \frac{1}{h}\,\frac{1}{k} \left(f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2 + k) + \right. \\ \left. + f(a_1, a_2)\right).$$

Označíme-li tedy výraz za limitním znamením v (90) znakem $F(h, k)$, máme dokázati, že

$$(91) \qquad \lim_{h\to 0} (\lim_{k\to 0} F(h, k)) = f_{12}(a).$$

Z (90) víme, že vnitřní limita v (91), t. j. $\lim\limits_{k\to 0} F(h, k)$, existuje pro $0 < |h| < \delta$. Podle příkl. 1 v kap. VI, § 11 stačí tedy dokázat, že existuje „dvojná" limita

$$(92) \qquad \lim_{\substack{[h,k]\to[0,0]\\ h\neq 0,\, k\neq 0}} F(h, k) = f_{12}(a).$$

Budiž tedy $0 < |h| < \delta$, $0 < |k| < \delta$; klademe-li $f(x_1, a_2 + k) - f(x_1, a_2) = \varphi(x_1)$, je

$$(93) \quad F(h, k) = \frac{1}{hk} (\varphi(a_1 + h) - \varphi(a_1)) = \frac{1}{k} \varphi'(a_1 + \Theta_1 h) = \\ = \frac{1}{k} (f_1(a_1 + \Theta_1 h, a_2 + k) - f_1(a_1 + \Theta_1 h, a_2))$$

$(0 < \Theta_1 < 1)$. Kladu-li $f_1(a_1 + \Theta_1 h, x_2) = \psi(x_2)$ a uvážím-li, že f_{12} existuje v $\Omega(a, \delta)$, obdržím

$$F(h, k) = \psi'(a_2 + \Theta_2 k) = f_{12}(a_1 + \Theta_1 h,\ a_2 + \Theta_2 k)$$

$(0 < \Theta_2 < 1)$. Ze spojitosti funkce f_{12} v bodě a plyne pak (92).

Poznámka 3. Místo x_1, x_2 mohou ovšem ve větách 191, 192 psáti všude x_j, x_k pro kterékoliv dva různé indexy j, k. Nejsou-li podmínky těchto vět splněny, mohou $f_{12}(a)$, $f_{21}(a)$ existovati a míti různé hodnoty; viz **DI**, kap. XIII, § 3, příkl. 5 a cvič. 4.

§ 7. Funkce, mající totální diferenciál n-tého řádu. Napřed dokažme tuto drobnost:

Věta 193. *Budiž $n > 0$ celé. Nechť všechny parciální derivace n-tého řádu funkce f jsou spojité v jistém bodě $a \in \mathsf{E}_r$. Potom jsou všechny parciální derivace funkce f od řádu 0 až do řádu $n - 1$ spojité v jistém okolí bodu a.* (Derivace řádu 0 značí zde i v dalším funkci f samotnou.)

Důkaz. Derivace[25]) n-tého řádu jsou omezené v jistém okolí M bodu a. T. j. derivace řádu $n - 1$ (majíce omezené derivace 1. řádu) jsou spojité v M podle věty 183. Odtud plyne obdobně spojitost derivací řádu $n - 2$, $n - 3, \ldots$ v M.

Přistupme k hlavnímu thematu tohoto paragrafu. Budiž f funkce, která v jistém okolí M bodu a má totální diferenciál. T. j. $\mathrm{d}f$ je definováno v množině $M \times \mathsf{E}_r$. Zvolíme-li $h = [h_1, \ldots, h_r]$ pevně, je

$$\mathrm{d}_h f = \sum_{j=1}^{r} f_j h_j \tag{94}$$

funkce (bodu x), definovaná v M. Ptejme se, zda má tato funkce diferenciál v bodě a, a to ať si zvolíme jakkoliv konstanty $h_1, \ldots, h_r$. Volba $h_k = 1$, $h_j = 0$ pro $j \neq k$ ukazuje, že v tomto případě musí všechny funkce f_j míti diferenciál v bodě a; a naopak, má-li každá f_j diferenciál v bodě a, má i jejich lineární kombinace (94) diferenciál, a to pro libovolná h_j. Zdá se tedy přirozeno definovati:

Funkce f má v bodě a totální diferenciál druhého řádu, jestliže platí:

I. f má totální diferenciál („prvního řádu") v jistém okolí bodu a.

II. Všechny derivace f_j ($j = 1, 2, \ldots, r$) mají v bodě a totální diferenciál („prvního řádu").

Vyslovme nyní podobnou definici pro libovolný řád. Při tom diferenciálu ve smyslu definice 37 budeme říkati také „diferenciál 1. řádu".

Definice 38. *Budiž $n \geq 1$. Budeme říkati, že funkce f (r proměnných) má v bodě $a \in \mathsf{E}_r$ totální diferenciál n-tého řádu, jestliže platí toto:*

I. Všechny parciální derivace funkce f všech řádů m ($0 \leq m \leq n - 2$) mají totální diferenciál 1. řádu v jistém okolí bodu a.

[25]) Leckdy budu pro stručnost říkati „derivace" místo „parciální derivace".

II. Všechny parciální derivace funkce f řádu $n - 1$ mají totální diferenciál 1. řádu v bodě a.

Poznámka 1. Pro $n = 1$ podmínka I odpadá (neexistuje žádné m, vyhovující nerovnostem $0 \leqq m \leqq -1$); je tedy vidět, že pro $n = 1$ je naše nová definice ve shodě s definicí 37 (proto jsem nemusil případ $n = 1$ vyloučit). Přídavné jméno „totální" také zde často vynecháváme.

Poznámka 2. Z definice 38 je vidět: f má v a diferenciál řádu $n > 1$ tehdy a jen tehdy, má-li v jistém okolí bodu a diferenciál řádu $n - 1$ a mají-li všechny její parciální derivace řádu $n - 1$ v bodě a diferenciál 1. řádu. To se dá ostatně zobecnit: funkce f má v a diferenciál řádu $m + n$ (m, n celá kladná) tehdy a jen tehdy, má-li f v jistém okolí bodu a diferenciál m-tého řádu a mají-li všechny parciální derivace m-tého řádu v bodě a diferenciál n-tého řádu.

Poznámka 3. Říkáme, že funkce $f(x_1, \ldots, x_r)$ má v bodě $[a_1, \ldots, a_r]$ parciální diferenciál n-tého řádu vzhledem k proměnným $x_1, \ldots, x_s$ ($s \leqq r$), má-li funkce s proměnných $f(x_1, \ldots, x_s, a_{s+1}, \ldots, a_r)$ v bodě $[a_1, \ldots, a_s]$ totální diferenciál n-tého řádu.

Poznámka 4. Pro funkce jedné proměnné znamená existence n-tého diferenciálu v bodě a totéž jako existence vlastní $f^{(n)}(a)$ (§ 2, pozn. 2).

Poznámka 5. Tedy: existence parciálního diferenciálu n-tého řádu v bodě a vzhledem k proměnné x_j znamená totéž jako existence vlastní $\frac{\partial^n f}{\partial x_j^n}$ v bodě a.

Poznámka 6. V def. 38 jsme definovali pouze smysl rčení „míti diferenciál n-tého řádu". Zda něco nazveme „diferenciálem n-tého řádu", povíme si v § 8.

Věta 194. *Nechť parciální derivace n-tého řádu funkce f jsou spojité v bodě a. Potom f má v a diferenciál n-tého řádu.* (Zobecnění věty 187.)

Důkaz. Derivace[25]) řádu $n - 1$ mají v bodě a spojité derivace 1. řádu a tedy též diferenciál 1. řádu (věta 187). Derivace řádu $n - 2$ a nižších řádů mají podle věty 193 v jistém okolí bodu a spojité derivace 1. řádu a tedy též diferenciál 1. řádu.

Zobecníme nyní věty o záměnnosti a o diferenciálu složené funkce (§ 3, 6). Napřed záměnnost.

Věta 195. *Nechť f má v bodě $a \in \mathbf{E}_r$ diferenciál n-tého řádu ($n \geqq 2$); potom jsou parciální derivace funkce f až do řádu n-tého v bodě a záměnné* (t. j. hodnota takové derivace v bodě a závisí jen na tom, kolikrát se derivuje podle x_1, kolikrát podle x_2 atd., ale ne na tom, v jakém pořadí se toto derivování provádí).

Důkaz úplnou indukcí. Pro $n = 2$ plyne tvrzení z věty 191. Budiž tedy $k > 2$; předpokládejme, že věta je správná pro $n = k - 1$ a dokažme ji pro $n = k$. Nechť tedy f má v a diferenciál řádu k, tedy v jistém okolí M bodu a diferenciál řádu $k - 1$, takže derivace až do řádu $k - 1$ jsou záměnné v M.[26]) Jde tedy jen o derivace k-tého řádu. Budiž

$$f_{j_1 j_2 \ldots j_k}(a) = A \tag{95}$$

jedna taková derivace v bodě a. Budiž $l_1, l_2, \ldots, l_k$ posloupnost, vznikající z $j_1, j_2, \ldots, j_k$ přerovnáním. (Tím rozumím toto: obě posloupnosti obsahují táž čísla, a vyskytuje-li se nějaké číslo v posloupnosti $j_1, \ldots, j_k$ právě s-kráte, vyskytuje se v posloupnosti $l_1, \ldots, l_k$ také právě s-kráte. Tedy na př. posloupnost 1, 1, 2, 5, 1, 5 vzniká, ale 1, 2, 5, 1, 5 nebo 1, 1, 2, 3, 5, 1, 5 nevzniká přerovnáním z posloupnosti 5, 1, 2, 1, 5, 1.) Položme

$$f_{l_1 l_2 \ldots l_k}(a) = B\,. \tag{96}$$

Máme dokázati, že $A = B$. Rozeznávejme dva případy:

α) Budiž $l_k = j_k$, takže $l_1, \ldots, l_{k-1}$ vzniká z $j_1, \ldots, j_{k-1}$ přerovnáním. Tedy je

$$f_{j_1 \ldots j_{k-1}} = f_{l_1 \ldots l_{k-1}} \text{ v } M\,, \tag{97}$$

načež derivováním obou stran podle x_{l_k} (neboli x_{j_k}) v bodě a plyne $A = B$.

β) Budiž $l_k \neq j_k$, takže číslo l_k se vyskytuje mezi čísly $j_1, \ldots, j_{k-1}$ a číslo j_k se vyskytuje mezi čísly $l_1, \ldots, l_{k-1}$.

Posloupnost

$$j_1, j_2, \ldots, j_{k-1}, j_k \tag{98}$$

[26]) Podle indukčního předpokladu.

přerovnám tak, že na předposlední místo dám l_k a na posledním místě nechám j_k; tak dostanu posloupnost

(99) $$t_1, \ldots, t_{k-2}, l_k, j_k \, ;$$

vyměním ještě l_k s j_k:

(100) $$t_1, \ldots, t_{k-2}, j_k, l_k \, ,$$

a napíši nakonec

(101) $$l_1, \ldots, l_{k-2}, l_{k-1}, l_k \, .$$

Posloupnosti (98), (99), (100), (101) vznikají jedna z druhé přerovnáním.

Derivace 1. řádu funkce $f_{t_1 \ldots t_{k-2}}$ mají v bodě a diferenciál 1. řádu; podle věty 191 jsou tedy derivace 2. řádu této funkce záměnné v bodě a, tedy

(102) $$f_{t_1 \ldots t_{k-2} l_k j_k}(a) = f_{t_1 \ldots t_{k-2} j_k l_k}(a) \, .$$

Ježto derivace řádu $k - 1$ funkce f jsou záměnné v M, je

(103) $$f_{t_1 \ldots t_{k-2} l_k} = f_{j_1 \ldots j_{k-1}} \text{ v } M \, ,$$

(104) $$f_{t_1 \ldots t_{k-2} j_k} = f_{l_1 \ldots l_{k-1}} \text{ v } M \, .$$

(Uvažme, že $t_1, \ldots, t_{k-2}, l_k$ je — až na přerovnání — totožná s posloupností (98), zbavenou posledního členu j_k; podobně $t_1, \ldots, t_{k-2}, j_k$ je — až na přerovnání — totožná s (101) bez posledního členu l_k.) Derivuji-li nyní rovnici (103) v bodě a podle x_{j_k}, dostanu vpravo číslo A, vlevo pak levou stranu rovnice (102). Derivuji-li rovnici (104) v bodě a podle x_{l_k}, dostanu vpravo číslo B, vlevo pak pravou stranu rovnice (102). Podle (102) je tedy vskutku $A = B$.

Z věty 195 plyne podle věty 194 ihned tato věta (pohodlná často v praxi):

Věta 196. *Jestliže všechny parciální derivace n-tého řádu funkce f jsou spojité v bodě a, jsou všechny parciální derivace až do n-tého řádu záměnné v bodě a.*[27])

[27]) Derivace až do řádu $n - 1$ jsou ovšem záměnné dokonce v jistém okolí bodu a — neboť v tomto okolí má f diferenciál řádu $n - 1$.

Větu 196 lze ještě zobecniti takto:

Věta 197. *Budiž $k > 2$ celé.*[28]) *Parciální derivace funkce f až do řádu $k - 1$ buďte záměnné v jistém okolí M bodu $a \in \mathbf{E}_r$. Derivace*

$$(105) \qquad f_{j_1 j_2 \dots j_k}$$

budiž spojitá v bodě a. Budiž $l_1, \dots, l_k$ posloupnost, vznikající z $j_1, \dots, j_k$ přerovnáním. Potom

$$(106) \qquad f_{l_1 l_2 \dots l_k}$$

existuje v bodě a a jest

$$(107) \qquad f_{l_1 \dots l_k}(a) = f_{j_1 \dots j_k}(a)\,.$$

Poznámka 7. Záměnnost derivací do řádu $k - 1$ v M je zaručena na př., jsou-li všechny derivace řádu $k - 1$ spojité v M (věta 196). V praxi se užívá věty 197 obyčejně takto: Budiž třeba $f(x, y)$ ($r = 2$) definována v otevřené množině M. Zjistím na př., že $f_1 \left(= \dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, f_2, f_{11}, f_{22}, f_{12} jsou spojité v M; tím je vypočteno (věta 192) již také $f_{21} = f_{12}$ v M. Jestliže dále zjistím, že také f_{111}, f_{112}, f_{122}, f_{222} jsou spojité v M, jsou tím již vypočteny též $f_{121} = f_{211} = f_{112}$, $f_{212} = f_{221} = f_{122}$ v M atd.

Důkaz věty 197. Rozeznávejme dva případy.

α) $l_k = j_k$. Tedy platí (97) (čtěte si současně příslušná místa z důkazu věty 195). Levá strana má v bodě a derivaci podle x_{j_k}, touž derivaci má tedy v bodě a pravá strana; vzhledem k $l_k = j_k$ platí tedy (107).

β) $l_k \neq j_k$. Vyšetřujme posloupnosti (98), (99), (100), (101) jako v důkazu věty 195. Ze záměnnosti derivací do řádu $k - 1$ plynou rovnice (103), (104) (v M). Pišme $g = f_{t_1 \dots t_{k-2}}$. Podle (103), (104) existují v M derivace g_{l_k}, g_{j_k}. Podle předpokladu je $f_{j_1 \dots j_k}$ spojitá v bodě a. Podle (103) je tedy spojitá v bodě a derivace

$$g_{l_k j_k} = f_{t_1 \dots t_{k-2} l_k j_k} = f_{j_1 \dots j_k}\,.$$

Podle věty 192 existuje tedy též

$$g_{j_k l_k}(a) = g_{l_k j_k}(a) = f_{j_1 \dots j_k}(a)\,.$$

[28]) Pro $k = 2$ máme větu 192.

Ale levá strana znamená podle (104) totéž jako $f_{l_1 \ldots l_k}(a)$; důkaz je hotov.

Obraťme se k složeným funkcím. Proveďme napřed příklad. Nechť reálné funkce (s proměnných) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ mají v bodě $a = [a_1, \ldots, a_s]$ diferenciál 3. řádu (a tedy v jistém okolí $\Omega(a, \delta_1)$ diferenciál 2. řádu, viz pozn. 2); nechť funkce f (r proměnných) má v bodě

$$b = [b_1, \ldots, b_r] = [\varphi_1(a), \ldots, \varphi_r(a)]$$

diferenciál 3. řádu (a tedy v jistém okolí $\Omega(b, \delta_2)$ diferenciál 2. řádu). Zvolíme-li δ_1 dosti malé, platí

$$t \in \Omega(a, \delta_1) \Rightarrow [\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t)] \in \Omega(b, \delta_2)\,, \tag{108}$$

neboť funkce φ_j jsou spojité v bodě a. Vyšetřujme „složenou funkci" F, kde

$$F(t_1, \ldots, t_s) = F(t) = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t))\,. \tag{109}$$

Na funkci F lze v každém bodě $t \in \Omega(a, \delta_1)$ užíti věty 189, tedy F má všude v $\Omega(a, \delta_1)$ diferenciál a jest

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t_k} = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j(t)}{\partial t_k} \quad \text{pro } t \in \Omega(a, \delta_1)\,. \tag{110}$$

Při tom do $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} = f_j(x)$ jest dosaditi

$$x = [\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t)]\,, \tag{111}$$

takže jde opět o „složenou funkci"

$$f_j(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t))\,. \tag{112}$$

Ale na tuto funkci můžeme opět užíti věty 189 pro $t \in \Omega(a, \delta_1)$; užijeme-li ještě pravidla o derivování součtu a součinu a o existenci diferenciálu součtu a součinu (§ 5, příkl. 2), vidíme, že funkce (110) má diferenciál v $\Omega(a, \delta_1)$ a že jest

$$\frac{\partial^2 F(t)}{\partial t_k\, \partial t_m} = \sum_{j,i=1}^{r} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j\, \partial x_i} \frac{\partial \varphi_j(t)}{\partial t_k} \frac{\partial \varphi_i(t)}{\partial t_m} + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j(t)}{\partial t_k\, \partial t_m} \tag{113}$$

pro $t \in \Omega(a, \delta_1)$. Ovšem funkce

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = f_j(x)\,, \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j\, \partial x_i} = f_{ji}(x)$$

jsou opět „složené funkce", na př.

$$f_{ji}(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t)) .$$

Na tuto funkci můžeme opět užíti věty 189, ale teď již jen v bodě $t = a$ (tedy $x = b$), a z (113) vychází jako dříve, že funkce (113) má diferenciál v bodě a a že jest

$$(114) \qquad \frac{\partial^3 F(a)}{\partial t_k\, \partial t_m\, \partial t_n} = \sum_{j,i,g=1}^{r} \frac{\partial^3 f(b)}{\partial x_j\, \partial x_i\, \partial x_g} \frac{\partial \varphi_j(a)}{\partial t_k} \frac{\partial \varphi_i(a)}{\partial t_m} \frac{\partial \varphi_g(a)}{\partial t_n} +$$

$$+ \sum_{j,i=1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i} \left(\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t_k\, \partial t_n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_m} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t_m\, \partial t_n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t_k\, \partial t_m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_n} \right) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^3 \varphi_j}{\partial t_k\, \partial t_m\, \partial t_n}$$

(vynechávám písmena a, b). Užitím záměnnosti by se závorka dala psát symetričtěji (v druhém členu by se dalo zaměnit i s j) a některé členy by se daly sloučit.

