KAPITOLA XI.

MOCNINNÉ ŘADY

V kap. XI a XII půjde výhradně o konečné komplexní funkce jedné komplexní proměnné nebo několika komplexních proměnných, t. j. o zobrazení z $\mathbf{K}_1$ do $\mathbf{K}_1$ nebo, obecněji, z $\mathbf{K}_r$ do $\mathbf{K}_1$. Metriku v $\mathbf{K}_1$ a rovněž v $\mathbf{K}_r$ zavedu jako v kap. VI, § 3, příkl. 1, 2. T. j. je-li $z = x + iy$, $w = u + iv$ (x, y, u, v reálná), kladu $\varrho(z, w) = |z - w| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$; přiřadím-li tedy číslu $z = x + iy \in \mathbf{K}_1$ bod $[x, y] \in \mathbf{E}_2$, je to isometrické zobrazení $\mathbf{K}_1$ na $\mathbf{E}_2$ s eukleidovskou metrikou (v kap. VII—X jsme v $\mathbf{E}_r$ užívali většinou jiné metriky, ale „skoro stejné"). Podobně: jestliže bodu $[z_1, z_2, \ldots, z_r] \in \mathbf{K}_r$ ($z_j = x_j + iy_j$) přiřadím bod $[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r] \in \mathbf{E}_{2r}$, dostávám isometrické zobrazení $\mathbf{K}_r$ na $\mathbf{E}_{2r}$ s eukleidovskou metrikou. Vzhledem k této isometrii se všechny věty o množinách v $\mathbf{E}_{2r}$ přenášejí okamžitě na množiny v $\mathbf{K}_r$. Na př. okolí $\Omega(a, \varrho)$ ($a = a_1 + ia_2$, $0 < \varrho < +\infty$) v $\mathbf{K}_1$ znamená — znázorním-li si číslo $x_1 + ix_2$ bodem $[x_1, x_2] \in \mathbf{E}_2$ — vnitřek kružnice o středu $[a_1, a_2]$ a o poloměru ϱ. Slova „uzávěr", „vnitřní bod" a pod. budou znamenati vždy uzávěr v $\mathbf{K}_1$ (nebo v $\mathbf{K}_r$) a pod. Rovněž symbol $\lim_{z \to a} f(z)$ bude znamenati limitu „vzhledem ke $\mathbf{K}_1$" (po příp. $\mathbf{K}_r$). Pokud nebude jinak řečeno, bude slovo limita nebo derivace znamenati vždy **konečnou** limitu nebo derivaci.

Dáti komplexní funkci f komplexní proměnné znamená, přiřaditi každému $z = x + iy$ jistého oboru komplexní číslo $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ (rozklad na reálnou a imaginární část), takže to znamená totéž, jako dáti dvě funkce dvou reálných proměnných; podobně komplexní funkce r komplexních proměnných určuje dvě reálné funkce $2r$ reálných proměnných. Funkce f (jedné komplexní proměnné) je spojitá v bodě $x_0 + iy_0$ tehdy a jen tehdy, jsou-li $P(x, y)$, $Q(x, y)$ spojité v bodě $[x_0, y_0]$. Rovnice $\lim_{z \to z_0} f(z) = A + iB$ ($z_0 = x_0 + iy_0$) znamená prostě, že jest $\lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} P(x, y) = A$, $\lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} Q(x, y) = B$ atd. Zde není tedy v podstatě nic nového proti reálným funkcím; prostě se jedna komplexní funkce jedné komplexní proměnné (po příp. r komplexních proměnných) nahradí dvojicí reálných funkcí dvou (po příp. $2r$) reálných proměnných. Nové a zajímavé okolnosti se ukáží teprve tehdy, když se pokusíme zobecnit na funkce komplexní proměnné pojem derivace, což nyní učiníme.

§ 1. Derivace funkcí komplexní proměnné. Definice 41. *Budiž*

$$f(z) = P(x, y) + \mathrm{i}Q(x, y) \quad (z = x + \mathrm{i}y) \tag{1}$$

funkce komplexní proměnné z. Budiž dáno komplexní číslo $z = x + \mathrm{i}y$; sestrojme funkci komplexní proměnné $h = k + \mathrm{i}l$ [1])

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \tag{2}$$

$$= \frac{P(x+k, y+l) - P(x, y) + \mathrm{i}(Q(x+k, y+l) - Q(x, y))}{k + \mathrm{i}l}.$$

Má-li tato funkce proměnné h limitu[2]) *v bodě 0, nazýváme tuto limitu derivací (komplexní) funkce f podle (komplexní) proměnné z a značíme ji $f'(z)$ nebo $\dfrac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}$.*[3]) *Jest tedy*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) = \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}, \tag{3}$$

existuje-li limita vlevo.

Poznámka 1. Podíváte-li se na pravou stranu v (2), vidíte, že jde o limitu jisté komplexní funkce dvou reálných proměnných k, l; jde tedy o limitu reálné a imaginární části této funkce v bodě $[0, 0]$ (t. j. jde o symbol $\lim\limits_{[k,l] \to [0,0]}$). To je podstatný rozdíl proti případu reálné funkce reálné proměnné; tam šlo totiž o limitu funkce jedné reálné proměnné h, totiž o limitu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

[1]) Jde ovšem stále o rozklad v reálnou a imaginární část, takže x, y, P, Q, k, l jsou reálná; to nebudu stále připomínati.

[2]) Ovšem konečnou (podle naší úmluvy).

[3]) Mluvíme ovšem o derivaci v bodě z.

Tento rozdíl se projeví v následující větě, jež vyjadřuje podmínku pro existenci derivace (3) pomocí vlastností funkcí P, Q.

Věta 218. *Funkce* (1) *má derivaci v bodě* $z = x + iy$ *tehdy a jen tehdy, jsou-li splněny tyto podmínky: 1. Funkce* P, Q *mají v bodě* $[x, y]$ *totální diferenciál. 2. V bodě* $[x, y]$ *je* $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$.

Potom je $f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Důkaz. Budiž $A + iB$ komplexní číslo; definujme funkci $\eta(k, l) = \eta_1(k, l) + i\eta_2(k, l)$ rovnicí[4])

$$\frac{P(x + k, y + l) - P(x, y) + i(Q(x + k, y + l) - Q(x, y))}{k + il} = \tag{4}$$
$$= A + iB + \eta_1(k, l) + i\eta_2(k, l) .$$

Číslo $A + iB$ bude limitou levé strany tehdy a jen tehdy, bude-li[5])

$$\lim \eta_1(k, l) = \lim \eta_2(k, l) = 0 . \tag{5}$$

Jde tedy o to, zda lze voliti hodnoty A, B tak, aby platilo (5), a jaké budou tyto hodnoty. Násobíme-li (4) číslem $k + il$ a srovnáme reálnou a imaginární část, obdržíme

$$P(x + k,\ y + l) - P(x, y) = Ak - Bl + \zeta_1(k, l) , \tag{6}$$

$$Q(x + k,\ y + l) - Q(x, y) = Bk + Al + \zeta_2(k, l) , \tag{7}$$

kde jsme kladli (píši krátce η_1 místo $\eta_1(k, l)$ atd.)

$$\zeta_1 = \eta_1 k - \eta_2 l ,\quad \zeta_2 = \eta_1 l + \eta_2 k ; \tag{8}$$

tedy

$$\eta_1 = \frac{\zeta_1 k + \zeta_2 l}{k^2 + l^2} ,\quad \eta_2 = \frac{-\zeta_1 l + \zeta_2 k}{k^2 + l^2} . \tag{9}$$

I. Nechť existuje $f'(z) = A + iB$, takže platí (5); podle (8) je potom pro $j = 1, 2$: $\frac{|\zeta_j|}{|k| + |l|} \leqq |\eta_1| + |\eta_2|$, takže

---

[4]) Jde o limitu v bodě $[0, 0]$; vylučuji proto stále případ $k = l = 0$.

[5]) Pro zkrácení vynechávám znak $[k, l] \to [0, 0]$.

$$(10)\quad \lim \frac{\zeta_j(k, l)}{|k| + |l|} = 0 \text{ neboli } \zeta_j(k, l) = o(|k| + |l|) \quad (j = 1, 2).$$

To však znamená (viz (6), (7) a def. 37),[5a]) že funkce P, Q mají v bodě $[x, y]$ totální diferenciál a že jest $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = A$, $-\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = B$, takže $f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial x}$.

II. Nechť za druhé jsou splněny podmínky 1, 2 věty 218. Platí tedy rovnice (6), (7), (10), klademe-li $A = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$, $B = -\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Ježto $k^2 + l^2 \geqq 2|kl|$, jest $k^2 + l^2 \geqq \frac{1}{2}(|k| + |l|)^2$, načež z (9) plyne pro $j = 1, 2$:

$$|\eta_j| \leqq \frac{(|\zeta_1| + |\zeta_2|)(|k| + |l|)}{k^2 + l^2} \leqq 2\,\frac{|\zeta_1| + |\zeta_2|}{|k| + |l|},$$

tedy $\lim \eta_1 = \lim \eta_2 = 0$ podle (10). Z (4) potom vskutku plyne $f'(z) = A + \mathrm{i}B = \frac{\partial P}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Poznámka 2. Věta 218 ukazuje, že funkce $f(z)$, které mají derivaci podle komplexní proměnné z, jsou funkce jistého speciálního typu, neboť mezi jejich reálnou a imaginární částí jsou určité vztahy, dané podmínkou 2. Těmito funkcemi se zabývá t. zv. „theorie analytických funkcí“ neboli „theorie funkcí komplexní proměnné“. My se touto theorií soustavně zabývati nebudeme; definici 41 a větu 218 jsem zde uvedl vlastně jenom z tohoto důvodu: Budeme mluviti o mocninných řadách s komplexními proměnnými, při čemž se s derivací setkáme, a bylo by snad vyumělkované, kdybych se tomuto pojmu vyhýbal.

Příklad 1. Derivace konstanty je zřejmě rovna nule. Dále jest $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} = 1$. Důkaz: je-li $f(z) = z$, jest $(f(z + h) - f(z)) : h = (z + h - z) : h = 1$ pro $h \neq 0$; limita pro $h \to 0$ je tedy 1.

Příklad 2. Obvyklá pravidla z **DI**, kap. VIII, § 2 o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu, jakož i věta o derivování složené funkce

[5a]) Pro bod $[k, l]$ užívám zde normy $|k| + |l|$; to smím, viz pozn. 1 v kap. VII, § 2.

platí i pro derivace komplexní funkce komplexní proměnné; důkaz je týž jako pro reálné proměnné (přesvědčte se o tom).

Příklad 3. Budiž c konstanta (komplexní); potom jest $(z - c)' = 1$ a indukcí podle m dostanete — užívajíce pravidla o derivování součinu — vzorec $((z - c)^m)' = m(z - c)^{m-1}$ pro každé přirozené m; pro $z \neq c$ platí tento vzorec i pro celé záporné m, neboť pro $m = -n$ (n celé kladné) jest

$$((z - c)^m)' = \left(\frac{1}{(z - c)^n}\right)' = -\frac{n \cdot (z - c)^{n-1}}{(z - c)^{2n}} = m(z - c)^{m-1}.$$

Příklad 4. Existují velmi jednoduché a „rozumné" funkce, jež nemají derivaci podle komplexní proměnné z. Budiž na př. $f(z) = \bar{z}$; t. j. je-li $z = x + iy$, je $f(z) = x - iy$. Zde je $\frac{\partial P}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = -1$, takže $f'(z)$ neexistuje pro žádné z. Je však poučno, zjistiti tuto okolnost přímo. Pro $z = x + iy$, $h = k + il$ jest

$$\text{(11)} \qquad \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \frac{k - il}{k + il} = \frac{k^2 - l^2 - 2ikl}{k^2 + l^2}.$$

Je-li $k = 0$, $l \neq 0$, je podíl (11) roven -1; je-li $k \neq 0$, klaďme $l : k = t$, načež podíl (11) má hodnotu

$$\frac{1 - t^2}{1 + t^2} - i\,\frac{2t}{1 + t^2},$$

jež ukazuje velmi zřetelně závislost výrazu (11) na hodnotě $l : k = t$; na př. pro $t = 0, 1, -1$ vyjde pro (11) hodnota $1, -i, i$.

Budiž nyní $f(z_1, \ldots, z_r)$ komplexní funkce několika komplexních proměnných; buďte $a_1, \ldots, a_r$ komplexní čísla.

Sestrojme funkci $f(a_1, \ldots, a_{k-1}, z_k, a_{k+1}, \ldots, a_r)$ proměnné z_k; má-li tato funkce derivaci v bodě a_k, nazýváme tuto derivaci **parciální derivací** funkce f v bodě $[a_1, \ldots, a_r]$ podle z_k. Parciální derivace funkce f podle z_k v bodě $[z_1, \ldots, z_r]$ je tedy limita (existuje-li)

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f(z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k + h, z_{k+1}, \ldots, z_r) - f(z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_r)\right);$$

znak $\dfrac{\partial f(z_1, \ldots, z_r)}{\partial z_k}$ nebo $\dfrac{\partial f}{\partial z_k}$ a pod. Definice a označení pro derivace vyšších řádů, na př.

$$f'''(z) = \frac{d^3 f(z)}{dz^3}, \quad \frac{\partial^7 f(z_1, z_2, z_3, z_4)}{\partial z_1^2\, \partial z_2\, \partial z_4^3\, \partial z_1}$$

se zavádějí jako u reálných proměnných (viz kap. VII, § 1 a **DI**, kap. VIII, § 3 a kap. XIII, § 3).

Příklad 5. Buďte $k_1, \ldots, k_r$; $l_1, \ldots, l_r$ celá nezáporná čísla. Derivuji-li funkci $z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_r^{k_r}$ podle z_1 celkem l_1-kráte, ..., podle z_r celkem l_r-kráte, obdržím

$$\prod_{j=1}^{r} k_j(k_j - 1) \ldots (k_j - l_j + 1)\, z_j^{k_j - l_j},$$

ať provádím derivování v jakémkoliv pořadí, takže derivace jmenované funkce jsou „záměnné" ve smyslu běžném z kap. VII. Aby výsledek platil bez výjimky, je nutno učiniti tuto úmluvu: Je-li $l_j = 0$, značí výraz za symbolem $\prod$ číslo $z_j^{k_j}$; je-li $l_j > k_j$, značí tento výraz nulu (a to i pro $z_j = 0$). Důkaz plyne ihned z příkl. 3.

Příklad 6. Budiž $f(z_1, \ldots, z_r)$ funkce r komplexních proměnných; budiž $A \subset \mathbf{K}_r$ otevřená souvislá množina. V každém bodě množiny A budiž $\dfrac{\partial f}{\partial z_1} = \dfrac{\partial f}{\partial z_2} = \ldots = \dfrac{\partial f}{\partial z_r} = 0$. Potom je f konstantní v A.

Důkaz: Proveďme rozklad na reálnou a imaginární část: $z_j = x_j + i y_j$, $f = P + iQ$; potom jsou P, Q funkce proměnných $x_1, \ldots, x_r$, $y_1, \ldots, y_r$ a v každém bodě množiny A (kterou mohu též pojímati jako část prostoru $\mathbf{E}_{2r}$) je[6] $\dfrac{\partial f}{\partial z_j} = \dfrac{\partial P}{\partial x_j} + i \dfrac{\partial Q}{\partial x_j} = 0$, tedy $\dfrac{\partial P}{\partial x_j} = \dfrac{\partial Q}{\partial y_j} = 0$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x_j} = -\dfrac{\partial P}{\partial y_j} = 0$ pro $j = 1, \ldots, r$, takže funkce P, Q jsou podle věty 184 konstantní v A.

Příklad 7. Nechť funkce $f_1, \ldots, f_r$ komplexních proměnných $z_1, \ldots, z_r$ mají v jistém bodě derivace $\dfrac{\partial f_j}{\partial z_k}$; budiž J „funkční determinant", vytvořený z těchto parciálních derivací. Kladme $z_k = x_k + i y_k$,

[6]) Viz větu 218.

$$f_j(z_1, \dots, z_r) = P_j(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r) + \mathrm{i}Q_j(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r)$$

a budiž Δ funkční determinant funkcí $P_1, \dots, P_r, Q_1, \dots, Q_r$ podle $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r$ (v tomto pořadí). Tvrdím, že $\Delta = |J|^2 = J \,.\, \bar{J}$.

Důkaz. Sestrojme determinant řádu $2r$

$$K = \left|\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & \mathrm{II} \\ \hline \mathrm{III} & \mathrm{IV} \end{array}\right|$$

takto: do I dám výrazy $\dfrac{\partial f_j}{\partial z_k} = \dfrac{\partial P_j}{\partial x_k} + \mathrm{i}\dfrac{\partial Q_j}{\partial x_k}$ (index j značí řádky, index k sloupce); do IV dám výrazy komplexně sdružené $\dfrac{\partial P_j}{\partial x_k} - \mathrm{i}\dfrac{\partial Q_j}{\partial x_k}$; do II a III dám samé nuly, takže $K = J \,.\, \bar{J}$. Nyní provedu několik transformací, jimiž se hodnota determinantu K nezmění. Předně dám do II výrazy $-\dfrac{\partial Q_j}{\partial x_k}$. Nyní přičtu $(r+k)$-tý sloupec, násobený i, k sloupci k-tému; v I budou státi výrazy $\dfrac{\partial P_j}{\partial x_k}$, v III budou výrazy $\mathrm{i}\dfrac{\partial P_j}{\partial x_k} + \dfrac{\partial Q_j}{\partial x_k}$. Nyní přičtu j-tý řádek, násobený $-$ i, k řádku $(j+r)$-tému; teď budou v III státi výrazy $\dfrac{\partial Q_j}{\partial x_k}$, v IV pak $\dfrac{\partial P_j}{\partial x_k} = \dfrac{\partial Q_j}{\partial y_k}$; píši-li ještě v II $\dfrac{\partial P_j}{\partial y_k}$ místo $-\dfrac{\partial Q_j}{\partial x_k}$, vidím, že $K = \Delta$.

Poznámka 3. Budiž f funkce komplexní proměnné z v oboru M; položme $N = M\mathsf{E}_1$. Napíši-li parciální funkci f_N, znamená to, že si všímáme pouze reálných hodnot proměnné z. Je-li x reálné a existuje-li

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{[k,l]\to o} \frac{f(x+k+\mathrm{i}l) - f(x)}{k+\mathrm{i}l},$$

jest ovšem též

$$f'(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in \mathsf{E}_1}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

pravá strana (kde h konverguje k nule reálnými hodnotami) jest ovšem derivace $f'_N(x)$ parciální funkce f_N (to je funkce jedné reálné proměnné). Tedy: je-li x reálné a existuje-li $f'(x)$, existuje i $f'_N(x)$ a obě derivace jsou si rovny. Často vynecháváme u funkce f_N znak N; vzhledem k rovnici $f'_N(x) = f'(x)$ jistě nedojde při tom k nedorozumění. Může se ovšem státi, že $f'_N(x)$ existuje, i když $f'(x)$ neexistuje; je-li na př. $f(x + iy) = x - iy$, neexistuje $f'(z)$ v žádném bodě z (viz příkl. 4), ale $f_N(x) = x$, takže $f'_N(x) = 1$ pro každé reálné x. Podobná poznámka se aplikuje na funkci několika proměnných $f(z_1, \ldots, z_r)$ v oboru $M \subset \mathsf{K}_r$; zde ovšem jde o parciální funkci f_N, kde $N = M\mathsf{E}_r$.