Vyslovme nyní obecně to, co jsme právě ukázali pro diferenciály 3. řádu.

Věta 198. *Nechť reálné funkce $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ (s proměnných) mají diferenciál n-tého řádu v bodě a; nechť funkce f (r proměnných) má diferenciál n-tého řádu v bodě*

$$b = [\varphi_1(a), \ldots, \varphi_r(a)] .$$

Potom I. funkce F (s proměnných), definovaná rovnicí

$$F(t) = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t)) ,$$

má v bodě a diferenciál n-tého řádu.

II. Každá parciální derivace n-tého řádu funkce F v bodě a je polynom v parciálních derivacích (až do n-tého řádu) funkcí φ_j v bodě a a funkce f v bodě b; koeficienty tohoto polynomu závisí pouze na r, s, n a na tom, podle kterých proměnných (a kolikrát) se funkce F derivuje.[29])

Důkaz. Pro $n = 1$ je to věta 189. Pro $n = 3$ jsme to právě dokázali v provedeném příkladě, kde jsme ovšem dokonce udali explicitní tvar tohoto polynomu.

Obecně provádíme důkaz indukcí: věta budiž dokázána až do řádu $n - 1$; předpokládejme, že φ_j, f splňují předpoklady věty 198, takže v jistém okolí bodu a (resp. b) mají φ_j (resp. f) diferenciály řádu $n - 1$.

[29]) Nezávisí edy na tvaru funkcí f, φ_j a na bodě a.

Tedy (podle indukčního předpokladu) má F diferenciál řádu $n - 1$ v jistém okolí M bodu a a parciální derivace funkce F až do řádu $n - 1$ mají v M žádaný tvar, t. j. jsou to polynomy v derivacích funkce f a funkcí φ_j do řádu $n - 1$. Zde ovšem derivace funkce f je nutno pojímati jako složené funkce (za proměnné se do nich dosazuje $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t)$). V bodě a je možno provésti ještě jednou derivování (podle věty 189) a žádaný výsledek plyne okamžitě. Je to vše téměř doslova stejné jako v propočítaném příkladě $n = 3$, a čtenář si podrobnosti provede sám.

Z věty 198 plyne:

Věta 199. *Jsou-li parciální derivace n-tého řádu funkcí $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ spojité v otevřené množině $M \subset \mathbf{E}_s$, jsou-li parciální derivace n-tého řádu funkce f spojité v otevřené množině $N \subset \mathbf{E}_r$ a platí-li*

$$t \in M \Rightarrow [\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t)] \in N\,,$$

má funkce F, definovaná rovnicí (109), *parciální derivace n-tého řádu spojité v M.*

Důkaz. Podle věty 194 jsou splněny předpoklady věty 198 v každém bodě množiny M. Každá parciální derivace funkce F řádu n-tého je podle tvrzení II věty 198 součet součinů funkcí tvaru

$$g(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t)),\ \ \psi(t)\,, \tag{115}$$

kde g je nějaká parc. derivace funkce f (řádu $\leqq n$) a ψ nějaká parc. derivace některé funkce φ_j (řádu $\leqq n$). Tedy jsou (viz větu 193) funkce v (115) spojité v M (při první z nich nutno užíti ještě pozn. 8 v kap. VI, § 9 o spojitosti složených funkcí).

§ 8. Totální diferenciály vyšších řádů. V § 7 (definice 38) jsme řekli, jaký smysl má výrok „funkce f má totální diferenciál n-tého řádu“, ale dosud jsme nezavedli „totální diferenciál n-tého řádu“ jako samostatný pojem. To učiníme nyní.

Mysleme si nějakou funkci f, která v jistém okolí Ω_1 daného bodu $x = [x_1, \ldots, x_r]$ má totální diferenciál (prvního řádu) a budiž $n > 1$ celé číslo. Funkce $\mathrm{d}f$ je funkcí dvou bodů ξ, h,[30]) definovanou pro

[30]) T. j. $2r$ proměnných. Míním stále body v $\mathbf{E}_r$.

$\xi \in \Omega_1$, $h \in \mathsf{E}_r$. Dosadíme-li do ní za h určitý bod h', dostaneme funkci $\mathrm{d}_{h'}f$ (tak jsme volili označení v § 5). Je to opět funkce jednoho bodu ξ, definovaná v Ω_1. Může se státi, že tato funkce $\mathrm{d}_{h'}f$ má v jistém okolí Ω_2 bodu x diferenciál, jejž ovšem značíme $\mathrm{d}(\mathrm{d}_{h'}f)$ (před znak funkce $\mathrm{d}_{h'}f$ se předepíše symbol d); pro větší jednoduchost budeme tento symbol i podobné symboly většinou psáti bez závorek: $\mathrm{d}\mathrm{d}_{h'}f$. Toto jest opět funkce dvou bodů ξ, h, definovaná pro $\xi \in \Omega_2$, $h \in \mathsf{E}_r$. Dosadíme-li do ní za h pevný bod h'', dostaneme funkci bodu ξ, kterou podle § 5 značíme $\mathrm{d}_{h''}\mathrm{d}_{h'}f$; jest definována v Ω_2. Může se státi, že tato funkce má opět diferenciál v jistém okolí Ω_3 bodu x atd. Může se konečně státi, že při jisté volbě bodů $h', h'', \ldots, h^{(n-1)}$ je funkce[31])

$$(116) \qquad \mathrm{d}_{h^{(n-1)}}\mathrm{d}_{h^{(n-2)}} \ldots \mathrm{d}_{h''}\mathrm{d}_{h'}f = \varphi$$

(je to funkce jednoho bodu ξ) definována v jistém okolí Ω_{n-1} bodu x a že konečně tato funkce φ má diferenciál $\mathrm{d}\varphi(x)$ v bodě x samotném, takže symbol

$$(117) \qquad \mathrm{d}_h\varphi(x) = \mathrm{d}_h\mathrm{d}_{h^{(n-1)}} \ldots \mathrm{d}_{h''}\mathrm{d}_{h'}f(x)$$

má smysl pro každé h; pišme zde pro symetrii $h^{(n)}$ místo h; dostaneme

$$(118) \qquad \mathrm{d}_{h^{(n)}}\varphi(x) = \mathrm{d}_{h^{(n)}}\mathrm{d}_{h^{(n-1)}} \ldots \mathrm{d}_{h''}\mathrm{d}_{h'}f(x)\,.$$

K (117), (118) je vhodno připojit malou poznámku, týkající se označení. O vynechávání závorek v řadě po sobě jdoucích symbolů d jsme se již smluvili (viz na př.[31])). Pravá strana v (118) značí toto: sestrojím funkci (jednoho proměnného bodu) $\mathrm{d}_{h^{(n)}} \ldots \mathrm{d}_{h'}f$ a do ní nakonec za proměnnou dosadím bod x. Měli bychom snad jasněji psáti $(\mathrm{d}_{h^{(n)}} \ldots \mathrm{d}_{h'}f)(x)$, ale smluvíme se, že budeme tento symbol většinou psáti kratčeji bez závorek. Takový postup je čtenáři běžný na př. z aritmetiky; tam je zvykem psáti $a + b \,.\, c$ místo $a + (b \,.\, c)$, kdežto $(a + b) \,.\, c$ se píše se závorkou (jinak by vznikl zmatek); říká se, že znak násobení váže těsněji než znak sčítání. V témže smyslu lze naši úmluvu vysloviti tak, že znak d váže těsněji než znak x (pro hodnotu proměnné).

Poznámka 1. Jsou-li body $h', \ldots, h^{(n)}$ dány a má-li symbol (118) smysl, má smysl i symbol (117) pro jakékoliv h (ovšem při stejných

[31]) Podrobněji: $\mathrm{d}_{h^{(n-1)}}(\mathrm{d}_{h^{(n-2)}}(\ldots(\mathrm{d}_{h''}(\mathrm{d}_{h'}f))\ldots))$.

$h', \ldots, h^{(n-1)}$); neboť má-li (118) smysl pro určité $h^{(n)}$, znamená to, že funkce φ má v bodě x totální diferenciál $\mathrm{d}\varphi(x)$, načež ovšem $\mathrm{d}_h\varphi(x)$ má smysl pro každé h (přidržujeme se ovšem důsledně definic a symboliky, zavedených na začátku § 5).

Důležitý je ten speciální případ symbolu

$$\mathrm{d}_{h^{(n)}}\mathrm{d}_{h^{(n-1)}} \ldots \mathrm{d}_{h''}\mathrm{d}_{h'}f(x)\,, \tag{119}$$

kdy všechny body $h^{(j)}$ volíme stejné, t. j. symbol

$$\mathrm{d}_h\mathrm{d}_h \ldots \mathrm{d}_h f(x) \ \ (\text{symbol } \mathrm{d}_h \text{ celkem } n\text{-kráte})\,. \tag{120}$$

Symboly (119), (120), pokud mají smysl, se dostanou jakýmsi n-kráte opakovaným diferencováním (v jakém smyslu, to jsme přesně popsali). Je tedy přirozená otázka, jaký je vztah mezi těmito třemi vlastnostmi:

I. Funkce f má v bodě x totální diferenciál n-tého řádu (podle definice 38).

II. Symbol (119) *má smysl při každé volbě bodů $h', h'', \ldots, h^{(n)}$.*

III. Symbol (120) *má smysl při každé volbě bodu h.*

Přitom n budiž dané celé číslo, $n \geqq 1$.

Hlavním cílem tohoto paragrafu je tato věta:

Věta 200. *Vlastnosti I, II, III jsou ekvivalentní, t. j.: je-li splněna jedna z nich, jsou splněny všechny.*

Jsou-li splněny, potom symbol (119) *má hodnotu*

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{r} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_n}} h'_{j_1} \ldots h^{(n)}_{j_n} \tag{121}$$

a symbol (120) *má hodnotu*

$$\sum_{\substack{k_1 \geqq 0, \ldots, k_r \geqq 0 \\ k_1 + \ldots + k_r = n}} \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_r^{k_r}} h_1^{k_1} \ldots h_r^{k_r}\,. \tag{122}$$

Při tom r značí počet proměnných ve funkci f; $h = [h_1, \ldots, h_r]$, $h^{(m)} = [h_1^{(m)}, \ldots, h_r^{(m)}]$ pro $m = 1, 2, \ldots, n$.

Pro $n = 1$ je ovšem tato věta triviální.

K větě 200 poznamenejme ještě toto: Pro další úvahy by nám stačilo dokázati, že z I plyne II a III a že výrazy (119), (120) mají potom hodnotu (121), (122). A tyto důkazy jsou snadné (je to v dalším 1. a 2. pomocná věta). Ale v aplikacích se obyčejně při používání t. zv. diferenciálu n-tého řádu myslí na jakési n-kráte opakované provádění operace d, asi ve smyslu symbolu (120) (často se o tom mluví dosti neurčitě). Proto, abychom úplně vyšetřili souvislost naší definice 38 s touto představou (používanou zvláště hojně ve fysice), dokážeme nejenom, že (120) má (pro každé h) smysl tehdy, když f má v bodě x diferenciál n-tého řádu, nýbrž také *jen* tehdy. T. j. dokážeme, že z III plyne I. To je právě — v podstatě — hlavním obsahem 3. pomocné věty, která nám způsobí nejvíce (byť jen formálních) obtíží.

1. pomocná věta. *Platí-li I, platí II, a symbol* (119) *má hodnotu* (121).

Důkaz úplnou indukcí. Pro $n = 1$ je vše jasné podle definice 37. Budiž tedy $n \geq 1$, pomocná věta budiž správná pro hodnotu n, a chceme ji dokázat pro hodnotu $n + 1$. Nechť tedy f má v bodě x diferenciál řádu $n + 1$, takže f má v jistém okolí Ω bodu x diferenciál řádu n, takže pro všechna $\xi \in \Omega$ má podle indukčního předpokladu smysl symbol

$$(123) \qquad \mathrm{d}_{h^{(n)}} \ldots \mathrm{d}_{h'} f(\xi) = \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^{r} \frac{\partial^n f(\xi)}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_n}} h'_{j_1} \ldots h^{(n)}_{j_n}$$

při libovolně zvolených $h', \ldots, h^{(n)}$.

Zvolme tedy jakkoliv $h', \ldots, h^{(n)}$. Podle předpokladu mají n-té derivace funkce f ještě totální diferenciál v bodě x, takže to platí i o jejich lineární kombinaci, takže z (123) plyne, že pro každé h existuje

$$\mathrm{d}_h \mathrm{d}_{h^{(n)}} \ldots \mathrm{d}_{h'} f(x) = \sum_{j_1, \ldots, j_{n+1} = 1}^{r} \frac{\partial^{n+1} f(x)}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_n} \partial x_{j_{n+1}}} h'_{j_1} \ldots h^{(n)}_{j_n} h_{j_{n+1}}.$$

Stačí položiti $h = h^{(n+1)}$ a důkaz je hotov.

Poznámka 2. Triviální je toto: *Platí-li II, platí III.* Neboť (120) je speciální případ symbolu (119).

Poznámka 3. Budiž n celé kladné. Potom

$$(124) \qquad (a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n = \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^{r} a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_n}.$$

Každý člen vpravo má tvar $a_1^{k_1} \dots a_r^{k_r}$, kde $k_1 \geqq 0, \dots, k_r \geqq 0$, $k_1 + \dots + k_r = n$. Tento člen je tam tolikrát, na kolik způsobů je možno volit posloupnost $j_1, j_2, \dots, j_n$ tak, aby se v ní číslo 1 vyskytovalo k_1-kráte, ..., číslo r k_r-kráte. Jednoduchá kombinatorická úvaha ukazuje, že to je možno na

$$\frac{n!}{k_1!\, k_2! \dots k_r!}$$

způsobů. Odtud t. zv. polynomická poučka

$$(125) \qquad (a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n = \sum_{\substack{k_1 \geqq 0, \dots, k_r \geqq 0 \\ k_1 + \dots + k_r = n}} \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} a_1^{k_1} \dots a_r^{k_r}.$$

Poznámka 4. Vyšetřujme výraz

$$(126) \qquad \sum_{j_1, \dots, j_n = 1}^{r} \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}} h_{j_1} \dots h_{j_n},$$

předpokládajíce, že derivace n-tého řádu jsou *záměnné.*

Potom každý člen lze psáti ve tvaru

$$(127) \qquad \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_r^{k_r}} h_1^{k_1} \dots h_r^{k_r}$$

($k_1 \geqq 0, \dots, k_r \geqq 0$, $k_1 + \dots + k_r = n$; je-li na př. $k_1 = 0$, značí to, že se podle x_1 vůbec nederivuje). Táž kombinatorická úvaha jako v (125) ukazuje, že (126) lze psáti ve tvaru

$$(128) \qquad \sum_{\substack{k_1 \geqq 0, \dots, k_r \geqq 0 \\ k_1 + \dots + k_r = n}} \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_r^{k_r}} h_1^{k_1} \dots h_r^{k_r}.$$

Analogie mezi (125), (128) nás vede k zavedení tohoto symbolu:

$$(129) \qquad \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_r \frac{\partial}{\partial x_r}\right)^n f.$$

Tím rozumíme výraz, který dostaneme, když „symbolicky umocníme" podle vzorce (125) a nakonec připíšeme symbol f (při tom ovšem ∂x_1, $\partial x_2, \dots$ považuji za nedělitelné symboly, takže v (129) nesmím krátit ∂ proti ∂ a podobně). Prostě symbol (129) bude znamenati totéž co (128) — za předpokladu *záměnnosti* derivací n-tého řádu (jinak ho nebudeme raději užívat). Je-li tedy f jistá funkce, je také (126) neboli (129) jistá funkce. Její hodnotu v bodě x dostanu připsáním symbolu (x):

$$(130) \qquad \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + h_r \frac{\partial}{\partial x_r}\right)^n f(x) =$$

$$= \sum_{\substack{k_1 \geqq 0, \ldots, k_r \geqq 0 \\ k_1 + \ldots + k_r = n}} \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_r^{k_r}} h_1^{k_1} \ldots h_r^{k_r}.$$

2. pomocná věta. *Platí-li I, platí III, a symbol* (120) *má hodnotu* (122).

Důkaz. Nechť platí I. Podle 1. pomocné věty platí tedy II a tedy (pozn. 2) platí III. Dále dostanu (podle 1. pom. věty) výraz (120), když do (121) dosadím $h' = \ldots = h^{(n)} = h$, čímž dostanu (126).[32]) Ale f má diferenciál n-tého řádu v bodě x, tedy derivace v (126) jsou podle věty 195 záměnné v bodě x, a tedy v bodě x má (126) hodnotu (128).[32])

Poznámka 5. Jde ještě o to, dokázat, že z III plyne I. Tomu předešlu tuto poznámku. Budiž

$$(131) \qquad P(h) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{k_r=0}^{n_r} c_{k_1 \ldots k_r} h_1^{k_1} \ldots h_r^{k_r}$$

(píši $h = [h_1, \ldots, h_r]$) polynom v r proměnných $h_1, \ldots, h_r$, který je stupně nejvýše n_1 v $h_1, \ldots, n_r$ v h_r.

Z kap. VI, § 23, pozn. 3 víme toto: Zvolme libovolně množiny reálných čísel

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_1 &= (h_1', h_1'', \ldots, h_1^{(n_1+1)}) \\ \mathfrak{K}_2 &= (h_2', h_2'', \ldots, h_2^{(n_2+1)}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{K}_r &= (h_r', h_r'', \ldots, h_r^{(n_r+1)}) \end{aligned}$$

($\mathfrak{K}_j$ se skládá z $n_j + 1$ navzájem různých čísel) a označme znaky $h', h'', \ldots, h^{(q)}$ všechny navzájem různé body, které dostaneme tak, že za první souřadnici vezmu kterékoliv číslo z $\mathfrak{K}_1, \ldots,$ za j-tou sou-

[32]) Místo f si musím myslit $f(x)$ (jde pouze o bod x).

řadnici kterékoliv číslo z $\mathfrak{K}_j, \ldots$, za r-tou souřadnici kterékoliv číslo z $\mathfrak{K}_r$. Počet těchto bodů je $q = (n_1 + 1) \ldots (n_r + 1)$. Potom koeficienty polynomu P lze vyjádřiti jako lineární kombinace

$$c_{k_1 \ldots k_r} = \sum_{p=1}^{q} \gamma_{k_1 \ldots k_r p} P(h^{(p)}) ,$$

kde koeficienty $\gamma_{k_1 \ldots k_r p}$ nezávisí na tom, o který polynom P jde, nýbrž závisí pouze na číslech $r, n_1, \ldots, n_r$ a na volbě množin $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_r$ (a ovšem na $k_1, \ldots, k_r, p$, t. j. na indexech, které udávají, o který koeficient jde).

3. pomocná věta. *Budiž $n > 0$ celé. Budiž f funkce r proměnných. Budiž $x \in \mathsf{E}_r$. Budiž $\mathfrak{Y}_{n-1}$ množina všech bodů $h = [h_1, \ldots, h_r]$, jejichž všechny souřadnice jsou celá nezáporná čísla, nejvýše rovná $n - 1$ (takže $\mathfrak{Y}_{n-1}$ se skládá z n^r bodů). Nechť symbol*

$$A(n, h, x) = \mathrm{d}_h \mathrm{d}_h \ldots \mathrm{d}_h f(x) \tag{132}$$

(symbol d_h se opakuje n-kráte) má smysl pro každý bod $h \in \mathfrak{Y}_{n-1}$. Potom f má totální diferenciál n-tého řádu v bodě x.

Důsledek. *Platí-li III, platí I.* Neboť platí-li III, má (132) smysl dokonce pro každé h.

Důkaz. Pro $n = 1$ je 3. pomocná věta správná. Neboť má-li $\mathrm{d}_h f(x)$ smysl aspoň pro jedno h, musí existovati $\mathrm{d}f(x)$ (musíme se stále přesně přidržovati definice symbolů $\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}f(x)$, $\mathrm{d}_h f$, $\mathrm{d}_h f(x)$ z § 5). Další důkaz indukcí. Budiž věta správná pro určitou hodnotu $n > 0$. Nechť symbol

$$A(n + 1, h, x)$$

má smysl pro každé $h \in \mathfrak{Y}_n$; máme dokázati, že f má v bodě x diferenciál řádu $n + 1$.

Podle pozn. 1 má tedy pro každé $h \in \mathfrak{Y}_n$ smysl symbol

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}_h \ldots \mathrm{d}_h f)(x) \tag{133}$$

(symbol d_h se opakuje n-krát),[33] t. j.: Funkce $\mathrm{d}_h \ldots \mathrm{d}_h f$ (symbol d_h

[33]) Zopakujme: označím-li (při pevném h) výraz v závorce — což je funkce bodu v E_r — znakem φ, je $A(n + 1, h, x) = \mathrm{d}_h \varphi(x)$. Jakmile tento výraz má smysl při některém h, znamená to, že existuje $\mathrm{d}\varphi(x)$ (diferenciál v bodě x).

celkem n-kráte) má pro každé $h \in \mathfrak{Y}_n$ diferenciál v bodě x. Jinak řečeno:

($\mathfrak{A}$) Pro každé $h \in \mathfrak{Y}_n$ má $A(n, h, \xi)$ (jakožto funkce bodu ξ) diferenciál v bodě x a je tedy definována v jistém okolí Ω_h bodu x.

Označme znaky $h', h'', \ldots, h^{(q)}$ $(q = (n + 1)^r)$ všechny body z $\mathfrak{Y}_n$; budiž Ω průnik $\Omega_{h'} \cdot \Omega_{h''} \ldots \Omega_{h^{(q)}}$. To je tedy jisté okolí bodu x. Pro každé $h \in \mathfrak{Y}_n$ (tím spíše tedy pro každé $h \in \mathfrak{Y}_{n-1}$) má tedy smysl symbol

(134)
$$A(n, h, \xi) = \mathrm{d}_h \ldots \mathrm{d}_h f(\xi)\,,$$

je-li $\xi \in \Omega$. Podle indukčního předpokladu má tedy f v každém bodě $\xi \in \Omega$ diferenciál n-tého řádu a podle 2. pomocné věty je

(135)
$$A(n, h, \xi) = \mathrm{d}_h \ldots \mathrm{d}_h f(\xi) =$$
$$= \sum_{\substack{k_1 \geq 0, \ldots, k_r \geq 0 \\ k_1 + \ldots + k_r = n}} \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} \frac{\partial^n f(\xi)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_r^{k_r}} h_1^{k_1} \ldots h_r^{k_r}$$

pro $\xi \in \Omega$ a pro každé h vůbec. Podle ($\mathfrak{A}$) má výraz (135) (jakožto funkce bodu ξ) totální diferenciál v bodě x, a to pro každé $h \in \mathfrak{Y}_n$.

Použijme nyní poznámky 5. Podle (135) je $A(n, h, \xi)$ — uvažovaná jako funkce h — polynom v $h_1, \ldots, h_r$, t. j. má tvar (131), kde lze klásti $n_1 = \ldots = n_r = n$. Smíme tedy položiti v pozn. 5 $\mathfrak{K}_1 = \ldots = \mathfrak{K}_r = (0, 1, \ldots, n)$, načež body $h', \ldots, h^{(q)}$ z pozn. 5 jsou právě všechny body z $\mathfrak{Y}_n$, t. j. body, které jsme také v tomto důkaze označili $h', \ldots$ $\ldots, h^{(q)}$. Podle pozn. 5 lze tedy každý koeficient v (135), t. j. každou derivaci

(136)
$$\frac{\partial^n f(\xi)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_r^{k_r}} \quad (\xi \in \Omega)$$

vyjádřiti jako lineární kombinaci výrazů

(137)
$$A(n, h', \xi), \ldots, A(n, h^{(q)}, \xi)\,,$$

kde koeficienty závisí jenom na n, r (a na indexech, které udávají, o který koeficient jde), nikoliv však na ξ.

Avšak každý z výrazů (137) má podle ($\mathfrak{A}$) diferenciál v bodě x; to platí tedy i o každé jejich lineární kombinaci (s koeficienty nezávislými na ξ). Tedy: každá derivace (136) n-tého řádu má v bodě x

diferenciál. Mimo to jsme již zjistili, že f má diferenciál n-tého řádu v Ω. Podle pozn. 2 v § 7 má tedy f v bodě x diferenciál řádu $n + 1$, a důkaz je hotov.

Důkaz věty 200. Podle 1. pomocné věty, podle pozn. 2 a podle důsledku 3. pomocné věty jsou I, II, III ekvivalentní. Podle 1. a 2. pomocné věty mají výrazy (119), (120) žádaný tvar (121), (122).

Poznámka 6. **(Definice totálních diferenciálů n-tého řádu.)** Budiž $M_n \subset \mathsf{E}_r$ množina oněch bodů, v nichž f má diferenciál n-tého řádu. Definujme nyní funkci $\mathrm{d}^n f$ v oboru $M_n \times \mathsf{E}_r$ tím, že klademe[34])

$$\mathrm{d}_h^n f(x) = \mathrm{d}_h \dots \mathrm{d}_h f(x) =$$

$$(138) \qquad = \sum_{\substack{k_1 \geq 0, \dots, k_r \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_r = n}} \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_r^{k_r}} h_1^{k_1} \dots h_r^{k_r} .$$

Tuto funkci (v oboru $M_n \times \mathsf{E}_r$) nazýváme (totálním) diferenciálem n-tého řádu funkce f (nebo n-tým diferenciálem). Při pevném $x \in M_n$ dostáváme funkci bodu h v oboru E_r, znak $\mathrm{d}^n f(x)$, název: diferenciál n-tého řádu funkce f v bodě x; při pevném h dostáváme funkci bodu x v oboru M_n, znak $\mathrm{d}_h^n f$.[35]) Podobně definujeme funkci $\mathbf{d}^n f$ v oboru $M_n \times \mathsf{E}_r \times \dots \times \mathsf{E}_r = M_n \times \mathsf{E}_{nr}$ tím, že klademe

$$\mathbf{d}^n_{h', \dots, h^{(n)}} f(x) = \mathrm{d}_{h^{(n)}} \dots \mathrm{d}_{h'} f(x) =$$

$$(139) \qquad = \sum_{j_1, \dots, j_n = 1}^{r} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}} h'_{j_1} \dots h^{(n)}_{j_n} ;$$

při pevném $x \in M_n$ dostáváme funkci $\mathbf{d}^n f(x)$ (bodů $h', \dots, h^{(n)}$), při pevných $h', \dots, h^{(n)}$ dostáváme funkci $\mathbf{d}^n_{h', \dots, h^{(n)}} f$ (bodu x) v oboru M_n. Funkci $\mathbf{d}^n f$ budeme nazývati n-lineárním (totálním) diferenciálem funkce f.

Poznámka 7. Při pevném $x \in M_n$ je (139) n-lineární formou v n řadách proměnných

$$(140) \qquad \begin{array}{c} h'_1, \dots, h'_r \\ \dots\dots\dots\dots \\ h_1^{(n)}, \dots, h_r^{(n)} . \end{array}$$

---

[34]) Hodnotu funkce $\mathrm{d}^n f$ v bodě $[x, h]$ značíme $\mathrm{d}_h^n f(x)$, podobně jako v § 5.

[35]) Pozor! podle naší definice je oborem této funkce M_n, ač znak $\mathrm{d}_h \dots \mathrm{d}_h f(x)$ může pro některé speciální h míti smysl i pro x, neležící v M_n.

T. j. výraz (139) je formou (homogenním polynomem) n-tého stupně v nr proměnných (140), který je formou 1. stupně v proměnných každého řádku. Tato forma je dále symetrická v $h', \ldots, h^{(n)}$, t. j. výraz (139) se nezmění, permutuji-li tyto body. To plyne ze záměnnosti derivací n-tého řádu (věta 195) takto: Je-li $k_1, \ldots, k_n$ libovolná permutace čísel $1, \ldots, n$, lze přerovnáním derivací výraz (139) napsati ve tvaru

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{r} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_{j_{k_1}} \ldots \partial x_{j_{k_n}}} h'_{j_1} \ldots h^{(n)}_{j_n} = \sum_{j_{k_1},\ldots,j_{k_n}=1}^{r} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_{j_{k_1}} \ldots \partial x_{j_{k_n}}} h^{(k_1)}_{j_{k_1}} \ldots h^{(k_n)}_{j_{k_n}} =$$

$$= \mathbf{d}^n_{h^{(k_1)},\ldots,h^{(k_n)}} f(x) \, .$$

Poznámka 8. Důležitější než $\mathbf{d}^n f$ je většinou $\mathrm{d}^n f$. Výraz (138) je při pevném x formou n-tého stupně v souřadnicích bodu h. Pro $n = 1$ znamenají symboly $\mathbf{d}^1 f$, $\mathrm{d}^1 f$ a $\mathrm{d} f$ (z § 5) zřejmě totéž.

Poznámka 9. Parciálním diferenciálem n-tého řádu funkce $f(x_1, \ldots, x_r)$ v bodě $[a_1, \ldots, a_r]$ vzhledem k prvním s proměnným nazýváme totální diferenciál n-tého řádu funkce (s proměnných)

$$f(x_1, \ldots, x_s, a_{s+1}, \ldots, a_r) \text{ v bodě } [a_1, \ldots, a_s] \, .$$

Poznámka 10. Zdálo by se, že snad bude

$$\mathrm{d}^{m+n} f = \mathrm{d}^n \mathrm{d}^m f \, ; \tag{141}$$

ale není tomu tak, držíme-li se zavedené symboliky. Neboť je-li f funkce bodu v $\mathbf{E}_r$, je $\varphi = \mathrm{d}f$ funkce dvou bodů, a tedy $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{dd}f$ funkce 4 bodů ($4r$ proměnných), kdežto $\mathrm{d}^2 f$ je funkce dvou bodů; a ani n-lineární diferenciál $\mathbf{d}^2 f$ (což je funkce 3 bodů) by nám nepomohl.

Platí však tato skromnější věta:

Věta 201. *Buďte m, n celá kladná; budiž M_{m+n} množina oněch bodů $x \in \mathbf{E}_r$, v nichž funkce f (r proměnných) má totální diferenciál řádu $m + n$. Potom platí:*

1. *Symbol*

$$\mathrm{d}^n_h \mathrm{d}^m_h f(x)^{36)} \tag{142}$$

má smysl pro každé $h \in \mathbf{E}_r$ tehdy a jen tehdy, je-li $x \in M_{m+n}$.

[36]) Míním — podrobně napsáno — $(\mathrm{d}^n_h(\mathrm{d}^m_h f))(x)$.

2. *Totéž platí o symbolu*

$$(143) \qquad \mathrm{d}_h^{m+n} f(x)\,.$$

3. *Je-li* $x \in M_{m+n}$, *mají symboly* (142), (143) *touž hodnotu.*

Důkaz. Mějme stále na zřeteli větu 200 a pozn. 6 (definice diferenciálu n-tého řádu).

A) Tvrzení 2. je zřejmé.

B) Je-li $x \in M_{m+n}$ (t. j. má-li (143) smysl), má (viz pozn. 2 v § 7) f diferenciál m-tého řádu v jistém okolí Ω bodu x a její derivace m-tého řádu mají v bodě x diferenciál n-tého řádu. T. j. pro každé h má funkce $\varphi_h = \mathrm{d}_h^m f$ [37]) v bodě x diferenciál n-tého řádu, tedy (142) má smysl.

C) Nechť (142) má smysl pro každé h. Tedy funkce $\varphi_h = \mathrm{d}_h^m f$ má v bodě x diferenciál n-tého řádu. Ale podle definice v pozn. 6 je potom

$$(144) \qquad \mathrm{d}_h^n \varphi_h(x) = \mathrm{d}_h \ldots \mathrm{d}_h \varphi_h(x)$$

(symbol d_h n-kráte),

$$\varphi_h = \mathrm{d}_h \ldots \mathrm{d}_h f$$

(symbol d_h m-kráte). Tedy (142) není nic jiného než $\mathrm{d}_h \ldots \mathrm{d}_h f(x)$ (symbol d_h $(m + n)$-kráte),[38]) a to pro každé h. Ale to podle pozn. 6 znamená, že $\mathrm{d}_h^{m+n} f(x)$ existuje a má hodnotu (142). Tím je důkaz hotov.

§ 9. Početní technika pro diferenciály vyšších řádů. Mnohé výpočty v diferenciálním počtu se dají napsati v značně zhuštěném tvaru a při tom se téměř zmechanisují, užijeme-li diferenciálů vyšších řádů. Je tedy velmi důležito seznámiti se dobře s touto početní technikou. Známe (viz § 5, příkl. 2) vzorce pro diferenciál součtu, součinu a mocniny; ale zdá se být nepříjemné, že neplatí vzorec (141). Ale my dokážeme, že přes to můžeme často počítat tak, jako by vzorec (141) platil, a že dospějeme k správnému výsledku. O tom nás poučuje tato věta:

---

[37]) To je lineární kombinace derivací m-tého řádu.

[38]) Kdyby měl symbol (142) smysl jen pro určité h, byla by úvaha až sem správná. Ale symbol $\mathrm{d}_h \ldots \mathrm{d}_h f(x)$ (znak d_h $(m + n)$-kráte) bychom nesměli (viz definici v pozn. 6) označit $\mathrm{d}_h^{m+n} f(x)$.