Poznámka 4. Má-li funkce f komplexní proměnné v bodě z derivaci, je ovšem v tom bodě spojitá. Důkaz:

$$\lim_{h\to 0} (f(z + h) - f(z)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} \cdot h = f'(z) \cdot 0 = 0 .$$

Cvičení

1. Věty z příkl. 2 lze odvoditi také tímto způsobem (naznačme to pro větu o složených funkcích): Nechť $\varphi(z) = \varrho(x, y) + i\sigma(x, y)$ má derivaci v bodě $z = x + iy$ a nechť $f(u) = P(t, v) + iQ(t, v)$ má derivaci v bodě $u = \varphi(z) = \varrho(x, y) + i\sigma(x, y)$. Jest $f(\varphi(z)) = G + iH$, kde $G = P(\varrho(x, y), \sigma(x, y))$, $H = Q(\varrho(x, y), \sigma(x, y))$. Zjistěte, že funkce G, H mají v bodě $[x, y]$ totální diferenciál a že je $\dfrac{\partial G}{\partial x} = \dfrac{\partial H}{\partial y}$, $\dfrac{\partial G}{\partial y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}$ (užívajíce obdobných rovnic pro funkce P, Q a ϱ, σ), načež vyjde $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(f(\varphi(z))) = \dfrac{\partial G}{\partial x} + i\dfrac{\partial H}{\partial x} = f'(\varphi(z))\,\varphi'(z)$. Proveďte všechny výpočty a odvoďte obdobným způsobem též větu o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu.

§ 2. Mocninné řady v jedné proměnné. Jsou-li x_0, a_0, a_1, a_2, ... komplexní čísla, nazýváme řadu

$$(12) \qquad a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

mocninnou řadou o středu x_0.[7])

---

[7]) Rozklad na reálnou a imaginární část teď již téměř nebudeme prováděti; proto užívám také pro komplexní čísla znaků x, y, ... V řadě (12) značí x komplexní proměnnou, kdežto x_0 je dané číslo.

Věta 219. *Ke každé řadě* (12) *existuje číslo* ϱ $(0 \leqq \varrho \leqq +\infty)$ *tak, že řada* (12) *jest absolutně konvergentní pro* $|x - x_0| < \varrho$, *divergentní pro* $|x - x_0| > \varrho$. *Číslo* ϱ *je dáno vzorcem*

$$\varrho = \frac{1}{\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}; \tag{13}$$

při tom se vpravo může vyskytnouti symbol $\frac{1}{+\infty}$, *který ovšem znamená* 0, *a též symbol* $\frac{1}{0}$, *který nechť zde (výjimečně) znamená* $+\infty$. *Číslo* ϱ *se nazývá poloměrem konvergence řady* (12).

Důkaz. Řada (12) je absolutně konvergentní pro $x = x_0$; stačí tedy, vyšetříme-li hodnoty $x \neq x_0$.

I. Je-li $0 < |x - x_0| < \varrho$, je

$$\limsup \sqrt[n]{|x - x_0|^n \, |a_n|} = |x - x_0| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1;$$

lze tedy voliti $q < 1$ tak, že $|x - x_0| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < q$; existuje tedy (věta 21) $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro $n \geqq n_0$ jest $|x - x_0| \, . \sqrt[n]{|a_n|} \leqq q$, načež Cauchyovo kriterium dává absolutní konvergenci (úvaha platí i pro $\varrho = +\infty$, t. j. pro $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$; potom je tedy (12) absolutně konvergentní pro všechna $x \in \boldsymbol{K}$).

II. Je-li $|x - x_0| > \varrho$, jest obdobně $\limsup \sqrt[n]{|x - x_0|^n \, |a_n|} > 1$; tedy (věta 21) je $\sqrt[n]{|x - x_0|^n \, |a_n|} > 1$, t. j. $|x - x_0|^n \, |a_n| > 1$ pro nekonečně mnoho hodnot n, takže n-tý člen řady (12) nemá limitu 0 a řada diverguje (úvaha platí i pro $\varrho = 0$, t. j. pro $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$; potom je tedy (12) divergentní pro každé $x \neq x_0$).

Poznámka 1. Je-li $0 < \varrho < +\infty$, nazýváme množinu všech x, pro něž $|x - x_0| = \varrho$, konvergenční kružnicí řady (střed x_0, poloměr ϱ). Všimněte si, že věta 219 neříká nic pro hodnoty x, ležící na této kružnici.

Poznámka 2. Všimněte si, že ϱ závisí pouze na prostých hodnotách součinitelů $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Poznámka 3. Je-li n přirozené číslo, je řada

$$a_n + a_{n+1}(x - x_0) + a_{n+2}(x - x_0)^2 + \ldots \tag{14}$$

konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li konvergentní řada (12). To je zřejmé, je-li $x = x_0$; je-li $x \neq x_0$, stačí si všimnouti, že (14) vzniká z (12) vynecháním n členů a dělením číslem $(x - x_0)^n \neq 0$. Tedy mají řady (12), (14) týž poloměr konvergence.

Poznámka 4. Případ $\varrho = 0$ je málo zajímavý (řada konverguje pouze pro $x = x_0$); budeme proto ve zbytku tohoto paragrafu předpokládati, že je dána řada (12) s poloměrem konvergence ϱ, kde $0 < \varrho \leqq +\infty$.[8] Součet této řady, pokud je konvergentní, označíme $f(x)$, takže rovnice

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \tag{15}$$

platí pro $|x - x_0| < \varrho$ a možná i pro některá x, pro něž $|x - x_0| = \varrho$. (Speciálně jest $f(x_0) = a_0$.)

Věta 220. *Je-li* $0 < R < \varrho$, *je funkce* $f(x)$ *omezená v kruhu* $|x - x_0| \leqq R$.

Důkaz. Položím-li $|a_0| + |a_1| R + |a_2| R^2 + \ldots = K$, je $K < +\infty$ a pro $|x - x_0| \leqq R$ je podle (15) zřejmě $|f(x)| \leqq K$.

Věta 221. $f'(x_0) = a_1$ (tedy je $f(x)$ spojitá v bodě x_0, viz pozn. 4 v § 1).

Důkaz. Pro $0 < |x - x_0| < \varrho$ jest

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a_1 = \tag{16}$$

$$= (x - x_0)(a_2 + a_3(x - x_0) + a_4(x - x_0)^2 + \ldots) .$$

Řada v závorce vpravo má poloměr konvergence ϱ (poznámka 3). Zvolíme-li R tak, že $0 < R < \varrho$, existuje podle věty 220 číslo $K <$

[8]) Případ $\varrho = +\infty$ je též důležitý; nastává na př. u řady $e^x = 1 + x : 1! + x^2 : 2! + \ldots$

$< +\infty$ tak, že prostá hodnota řady v (16) v závorce vpravo je pro $|x - x_0| \leqq R$ menší než K. Pro $0 < |x - x_0| \leqq R$ je tedy

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a_1 \right| \leqq K|x - x_0| ,$$

takže levá strana v (16) má limitu 0 (pro $x \to x_0$).

Příklad 1. Buďte

$$f(x) = a_n(x - x_0)^n + a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \ldots = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(x - x_0)^k ,$$

$$g(x) = \sum_{k=m}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$$

mocninné řady s kladnými poloměry konvergence; budiž $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$. Tedy

$$\lim_{x \to x_0} \frac{a_n + a_{n+1}(x - x_0) + a_{n+2}(x - x_0)^2 + \ldots}{b_m + b_{m+1}(x - x_0) + b_{m+2}(x - x_0)^2 + \ldots} = \frac{a_n}{b_m}$$

(následkem spojitosti čitatele i jmenovatele, věta 221). Odtud ihned plynou pro $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ tyto hodnoty: $L = a_n : b_m$, je-li $n = m$; $L = 0$, je-li $n > m$; $L = \infty$, je-li $n < m$.

Věta 222. *Budiž aspoň jedno z čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots$ různé od nuly; potom existuje $R > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < R$ je $f(x) \neq 0$.* (T. j. v kruhu $|x - x_0| < R$ nemůže být $f(x) = 0$ v žádném bodě $x \neq x_0$; může však být $f(x_0) = 0$, t. j. $a_0 = 0$; předpokládáme ovšem $\varrho > 0$.)

Důkaz. Je-li a_n první součinitel různý od nuly, je pro $0 < |x - x_0| < \varrho$

$$\text{(17)} \qquad \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = a_n + a_{n+1}(x - x_0) + a_{n+2}(x - x_0)^2 + \ldots$$

Mocninná řada vpravo má v bodě x_0 limitu a_n (neboť je spojitá v bodě x_0). Ježto $a_n \neq 0$, existuje R $(0 < R < \varrho)$ tak, že pravá a tedy i levá strana v (17) je různá od nuly pro $0 < |x - x_0| < R$.

Věta 223. *Nechť řada (12) má poloměr konvergence $\varrho > 0$. Potom platí:*

I. Pro $|x - x_0| < \varrho$ *jest*

(18) $f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots,$

(19) $f''(x) = 2 \,.\, 1a_2 + 3 \,.\, 2a_3(x - x_0) + 4 \,.\, 3a_4(x - x_0)^2 + \ldots,$

obecně

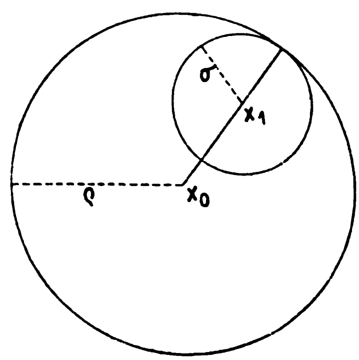
(20) $$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \,.\, k(k-1) \ldots (k - n + 1)\,(x - x_0)^{k-n}\,;$$

řady (20) *mají poloměr konvergence* ϱ.

II. Je-li $|x_1 - x_0| < \varrho$, *je pro* $|x - x_1| < \varrho - |x_1 - x_0|$

(21) $$f(x) = f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1!}(x - x_1) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_1)^n + \ldots$$

Poznámka 5. Tvrzení I praví: pro $|x - x_0| < \varrho$ má funkce f derivace všech řádů, jež se dostanou tak, že se v řadě (12) derivuje člen po členu. (Podle poznámky 4 v § 1 je tedy f spojitá v kruhu $|x - x_0| < \varrho$.) Tvrzení II praví mimo jiné: Zvolím-li bod x_1 tak, že $|x_1 - x_0| < \varrho$, potom ve všech bodech uvnitř kružnice o středu x_1 a o poloměru $\sigma = \varrho - |x_1 - x_0|$ (viz obr. 12) lze funkci f vyjádřit mocninnou řadou o středu x_1; poloměr konvergence této řady je tedy aspoň σ, může však býti též větší. Je-li $\varrho = +\infty$, je též $\sigma = +\infty$, t. j. vzorec (21) potom platí pro všechna x.