Věta 202. *Budiž $x \in \mathbf{E}_r$, budiž Ω okolí bodu x. Budiž dán jistý polynom P v totálních diferenciálech (jakýchkoliv řádů) několika funkcí f, φ, ψ, ... (r proměnných), na př.*

$$(145) \qquad 4f(\mathrm{d}^3\varphi)^4 - \mathrm{d}^{12}\psi \text{ ,[39]}$$

a nechť tento polynom je roven nule pro všechna $\xi \in \Omega$, $h \in \mathbf{E}_r$; na př.

$$(146) \qquad 4f(\mathrm{d}^3\varphi)^4 - \mathrm{d}^{12}\psi = 0 \ v\ \Omega \times \mathbf{E}_r \,.$$

Nechť v bodě x mají f, φ, ψ, ... diferenciál řádu ještě o jednotku vyššího než ty, které se vyskytují v P; tedy v příkladě (145) *nechť existují*

$$(147) \qquad \mathrm{d}f(x),\ \mathrm{d}^4\varphi(x),\ \mathrm{d}^{13}\psi(x)\,.$$

Potom se v bodě x rovná nule výraz, který se z P dostane „formálním diferencováním" podle pravidel

$$(148) \qquad \mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v\,,\ \mathrm{d}(uv) = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v\,,$$
$$\mathrm{d}(u^m) = mu^{m-1}\,\mathrm{d}u\,,\ \mathrm{d}(\mathrm{d}^m u) = \mathrm{d}^{m+1}u \text{ ;[40]}$$

t. j. v našem případě je

$$(149) \qquad 4\,\mathrm{d}f(x)\,(\mathrm{d}^3\varphi(x))^4 + 4f(x)\,.\,4(\mathrm{d}^3\varphi(x))^3\,\mathrm{d}^4\varphi(x) - \mathrm{d}^{13}\psi(x) = 0\,;$$

to znamená ovšem, že levá strana, která je funkcí bodu h, je rovna nule pro všechna $h \in \mathbf{E}_r$. Kdyby ovšem $\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}^4\varphi$, $\mathrm{d}^{13}\psi$ existovaly nejen v bodě x, ale v celé množině Ω, platilo by

$$(150) \qquad 4\,\mathrm{d}f\,(\mathrm{d}^3\varphi)^4 + 16f\,(\mathrm{d}^3\varphi)^3\,\mathrm{d}^4\varphi - \mathrm{d}^{13}\psi = 0 \quad \mathrm{v}\ \Omega \times \mathbf{E}_r\,.$$

Důkaz provedu pro polynom (145), abych nemusil psáti spoustu indexů — čtenář okamžitě uvidí, že důkaz platí obecně.

Zvolíme-li pevně (ale libovolně) h, je

$$(151) \qquad 4f\,(\mathrm{d}_h^3\varphi)^4 - \mathrm{d}_h^{12}\psi = F$$

funkce bodu ξ, jež je definována (a dokonce rovna nule) pro $\xi \in \Omega$; při tom funkce f, $\mathrm{d}_h^3\varphi$, $\mathrm{d}_h^{12}\psi$ mají ještě v bodě x diferenciál 1. řádu (neboť na př. $\mathrm{d}_h^3\varphi$ je lineární kombinace derivací 3. řádu, a ty mají diferenciál

[39]) Funkci f nazýváme diferenciálem nultého řádu funkce f; při tom je nutno ji pojímati jako funkci dvou bodů ξ, h, nezávislou na h. Funkce f, φ, ψ, ... a koeficienty polynomu mohou býti komplexní.

[40]) Víme, že poslední pravidlo je nesprávné, ale dokážeme, že v tomto případě vede k správnému výsledku. u, v, f, φ, ψ, ... značí komplexní funkce.

1. řádu v bodě x, ježto existuje $d^4\varphi(x)$). Podle pravidla o diferenciálu součtu, součinu a mocniny je

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}F(x) &= 4\mathrm{d}f(x)(\mathrm{d}_h^3\varphi(x))^4 + \\
(152) \qquad + 4f(x)\,.\,4(\mathrm{d}_h^3\varphi(x))^3\,\mathrm{d}\mathrm{d}_h^3\varphi(x) &- \\
- \mathrm{d}\mathrm{d}_h^{12}\psi(x)\,.
\end{aligned}
$$

Obě strany jsou zde funkcemi bodu h'; sestrojím-li tedy hodnotu v bodě h', položím $h' = h$ a uvážím-li, že podle věty 201 je na př. $\mathrm{d}_h\mathrm{d}_h^3\varphi(x) = \mathrm{d}_h^4\varphi(x)$, dostávám

$$
\begin{aligned}
(153) \qquad \mathrm{d}_hF(x) &= 4\mathrm{d}_hf(x)\,(\mathrm{d}_h^3\varphi(x))^4 + \\
&+ 4f(x)\,.\,4(\mathrm{d}_h^3\varphi(x))^3\,\mathrm{d}_h^4\varphi(x) - \mathrm{d}_h^{13}\psi(x)\,.
\end{aligned}
$$

Ale $F(\xi) = 0$ pro každé $\xi \in \Omega$; tedy levá strana v (153) je rovna nule, tedy i pravá strana, a to pro každé h, t. j. platí (149).

Smysl důkazu je jasný: dosadím napřed do (145) určitý bod h (t. j. připíši index h), potom diferencuji v bodě x (dostanu (152)), za proměnný bod h' dosadím opět h (t. j. připíši opět index h), načež již mohu místo nesprávného pravidla $\mathrm{d}\mathrm{d}^m f(x) = \mathrm{d}^{m+1}f(x)$ užíti správného pravidla $\mathrm{d}_h\mathrm{d}_h^m f(x) = \mathrm{d}_h^{m+1}f(x)$ a dostanu (153), kde levá strana je 0. A tato rovnice platí pro každé h; tedy ty indexy h, které jsem připisoval, mohu nakonec zase umazat.

Proveďme dva příklady na toto velmi důležité pravidlo.

Příklad 1. Buďte f, φ, ψ funkce r proměnných, a nechť jest

$$(154) \qquad f\,\mathrm{d}^2\varphi = (\mathrm{d}\psi)^2 \quad \text{v } \Omega \times \mathbf{E}_r\,,$$

kde Ω je jistá otevřená množina.[41]) Potom platí, pokud příslušné diferenciály existují v celé množině Ω:

$$(155) \qquad \mathrm{d}f\,\mathrm{d}^2\varphi + f\,\mathrm{d}^3\varphi = 2\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}^2\psi \quad \text{v } \Omega \times \mathbf{E}_r\,,$$

$$(156) \quad \mathrm{d}^2f\,\mathrm{d}^2\varphi + 2\mathrm{d}f\,\mathrm{d}^3\varphi + f\,\mathrm{d}^4\varphi = 2(\mathrm{d}^2\psi)^2 + 2\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}^3\psi \quad \text{v } \Omega \times \mathbf{E}_r$$

atd. Kdyby na př. diferenciály $\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}^3\varphi$, $\mathrm{d}^2\psi$ existovaly všude v Ω, ale o d^2f, $\mathrm{d}^4\varphi$, $\mathrm{d}^3\psi$ bychom věděli jenom, že existují v jistém bodě $x \in \Omega$, musili bychom se v (156) omezit jen na bod x, t. j. musili bychom místo (156) psáti

$$(157) \qquad \mathrm{d}^2f(x)\,\mathrm{d}^2\varphi(x) + 2\mathrm{d}f(x)\,\mathrm{d}^3\varphi(x) + \ldots$$

---

[41]) Že vpravo není nula, ovšem nevadí: myslím si $(\mathrm{d}\psi)^2$ převedeno vlevo.

Uvědomme si, že rovnice tvaru (154), (155), (156), (157) a pod. nám dávají řadu vztahů mezi parciálními derivacemi funkcí f, φ, ψ. Víme totiž, že $d^n f(x)$ je polynom n-tého stupně (homogenní) v souřadnicích $h_1, \dots, h_r$ bodu h (viz (138)). Tak na př. pro $r = 2$ lze rovnici $df(x) \,.\, d^2\varphi(x) = (d\psi(x))^3$ psáti ve tvaru (hodnoty derivací míním v bodě x)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} h_1^2 + 2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} h_2^2\right) = \\ = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} h_2\right)^3 .$$

Rovnice platí pro všechna reálná h_1, h_2, a vlevo i vpravo stojí polynom v h_1, h_2; tedy každý koeficient vlevo se rovná příslušnému koeficientu vpravo,[42]) takže z poslední rovnice plyne

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^3,$$

$$2\,\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} = 3\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} \quad \text{atd.}$$

Příklad 2. Nechť funkce f, φ, ψ mají v bodě x totální diferenciál 3. řádu, takže v jistém jeho okolí Ω mají totální diferenciál 2. řádu, a nechť je $f^2 = \varphi^2 + \psi^2$ v Ω. Potom je

$$f\,df = \varphi\,d\varphi + \psi\,d\psi \text{ v } \Omega \times \mathbf{E}_r ,$$
$$f\,d^2f + (df)^2 = \varphi\,d^2\varphi + (d\varphi)^2 + \psi\,d^2\psi + (d\psi)^2 \text{ v } \Omega \times \mathbf{E}_r$$

a konečně (teď už se musím omezit na bod x)

$$f\,d^3f + 3df\,d^2f = \varphi\,d^3\varphi + 3d\varphi\,d^2\varphi + \psi\,d^3\psi + 3d\psi\,d^2\psi \text{ v bodě } x .$$

§ 10. Totální diferenciály složených funkcí.

Budiž f funkce r proměnných a budiž M_n množina oněch bodů, v nichž f má diferenciál n-tého řádu. Podle (138) je pro $x \in M_n$

$$(158) \qquad d_h^n f(x) = \sum_{\substack{k_1 \geq 0, \dots, k_r \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_r = n}} \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_r^{k_r}} h_1^{k_1} \dots h_r^{k_r} .$$

Zavedu-li jako v § 5 funkce V_j rovnicemi $V_j(x) = x_j$, je $d_h V_j(x) = h_j$, a místo (158) lze psáti

[42]) Viz kap. VI, § 23.

$$(159)\ \mathrm{d}^n f = \sum_{\substack{k_1\geq 0,\dots,k_r\geq 0\\ k_1+\dots+k_r=n}} \frac{n!}{k_1!\dots k_r!}\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_r^{k_r}}(\mathrm{d}V_1)^{k_1}\dots(\mathrm{d}V_r)^{k_r} \text{ v } M_n\times \mathsf{E}_r\,.$$

Zde ovšem užíváme obyčejně „licencí" podobně jako v § 5; na př. místo

$$\mathrm{d}^3 f,\ \text{kde } f(x, y, z) = xy^2 - 2z^3\,,$$

píšeme $\mathrm{d}^3(xy^2 - 2z^3)$; proto také místo $\mathrm{d}V_j$, $\mathrm{d}^2V_j, \dots$ píšeme $\mathrm{d}x_j$, $\mathrm{d}^2x_j, \dots$ (jako v § 5) a místo (159) píšeme obyčejně (vše v $M_n \times \mathsf{E}_r$)

$$(160)\quad \mathrm{d}^n f = \sum_{\substack{k_1\geq 0,\dots,k_r\geq 0\\ k_1+\dots+k_r=n}} \frac{n!}{k_1!\dots k_r!}\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_r^{k_r}}\,\mathrm{d}x_1^{k_1}\dots\mathrm{d}x_r^{k_r} =$$

$$= \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{r}\frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_n}}\,\mathrm{d}x_{j_1}\dots\mathrm{d}x_{j_n}\,.$$

Při tom znakem $\mathrm{d}x_i^m$ rozumím mocninu $(\mathrm{d}x_i)^m$ (to je starý zvyk); od toho je nutno odlišovati diferenciál mocniny $\mathrm{d}(x_i^m) = mx_i^{m-1}\,\mathrm{d}x_i$ a m-tý diferenciál $\mathrm{d}^m x_i$.

Značím-li „proměnné" z nějakého důvodu $t_1, t_2, \dots$ nebo $x, y, \dots$, píši $\mathrm{d}t_1, \mathrm{d}t_2, \dots$ nebo $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \dots$

Poznámka 1. Budiž f lineární funkce: $f(x) = \alpha_1x_1 + \dots + \alpha_rx_r + \beta$. Všechny parciální derivace řádu vyššího než prvního jsou rovny nule, tedy $\mathrm{d}^2f = \mathrm{d}^3f = \dots = 0$ (pro všechna x, h); speciálně pro diferenciály „nezávisle proměnných" V_j je $\mathrm{d}^2V_j = \mathrm{d}^3V_j = \dots = 0$; s obvyklou licencí se to obyčejně psává $\mathrm{d}^2x_j = \mathrm{d}^3x_j = \dots = 0$ (značí-li x_j j-tou „nezávisle proměnnou").

Poznámka 2. Pro funkce jedné proměnné plyne z (160)

$$(161)\qquad \mathrm{d}^n f(x) = f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x^n\,,$$

existuje-li v bodě x vlastní n-tá derivace. Symbol $\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}$ pro $f^{(n)}(x)$ lze tedy vskutku pojímati jako podíl. Přesně řečeno: Z (161) plyne $\mathrm{d}_h^n f(x) = f^{(n)}(x)(\mathrm{d}_hx)^n$ pro každé reálné h ($\mathrm{d}_hx = h$), a tedy $f^{(n)}(x) = (\mathrm{d}_h^{(n)}f(x)) : (\mathrm{d}_hx)^n$ pro každé reálné $h \neq 0$.

Obraťme se nyní konečně k funkcím složeným. Budiž dána funkce f (r proměnných) a r reálných funkcí φ_j ($j = 1, \dots, r$) s proměnných.

Sestrojme „složenou funkci“ F tak, že do $f(x) = f(x_1, \ldots, x_r)$ dosadíme za x_j podle rovnic

$$x_j = \varphi_j(t) = \varphi_j(t_1, \ldots, t_s) \quad (j = 1, \ldots, r)\,, \tag{162}$$

t. j. definujme

$$F(t) = F(t_1, \ldots, t_s) = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t))\,. \tag{163}$$

Nechť funkce φ_j mají diferenciál n-tého řádu v jistém bodě t a nechť f má diferenciál n-tého řádu v bodě $x = [x_1, \ldots, x_r]$, daném rovnicemi (162). Potom funkce F má podle věty 198 diferenciál n-tého řádu v bodě t. Mimo to má ovšem funkce f v jistém okolí Ω_x bodu x diferenciály až do řádu $n - 1$ a funkce φ_j mají diferenciály až do řádu $n - 1$ v jistém okolí Ω_t bodu t (viz § 7, pozn. 2). Volíme-li Ω_t dosti malé, můžeme (v důsledku toho, že φ_j jsou funkce spojité v bodě t) dosáhnouti toho, že pro každé $\tau \in \Omega_t$ leží bod $\xi = [\xi_1, \ldots, \xi_r]$, definovaný rovnicemi

$$\xi_j = \varphi_j(\tau) \quad (j = 1, \ldots, r)\,, \tag{164}$$

v množině Ω_x, takže podle věty 198 má funkce F v Ω_t diferenciály až do řádu $n - 1$. Početní předpis z věty 202 nám umožňuje snadno tyto diferenciály funkce F postupně počítat. Budiž třeba $n = 3$.

Podle vzorce (75) v § 5 je

$$\mathrm{d}F = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\, \mathrm{d}\varphi_i \quad \text{v} \quad \Omega_t\,.\text{[43]} \tag{165}$$

Při tom parciální derivace jest při daném τ bráti v bodě ξ, definovaném pro každé $\tau \in \Omega_t$ vzorcem (164). Podle věty 202 jest v Ω_t

$$\mathrm{d}^2F = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}\, \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\, \mathrm{d}\varphi_i + \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\, \mathrm{d}^2\varphi_i\,. \tag{166}$$

Co je to vlastně $\dfrac{\partial f}{\partial \xi_i}$ ve vzorci (165)? Označme parciální derivaci funkce f podle i-té proměnné znakem f_i; potom symbol $\dfrac{\partial f}{\partial \xi_i}$ v rovnicích (165), (166) značí vlastně „složenou funkci“, jejíž hodnota v bodě

[43]) Měli bychom psáti v $\Omega_t \times \mathsf{E}_r$ (t. j.: „pro všechna $\tau \in \Omega_t$, $h \in \mathsf{E}_r$“), ale ježto vždy půjde o vzorce, platné pro všechna h, nebudu to v tomto paragrafu vypisovati.