Obr. 12.

Důkaz. Budiž $|x_1 - x_0| < \varrho$ a budiž x takové, že $|x - x_1| < \varrho - |x_1 - x_0|$, takže $|x - x_0| \leqq |x - x_1| + |x_1 - x_0| < \varrho$. Potom řada

(22) $$|a_0| + |a_1|(|x - x_1| + |x_1 - x_0|) + \ldots + \\ + |a_k|(|x - x_1| + |x_1 - x_0|)^k + \ldots$$

je konvergentní. Z toho plyne: jestliže v rovnici

(23) $$f(x) = a_0 + a_1((x - x_1) + (x_1 - x_0)) + \ldots + \\ + a_k((x - x_1) + (x_1 - x_0))^k + \ldots$$

rozvinu každý člen podle binomické poučky

$$((x - x_1) + (x_1 - x_0))^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} (x - x_1)^n (x_1 - x_0)^{k-n},$$

bude zobecněná řada (viz kap. III, § 3)

$$\sum_{0 \leqq n \leqq k} a_k \binom{k}{n} (x - x_1)^n (x_1 - x_0)^{k-n} \tag{24}$$

absolutně konvergentní[9]) a její součet je (podle (23) a podle věty 39) roven $f(x)$. Upravím-li (24) tak, že dám dohromady členy s touž mocninou $x - x_1$, obdržím (opět podle věty 39)

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_1)^n + \ldots, \tag{25}$$

kde

$$b_0 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_1 - x_0)^2 + \ldots = f(x_1), \tag{26}$$

$$b_1 = a_1 + 2a_2(x_1 - x_0) + 3a_3(x_1 - x_0)^2 + \ldots, \tag{27}$$

obecně

$$b_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} a_k k(k-1) \ldots (k-n+1)(x_1 - x_0)^{k-n}. \tag{28}$$

Podle věty 221 je však $b_1 = f'(x_1)$ a tím je dokázána rovnice (18) pro $|x - x_0| < \varrho$ (neboť x_1 bylo libovolné číslo z kruhu $|x - x_0| < \varrho$). Zároveň je viděti, že poloměr konvergence řady (18) je aspoň ϱ. Nemůže však býti větší než ϱ. Neboť kdyby byl větší než ϱ, existovalo by x takové, že $|x - x_0| > \varrho$ a že by řada

$$|a_1| + |2a_2(x - x_0)| + \ldots + |ka_k(x - x_0)^{k-1}| + \ldots$$

byla konvergentní. Tím spíše by byla konvergentní řada

$$|a_1| + |a_2(x - x_0)| + \ldots + |a_k(x - x_0)^{k-1}| + \ldots$$

(v k-tém členu vynechán činitel k) a tedy i řada

$$|a_0| + |a_1(x - x_0)| + \ldots + |a_k(x - x_0)^k| + \ldots$$

(násobil jsem $|x - x_0|$ a přidal člen $|a_0|$). Ale to je nemožno, neboť řada (12) je pro $|x - x_0| > \varrho$ divergentní. Tedy řada (18), jež vzniká

---

[9]) Součet prostých hodnot jakéhokoliv konečného počtu členů této řady je totiž nejvýše roven součtu řady (22); viz k tomu pozn. 2 v kap. III, § 3. V řadě (24) se sčítá přes všechny páry celých čísel k, n, pro něž je $0 \leqq n \leqq k$.

derivováním jednotlivých členů řady (12), má poloměr konvergence ϱ a pro $|x - x_0| < \varrho$ má součet $f'(x)$. Užijeme-li tohoto výsledku na řadu (18), vidíme, že řada (19) má rovněž poloměr konvergence ϱ a že má pro $|x - x_0| < \varrho$ součet $f''(x)$. Úplnou indukcí podle n dostáváme ihned tvrzení I. Tvrzení II pak plyne z (25), neboť podle (28), (20) jest $b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_1)$.

Je-li $g(x)$ libovolná komplexní funkce jedné komplexní proměnné, nazýváme bod x *kořenem* nebo *nulovým bodem* funkce $g(x)$, je-li $g(x) = 0$. Je-li n přirozené číslo takové, že $g(x) = g'(x) = \ldots = g^{(n-1)}(x) = 0$, $g^{(n)}(x) \neq 0$, říkáme, že x je n-násobným kořenem funkce g. Pro případ, že g je mnohočlen, je tato definice v souhlase s definicí, obvyklou v algebře, jak se ihned přesvědčíme. Je-li totiž $g(x)$ mnohočlen, mající k-násobný kořen α,[10]) je

$$g(x) = a(x - \alpha)^k (x - \beta)^l (x - \gamma)^m \ldots,$$

kde $a \neq 0$ a kořeny $\beta, \gamma, \ldots$ jsou různé od α. Počítáte-li derivace až do řádu $k - 1$, vidíte, že se ze všech členů dá vytknouti $x - \alpha$, takže $g(\alpha) = g'(\alpha) = \ldots = g^{(k-1)}(\alpha) = 0$. Avšak derivace k-tá se skládá z několika členů, z nichž lze vytknouti $x - \alpha$ a mimo to z členu $a \,.\, k!(x - \beta)^l (x - \gamma)^m \ldots$, jenž pro $x = \alpha$ je různý od nuly, takže vskutku $g^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Věta 224. *Budiž* (12) *mocninná řada o poloměru konvergence* $\varrho > 0$; *budiž aspoň jedno z čísel* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *různé od nuly; budiž* $0 < R < \varrho$. *Potom platí: v kruhu* $|x - x_0| \leqq R$ *leží nejvýše konečný počet kořenů funkce* $f(x)$.[11])

Důkaz. Budiž M množina všech kořenů funkce f, ležících v kruhu $|x - x_0| \leqq R$; předpokládejme, že M je nekonečná. Podle pozn. 5 v kap. VI, § 16 má tedy množina M aspoň jeden hromadný bod, t. j. $M' \neq \emptyset$. Množina M' je neprázdná a podle věty 123 uzavřená (a omezená, tedy kompaktní podle věty 156). Podle věty 159 (kde kladu $A = (x_0)$, $B = M'$) existuje tedy v množině M' bod x_1 tak, že $\varrho(x_0, x_1) = \varrho(x_0, M')$, t. j. bod x_1 leží ze všech bodů množiny M' nej-

[10]) Ve smyslu obvyklém v algebře.
[11]) Každý počítáme jen jednou, i když je mnohonásobný.

blíže bodu x_0. Podle věty 222 je jistě $x_1 \neq x_0$. Tedy $0 < |x_1 - x_0| \leqq \leqq R < \varrho$. Podle věty 223 platí v kruhu $|x - x_1| < \varrho - |x_1 - x_0|$ rovnice (21).[12]) Ježto bod x_1 je hromadným bodem kořenů funkce f, musí podle věty 222 býti všichni součinitelé mocninné řady (21) rovni nule; potom je však podle (21) $f(x) = 0$ pro všechny body kruhu $|x - x_1| < \varrho - |x_1 - x_0|$, takže všechny body tohoto kruhu patří k M a rovněž k M'. Ale mezi body tohoto kruhu existují zřejmě body, jež mají od bodu x_0 menší vzdálenost než bod x_1 — ale to je ve sporu s volbou bodu x_1.

Věta 225. *Budiž* (12) *mocninná řada o poloměru konvergence* $\varrho > 0$; *budiž aspoň jedno z čísel* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *různé od nuly. Potom platí: je-li* $|x_1 - x_0| < \varrho$, *je aspoň jedno z čísel*

$$(29) \qquad f(x_1), f'(x_1), f''(x_1), \ldots$$

různé od nuly.

Důkaz. Nechť existuje číslo x_1 tak, že $|x_1 - x_0| < \varrho$ a že všechna čísla (29) jsou rovna nule. Podle věty 223 platí potom pro všechna x jistého kruhu $\Omega(x_1, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ rovnice (21), takže všechny body tohoto kruhu jsou kořeny funkce $f(x)$ (neboť pravá strana rovnice (21) je nula); to však není možno podle věty 224, když $|x_1 - x_0| < \varrho$.

Poznámka 6. Budiž v řadě (12) aspoň jedno z čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots$ různé od nuly. Věta 224 potom praví, že kořeny funkce $f(x)$ nemohou míti žádný hromadný bod x uvnitř konvergenční kružnice (t. j. takový, že $|x - x_0| < \varrho$); mohou však míti hromadný bod na konvergenční kružnici; viz cvič. 2. Věta 225 pak praví, že každý z těchto kořenů má určitou násobnost.

Poznámka 7. Z rovnic (18), (19), (20) plyne pro $x = x_0$:

$$(30) \qquad a_0 = f(x_0)\,, \quad a_1 = \frac{1}{1!} f'(x_0), \ldots, a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0), \ldots,$$

takže součinitele $a_0, a_1, a_2, \ldots$ lze vyjádřiti derivacemi funkce f v bodě x_0, t. j. ve středu mocninné řady.

Věta 226. *Buďte* $a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_k(x - x_0)^k + \ldots = f(x)$, $b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_k(x - x_0)^k + \ldots = g(x)$ *mocninné řady o polo-*

[12]) Střed je x_1, poloměr $\varrho - |x_1 - x_0|$; kreslete!

měrech konvergence $\varrho > 0$, $\sigma > 0$. *Nechť existuje číslo* R $(0 < R <$ $< \mathrm{Min}\,(\varrho, \sigma))$ *takové, že pro nekonečně mnoho hodnot* x, *splňujících nerovnost* $|x - x_0| \leqq R$, *jest* $f(x) = g(x)$. *Potom je* $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \dots$ (t. zv. věta o neurčitých součinitelích pro mocninné řady).

Důkaz. Řada

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)(x - x_0) + \dots + \\ + (a_k - b_k)(x - x_0)^k + \dots = f(x) - g(x) \tag{31}$$

má poloměr konvergence aspoň $\mathrm{Min}\,(\varrho, \sigma)$,[13]) tedy větší než R, a její součet se rovná nule pro nekonečně mnoho hodnot kruhu $|x - x_0| \leqq R$; podle věty 224 je tedy $a_k - b_k = 0$ pro $k = 0, 1, 2, \dots$

Věta 227. *Budiž* $0 < R < \varrho$; *potom je řada* (12) *stejnoměrně konvergentní v množině* $\overline{\Omega(x_0, R)}$.

Důkaz. Pro $|x - x_0| \leqq R$ jest $|a_k(x - x_0)^k| \leqq |a_k|\, R^k$, takže konvergentní řada $|a_0| + |a_1|\, R + |a_2|\, R^2 + \dots$ (s členy nezávislými na x) je v množině $\overline{\Omega(x_0, R)}$ majorantní k řadě (12); věta 54 pak dává výsledek.

Cvičení

1. Řady $\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \sum_{k=0}^{\infty} k^3 x^k, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^3}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ mají po řadě poloměr konvergence 0, $+\infty$, 1, 1, 1. Na konvergenční kružnici (t. j. pro $|x| = 1$, t. j. pro $x = e^{i\varphi}$, $\varphi \in E_1$) je třetí řada divergentní, čtvrtá absolutně konvergentní; pátá pak je divergentní pro $x = 1$, ale konvergentní pro $|x| = 1$, $x \neq 1$. Důkaz k poslednímu bodu: je-li $x = e^{i\varphi} \neq 1$, jest $\left|\sum_{k=0}^{n} x^k\right| = \left|\frac{e^{(n+1)i\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1}\right| \leqq \frac{2}{|e^{i\varphi} - 1|}$; na to užijte věty 44.

2. Budiž $|x| < 1$; potom jest

$$f(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{i}{1-x}} - e^{\frac{-i}{1-x}}\right) = \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{3!(1 - x)^3} + \frac{1}{5!(1 - x)^5} - \dots$$

Každý člen se pro $|x| < 1$ dá rozvinout v řadu

$$\frac{1}{(1 - x)^{2n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2n + k)!}{(2n)!\, k!} x^k . \tag{31a}$$

---

[13]) Je to rozdíl dvou řad, konvergentních pro $|x - x_0| < \mathrm{Min}\,(\varrho, \sigma)$.

Návod: Pro $|x| < 1$ je $1 + x + x^2 + \ldots + x^k = \dfrac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$, a odtud pro $k \to \infty$ plyne $\dfrac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots$; derivuji-li $2n$-kráte (užívaje vlevo příkl. 3 z § 1 a vpravo věty 223), dostanu (31a). Dosadím-li do řady pro $f(x)$ podle (31a), dostanu $f(x)$ ve tvaru zobecněné řady, jež jest absolutně konvergentní — součet prostých hodnot jakéhokoliv konečného počtu členů je nejvýše roven

$$\frac{1}{1 - |x|} + \frac{1}{3!(1 - |x|)^3} + \frac{1}{5!(1 - |x|)^5} + \ldots < e^{\frac{1}{1-|x|}}.$$

Lze tedy srovnati tuto řadu podle mocnin x a obdržíme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(2n + k)!}{(2n)!\,(2n + 1)!\,k!}$$

pro $|x| < 1$; poloměr konvergence ϱ této řady je tedy $\geqq 1$. Funkce $f(x)$ se rovná nule, je-li $\dfrac{i}{1 - x} = -\dfrac{i}{1 - x} + 2m\pi i$ (m celé), t. j. $x = 1 - \dfrac{1}{m\pi}$; hodnotám $m = 1, 2, 3, \ldots$ odpovídají hodnoty $|x| < 1$. Kořeny funkce $f(x)$ mají tedy hromadný bod 1, jenž podle věty 224 nemůže ležeti uvnitř kružnice $|x| = \varrho$; tedy je $\varrho = 1$.

3. Z cvič. 7 v kap. III, § 5 odvoďte: je-li Dirichletova řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ konvergentní pro jistou hodnotu $s = s_0 = \sigma_0 + it_0$, je konvergentní pro každé $s = \sigma + it$ takové, že $\sigma > \sigma_0$ (v citovaném cvičení pište $a_n = b_n n^{-s_0}$) a je absolutně konvergentní pro $\sigma > \sigma_0 + 1$. Je-li absolutně konvergentní pro $s = \sigma_0 + it_0$, je absolutně konvergentní pro $\sigma \geqq \sigma_0$. Z toho odvoďte: existují čísla $\lambda \in E_1^*$, $\Lambda \in E_1^*$ tak, že řada $\sum b_n n^{-s}$ je konvergentní pro $\sigma > \lambda$, divergentní pro $\sigma < \lambda$, absolutně konvergentní pro $\sigma > \Lambda$, a není absolutně konvergentní pro $\sigma < \Lambda$. Při tom je buďto $\lambda = \Lambda = -\infty$ (příklad: $\sum 2^{-n} n^{-s}$) nebo $\lambda = \Lambda = +\infty$ (příklad: $\sum 2^n n^{-s}$) nebo jsou λ, Λ konečná čísla a jest $\lambda \leqq \Lambda \leqq \lambda + 1$. Na př. pro řadu $\sum n^{-s}$ je $\lambda = \Lambda = 1$, pro řadu $\sum (-1)^n n^{-s}$ je $\lambda = 0$, $\Lambda = 1$.

§ 3. Mocninné řady v několika proměnných. Mějte nyní stále na paměti úvahy o zobecněných řadách, provedené v kap. III, § 3. Řadu

$$\sum_{k_1, \ldots, k_r = 0}^{\infty} a_{k_1, \ldots, k_r} (y_1 - \alpha_1)^{k_1} \ldots (y_r - \alpha_r)^{k_r}$$

o „středu“ $[\alpha_1, \ldots, \alpha_r]$ lze převésti na řadu

(32) $$\sum_{k_1, \ldots, k_r = 0}^{\infty} a_{k_1, \ldots, k_r} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}$$

o středu $o = [0, \ldots, 0]$, klademe-li $x_j = y_j - \alpha_j$; omezíme se proto na vyšetřování řad (32).

Věta 228. *Je-li řada* (32) *absolutně konvergentní v bodě* $[u_1, \ldots, u_r]$, *je absolutně konvergentní v každém bodě* $[x_1, \ldots, x_r]$, *pro nějž platí nerovnosti*

(33) $$|x_1| \leqq |u_1|, \ldots, |x_r| \leqq |u_r| .$$

Součet $f(x_1, \ldots, x_r)$ *řady* (32) *je funkce spojitá v množině* (33).

Důkaz. Srovnejme členy řady (32) nějakým způsobem v posloupnost

(34) $$g_1(x_1, \ldots, x_r),\ g_2(x_1, \ldots, x_r), \ldots ;$$

každá funkce g_n je některý z členů $a_{k_1, \ldots, k_r} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}$, tedy je to funkce spojitá v K_r. Řada

(35) $$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(u_1, \ldots, u_r)|$$

je podle předpokladu konvergentní; platí-li (33), jest $|g_n(x_1, \ldots, x_r)| \leqq$ $\leqq |g_n(u_1, \ldots, u_r)|$; tedy je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x_1, \ldots, x_r)$$

v množině (33) absolutně a též stejnoměrně konvergentní. Odtud pak plyne spojitost funkce f (věta 174, I).

Věta 229. *Je-li* (32) *absolutně konvergentní v bodě* $[x_1, \ldots, x_r]$, *kde* $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0, \ldots, x_r \neq 0$, *existuje číslo* $K < +\infty$ *tak, že všichni součinitelé* $a_{k_1, \ldots, k_r}$ *splňují nerovnost*

$$|a_{k_1, \ldots, k_r}| \leqq \frac{K}{|x_1|^{k_1} \ldots |x_r|^{k_r}} .$$

Důkaz. Z konvergence řady (35) (pro $u_i = x_i$) plyne, že posloupnost (34) je omezená; existuje tedy $K < +\infty$ tak, že $|g_n(x_1, \ldots, x_r)| \leqq K$ pro $n = 1, 2, \ldots$

Věta 230. *Řada* (32) *budiž absolutně konvergentní pro*

(36) $$|x_1| < R_1, \ldots, |x_r| < R_r \quad (R_1 > 0, \ldots, R_r > 0) ;$$

její součet označme $f(x_1, \ldots, x_r)$. Potom je v množině (36) absolutně konvergentní též řada

(37) $$\sum_{k_1 \geqq 1, k_2 \geqq 0, \ldots, k_r \geqq 0} k_1 a_{k_1, \ldots, k_r} x_1^{k_1 - 1} x_2^{k_2} \ldots x_r^{k_r}$$

a má součet $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$.

Důkaz. Pro $r = 1$ je tvrzení správné podle věty 223. Budiž tedy $r > 1$. Buďte dána čísla $\xi_1, \ldots, \xi_r$ tak, že $|\xi_j| < R_j$ $(j = 1, \ldots, r)$. Potom řada

(38) $$f(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) = \sum_{k_1, \ldots, k_r = 0}^{\infty} a_{k_1, \ldots, k_r} x_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \ldots \xi_r^{k_r}$$

(je to funkce x_1) je absolutně konvergentní pro $|x_1| < R_1$. Podle věty 39 mohu tedy funkci (38) psáti ve tvaru mocninné řady (v proměnné x_1)

(39) $$f(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) = \sum_{k_1 = 0}^{\infty} x_1^{k_1} \left(\sum_{k_2, \ldots, k_r = 0}^{\infty} a_{k_1, \ldots, k_r} \xi_2^{k_2} \ldots \xi_r^{k_r} \right),$$

jež má poloměr konvergence $\geqq R_1$. Ježto $|\xi_1| < R_1$, má funkce (39) podle věty 223 v bodě ξ_1 derivaci, tato derivace jest $\dfrac{\partial f(\xi_1, \ldots, \xi_r)}{\partial x_1}$ a vypočte se takto:

(40) $$\frac{\partial f(\xi_1, \ldots, \xi_r)}{\partial x_1} = \sum_{k_1 = 1}^{\infty} k_1 \xi_1^{k_1 - 1} \left(\sum_{k_2, \ldots, k_r = 0}^{\infty} a_{k_1, \ldots, k_r} \xi_2^{k_2} \ldots \xi_r^{k_r} \right).$$

Dokáži-li ještě, že řada

(41) $$\sum_{k_1 \geqq 1, k_2 \geqq 0, \ldots, k_r \geqq 0} k_1 a_{k_1, \ldots, k_r} \xi_1^{k_1 - 1} \xi_2^{k_2} \ldots \xi_r^{k_r}$$

jest absolutně konvergentní, bude tím tvrzení dokázáno: neboť podle věty 39 bude pak výraz (40) roven součtu řady (41).