τ je $f_i(\xi)$, kde ξ je dáno vzorcem (164). Podle vzorce (165), kde místo f píši f_i, značí symbol d $\frac{\partial f}{\partial \xi_i}$ výraz

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} \, d\varphi_j = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j} \, d\varphi_j \,, \tag{167}$$

takže (166) lze psáti v Ω_t ve tvaru

$$d^2F = \sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j} \, d\varphi_i \, d\varphi_j + \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \, d^2\varphi_i \,. \tag{168}$$

Podle pravidla z předešlého paragrafu sestrojím konečně $d^3F(t)$:

$$\begin{aligned} d^3F(t) = {} & \sum_{i,j=1}^{r} d \, \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j} \, d\varphi_i \, d\varphi_j + \\ & + \sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j} \, d^2\varphi_i \, d\varphi_j + \sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j} \, d\varphi_i \, d^2\varphi_j + \\ & + \sum_{i=1}^{r} d \, \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \, d^2\varphi_i + \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \, d^3\varphi_i \,.\text{[44]} \end{aligned} \tag{169}$$

Zde vpravo je třetí člen roven druhému, ježto parciální derivace 2. řádu jsou záměnné. Čtvrtý člen je roven druhému, ježto d $\frac{\partial f}{\partial \xi_i}$ je dáno výrazem (167). Abychom konečně vypočetli první člen vpravo, použijme opět vzorce (165) na funkci $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j}$; dostaneme jako svrchu:

$$\begin{aligned} d^3F(t) = {} & \sum_{i,j,k=1}^{r} \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i \, \partial x_j \, \partial x_k} \, d\varphi_i(t) \, d\varphi_j(t) \, d\varphi_k(t) + \\ & + 3 \sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \, \partial x_j} \, d^2\varphi_i(t) \, d\varphi_j(t) + \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \, d^3\varphi_i(t) \,. \end{aligned} \tag{170}$$

Zde už není naprosto nic nejasného: parciální derivace funkce f jest bráti v bodě x; obě strany rovnice jsou funkce bodu $h = [h_1, \ldots, h_s]$ (jde o diferenciály funkcí „bodu t") a rovnost platí pro každé h.

Rovnice (165), (168), (170) nejsou ještě dosti výrazné: musí se vysvětlit, co znamená F, f a φ_i. Proto se zde opět užívá „licence", aby

[44]) Při tom vpravo bych měl psát $d\varphi_i(t)$ místo $d\varphi_i$; parciální derivace funkce f a jejich diferenciály je bráti pro $\tau = t$, $\xi = x$.

se dosáhlo větší výraznosti. Říká se: budiž z funkcí proměnných x_1, $\ldots, x_r$: $z = f(x_1, \ldots, x_r)$. Dosadíme-li sem za x_i podle rovnic $x_i = \varphi_i(t) = \varphi_i(t_1, \ldots, t_s)$ $(i = 1, \ldots, r)$, stane se z funkcí proměnných $t_1, \ldots, t_s$; a diferenciály této funkce jsou

$$\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial z}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \,, \tag{171}$$

$$\mathrm{d}^2z = \sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_j} \mathrm{d}x_i \, \mathrm{d}x_j + \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial z}{\partial x_i} \mathrm{d}^2x_i \,, \tag{172}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^3z = & \sum_{i,j,k=1}^{r} \frac{\partial^3 z}{\partial x_i \, \partial x_j \, \partial x_k} \mathrm{d}x_i \, \mathrm{d}x_j \, \mathrm{d}x_k + \\ & + 3 \sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_j} \mathrm{d}^2x_i \, \mathrm{d}x_j + \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial z}{\partial x_i} \mathrm{d}^3x_i \,. \end{aligned} \tag{173}$$

Při tom ovšem na př. poslední rovnice platí v bodě t, jestliže v tomto bodě funkce φ_i mají diferenciál 3. řádu a jestliže funkce f má diferenciál 3. řádu v bodě x, daném rovnicemi (162). Při tom $\mathrm{d}x_i$, $\mathrm{d}^2x_i, \ldots$ značí diferenciály funkce φ_i, a $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ atd. značí derivace funkce f v „příslušném" bodě x. Obě strany rovnice (173) jsou funkce bodu h, a to formy (homogenní polynomy) 3. stupně v proměnných $h_1, \ldots, h_s$. Rovnice (173) pak platí pro každé h. Označím-li znakem t_i „i-tou nezávisle proměnnou", t. j. funkci T_i, pro kterou $T_i(t) = t_i$ (takže $\mathrm{d}_h t_i = h_i$), můžeme užíti vzorce (160), načež v (173) jest

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathrm{d}x_i = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial t_\alpha} \mathrm{d}t_\alpha \,, \quad \mathrm{d}^2x_i = \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t_\alpha \, \partial t_\beta} \mathrm{d}t_\alpha \, \mathrm{d}t_\beta \,, \\ & \mathrm{d}^3x_i = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{s} \frac{\partial^3 x_i}{\partial t_\alpha \, \partial t_\beta \, \partial t_\gamma} \mathrm{d}t_\alpha \, \mathrm{d}t_\beta \, \mathrm{d}t_\gamma \,, \\ & \mathrm{d}^3z = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{s} \frac{\partial^3 z}{\partial t_\alpha \, \partial t_\beta \, \partial t_\gamma} \mathrm{d}t_\alpha \, \mathrm{d}t_\beta \, \mathrm{d}t_\gamma \,. \end{aligned} \right. \tag{174}$$

Rovnice (173) platí, dosadíme-li za $h_1, \ldots, h_s$ libovolná reálná čísla, t. j. dosadíme-li za $\mathrm{d}t_1, \ldots, \mathrm{d}t_s$ libovolná reálná čísla. Dosadíme-li tedy do (173) z (174), dostáváme na obou stranách formy 3. stupně v $\mathrm{d}t_1, \ldots$

…, dt_s, které si jsou rovny pro všechny reálné hodnoty dt_i.[45]) Tedy jsou příslušné sobě koeficienty vpravo a vlevo sobě rovny, a odtud ihned dostanu vzorce pro parciální derivace $\frac{\partial^3 z}{\partial t_\alpha\, \partial t_\beta\, \partial t_\gamma}$. Na př. koeficient v (173) při $dt_1^2\, dt_2$ vlevo je (následkem záměnnosti parciálních derivací) $3\frac{\partial^3 z}{\partial t_1^2\, \partial t_2}$; tuto derivaci tedy vypočtu, najdu-li vpravo koeficient při $dt_1^2\, dt_2$ a dělím třemi. Vidíte, že rovnice (173) mezi diferenciály obsahuje v kondensované formě mnoho rovnic mezi parciálními derivacemi. Podotkněme ještě: První člen vpravo v (173) obsahuje r^3 členů, ale následkem záměnnosti jsou si mnohé rovny.

Vypočtěme ještě (za předpokladu existence čtvrtých diferenciálů) $d^4 z$, a to bez dlouhých řečí, aby bylo vidět, jak celý počet probíhá snadno a mechanicky. Použiji na rovnici (173) věty 202, při čemž uvážím, že $\frac{\partial z}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_j}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k}$ jsou „funkce bodu x", totiž parciální derivace funkce f, do nichž za x_α jest dosaditi $\varphi_\alpha(t)$. Jejich diferenciály se tedy počítají podle vzorce (171), kde ovšem místo z stojí $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ atd., takže na př.

$$\mathrm{d}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_j} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^3 z}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k}\, \mathrm{d}x_k\,.$$

Tedy: použijeme na rovnici (173) věty 202; vychází (užiji částečně hned záměnnosti):

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^4 z = &\sum_{i,j,k,m=1}^{r} \frac{\partial^4 z}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k\, \partial x_m}\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_j\, \mathrm{d}x_k\, \mathrm{d}x_m + \\
&+ 3\sum_{i,j,k=1}^{r} \frac{\partial^3 z}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k}\, \mathrm{d}^2 x_i\, \mathrm{d}x_j\, \mathrm{d}x_k + \\
&+ 3\sum_{i,j,k=1}^{r} \frac{\partial^3 z}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k}\, \mathrm{d}^2 x_i\, \mathrm{d}x_j\, \mathrm{d}x_k + \\
&+ 3\sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_j}\, \mathrm{d}^2 x_i\, \mathrm{d}^2 x_j + \\
&+ 3\sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_j}\, \mathrm{d}^3 x_i\, \mathrm{d}x_j + \sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_j}\, \mathrm{d}^3 x_i\, \mathrm{d}x_j + \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial z}{\partial x_i}\, \mathrm{d}^4 x_i\,.
\end{aligned}$$

[45]) Mohl jsem klidně psát h_i místo dt_i; píši dt_i jen proto, že je to obvyklé označení, se kterým se čtenář často setká.

Zde se ještě druhý součet vpravo rovná třetímu, pátý šestému. Dalším užitím záměnnosti a přidáním příslušných „polynomických koeficientů“ $\dfrac{n!}{a_1!\,a_2!\dots a_r!}$ lze ještě dále redukovati počet členů v některých součtech.

Poznámka 3. U diferenciálů 1. řádu jsme měli důležité pravidlo o invariantnosti formy 1. diferenciálu (viz text u rovnic (76), (77) v § 5): vzorec

$$\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial z}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j \tag{175}$$

platí, ať jsou x_j „nezávisle proměnné“ či ať jsou to jakékoliv funkce kterýchkoliv proměnných.

U vyšších diferenciálů máme podle (121) vzorec

$$\mathrm{d}^n z = \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{r} \frac{\partial^n z}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_n}}\,\mathrm{d}x_{j_1}\dots\mathrm{d}x_{j_n}\,, \tag{176}$$

jsou-li x_j „nezávisle proměnné“, ale u „složených funkcí“ tento vzorec pro $n > 1$ neplatí, jak ukazují vzorce (172), (173), kde vystupují ještě diferenciály d^2x_j, d^3x_j, ... Jsou-li ovšem x_j „nezávisle proměnné“, jsou tyto diferenciály rovny nule (viz pozn. 1), a vzorce (172), (173) se redukují na příslušné případy vzorce (176). Ale ještě v jednom speciálním případě platí vzorec (176): *Jestliže x_j jsou lineární funkce*

$$x_j(t) = \alpha_{j1}t_1 + \dots + \alpha_{js}t_s + \beta_j \quad (\alpha_{jk}, \beta_j \text{ reálné konstanty})\,,$$

je podle pozn. 1 $\mathrm{d}^2x_j = \mathrm{d}^3x_j = \dots = 0$, *a platí opět* (176).[46]) Neboť pro $n = 1$ platí (175), a indukční krok z n na $n + 1$ provedu tím, že diferencuji rovnici (176), při čemž použiji toho, že $\mathrm{d}^2x_j = 0$.

Cvičení

V cvičeních 1—4 jsou $u, v, v_1, v_2, \dots, v_r$ funkce nějakých proměnných $x_1, \dots, x_s$; podmínky pro platnost uvedených vzorců (existence příslušných dife-

[46]) Při tom kladu $z = f(x_1, \dots, x_r)$; vzorec (176) platí v bodě t, jestliže v příslušném bodě $[x_1(t), \dots, x_r(t)] = x(t)$ má f diferenciál n-tého řádu; při tom značí $\dfrac{\partial^n z}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_n}}$ derivace funkce f a $\mathrm{d}^n z$ značí n-tý diferenciál „složené funkce“ $f(x_1(t), \dots, x_r(t))$.

renciálů, jmenovatel různý od nuly atd.) si čtenář doplní sám. $A_1, \ldots, A_r$ jsou konstanty.

1. $\mathrm{d}^n(A_1 v_1 + \ldots + A_r v_r) = A_1\, \mathrm{d}^n v_1 + \ldots + A_r\, \mathrm{d}^n v_r$.

2. $\mathrm{d}^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{d}^k u \,.\, \mathrm{d}^{n-k} v$.

(Zobecnění Leibnizova vzorce; $\mathrm{d}^0 f$ značí ovšem f.)

3. $$\mathrm{d}^3 \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^4} (v^3\, \mathrm{d}^3 u - uv^2\, \mathrm{d}^3 v - 3v^2\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}^2 u - 3v^2\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}^2 v + {}$$
$$+ 6uv\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}^2 v + 6v\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v^2 - 6u\, \mathrm{d}v^3).$$

4. $$\mathrm{d}^2(u^v) = u^v \left(\frac{v(v-1)}{u^2}\, \mathrm{d}u^2 + \frac{2}{u} (1 + v \lg u)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v + {}\right.$$
$$\left. + (\lg u)^2\, \mathrm{d}v^2 + \frac{v}{u}\, \mathrm{d}^2 u + \lg u\, \mathrm{d}^2 v\right).$$

5. Z funkce $f(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ vytvořte funkci $F(x_1, \ldots, x_r) = \dfrac{1}{\varrho^{r-2}} f\left(\dfrac{x_1}{\varrho^2}, \ldots, \dfrac{x_r}{\varrho^2}\right)$, kde $\varrho = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_r^2}$. Dokažte, že za příslušných předpokladů (kterých?) je

$$\varrho^{r+2} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 F(x_1, \ldots, x_r)}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 f(\xi_1, \ldots, \xi_r)}{\partial \xi_j^2},$$

kde vpravo jsou derivace funkce f brány pro $\xi_j = x_j \varrho^{-2}$.

6. Pro funkci F z § 3, pozn. 4 vypočtěte (obdobně ke vzorci (39)) za příslušných předpokladů $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k}$.

§ 11. Věta o přírůstku funkce a Taylorova formule pro funkce několika proměnných. Věta 203. *Buďte*

$$a = [a_1, \ldots, a_r],\; a + h = [a_1 + h_1, \ldots, a_r + h_r]$$

dva různé body z $\mathbf{E}_r$. *Funkce f (r proměnných) nechť je reálná a nechť má diferenciál řádu $n + 1$ ($n \geqq 0$) v každém bodě úsečky o krajních bodech a, $a + h$. Potom existuje číslo Θ* ($0 < \Theta < 1$) *tak, že*

$$
(177)\qquad \begin{aligned} f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + h_r\frac{\partial}{\partial x_r}\right) f(a) + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + h_r\frac{\partial}{\partial x_r}\right)^n f(a) + \\ + \frac{1}{(n+1)!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + h_r\frac{\partial}{\partial x_r}\right)^{n+1} f(a+\Theta h)\,.\text{[47]} \end{aligned}
$$

Totéž lze psáti v elegantnějším tvaru

$$
(178)\qquad \begin{aligned} f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!}\,\mathrm{d}_h f(a) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}_h^2 f(a) + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}\,\mathrm{d}_h^n f(a) + \frac{1}{(n+1)!}\,\mathrm{d}_h^{n+1} f(a+\Theta h)\,. \end{aligned}
$$

Důkaz. Úsečka, o níž je řeč, je množina M všech bodů

$$
a + th = [a_1 + th_1, \ldots, a_r + th_r] \quad (0 \leqq t \leqq 1)\,.
$$

Položme

$$
F(t) = f(a + th) = f(a_1 + th_1, \ldots, a_r + th_r)\,.
$$

Podle věty 198 má F diferenciál řádu $n+1$ v intervalu $0 \leqq t \leqq 1$, t. j. (jakožto funkce jedné proměnné) má konečnou derivaci řádu $n+1$ pro $0 \leqq t \leqq 1$. Podle Taylorovy formule (**DI**, věta 153, vzorec (5) pro zbytek) je

$$
(179)\quad F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\Theta).
$$

Hodnota $F(t)$ se dostane, když do $f(x_1, \ldots, x_r)$ dosadíme za x_j funkci $x_j(t) = a_j + th_j$. Podle pozn. 3 v § 10 platí tedy

$$
\begin{aligned} \mathrm{d}^k F(t) &= \sum_{\substack{k_1 \geqq 0, \ldots, k_r \geqq 0 \\ k_1 + \ldots + k_r = k}} \frac{k!}{k_1! \ldots k_r!} \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_r^{k_r}} \mathrm{d}x_1^{k_1} \ldots \mathrm{d}x_r^{k_r} = \\ &= \left(\mathrm{d}x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \mathrm{d}x_r \frac{\partial}{\partial x_r}\right)^k f(x) \end{aligned}
$$

pro $0 \leqq t \leqq 1$, $0 < k \leqq n + 1$. Ale $\mathrm{d}x_j = h_j\,\mathrm{d}t$, takže (viz pozn. 2 v § 10) pro $\mathrm{d}t \neq 0$ obdržíme

[47]) Jde ovšem o symbolické mocniny, viz pozn. 4 v § 8.

$$F^{(k)}(t) = \frac{\mathrm{d}^k F(t)}{\mathrm{d}t^k} = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + h_r \frac{\partial}{\partial x_r}\right)^k f(x) .$$

Stačí nyní dosaditi odtud do (179) a uvážiti, že hodnotám $t = 0$, $t = 1$, $t = \Theta$ odpovídají body $x = a$, $x = a + h$, $x = a + \Theta h$. Tím dostaneme (177). A (178) není ovšem nic jiného než přepsání vzorce (177) do jiné formy.

Poznámka 1. Pro $n = 0$ dostáváme z věty 203: *Má-li reálná funkce f diferenciál 1. řádu v každém bodě úsečky M*[47a]) *o krajních bodech a, $a + h$, potom existuje Θ $(0 < \Theta < 1)$ tak, že*

$$(180) \qquad f(a + h) - f(a) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f(a + \Theta h)}{\partial x_j} h_j = \mathrm{d}_h f(a + \Theta h) .$$

To je zobecnění věty o přírůstku funkce (ne sice úplné — viz však cvič. 1) z **DI**, věta 133. Srovnejte s *poněkud* příbuznou větou 182.

Poznámka 2. Je-li f komplexní, lze užíti věty 203 na reálnou a na imaginární část zvláště; ale číslo Θ může pro reálnou část míti jinou hodnotu než pro imaginární.

Cvičení

1. Rovnice (180) platí za těchto obecnějších předpokladů: I. f je reálná a má diferenciál 1. řádu v každém bodě úsečky M, různém od bodů a, $a + h$. II. V bodech a, $a + h$ je f spojitá vzhledem k M. K důkazu užijte přímo věty o přírůstku funkce (**DI**, věta 133).

Cílem následujících cvičení je důkaz této věty:

A) Nechť f má v bodě $a = [a_1, \ldots, a_r]$ diferenciál n-tého řádu $(n > 0)$. Potom existuje jeden a jen jeden polynom P (o r proměnných) s těmito vlastnostmi:

α) P má (celkový) stupeň nejvýše n.

β) $f(a + h) = P(h) + o(\|h\|^n)$ pro $h \to o$.