Zvolme $S_1, \ldots, S_r$ tak, že $|\xi_j| < S_j < R_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Ježto (32) konverguje absolutně v bodě $[S_1, \ldots, S_r]$, existuje podle věty 229 $K < +\infty$ tak, že $|a_{k_1, \ldots, k_r}| \leqq \dfrac{K}{S_1^{k_1} \ldots S_r^{k_r}}$; píšeme-li tedy $\dfrac{|\xi_j|}{S_j} = q_j$ $(0 \leqq q_j < 1)$, je

$$|k_1 a_{k_1, \ldots, k_r} \xi_1^{k_1 - 1} \xi_2^{k_2} \ldots \xi_r^{k_r}| \leqq \frac{K}{S_1} k_1 q_1^{k_1 - 1} q_2^{k_2} \ldots q_r^{k_r}.$$

Tedy je řada (41) absolutně konvergentní: neboť součet prostých hodnot jakéhokoliv konečného počtu jejích členů je nejvýše roven číslu

$$(42)\qquad \frac{K}{S_1}\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1 q_1^{k_1-1} \cdot \sum_{k_2=0}^{\infty} q_2^{k_2} \dots \sum_{k_r=0}^{\infty} q_r^{k_r}.$$

Řada (37) vznikla z řady (32) tím, že jsme v řadě (32) derivovali člen po členu; místo x_1 jsme ovšem mohli vzíti kteroukoliv jinou proměnnou x_j. Užijeme-li věty 230 na řadu (37), dostáváme obdobnou větu pro derivace 2. řádu funkce f. Úplnou indukcí pak ihned plyne

Věta 231. *Řada* (32) *(se součtem $f(x_1, \dots, x_r)$) budiž absolutně konvergentní v množině* (36)*; potom má funkce f v množině* (36) *parciální derivace všech řádů; tyto derivace jsou v množině* (36) *dány jako součty absolutně konvergentních řad, jež vznikají tak, že v řadě* (32) *derivujeme člen po členu. Tedy jsou tyto derivace spojité*[14]) *a záměnné*[15]) *v množině* (36).

Věta 232. *Řada* (32) *budiž absolutně konvergentní v okolí počátku;*[16]) *budiž $f(x_1, \dots, x_r)$ její součet. Potom platí:*

I. Existují čísla K, L ($0 < K < +\infty$, $0 < L < +\infty$) tak, že jest

$$(43)\qquad |a_{k_1,\dots,k_r}| < KL^{k_1+\dots+k_r}.$$

II. Jest

$$(44)\qquad a_{k_1,\dots,k_r} = \frac{1}{k_1! \dots k_r!} \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_r} f(0, \dots, 0)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_r^{k_r}}$$

III. Je-li $f(x_1, \dots, x_r) = 0$ v každém bodě jistého okolí počátku, jest $a_{k_1,\dots,k_r} = 0$ pro všechna $k_1 \geqq 0, \dots, k_r \geqq 0$.

Důkaz: I. Existuje $\delta > 0$ tak, že řada (32) je absolutně konvergentní pro $x_1 = x_2 = \dots = x_r = \delta$; tvrzení I plyne pak z věty 229 pro $L = 1 : \delta$.

II. Derivujeme-li řadu (32) člen po členu a dosadíme potom $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0$, obdržíme podle věty 231 tvrzení II.

---

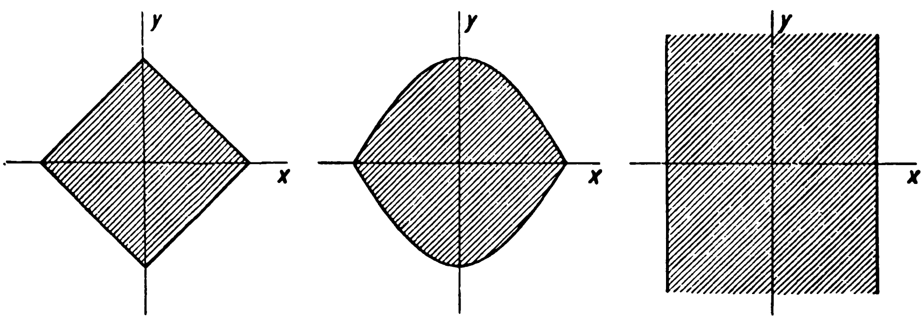
[14]) Podle věty 228.

[15]) Neboť derivace jednotlivých členů řady (32) jsou záměnné podle příkl. 5 v § 1.

[16]) To znamená ovšem: Existuje okolí Ω bodu o tak, že (32) je absolutně konvergentní v každém bodě množiny Ω.

III. Nechť existuje $\delta > 0$ tak, že $f(x_1, \dots, x_r) = 0$ v množině $|x_1| < \delta, \dots, |x_r| < \delta$. Potom jsou v této množině — a tedy speciálně v počátku — všechny parciální derivace funkce f rovny nule a III plyne z II.

Poznámka 1. Z III plyne ovšem tato věta „o neurčitých součinitelích": mají-li dvě mocninné řady v okolí počátku stejný součet, mají obě řady tytéž součinitele. Pro $r = 1$ známe ovšem ostřejší větu 226; viz k tomu cvič. 3.



$|x| + |y| < 1$ $x^2 + |y| < 1$ $|x| < 1$

Obr. 13.

Cvičení

1. Řada $\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!n!} x^m y^n$ je absolutně konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li konvergentní řada $\sum_{k=0}^{\infty} (|x| + |y|)^k$, t. j. je-li $|x| + |y| < 1$. Odtud: řada $\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!n!} x^{2m} y^n$ je absolutně konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li $|x|^2 + |y| < 1$. Řada $\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{x^m y^n}{n!}$ je absolutně konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li $|x| < 1$. Nakreslete tyto tři obory pro reálná x, y, abyste viděli, jak různé mohou býti obory absolutní konvergence u dvojných mocninných řad.

2. Řada (32) je absolutně konvergentní pro všechna $x_1, \dots, x_r$ tehdy a jen tehdy, platí-li toto: srovnáme-li čísla $|a_{k_1, \dots, k_r}|^{\frac{1}{k_1 + \dots + k_r}}$ nějakým způsobem v posloupnost, má tato posloupnost limitu 0.

3. Řada (32) budiž absolutně konvergentní pro $|x_1| < R_1, \ldots, |x_r| < R_r$ ($R_1 > 0, \ldots, R_r > 0$). Buďte $M_1, \ldots, M_r$ množiny komplexních čísel s těmito vlastnostmi: I. M_j má aspoň jeden hromadný bod ξ_j takový, že $|\xi_j| < R_j$ ($j = 1, \ldots, r$). II. Dosadím-li do řady (32) za x_1 libovolné číslo z $M_1, \ldots,$ za x_r libovolné číslo z M_r, je součet řady roven nule. Tvrdím: všichni součinitelé řady (32) jsou rovni nule. Důkaz z věty 226 indukcí podle r (viz obdobnou indukci v důkazu věty 178).

§ 4. Početní výkony s mocninnými řadami. Věta 233. (Sčítání a násobení.) *Jsou-li řady*

$$f(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{k_1, \ldots, k_r = 0}^{\infty} a_{k_1, \ldots, k_r} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}, \tag{45}$$

$$g(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{k_1, \ldots, k_r = 0}^{\infty} b_{k_1, \ldots, k_r} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r} \tag{46}$$

absolutně konvergentní v okolí počátku a jsou-li A, B komplexní čísla, platí v okolí počátku tyto rovnice (při čemž řady vpravo jsou absolutně konvergentní v okolí počátku)

$$\begin{aligned} & A\, f(x_1, \ldots, x_r) + B\, g(x_1, \ldots, x_r) = \\ & = \sum_{k_1, \ldots, k_r = 0}^{\infty} (A a_{k_1, \ldots, k_r} + B b_{k_1, \ldots, k_r})\, x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}, \end{aligned} \tag{47}$$

$$f(x_1, \ldots, x_r) \,.\, g(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{k_1, \ldots, k_r = 0}^{\infty} c_{k_1, \ldots, k_r} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}, \tag{48}$$

při čemž

$$c_{k_1, \ldots, k_r} = \sum_{\substack{j_1 + l_1 = k_1 \\ \cdots\cdots \\ j_r + l_r = k_r}} a_{j_1, \ldots, j_r} b_{l_1, \ldots, l_r}. \tag{49}$$

Důkaz je téměř samozřejmý: srovnám zobecněné řady (45), (46) v absolutně konvergentní řady (obyčejné) a provedu sčítání, po příp. násobení (viz větu 40), čímž vzniknou opět absolutně konvergentní (po příp. zobecněné) řady, jež vhodnou úpravou podle věty 39 upravím na tvar (47), po příp. (48).

Věta 234. (Dosazování nekonečných řad do mocninných řad.) *Budiž řada* (32) *absolutně konvergentní pro* $|x_1| < R_1, \ldots, |x_r| < R_r$. *Buďte*

(50) $$\sum_{n_1 \epsilon M_1} b(n_1, 1), \ldots, \sum_{n_r \epsilon M_r} b(n_r, r)$$ [17])

absolutně konvergentní zobecněné řady takové, že

(51) $$\sum_{n_j \epsilon M_j} |b(n_j, j)| < R_j \quad pro\ j = 1, 2, \ldots, r\ .$$

V řadě (32) *položme speciálně*

(52) $$x_1 = \sum_{n_1 \epsilon M_1} b(n_1, 1), \ldots, x_r = \sum_{n_r \epsilon M_r} b(n_r, r)$$ [18]) .

Potom je číslo

(53) $$f(x_1, \ldots, x_r) = f\Big(\sum_{n_1 \epsilon M_1} b(n_1, 1), \ldots, \sum_{n_r \epsilon M_r} b(n_r, r)\Big)$$

rovno součtu absolutně konvergentní zobecněné řady $\mathfrak{A}$, *jejímiž členy jsou právě všechny výrazy*

(54) $$a_{k_1, \ldots, k_r} b(n_{1,1}, 1) \ldots b(n_{1,k_1}, 1) \ldots b(n_{r,1}, r) \ldots b(n_{r,k_r}, r)$$
$$(k_i \geqq 0,\ n_{j,m} \epsilon M_j \ \ pro\ 1 \leqq m \leqq k_j)\ .$$

Důkaz. Pišme $\sum_{n_j \epsilon M_j} |b(n_j, j)| = S_j$, takže $0 \leqq S_j < R_j$. Číslo (53) je součet všech členů

(55) $$a_{k_1, \ldots, k_r} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r} = a_{k_1, \ldots, k_r} \Big(\sum_{n_1 \epsilon M_1} b(n_1, 1)\Big)^{k_1} \ldots \Big(\sum_{n_r \epsilon M_r} b(n_r, r)\Big)^{k_r}.$$

Vynásobím-li absolutně konvergentní řady vystupující v členu (55), dostanu (podle věty 40) absolutně konvergentní řadu, jež se skládá právě z oněch členů (54), v nichž vystupují právě ony hodnoty $k_1, \ldots, k_r$, jež se vyskytují v členu (55). Je-li tedy řada $\mathfrak{A}$ absolutně konvergentní, je součet této řady — podle věty 39 — vskutku roven součtu všech čísel (55), t. j. roven hodnotě (53).

Absolutní konvergence řady $\mathfrak{A}$ plyne pak z toho, že součet prostých hodnot jakéhokoliv konečného počtu členů řady $\mathfrak{A}$ je zřejmě nejvýše roven číslu

[17]) Indexy u čísel b jsou složité; proto je píši do závorek, aby se příliš nekupily.

[18]) To smíme, ježto prosté hodnoty těchto čísel jsou menší než $R_1, \ldots, R_r$.

$$\sum_{k_1,\ldots,k_r=0}^{\infty} |a_{k_1,\ldots,k_r}| \left(\sum_{n_1 \in M_1} |b(n_1, 1)|\right)^{k_1} \ldots \left(\sum_{n_r \in M_r} |b(n_r, r)|\right)^{k_r} =$$
$$= \sum_{k_1,\ldots,k_r=0}^{\infty} |a_{k_1,\ldots,k_r}| \, S_1^{k_1} \ldots S_r^{k_r}.$$

Poznámka 1. Věta i důkaz vlastně jsou velmi jednoduché, pouze indexy jsou složité. V podstatě říká věta 234 toto: Dosadím-li do řady (32) za $x_1, \ldots, x_r$ podle rovnic (52), mohu provésti v každém členu vynásobení, čímž dostanu absolutně konvergentní řadu $\mathfrak{A}$; součet této řady $\mathfrak{A}$ (kterou mohu v důsledku věty 39 psáti v nejrůznějších tvarech) je pak roven číslu (53); vše ovšem za předpokladu, že platí podmínka (51). Vezměme jeden velmi důležitý příklad.

Příklad 1. (Dosazování mocninných řad do mocninné řady.) *Buďte*

$$f(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{k_1,\ldots,k_r=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_r} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}, \tag{56}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(v_1, \ldots, v_s) &= \sum_{j_1,\ldots,j_s=0}^{\infty} b^{(1)}_{j_1,\ldots,j_s} v_1^{j_1} \ldots v_s^{j_s}, \ldots, \\ \varphi_r(v_1, \ldots, v_s) &= \sum_{j_1,\ldots,j_s=0}^{\infty} b^{(r)}_{j_1,\ldots,j_s} v_1^{j_1} \ldots v_s^{j_s} \end{aligned} \tag{57}$$

mocninné řady, absolutně konvergentní v okolí počátku; budiž $\varphi_1(0, \ldots, 0) = \ldots = \varphi_r(0, \ldots, 0) = 0$. *Potom lze funkci* (proměnných $v_1, \ldots, v_s$)

$$\begin{aligned} &f(\varphi_1(v_1, \ldots, v_s), \ldots, \varphi_r(v_1, \ldots, v_s)) = \\ &= \sum_{k_1,\ldots,k_r=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_r} (\varphi_1(v_1, \ldots, v_s))^{k_1} \ldots (\varphi_r(v_1, \ldots, v_s))^{k_r} \end{aligned} \tag{58}$$

vyjádřiti v okolí počátku mocninnou řadou

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=0}^{\infty} c_{m_1,\ldots,m_s} v_1^{m_1} \ldots v_s^{m_s}, \tag{59}$$

kterou obdržíme tak, že na pravé straně v (58) *provedeme vynásobení a sloučíme členy, obsahující týž součin* $v_1^{m_1} \ldots v_s^{m_s}$.

Důkaz. Budiž řada (56) absolutně konvergentní pro $|x_j| \leqq R$ $(R > 0)$. Ježto $b^{(j)}_{0,\ldots,0} = 0$, existuje číslo $S > 0$ tak, že pro $t = 1, \ldots, r$ jest

$$\sum_{j_1,\ldots,j_s=0}^{\infty} |b^{(t)}_{j_1,\ldots,j_s}| \, S^{j_1} \ldots S^{j_s} < R\,.$$ [19])

Pro $|v_j| \leqq S$ lze tedy užíti věty 234, načež v absolutně konvergentní řadě $\mathfrak{A}$ sloučíme vždy všechny členy, obsahující týž součin $v_1^{m_1} \ldots v_s^{m_s}$.

Příklad 2. Jestliže řada (32) je absolutně konvergentní pro všechna $x_1, \ldots, x_r$, můžeme ve větě 234 zřejmě vynechat požadavek (51) [stačí absolutní konvergence řad (50)]. Odtud ihned plyne tato věta, analogická větě z příkl. 1: *Jestliže řada* (56) *konverguje absolutně pro všechna* $x_1, \ldots, x_r$ *a jestliže řady* (57) *konvergují absolutně pro všechna* $|v_1| \leqq \varrho_1, \ldots, |v_s| \leqq \varrho_s$ (není nutno předpokládati $\varphi_1(0, \ldots, 0) = \ldots = \varphi_r(0, \ldots, 0) = 0$), *potom řada* (59) — sestrojená podle předpisu z příkl. 1 — *je absolutně konvergentní pro* $|v_1| \leqq \varrho_1, \ldots, |v_s| \leqq \varrho_s$ *a její součet se tam rovná funkci* (58).

Ve větě 233 jsme se zabývali sčítáním a násobením mocninných řad. Přistupme k dělení.

Věta 235. *Buďte (píši $f(x)$ místo $f(x_1, \ldots, x_r)$ atd.)*

$$f(x) = \sum_{k_1,\ldots,k_r=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_r} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}, \quad g(x) = \sum_{k_1,\ldots,k_r=0}^{\infty} b_{k_1,\ldots,k_r} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}$$

mocninné řady, absolutně konvergentní v okolí počátku. Budiž

$$b_{0,0,\ldots,0} \neq 0\,.$$

Potom lze funkci $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ vyjádřiti v okolí počátku mocninnou řadou, která konverguje absolutně v okolí počátku.

Důkaz. Dokažme, že funkci $\dfrac{1}{g(x)}$ lze vyjádřiti takovou řadou; podle věty 233 lze pak tímto způsobem vyjádřiti i součin $f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$.

[19]) Levá strana je absolutně konvergentní, je-li S dosti blízko nuly. Lze ji tedy upraviti (věta 39) v mocninnou řadu jedné proměnné S, jež má prostý člen 0 a tedy má následkem spojitosti limitu 0 pro $S \to 0$.

Pro $|z| < 1$ je

(60) $$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots$$

(Nejpřirozenější důkaz je jako při reálném z: vypočtu $1 + z + \ldots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$ a provedu limitní přechod $n \to \infty$ (je $\lim |z^n| = 0$ a tedy $\lim z^n = 0$). Nejkratší důkaz dostaneme, vynásobíme-li podle věty 233 mocninné řady $(1-z)(1 + z + z^2 + \ldots) = 1$.) Dosaďme do (60)

$$z = \frac{-1}{b_{0,\ldots,0}} (g(x) - b_{0,\ldots,0});$$

vpravo je mocninná řada, která má v počátku hodnotu 0. V (60) vlevo dostaneme $\frac{b_{0,\ldots,0}}{g(x)}$, pravou stranu lze pak podle příkl. 1 vyjádřiti mocninnou řadou, absolutně konvergentní v okolí počátku. Tím je důkaz proveden.

Poznámka 2. Jak lze vypočísti v praxi koeficienty řady

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{k_1,\ldots,k_r=0}^{\infty} c_{k_1,\ldots,k_r} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}\ ?$$

Takto: vynásobím $g(x)$, takže

$$\sum a_{k_1,\ldots,k_r} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r} = \sum b_{m_1,\ldots,m_r} x_1^{m_1} \ldots x_r^{m_r} \,.\, \sum c_{p_1,\ldots,p_r} x_1^{p_1} \ldots x_r^{p_r}\,.$$

Vpravo vynásobím podle věty 233, načež podle pozn. 1 v § 3 vím, že každý součinitel mocninné řady vpravo se musí rovnati stejnolehlému součiniteli vlevo; t. j.

(61) $$b_{0,\ldots,0} c_{0,\ldots,0} = a_{0,\ldots,0}\,,$$

obecně

(62) $$b_{0,\ldots,0} c_{q_1,\ldots,q_r} + \sum b_{m_1,\ldots,m_r} c_{p_1,\ldots,p_r} = a_{q_1,\ldots,q_r}\,,$$

kde za znamením $\sum$ se sčítá přes všechny systémy $m_1, \ldots, m_r, p_1, \ldots, p_r$ takové, že $m_1 + p_1 = q_1, \ldots, m_r + p_r = q_r$ — s výjimkou členu s $m_1 = m_2 = \ldots = m_r = 0$, který jsme napsali zvlášť před znamení $\sum$. Nazveme číslo $q_1 + q_2 + \ldots + q_r$ „výškou" koeficientu $c_{q_1,\ldots,q_r}$. Ježto $b_{0,\ldots,0} \neq 0$, určuje rovnice (61) koeficient $c_{0,\ldots,0}$ výšky 0. Je-li

$t > 0$ (t celé) a známe-li již všechny koeficienty výšky menší než t, určuje rovnice (62) jednoznačně každý koeficient $c_{q_1,\ldots,q_r}$ výšky t; neboť za znamením $\sum$ stojí koeficienty výšky menší než $q_1 + \ldots + q_r = t$, tedy čísla již známá.