Tento polynom je

$$(181) \qquad P(h) = f(a) + \frac{1}{1!} \mathrm{d}_h f(a) + \ldots + \frac{1}{n!} \mathrm{d}_h^n f(a) .$$

[47a]) Míní se ovšem diferenciál ve smyslu definice 37, ne snad diferenciál vzhledem k M (§ 4).

Tato věta se má k větě 203 jako příkl. III v **DI** na konci kap. XI k větě Taylorově pro $r = 1$ (věta 153 v **DI** s formou zbytku (5)).

Důkaz věty A je rozložen do cvič. 2—4.

2. Mají-li polynomy P, Q vlastnosti α, β, je $P(h) - Q(h) = o(\|h\|^n)$ a tedy $P = Q$ podle cvič. 2 v kap. VI, § 23.

3. Nechť v bodě a jsou všechny parc. derivace funkce f řádu 0 až n rovny nule, a nechť f má v bodě a diferenciál n-tého řádu ($n > 0$). Potom $f(a + h) = o(\|h\|^n)$ pro $h \to o$. Návod: Pro $n = 1$ zřejmé z definice diferenciálu. Budiž $n \geqq 2$; užitím věty 203 s hodnotou $n - 2$ místo n plyne pro dosti malá $\|h\|$:

$$(182) \qquad f(a + h) = \frac{1}{(n - 1!)}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_r} h_r\right)^{n-1} f(a + \Theta h) .$$

Ježto každá derivace řádu $n - 1$ má v bodě a diferenciál (rovný nule), je podle definice diferenciálu $f_{j_1, \ldots, j_{n-1}}(a + \Theta h) = f_{j_1, \ldots, j_{n-1}}(a + \Theta h) - f_{j_1, \ldots, j_{n-1}}(a) = o(\|h\|)$. Odtud a z (182) plyne tvrzení.

4. V obecném případě užijte cvič. 3 na funkci $F(x)$, kde $F(a + h) = f(a + h) - P(h)$ (při čemž P je dáno rovnicí (181)). Dostanete, že platí β. Že takový polynom je jen jeden, plyne z cvič. 2.

5. Budiž n celé kladné. Nechť funkce $f(x_1, \ldots, x_r)$ má všechny derivace řádu n-tého rovny nule v jisté otevřené souvislé množině $M \subset \mathbf{E}_r$. Potom f je v M polynom stupně nejvýše $n - 1$ (t. j. existuje takový polynom P stupně $\leqq n - 1$, že je $f = P$ v M). Návod: Je-li M otevřený interval, plyne to z věty 203. V obecném případě zvolte bod $a \in M$; v jistém otevřeném intervalu $I (a \in I)$ je $f(x) = P(x)$ (polynom stupně $\leqq n - 1$). Spojte libovolný bod $b \in M$ s a řetězcem otevřených intervalů $I_1, I_2, \ldots, I_q$, obsažených v M (věta 172). V každém z těchto intervalů I_k je f rovno nějakému polynomu P_k. V průniku $I_k I_{k+1}$ je $P_k = P_{k+1}$. Podle pozn. 1 v kap. VI, § 23 jsou tedy $P, P_1, P_2, \ldots, P_q$ týmž polynomem; tedy $f(b) = P(b)$ pro každé $b \in M$.

§ 12. Vztah mezi n-tou diferencí a n-tým diferenciálem. Budiž f funkce r proměnných; budiž $x \in \mathbf{E}_r$, $h \in \mathbf{E}_r$. Potom číslo

$$(183) \qquad \Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x)$$

nazýváme diferencí (1. řádu nebo první diferencí) funkce f v bodě x s rozpětím h — pokud ovšem $f(x)$, $f(x + h)$ jsou definovány. Výraz (183) je funkcí dvou bodů x, h, kterou značme Δf; při pevném x dostaneme funkci bodu h, kterou označíme $\Delta f(x)$, při pevném h dostaneme funkci bodu x, kterou označíme $\Delta_h f$. Zvolme další bod $k \in \mathbf{E}_r$ a sestrojme funkci (bodu x) $\Delta_k\Delta_h f$; její hodnota v bodě x je (mají-li $f(x)$, $f(x+h)$, $f(x+k)$, $f(x+h+k)$ smysl)

$$(184) \qquad \Delta_k\Delta_h f(x) = \Delta_h f(x+k) - \Delta_h f(x) = f(x+h+k) - \\ - f(x+k) - f(x+h) + f(x)\,.$$

(Užívám podobné úmluvy o vynechávání závorek jako na počátku § 8 — viz text v § 8 před pozn. 1.)

Obecně, je-li dáno n bodů $h', \ldots, h^{(n)}$, sestrojme funkci (bodu x)

$$(185) \qquad \Delta_{h^{(n)}} \ldots \Delta_{h'} f\,,$$

jejíž hodnota v bodě x, jak za chvíli dokážeme, je

$$(186) \quad \Delta_{h^{(n)}} \ldots \Delta_{h'} f(x) = \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n = 0}^{1} (-1)^{n+\lambda_1+\ldots+\lambda_n} f(x + \lambda_1 h' + \ldots + \lambda_n h^{(n)})\,,$$

má-li pravá strana smysl. T. j. tento výraz je součet hodnot funkce f ve všech bodech tvaru

$$(187) \quad x + h^{(j_1)} + \ldots + h^{(j_l)} \; (0 \leqq l \leqq n;\; 1 \leqq j_1 < \ldots < j_l \leqq n)\,,$$

kde každý sčítanec je ještě opatřen znamením $(-1)^{n+l}$ (nebo $(-1)^{n-l}$, chcete-li).

Vzorec (186) platí pro $n = 1$ (viz (183)); platí-li pro jisté n, platí toto:

$$\Delta_{h^{(n+1)}}\Delta_{h^{(n)}} \ldots \Delta_{h'} f(x) = \\ = \Delta_{h^{(n)}} \ldots \Delta_{h'} f(x + h^{(n+1)}) - \Delta_{h^{(n)}} \ldots \Delta_{h'} f(x) = \\ = \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n = 0}^{1} (-1)^{n+\lambda_1+\ldots+\lambda_n} (f(x + \lambda_1 h' + \ldots + \lambda_n h^{(n)} + h^{(n+1)}) - \\ - f(x + \lambda_1 h' + \ldots + \lambda_n h^{(n)}))\,,$$

což, jak je ihned patrno, je vzorec (186) s hodnotou $n+1$ místo n. Tím je (186) dokázáno.

Z (186) je patrno, že tento výraz se *nezmění, permutují-li body* $h', \ldots, h^{(n)}$. Dále je patrno, že tento výraz je *roven nule, je-li některý z bodů* $h^{(j)}$ *roven* o; neboť příslušná operace $\Delta_{h^{(j)}}$, aplikovaná na jakoukoliv funkci, dává podle (183) nulu.[48]) Číslu (186) říkáme n-tá

[48]) Je to také vidět z (186): Dva členy v (186), lišící se toliko hodnotou λ_j (jednou $\lambda_j = 1$, po druhé $\lambda_j = 0$), obsahují pro $h^{(j)} = o$ touž hodnotu funkce f, ale s opačným znamením.

diference nebo diference n-tého řádu funkce f v bodě x s rozpětími $h', \ldots, h^{(n)}$. Pro která x je definována funkce (185), je zřejmé; nebudeme se tím zabývati — v dalším půjde vždy o případy, kdy existence symbolu (186) bude zřejmá.

Má-li reálná funkce f diferenciál prvního řádu v každém bodě úsečky o krajních bodech a, $a + h$ (t. j. ve všech bodech $a + th$, $0 \leqq t \leqq 1$), lze užíti věty 203 pro $n = 0$ a dostáváme

$$\Delta_h f(a) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f(a + \Theta h)}{\partial x_j} h_j = \mathrm{d}_h f(a + \Theta h)\,, \tag{188}$$

kde $0 < \Theta < 1$. Odvodíme nyní obdobnou větu pro n-tou diferenci:

Věta 204. *V* $\mathbf{E}_r$ *buďte dány body* $a, h', \ldots, h^{(n)}$ $(n \geqq 1)$. *Budiž* M *množina všech bodů tvaru*

$$z = a + \lambda_1 h' + \ldots + \lambda_n h^{(n)} \quad (0 \leqq \lambda_j \leqq 1 \text{ pro } 1 \leqq j \leqq n).\text{[49]} \tag{189}$$

Reálná funkce f *(*r *proměnných) nechť má diferenciál* n*-tého řádu ve všech bodech množiny* M. *Potom existují čísla* $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ $(0 < \Theta_j < 1)$ *tak, že*

$$\Delta_{h^{(n)}} \ldots \Delta_{h'} f(a) = \mathbf{d}^n_{h^{(n)}, \ldots, h'} f(a + \Theta_1 h' + \ldots + \Theta_n h^{(n)})\,. \tag{190}$$

Zde jde tedy o n*-lineární diferenciál; značím-li* $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_n}} = f_{j_1 \ldots j_n}$, *lze pravou stranu v* (190) *psáti explicite (píši-li* $h^{(s)} = [h_1^{(s)}, \ldots, h_r^{(s)}]$)

$$\sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^{r} f_{j_1 \ldots j_n}(a + \Theta_1 h' + \ldots + \Theta_n h^{(n)})\, h'_{j_1} \ldots h^{(n)}_{j_n}\,. \tag{190a}$$

Důkaz. Pro $n = 1$ je to vzorec (188) (pro $n = 1$ značí symboly d, **d** totéž). Budiž tedy $n > 1$, předpoklady věty buďte splněny a předpokládejme, že věta je správná s hodnotou $n - 1$ místo n. Definujme funkci Φ rovnicí $\Phi(x) = f(x + h') - f(x) = \Delta_{h'} f(x)$; tato funkce (bodu x) má diferenciál n-tého (a tedy též $(n - 1)$-vého) řádu ve všech bodech tvaru $a + \lambda_2 h'' + \ldots + \lambda_n h^{(n)}$ $(0 \leqq \lambda_2 \leqq 1, \ldots$ $\ldots, 0 \leqq \lambda_n \leqq 1)$, a tedy podle indukčního předpokladu je (viz (190a))

---

[49]) M je konvexní obal množiny všech bodů (187) pro $x = a$; viz o tom kap. VI, § 20, pozn. 9, 11 — ale zde to nebudeme potřebovat. Chcete-li, dokažte to jako cvičení.

$$\Delta_{h^{(n)}} \dots \Delta_{h''} \Delta_{h'} f(a) = \Delta_{h^{(n)}} \dots \Delta_{h''} \Phi(a) =$$
$$= \sum_{j_2, \dots, j_n = 1}^{r} \Phi_{j_2 \dots j_n}(a + \Theta_2 h'' + \dots + \Theta_n h^{(n)}) \, h''_{j_2} \dots h^{(n)}_{j_n} =$$
$$= \Psi(a + h' + \Theta_2 h'' + \dots + \Theta_n h^{(n)}) - \Psi(a + \Theta_2 h'' + \dots + \Theta_n h^{(n)}) ,$$

kde jsme položili

$$\Psi(x) = \sum_{j_2, \dots, j_n = 1}^{r} f_{j_2 \dots j_n}(x) \, h''_{j_2} \dots h^{(n)}_{j_n} . \tag{191}$$

Podle věty 203 pro $n = 1$ je[50])

$$\Psi(a + h' + \Theta_2 h'' + \dots + \Theta_n h^{(n)}) - \tag{192}$$
$$- \Psi(a + \Theta_2 h'' + \dots + \Theta_n h^{(n)}) =$$
$$= \sum_{j_1 = 1}^{r} \Psi_{j_1}(a + \Theta_1 h' + \Theta_2 h'' + \dots + \Theta_n h^{(n)}) \, h'_{j_1} .$$

Vypočtete-li zde derivace Ψ_{j_1} podle (191), dostanete ihned, že výraz (192) má hodnotu (190a).

Tak jako existence diferenciálu 1. řádu v bodě a je charakterisována rovnicí

$$\Delta_h f(a) = \sum_{j=1}^{r} A_j h_j + o(\|h\|) , \tag{193}$$

budeme nyní podobně charakterisovat existenci diferenciálu n-tého řádu:

Věta 205.[51]) *Nechť funkce f (r proměnných) má diferenciál řádu $n - 1$ ($n \geqq 1$) v jistém okolí bodu $a = [a_1, \dots, a_r] \in \mathbf{E}_r$ (pro $n = 1$ nechť to znamená, že f je definována v okolí bodu a). Zvolme r^n čísel*

$$A_{j_1 \dots j_n} \quad (1 \leqq j_s \leqq r \text{ pro } 1 \leqq s \leqq n) \tag{194}$$

a definujme funkci $\eta(h', \dots, h^{(n)})$ (n bodů $h^{(s)} = [h_1^{(s)}, \dots, h_r^{(s)}]$ neboli nr proměnných) rovnicemi

---

[50]) Existence diferenciálu funkce Ψ plyne z (191) a z předpokládané existence diferenciálu n-tého řádu funkce f.

[51]) Užívám znaku $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}} = f_{j_1 \dots j_n}$.

$$(195)\qquad \Delta_{h^{(n)}} \dots \Delta_{h'} f(a) = \sum_{j_1, \dots, j_n = 1}^{r} A_{j_1 \dots j_n} h'_{j_1} \dots h^{(n)}_{j_n} + \\ + \|h'\| \cdot \|h''\| \dots \|h^{(n)}\| \, \eta(h', \dots, h^{(n)}) ;$$

$$(196)\qquad \eta(h', \dots, h^{(n)}) = 0 ,$$

je-li některé $h^{(s)} = o$[52]).

Tvrzení: Funkce f *má v bodě* a *diferenciál řádu* n*-tého tehdy a jen tehdy, lze-li zvoliti čísla* (194) *tak, že* η *je spojitá v bodě* $[o, \dots, o]$, *t. j. že (vzhledem k* (196)*)*

$$(197)\qquad \lim_{\substack{[h', \dots, h^{(n)}] \to [o, \dots, o] \\ h' \neq o, \dots, h^{(n)} \neq o}} \eta(h', \dots, h^{(n)}) = 0 .$$

Platí-li (197), *je nutně*

$$(198)\qquad A_{j_1 \dots j_n} = f_{j_1 \dots j_n}(a) ,$$

takže (195) *lze psáti též*

$$(199)\qquad \Delta_{h^{(n)}} \dots \Delta_{h'} f(a) = \mathbf{d}^n_{h^{(n)} \dots h'} f(a) + \|h'\| \dots \|h^{(n)}\| \, . \, o(1)$$

(při čemž znak o se vztahuje na limitní přechod $[h', \dots, h^{(n)}] \to \to [o, \dots, o]$, $h' \neq o, \dots, h^{(n)} \neq o$).

Pro $n = 1$ je tato věta ovšem identická s definicí diferenciálu 1. řádu a s větou 185. Věta 205 dává žádaný vztah mezi n-tou diferencí a n-tým diferenciálem: funkce f[53]) má v bodě a n-tý diferenciál tehdy a jen tehdy, lze-li její n-tou diferenci v bodě a vyjádřiti vhodnou n-lineární formou s přesností danou rovnicemi (195), (197). A tato n-lineární forma je podle (198) právě n-lineárním diferenciálem funkce f v bodě a.

Jakási vada je v tom, že věta má induktivní charakter: musíme předpokládati, že f má v okolí bodu a diferenciál řádu $n - 1$, a teprve potom můžeme charakterisovati pomocí této věty existenci n-tého diferenciálu. Ale tato vada se nedá jen tak odstranit, viz cvič. 2.

Důkaz věty 205. Jak bylo již řečeno, je věta správná pro $n = 1$. Budiž tedy $n > 1$ (ale nebudeme postupovati indukcí!). Buďte $\|h'\|$,

---

[52]) V tomto případě jsou totiž obě strany v (195) automaticky rovny nule, takže hodnota funkce η není rovnicí (195) určena.

[53]) O níž předpokládáme, že v okolí bodu a má diferenciál řádu $n - 1$.

…, $\|h^{(n)}\|$ kladná a dostatečně malá. Ježto f má v okolí bodu a diferenciál řádu $n - 1$, mohu užíti věty 204 (s hodnotou $n - 1$ místo n) na funkci Φ, definovanou rovnicí $\Phi(x) = f(x + h') - f(x)$, a obdržím (píši to raději explicite podle (190a))

$$\Delta_{h^{(n)}} \dots \Delta_{h'} f(a) = \Delta_{h^{(n)}} \dots \Delta_{h''} \Phi(a) =$$

$$(200) \qquad = \sum_{j_2, \dots, j_n = 1}^{r} \big(f_{j_2 \dots j_n}(a + h' + \Theta_2 h'' + \dots + \Theta_n h^{(n)}) -$$
$$- f_{j_2 \dots j_n}(a + \Theta_2 h'' + \dots + \Theta_n h^{(n)})\big)\, h''_{j_2} \dots h^{(n)}_{j_n}.$$

I. Nechť má f v bodě a n-tý diferenciál; ježto se levá strana v (200) nezmění, permutuji-li $h', \dots, h^{(n)}$, mohu si uspořádání myslit tak, že

$$(201) \qquad \|h'\| = \operatorname*{Max}_{1 \leq s \leq n} \|h^{(s)}\|.$$

Ježto $f_{j_2 \dots j_n}$ mají ještě v bodě a diferenciál 1. řádu, jest[54])

$$(202) \qquad f_{j_2 \dots j_n}(a + \lambda) - f_{j_2 \dots j_n}(a) =$$
$$= \sum_{j_1 = 1}^{r} f_{j_1 j_2 \dots j_n}(a)\, \lambda_{j_1} + o(\|\lambda\|).$$

Použijme této rovnice jednou pro $\lambda = h' + \Theta_2 h'' + \dots + \Theta_n h^{(n)}$, po druhé pro $\lambda = \Theta_2 h'' + \dots + \Theta_n h^{(n)}$ a odečtěme; uvážíme-li ještě, že v obou případech následkem (201) je $\|\lambda\| \leqq n\|h'\|$, obdržíme

$$f_{j_2 \dots j_n}(a + h' + \Theta_2 h'' + \dots + \Theta_n h^{(n)}) - f_{j_2 \dots j_n}(a + \Theta_2 h'' + \dots + \Theta_n h^{(n)}) =$$
$$= \sum_{j_1 = 1}^{r} f_{j_1 j_2 \dots j_n}(a)\, h'_{j_1} + o(\|h'\|).$$

Dosadíme-li to do (200), obdržíme zřejmě (199).

II. Nechť za druhé existují $A_{j_1 \dots j_n}$ tak, že platí (197), je-li η definováno rovnicí (195). Máme dokázati za prvé, že každá z funkcí

$$(203) \qquad f_{j_2 \dots j_n} \quad (1 \leqq j_2 \leqq r, \dots, 1 \leqq j_n \leqq r)$$

má diferenciál (1. řádu) v bodě a, a za druhé, že platí (198).

Buďte tedy dána čísla $j_2, \dots, j_n$. Volme body $h'', \dots, h^{(n)}$ speciálním způsobem: j_s-tá souřadnice bodu $h^{(s)}$ ($s = 2, \dots, n$) budiž číslo $h^{(s)}_{j_s} \neq 0$,

[54]) Užijeme záměnnosti derivací; pišme $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_r]$.

kdežto ostatní souřadnice bodu $h^{(s)}$ buďte rovny nule. Naproti tomu budiž h' libovolný bod $\neq o$; označme jej kratčeji $h = [h_1, \ldots, h_r]$.

Ježto f má v jistém okolí $\Omega(a, \delta)$ $(\delta > 0)$ diferenciál řádu $n - 1$, můžeme použíti toho, co jsme dokázali v bodě I, na funkci $\Phi(x) = f(x + h) - f(x)$, pokud $0 < \|h\| < \delta$, ovšem s hodnotou $n - 1$ místo n:

$$\begin{aligned}(204)\qquad \Delta_{h^{(n)}} \ldots \Delta_{h''} \Delta_h f(a) &= \Delta_{h^{(n)}} \ldots \Delta_{h''} \Phi(a) = \\ &= (f_{j_2 \ldots j_n}(a + h) - f_{j_2 \ldots j_n}(a))\, h''_{j_2} \ldots h^{(n)}_{j_n} + \\ &\quad + h''_{j_2} \ldots h^{(n)}_{j_n} \eta_1(h, h''_{j_2}, \ldots, h^{(n)}_{j_n})\,,^{55})\end{aligned}$$

kde platí toto: Je-li h libovolný bod takový, že $0 < \|h\| < \delta$, je (při pevném h)

$$(205)\qquad \lim_{[h''_{j_2}, \ldots, h^{(n)}_{j_n}] \to [0, \ldots, 0]} \eta_1(h, h''_{j_2}, \ldots, h^{(n)}_{j_n}) = 0\,.$$

Podle předpokladu je však levá strana v (204) rovna pravé straně v (195), která vzhledem k speciální volbě bodů $h'', \ldots, h^{(n)}$ má tvar

$$\begin{aligned}(206)\qquad &\sum_{j_1=1}^{r} A_{j_1 j_2 \ldots j_n} h_{j_1} h''_{j_2} \ldots h^{(n)}_{j_n} + \\ &+ \|h\| \,.\, h''_{j_2} \ldots h^{(n)}_{j_n} \,.\, \eta_2(h, h''_{j_2}, \ldots, h^{(n)}_{j_n})\,,\end{aligned}$$

kde[56])

$$(207)\qquad \lim_{[h_1, \ldots, h_r, h''_{j_2}, \ldots, h^{(n)}_{j_n}] \to [0, \ldots, 0]} \eta_2(h, h''_{j_2}, \ldots, h^{(n)}_{j_n}) = 0\,.$$

Budiž nyní $\varepsilon > 0$; volme δ_1 $(0 < \delta_1 < \delta)$ tak, že

$$\begin{aligned}(208)\qquad &(0 < \|h\| < \delta_1,\ 0 < |h''_{j_2}| < \delta_1, \ldots, 0 < |h^{(n)}_{j_n}| < \delta_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\eta_2(h, h''_{j_2}, \ldots, h^{(n)}_{j_n})| < \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Jestliže $h, h''_{j_2}, \ldots, h^{(n)}_{j_n}$ splňují předpoklad této implikace, můžeme výrazy (204), (206) (které jsou si rovny) dělit $h''_{j_2} \ldots h^{(n)}_{j_n}$ a dostáváme

$$\begin{aligned}(209)\qquad &f_{j_2 \ldots j_n}(a + h) - f_{j_2 \ldots j_n}(a) + \eta_1(h, h''_{j_2}, \ldots, h^{(n)}_{j_n}) = \\ &= \sum_{j_1=1}^{r} A_{j_1 \ldots j_n} h_{j_1} + \|h\|\, \eta_2(h, h''_{j_2}, \ldots, h^{(n)}_{j_n})\,.\end{aligned}$$

[55]) Funkce η_1 závisí na tvaru funkce Φ, t. j. na h; ostatní členové v (204) vypadnou následkem speciální volby bodů $h'', \ldots, h^{(n)}$.

[56]) η_1, η_2 jsou funkce $r + n - 1$ proměnných $h_1, \ldots, h_r, h''_{j_2}, \ldots, h^{(n)}_{j_n}$.

Zvolme nyní pevné h ($0 < \|h\| < \delta_1 < \delta$) a proveďme limitní přechod

(210) $$[h''_{j_2}, \ldots, h^{(n)}_{j_n}] \to [0, \ldots, 0],\ h''_{j_2} \neq 0, \ldots, h^{(n)}_{j_n} \neq 0\,.$$

Podle (205) má η_1 limitu 0; ježto jediný další člen v (209), který závisí na $h''_{j_2}, \ldots, h^{(n)}_{j_n}$, je η_2, má také η_2 limitu — závislou už *jen* na h:

(211) $$\lim_{\substack{[h''_{j_2}, \ldots, h^{(n)}_{j_n}] \to [0, \ldots, 0] \\ h''_{j_2} \neq 0, \ldots, h^{(n)}_{j_n} \neq 0}} \eta_2(h, h''_{j_2}, \ldots, h^{(n)}_{j_n}) = \lambda(h)\,.$$

Ale z (208) plyne: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_1 > 0$ tak, že $0 < \|h\| < \delta_1 \Rightarrow |\lambda(h)| \leqq \varepsilon$, t. j.

(212) $$\lim_{h \to o} \lambda(h) = 0\,.$$

Provedu-li tedy v (209) limitní přechod (210) při jakémkoliv $h \neq o$ (dostatečně blízkém bodu o), dostanu podle (205), (211)

$$f_{j_2 \ldots j_n}(a + h) - f_{j_2 \ldots j_n}(a) = \sum_{j_1 = 1}^{r} A_{j_1 j_2 \ldots j_n} h_{j_1} + \|h\|\, \lambda(h)\,,$$

což vzhledem k (212) značí podle definice 37, že funkce $f_{j_2 \ldots j_n}$ mají diferenciál 1. řádu v bodě a, t. j. že f tam má diferenciál n-tého řádu, načež z věty 185 plyne, že

$$A_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} f_{j_2 \ldots j_n}(a) = f_{j_2 \ldots j_n j_1}(a) = f_{j_1 j_2 \ldots j_n}(a)$$

(záměnnost!), což bylo dokázati.

Poznámka 1. Speciálně: Má-li f v bodě a diferenciál řádu n, má v jistém okolí bodu a diferenciál řádu $n - 1$ a tedy platí (199) (to je právě snazší část věty 205, dokázaná sub I).

Poznámka 2. Je-li speciálně $r = 1$, redukuje se součet v (195) vpravo na jediný člen; $h', h'', \ldots, h^{(n)}$ jsou prostě čísla. Dělíme-li rovnici (195) jejich součinem, dostáváme z věty 205 tuto větu: *Budiž f funkce jedné reálné proměnné, mající v okolí bodu a vlastní derivaci řádu $n - 1$ ($n > 0$); potom existuje vlastní $f^{(n)}(a)$ tehdy a jen tehdy, existuje-li vlastní limita*

(213) $$\lim_{\substack{[h', \ldots, h^{(n)}] \to [0, \ldots, 0] \\ h' \ldots h^{(n)} \neq 0}} \frac{\Delta_{h^{(n)}} \ldots \Delta_{h'} f(a)}{h' h'' \ldots h^{(n)}} = A\,,$$

načež $f^{(n)}(a) = A$.

Položím-li $h' = \ldots = h^{(n)} = h \neq 0$, dostávám odtud často užívané vyjádření n-té derivace: *Existuje-li vlastní $f^{(n)}(a)$, je*

$$(214) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h^n f(a)}{h^n} = f^{(n)}(a) .$$

Při tom píšeme $\Delta_h^n f(a) = \Delta_h \Delta_h \ldots \Delta_h f(a)$ (Δ_h se opakuje n-kráte). Z (186) ihned plyne

$$(215) \qquad \Delta_h^n f(a) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^{n+l} \binom{n}{l} f(a + lh)$$

(neboť počet sčítanců v (186), v nichž právě l z čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ je rovno jedné, je $\binom{n}{l}$).

Příklad 1. Jiné speciální volby $h', \ldots, h^{(n)}$ vedou k jiným vzorcům. Na př. pro $n = 2$, $h' = -h'' = h$ je $\Delta_{h'} \Delta_{h''} f(a) = 2f(a) - f(a + h) - f(a - h)$ a (213) dává toto: *Existuje-li vlastní $f''(a)$, je*

$$(216) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) + f(a - h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a) .$$

Ovšem: Ježto zde jde o *speciální* volbu h', h'', nemůžeme z existence limity v (216) soudit na existenci $f''(a)$, ani když $f'(x)$ existuje pro všechna x (takže lze užíti věty z pozn. 2). Příklad: $f(x) = x^2$ pro $x \geqq 0$, $f(x) = -x^2$ pro $x \leqq 0$; $f'(x) = 2|x|$. Pro $a = 0$ je limita v (216) rovna nule, ale $f''(0)$ neexistuje.

Cvičení

1. Věty obdobné první části věty 205 lze odvoditi i pro jednotlivé parciální derivace (místo pro totální diferenciál). Položme

$$\delta_k^{(j)} f(x) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + k, x_{j+1}, \ldots, x_r) - f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_r) ;$$

jde tedy o speciální diferenci $\Delta_h f(x)$, kde pouze j-tá souřadnice bodu h smí býti různá od nuly. Ukažte: Existuje-li v jistém okolí bodu x parciální derivace reálné funkce f

$$(217) \qquad \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_n}} ,$$

je pro dosti malá $|k_1|, \ldots, |k_n|$

$$\delta_{k_n}^{(j_n)} \ldots \delta_{k_1}^{(j_1)} f(x) = \frac{\partial^n f(x + \Theta_1 h' + \ldots + \Theta_n h^{(n)})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_n}} k_1 \ldots k_n ,$$

kde $h^{(s)} = [0, \ldots, 0, k_s, 0, \ldots, 0]$ (nuly všude až na j_s-té místo), $0 < \Theta_s < 1$. Důkaz postupným užitím věty o přírůstku funkce pro funkce **jedné** proměnné. Je-li tedy derivace (217) spojitá v bodě x, je

$$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_n}} = \lim_{\substack{[k_1, \ldots, k_n] \to [0, \ldots, 0] \\ k_1 \neq 0, \ldots, k_n \neq 0}} \frac{1}{k_1 \ldots k_n} \delta_{k_n}^{(j_n)} \ldots \delta_{k_1}^{(j_1)} f(x) .$$

(Tato rovnice platí i pro komplexní f).

2. Věta 205 by neplatila, kdybychom vynechali předpoklad o existenci totálního diferenciálu řádu $n - 1$ v okolí bodu x. Vezměme případ $n = 2$, $r = 1$ (funkce jedné proměnné). Stačí sestrojiti funkci $f(x)$, jež nemá v počátku druhou derivaci, ačkoliv

(218) $$(f(h + k) - f(h)) - (f(k) - f(0)) = hk\eta(h, k) ,$$

kde $\lim\limits_{[h,k] \to [0,0]} \eta(h, k) = 0$, takže rovnice (195), (197) platí (s hodnotou $A_{11} = 0$). Definujme: $f(0) = 0$, $f\left(\dfrac{1}{2n - 1}\right) = 0$, $f\left(\dfrac{1}{2n}\right) = \dfrac{1}{(2n)^4}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; f budiž lineární v každém intervalu $\left\langle \dfrac{1}{m + 1}, \dfrac{1}{m} \right\rangle$ $(m = 1, 2, \ldots)$; $f(-x) = f(x)$.

Že $f''(0)$ neexistuje, je patrno z toho, že pro $m = 1, 2, \ldots$ neexistuje $f'\left(\dfrac{1}{m}\right)$. Že $\lim \eta(h, k) = 0$, bude dokázáno, ukážeme-li, že pro dosti malá $|h|$, $|k|$ je prostá hodnota levé strany rovnice (218) nejvýše rovna $5|hk|(|h| + |k|)$. K důkazu stačí předpokládati $|h| \geqq |k| > 0$ (symetrie). Jest $|f(h + k) - f(h)| = |A| \cdot |k|$, kde A je směrnice přímky, spojující body $[h, f(h)]$, $[h + k, f(h + k)]$. Snadno zjistíte (vše pro dosti malá $|h|$, $|k|$), že $|A| < 2(|h| + |k|)^3 \leqq 4|h|(|h| + |k|)$; dále $|f(k) - f(0)| \leqq 2k^4 \leqq |hk|(|h| + |k|)$.

§ 13. Dodatek k funkcím jedné proměnné.

Budiž f funkce jedné proměnné; položme

(219) $$Q_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = Q_f(x_2, x_1)$$

pro $x_1 \neq x_2$ (jako v kap. V, § 8). Derivace je definována rovnicí

(220) $$\lim_{x \to a} Q_f(x, a) = \lim_{x \to a} Q_f(a, x) = f'(a) .$$

Vyšetříme, co se děje, jestliže ve funkci (219) *oba* body x_1, x_2 konvergují k a. Dostaneme dvě různé věty, podle toho, zda požadujeme, aby body x_1, x_2 ležely po opačných stranách bodu a (připouštějíce ještě krajní případy $x_1 = a$ nebo $x_2 = a$) či zda tento požadavek nečiníme. Vzhledem k symetrii v (219) stačí vyšetřovati $Q_f(x_1, x_2)$ pro $x_1 < x_2$, pokud se nám to hodí.

Věta 206. *Derivace (vlastní nebo nevlastní)*[57] $f'(a)$ *existuje tehdy a jen tehdy, existuje-li (vlastní nebo nevlastní)*[57] *limita*

$$(221) \qquad \lim_{[x_1,x_2]\to[a,a],\ x_1\leq a\leq x_2,\ x_1<x_2} Q_f(x_1, x_2) = A\ ,$$

načež $A = f'(a)$.

Důkaz. I. Nechť platí (221). Provedeme-li zde limitní přechod jednak pro $x_1 = a$, $x_2 \to a +$,[58]) jednak pro $x_2 = a$, $x_1 \to a -$, dostaneme ihned, že existuje limita (220), rovná A.

II. Nechť platí (220). Při limitním přechodu v (221) přicházejí v úvahu hodnoty $Q_f(a, x_2)$ $(x_2 > a)$, $Q_f(x_1, a)$ $(x_1 < a)$, $Q_f(x_1, x_2)$ $(x_1 < a < x_2)$. Ale pro poslední výraz platí (viz kap. V, § 10, pozn. 1)

$$\text{Min}\,(Q_f(x_1, a), Q_f(a, x_2)) \leqq Q_f(x_1, x_2) \leqq \text{Max}\,(Q_f(x_1, a), Q_f(a, x_2))\ .$$

Z existence limity (220) plyne tedy ihned, že limita (221) existuje a rovná se $f'(a)$. (Čtenář je již do té míry zkušený, že nepotřebuje dalších vysvětlivek.)

Při druhé větě se omezme na vlastní limity, abychom věc nekomplikovali:

Věta 207. *Budiž f reálná. Vlastní limita*[59])

$$(222) \qquad \lim_{\substack{[x_1,x_2]\to[a,a] \\ x_1<x_2}} Q_f(x_1, x_2) = A$$

existuje tehdy a jen tehdy, jestliže čtyři derivovaná čísla (viz kap. V, § 8, def. 10) *funkce f jsou v bodě a konečná a spojitá, načež limita* (222) *má hodnotu* $f'(a)$.

---

[57]) Při nevlastní derivaci a nevlastní limitě je nutno předpokládati, že f je reálná, a bráti hodnoty $+\infty$, $-\infty$, nikoliv ∞.

[58]) Množina $\underset{[x_1,x_2]}{\mathcal{E}}(x_1 = a, x_2 > a)$ je částí množiny $\underset{[x_1,x_2]}{\mathcal{E}}(x_1 \leqq a \leqq x_2,\ x_1 < x_2)$.

[59]) Je jedno, píšeme-li $x_1 < x_2$ nebo $x_1 \neq x_2$.