Poznámka 3. Koeficienty řad pro

$$Af(x) + Bg(x)\,, \quad f(x)\,g(x)\,, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \tag{63}$$

dostaneme podle věty 233 a podle poznámky 2 z čísel A, B a z koeficientů řad pro funkce $f(x)$, $g(x)$ sčítáním, odčítáním, násobením a dělením (dělí se jen číslem $b_{0,\ldots,0}$). Tedy: jsou-li A, B a koeficienty řad pro funkce $f(x)$, $g(x)$ čísla reálná, jsou i koeficienty řad pro funkce (63) čísla reálná.

Cvičení

Definujme $\cos x$, $\sin x$ (pro všechna komplexní x) a $\arcsin x$ (pro všechna komplexní x kruhu $|x| < 1$) řadami $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$, $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2k-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2k} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ (pro příslušná reálná x tyto rovnice platí, viz **DI**, věta 156, 161).

1. V jistém okolí počátku jest

$$\frac{1}{\cos x} = E_0 + \frac{E_1}{2!}x^2 + \frac{E_2}{4!}x^4 + \frac{E_3}{6!}x^6 + \ldots,$$

při čemž $E_n - \binom{2n}{2}E_{n-1} + \binom{2n}{4}E_{n-2} - \ldots + (-1)^n\binom{2n}{2n}E_0 = 0$ pro $n > 0$. Odtud plyne, že E_n jsou celá čísla. Vypočtěte $E_1, \ldots, E_5$ (kontrola: $E_5 = 50521$).

2. Jsou-li řady $f(x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}x^j y^k$, $\varphi(x) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l x^l$ absolutně konvergentní v okolí počátku, platí v okolí počátku rovnice $f(x, \varphi(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, kde $c_n = \sum a_{jk} b_{l_1} b_{l_2} \ldots b_{l_k}$, kdež se sčítá přes všechny systémy $j \geqq 0$, $k \geqq 0$, $l_1 > 0, \ldots, l_k > 0$ takové, že $j + l_1 + l_2 + \ldots + l_k = n$.

3. Budiž $m \neq 0$ reálné číslo, $\varphi(x) = \cos(m \arcsin x)$, $\psi(x) = \sin(m \arcsin x)$. Podle příkl. 2 lze pro $|x| < 1$ psáti

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\,, \quad \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\,.$$

Čísla a_k, b_k stanovíme nejsnáze takto: $a_0 = \varphi(0) = 1$, $a_1 = \varphi'(0) = 0$ (počítáme derivaci stále při reálné proměnné, viz pozn. 3 v § 1) a podobně $b_0 = 0$, $b_1 = m$. Dále

$$\varphi'(x) = -\frac{m\psi(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \ (1-x^2)\,\varphi'^2(x) = m^2(1-\varphi^2(x))$$

a odtud — pokud $\varphi'(x) \neq 0$ —

$$(1-x^2)\,\varphi''(x) - x\varphi'(x) + m^2\varphi(x) = 0\,.$$

Levá strana je mocninná řada a rovnice platí pro všechna reálná $x \in (-1, 1)$, pro něž $\varphi'(x) \neq 0$; tedy jistě pro nekonečně mnoho reálných x, majících hromadný bod 0.[20]) Tedy (věta 226) jsou všichni součinitelé levé strany rovni nule, t. j. $(k+2)(k+1)\,a_{k+2} + (m^2 - k^2)\,a_k = 0$ a odtud

$$a_{2n-1} = 0,\ a_{2n} = (-1)^n \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\dots(m^2-2^2(n-1)^2)}{(2n)!}\,.$$

Obdobně

$$b_{2n} = 0,\ b_{2n+1} = (-1)^n \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\dots(m^2-(2n-1)^2)}{(2n+1)!}\,.$$

§ 5. Mocninné řady v jedné proměnné na konvergenční kružnici.

Má-li řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x) \tag{64}$$

poloměr konvergence ϱ ($0 < \varrho < +\infty$), je její součet $f(x)$ funkcí spojitou pro $|x| < \varrho$. Na kružnici $|x| = \varrho$ jsou možny různé případy. Zvolím-li bod $\varrho e^{i\alpha}$ (α reálné) na konvergenční kružnici, mohu se ptáti předně: je řada (64) konvergentní, když do ní dosadím $x = \varrho e^{i\alpha}$? Za druhé: má funkce $f(x)$ limitu, když se x po poloměru kružnice z vnitřku blíží bodu $\varrho e^{i\alpha}$? Tyto dvě otázky uvedeme v souvislost: budeme se ptáti, jaký je vztah mezi konvergencí řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\varrho e^{i\alpha})^k$ a mezi existencí limity $\lim_{t\to\varrho-} f(te^{i\alpha})$. Napřed otázku trochu formálně zjednodušíme: píši-li $x = e^{i\alpha} y$, přejde bod $x = \varrho e^{i\alpha}$ v bod $y = \varrho$; píši-li dále $y = \varrho z$, přejde bod $y = \varrho$ v bod $z = 1$ a kružnice $|y| = \varrho$

[20]) Snadno zjistíte, že není stále $\varphi'(x) = 0$, takže existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \neq 0$, $x \in (-\delta, \delta)$ je $\varphi'(x) \neq 0$; viz větu 222.

v kružnici $|z| = 1$. Stačí tedy, omezíme-li se na případ $\varrho = 1$ a na limitní přechod $x \to 1-$ (jde tedy o limitu při reálném x). Čtenář se jistě dovede odtud vrátiti k obecnému případu.

Věta 236. *Řada v* (64) *nechť má poloměr konvergence* 1. *Pro* $|x| < 1$ *definujme* $f(x)$ *rovnicí* (64). *Potom platí:*

I. Je-li řada

(65) $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

konvergentní, je řada (64) *stejnoměrně konvergentní v intervalu* $\langle 0, 1 \rangle$; *dále existuje limita*

(66) $$\lim_{x \to 1-} f(x)$$

a rovná se součtu řady (65).[21])

II. Existují případy, kdy limita (66) *existuje a řada* (65) *diverguje.*

III. Je-li však

(67) $$\lim_{k \to \infty} k a_k = 0$$

a existuje-li limita (66), *je řada* (65) *konvergentní (a její součet se ovšem, podle I, rovná limitě* (66)*)*.[22])

Poznámka 1. Ve větě jde vesměs o reálná x intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Tvrzení I je velmi uspokojující, nedá se však podle tvrzení II obrátiti. Tvrzení III však ukazuje, že se tvrzení I přece někdy dá obrátiti, totiž tehdy, konvergují-li a_k dosti rychle k nule [podmínka (67)]. Tuto podmínku lze nahraditi podmínkou značně méně požadující — touto otázkou se však zde nebudeme zabývati, ač patří mezi důležité otázky moderní analysy.

Důkaz I. Budiž (65) konvergentní. Pro $0 \leqq x \leqq 1$ je $1 \geqq x \geqq \geqq x^2 \geqq \ldots \geqq 0$. Podle věty 55 je tedy řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ stejnoměrně konvergentní v $\langle 0, 1 \rangle$. Její součet je tedy funkce spojitá v $\langle 0, 1 \rangle$; odtud plyne, že

$$\lim_{x \to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \,.\, 1^k \,.$$

[21]) T. zv. věta Abelova.
[22]) T. zv. věta Tauberova.

II. Pro $|x| < 1$ jest $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots$; funkce $\frac{1}{1+x}$ má v bodě 1 limitu $\frac{1}{2}$, ač řada $1 - x + x^2 - \ldots$ je pro $x = 1$ divergentní.

III. Nechť existuje limita (66), označme ji s, a nechť platí (67). Pro každé $n \in \boldsymbol{N}$ označme znakem ε_n číslo

$$\varepsilon_n = \sup_{k=n+1,n+2,n+3,\ldots} |ka_k|\,;$$

tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Pro libovolné $n \in \boldsymbol{N}$ a pro každé $x \in (0, 1)$ jest

$$\sum_{k=0}^{n} a_k - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\,. \tag{68}$$

Zde jest

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k(1 - x^k)\Big| &= (1 - x)\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k(1 + x + \ldots + x^{k-1})\Big| \leqq \\ &\leqq (1 - x)\sum_{k=1}^{n} |ka_k|\,,\end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right| &\leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k}\,|ka_k|\, x^k \leqq \frac{\varepsilon_n}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \leqq \\ &\leqq \frac{\varepsilon_n}{n} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{\varepsilon_n}{n(1 - x)}\,.\end{aligned} \tag{70}$$

Zvolme nyní $x = 1 - \frac{1}{n}$ $(n > 1)$, tedy $1 - x = \frac{1}{n}$; z (68), (69), (70) plyne

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - f\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| \leqq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |ka_k| + \varepsilon_n\,. \tag{71}$$

Ježto $\lim\limits_{k\to\infty} |ka_k| = 0$, je podle věty 29 též

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|1\,.\,a_1| + |2\,.\,a_2| + \ldots + |n\,.\,a_n|}{n} = 0\,;$$

ježto též $\lim \varepsilon_n = 0$, je podle (71) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k - f\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = 0$. Ježto pak $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = s$, je $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = s$.

Cvičení

1. V kap. IV, § 3, příkl. 1 jsme pro $-1 < x < 1$ snadno dokázali, že $\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \ldots = \operatorname{arctg} x$; ježto řada vlevo konverguje pro $x = 1$, plyne $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \lim\limits_{x \to 1-} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{4}\pi$. Tím jsme znovu (a velmi snadno) odvodili známou řadu pro $\frac{1}{4}\pi$ (viz **DI** kap. XII, § 5; jiný důkaz viz v kap. IV, § 3, cvič. 4).