Důkaz. Je-li limita (222) konečná, je $Q_f(x_1, x_2)$ omezené, jsou-li x_1, x_2 v jistém okolí bodu a, t. j. $|f(x_1) - f(x_2)| \leqq K|x_1 - x_2|$ pro $|x_1 - a| \leqq \Delta$, $|x_2 - a| \leqq \Delta$ (K konečné, $\Delta > 0$), takže f je spojitá v $\langle a - \Delta, a + \Delta\rangle$. Jsou-li naopak čtyři derivovaná čísla v bodě a spojitá a konečná, jsou tato čtyři čísla konečná i v jistém intervalu $\langle a - \Delta, a + \Delta\rangle$, takže f je spojitá v $\langle a - \Delta, a + \Delta\rangle$ (viz kap. V, § 8, pozn. 3). Můžeme tedy při důkazu předpokládati, že f je spojitá v $\langle a - \Delta, a + \Delta\rangle$ ($\Delta > 0$). Potom však pro každý interval $J = (a - \delta, a + \delta)$ ($0 < \delta < \Delta$) je podle věty 88

$$\sup_{x \in J} D^+f(x) = \sup_{\substack{x_1 \in J,\, x_2 \in J \\ x_1 < x_2}} Q_f(x_1, x_2), \quad \inf_{x \in J} D^+f(x) = \inf_{\substack{x_1 \in J,\, x_2 \in J \\ x_1 < x_2}} Q_f(x_1, x_2)$$

(a podobně pro ostatní tři derivovaná čísla). Tedy implikace

$$(|x_1 - a| < \delta,\ |x_2 - a| < \delta,\ x_1 < x_2) \Rightarrow |Q_f(x_1, x_2) - A| \leqq \varepsilon$$

je ekvivalentní s implikací[60])

$$(|x - a| < \delta) \Rightarrow |D^+f(x) - A| \leqq \varepsilon\,.$$

Odtud však čtenář ihned vidí, že (222) znamená totéž jako

$$\lim_{x \to a} D^+f(x) = A = D^+f(a)\,,$$

a podobně pro další tři derivovaná čísla.

Příklad 1. Jako ilustraci k větám 206, 207 si čtenář může rozvážit funkce $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ ($f_1(0) = 0$), $f_2(x) = x^3 \cos \frac{1}{x}$ ($f_2(0) = 0$) v okolí počátku. Aby měl také nějaké body, kde derivace neexistuje, může nahraditi křivku lomenou čarou, jak je to naznačeno u první z nich na obr. 10.

Připojme ještě jednu větu (Schwarzovu), která je v jistém vztahu k příkl. 1 v § 12 a které se v analyse někdy užívá.

Věta 208. *Budiž f funkce jedné reálné proměnné, spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro každé $x \in (a, b)$ budiž*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)}{h^2} = 0\,. \tag{223}$$

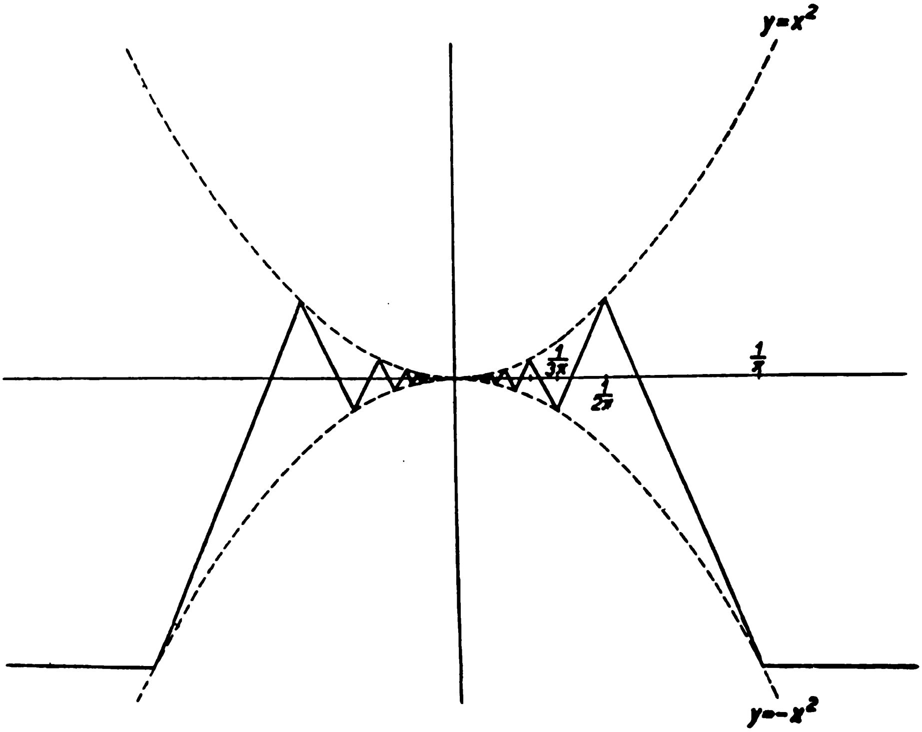
---

[60]) Hodnota $x = a$ jest přípustná.

Potom f je lineární v $\langle a, b\rangle$, t. j. funkce

(224) $$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\,\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

je rovna nule pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$.



Obr. 10.

Důkaz. Nechť f není lineární v $\langle a, b\rangle$, takže φ nabývá aspoň v jednom bodě $c \in \langle a, b\rangle$ hodnoty různé od nuly, na př. hodnoty kladné (jinak bychom místo f vyšetřovali funkci $-f$). Zvolme $\delta > 0$ tak malé, že i funkce

(225) $$\psi(x) = \varphi(x) - \delta(x - a)(b - x)$$

má v bodě c kladnou hodnotu. Ježto $\psi(a) = \psi(b) = 0$ (viz (224), (225)), nabývá funkce ψ své největší (ovšem kladné) hodnoty v $\langle a, b \rangle$ jistě v jistém **vnitřním** bodě $\gamma \in (a, b)$. Pro dosti malá $|h|$ je potom

$$\psi(\gamma + h) + \psi(\gamma - h) - 2\psi(\gamma) \leqq 0\,. \tag{226}$$

Ale $(\gamma + h) + (\gamma - h) - 2\gamma = 0$, $(\gamma + h)^2 + (\gamma - h)^2 - 2\gamma^2 = 2h^2$; podle (224), (225), (226) vychází tedy ihned

$$\begin{gathered} f(\gamma + h) + f(\gamma - h) - 2f(\gamma) = \\ = -2\delta h^2 + \psi(\gamma + h) + \psi(\gamma - h) - 2\psi(\gamma) \leqq -2\delta h^2\,; \end{gathered}$$

odtud však je patrno, že (223) nemůže platit pro $x = \gamma$ — spor.

Poznámka 1. Předpoklad spojitosti je podstatný. Je-li $f(x) = 1$ pro $x > 0$, $f(x) = -1$ pro $x < 0$, $f(0) = 0$, platí (223) všude, ač f není lineární na př. v $\langle -1, 1 \rangle$.

Cvičení

1. Z existence limity v (223) v **jednom** bodě a nelze souditi na existenci $f''(a)$. Dokažte však: Nechť pro každé $x \in (\alpha, \beta)$ existuje vlastní limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)}{h^2} = \psi(x)$$

a nechť f, ψ jsou spojité v (α, β). Potom v (α, β) je $f''(x) = \psi(x)$. Návod: Dvojím užitím věty o existenci primitivní funkce (**I**, věta 49) dostaneme funkci g tak, že $g''(x) = \psi(x)$ v (α, β), načež podle příkl. 1 v § 12 je

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) + g(x - h) - 2g(x)}{h^2} = \psi(x)$$

v (α, β). Užitím věty 208 dostáváme, že $f - g$ je lineární, tedy $f'' = g'' = \psi$ v (α, β).

§ 14. Diferenciál limitní funkce. Jsou-li $F_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ funkce r proměnných, konvergentní na př. v otevřeném intervalu I:

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \varphi(x) \quad \text{pro} \quad x \in I\,, \tag{227}$$

jestliže dále funkce

$$\frac{\partial F_n}{\partial x_j} \quad (j = 1, \ldots, r;\; n = 1, 2, \ldots) \tag{228}$$

jsou spojité v I, a jestliže pro každé j ($j = 1, 2, \ldots, r$) existuje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_j} = \psi_j(x) \quad \text{stejnoměrně uvnitř } I,\text{[61]}$$

potom předně funkce ψ_j jsou spojité v I (věta 174, I) a za druhé

$$\psi_j(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} \quad \text{pro } x \in I.\text{[62]}$$

Tedy φ má v I totální diferenciál, a jest

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_j} \quad \text{pro } x \in I\,.$$

Ovšem je trochu nepřirozené požadovati *spojitost* derivací (228), chceme-li dokázati pouze *existenci diferenciálu* funkce φ. Proto odvodíme obecnější větu; avšak nebudeme jí v dalším užívati, takže čtenář může zbytek tohoto paragrafu vynechati.

Při tom provedu ještě několik méně podstatných zobecnění: místo I vezmu libovolnou otevřenou souvislou množinu, existenci limity (227) předpokládám jen v jednom bodě a index n bude místo přirozených čísel probíhati body libovolného metrického prostoru.

Věta 209. *Budiž* (P, ϱ) *metrický prostor,* $B \subset P$, $b \in B'$ *(derivace v* P*). Budiž* $A \subset \mathbf{E}_r$ *otevřená souvislá množina. Každému* $t \in B \dot{-} (b)$ *budiž přiřazena funkce* F_t, *definovaná v* A.[63]) *Předpokládejme:*

I. Existuje bod $a \in A$, *pro nějž existuje* $\lim\limits_{\substack{t\to b\\ t\in B}} F_t(a)$.

II. Každá z funkcí F_t *(pro každé* $t \in B \dot{-} (b)$*) má všude v* A *totální diferenciál (1. řádu).*

III. Pro každé j ($1 \leqq j \leqq r$) *existuje*

$$\lim_{\substack{t\to b\\ t\in B}} \frac{\partial F_t(x)}{\partial x_j} = \psi_j(x) \quad \textit{stejnoměrně uvnitř } A\,. \tag{229}$$

[61]) Tento pojem viz v kap. VI, § 21, pozn. 5.

[62]) To se dostane ihned z věty 57, nechám-li pouze x_j proměnné a ostatní proměnné „považuji za konstantní“.

[63]) F_t je tedy funkce r proměnných.

Potom platí:

$\mathfrak{A}$. *Limita*

(230) $$\lim_{\substack{t\to b\\ t\in B}} F_t(x) = \varphi(x)$$

existuje stejnoměrně uvnitř A.

$\mathfrak{B}$. *V každém bodě $x \in A$ má φ diferenciál a jest*

(231) $$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j} = \psi_j(x) = \lim_{\substack{t\to b\\ t\in B}} \frac{\partial F_t(x)}{\partial x_j}\,.$$

Důkaz. A. Předpokládejme především, že A jest otevřený interval.

K bodu $\mathfrak{A}$. Podle kap. VI, § 21, pozn. 6 stačí dokázati: Ke každému bodu $a_1 \in A$ existuje okolí I tak, že limita (230) existuje stejnoměrně v I. K tomu cíli volme omezený otevřený interval I tak, že $a \in I$, $a_1 \in I$, $\bar{I} \subset A$ (což zřejmě je možno). Konvergence (229) je tedy stejnoměrná v I (dokonce v $\bar{I}$). Pro každý bod $a + h \in I$ je podle poznámky 1 v § 11, použité na funkci $F_u(x) - F_v(x)$,

(232) $$F_u(a+h) - F_v(a+h) = F_u(a) - F_v(a) + \\ + \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{\partial F_u(a+\Theta h)}{\partial x_j} - \frac{\partial F_v(a+\Theta h)}{\partial x_j}\right) h_j$$

$(0 < \Theta < 1)$. Budiž Δ průměr intervalu I. Je-li $\varepsilon > 0$, existuje $\delta > 0$ tak, že pro

(233) $$u \in B\,,\quad v \in B\,,\quad 0 < \varrho(b, u) < \delta\,, 0 < \varrho(b, v) < \delta$$

je předně $|F_u(a) - F_v(a)| < \varepsilon$ (podle I) a za druhé

$$\left|\frac{\partial F_u(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial F_v(x)}{\partial x_j}\right| < \varepsilon$$

pro každé $x \in I$ (podle III). Z (232) tedy plyne: Platí-li (233), potom pro každý bod $a + h \in I$ je

$$|F_u(a+h) - F_v(a+h)| < (1 + r\Delta)\,\varepsilon\,,$$

čímž stejnoměrná konvergence v I dokázána.

K bodu $\mathfrak{B}$. Nechť $\varphi(x)$, $\psi_j(x)$ mají význam uvedený v $\mathfrak{A}$ a v III. Budiž $\alpha \in A$ a volme kompaktní interval $I_1 = \overline{\Omega(\alpha, \Delta_1)} \subset A$, takže konvergence

$$(234)\qquad \lim_{\substack{t\to b\\ t\in B}} F_t(x) = \varphi(x)\,,\quad \lim_{\substack{t\to b\\ t\in B}} \frac{\partial F_t(x)}{\partial x_j} = \psi_j(x)$$

je stejnoměrná v I_1. Pro $0 < \|h\| \leqq \Delta_1$, $t \in B \dot{-} (b)$ položme

$$(235)\qquad \frac{1}{\|h\|}\left(F_t(\alpha + h) - F_t(\alpha) - \sum_{j=1}^{r} h_j \frac{\partial F_t(\alpha)}{\partial x_j}\right) = \eta(t, h)\,;$$

podle předpokladu II jest

$$(236)\qquad \lim_{h\to o} \eta(t, h) = 0 \quad \text{pro } t \in B \dot{-} (b)\,.$$

Pro

$$(237)\qquad t \in B \dot{-} (b)\,,\quad v \in B \dot{-} (b)\,,\quad 0 < \|h\| \leqq \Delta_1$$

je podle pozn. 1 v § 11, aplikované na funkci $F_t(x) - F_v(x)$:

$$\eta(t, h) - \eta(v, h) =$$

$$(238)\qquad = \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{\partial F_t(\alpha + \Theta h)}{\partial x_j} - \frac{\partial F_v(\alpha + \Theta h)}{\partial x_j} - \frac{\partial F_t(\alpha)}{\partial x_j} + \frac{\partial F_v(\alpha)}{\partial x_j}\right) \frac{h_j}{\|h\|}\,.$$

Ježto $\dfrac{|h_j|}{\|h\|} \leqq 1$, plyne ze stejnoměrnosti konvergence v (234) a z (238) okamžitě,[64]) že existuje

$$(239)\qquad \lim_{\substack{t\to b\\ t\in B}} \eta(t, h) \text{ stejnoměrně v množině } 0 < \|h\| \leqq \Delta_1\,.$$

Podle věty 174, II a podle (236) je tedy

$$(240)\qquad \lim_{h\to o} \lim_{\substack{t\to b\\ t\in B}} \eta(t, h) = \lim_{\substack{t\to b\\ t\in B}} \lim_{h\to o} \eta(t, h) = 0\,.$$

Ale podle (235), (234) je pro $0 < \|h\| \leqq \Delta_1$

$$\lim_{\substack{t\to b\\ t\in B}} \eta(t, h) = \frac{1}{\|h\|}\left(\varphi(\alpha + h) - \varphi(\alpha) - \sum_{j=1}^{r} h_j \psi_j(\alpha)\right),$$

takže (240) dává

$$\lim_{h\to o} \frac{1}{\|h\|}\left(\varphi(\alpha + h) - \varphi(\alpha) - \sum_{j=1}^{r} \psi_j(\alpha)\, h_j\right) = 0\,,$$

---

[64]) Bolzano-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci (věta 173).

t. j.

$$\varphi(\alpha + h) - \varphi(\alpha) - \sum_{j=1}^{r} \psi_j(\alpha)\, h_j = o(\|h\|)\,;$$

t. j. φ má v bodě α diferenciál a $\psi_j(\alpha) = \dfrac{\partial\varphi(\alpha)}{\partial x_j}$. Tím je dokázán bod $\mathfrak{B}$.

B. Budiž A libovolná souvislá otevřená množina, $\alpha \in A$. Podle věty 172 existují otevřené intervaly $A_s \subset A$ $(s = 1, \ldots, q)$ tak, že $a \in A_1$, $\alpha \in A_q$, $A_s A_{s+1} \neq \emptyset$. Zvolme body $a_2, \ldots, a_q$ tak, že $a_{s+1} \in A_s A_{s+1}$ $(s = 1, \ldots, q - 1)$. Píši-li A_s místo A, jsou v A_s splněny předpoklady věty 209 až snad na předpoklad I. Ale v A_1 je splněn i předpoklad I; podle bodu **A** tedy existuje

$$\lim_{\substack{t \to b \\ t \in B}} F_t(x) \tag{241}$$

pro $x \in A_1$, tedy speciálně pro $x = a_2 \in A_2$, takže i v A_2 je splněn předpoklad I. Tedy (podle bodu **A**) existuje (241) pro každé $x \in A_2$, tedy speciálně pro $x = a_3 \in A_3$, takže i v A_3 je splněn předpoklad I atd. Tedy i v A_q je splněn předpoklad I. Podle bodu **A** tedy platí tvrzení $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, jestliže v nich místo A píšeme A_q. Ale A_q jest okolí libovolně zvoleného bodu $\alpha \in A$, takže podle kap. VI, § 21, pozn. 6 je konvergence v $\mathfrak{A}$ stejnoměrná uvnitř A a tvrzení $\mathfrak{B}$ platí pro každé $x \in A$.