KAPITOLA X*

POKRAČOVÁNÍ O LEBESGUE-STIELTJESOVU INTEGRÁLU*

V dosavadních kapitolách jsme nestudovali závislost integrálu $\int\limits_M f \, \mathrm{d}\mu$ na míře μ; v našich úvahách byla míra μ většinou pevně dána (v kap. V—VIII jsme se dokonce vůbec zabývali převážně jen jedinou měrou, totiž Lebesgueovou). Tuto mezeru doplníme v § 2, 4, 8 této kapitoly. Mimo to zobecníme probranou theorii v § 3 na „míry", které mohou nabývat záporných hodnot. A konečně v § 6 a ke konci § 7 probereme aspoň trochu početní techniku Lebesgue-Stieltjesova integrálu. Podotýkám, že tuto kapitolu lze vynechat; v dalších kapitolách se jí neužívá. Ke studiu této kapitoly je třeba znáti kap. IX a dále § 3 z kap. III. Všechny funkce v této kapitole jsou reálné. Řada výsledků se dá ovšem přenésti na komplexní funkce, jestliže klademe $\int\limits_M (f + ig) \, . \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_M f \, \mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int\limits_M g \, \mathrm{d}\mu$ (konvergují-li integrály vpravo). Zdůrazňuji ještě, že se v této kapitole vůbec nemluví o zobecněných integrálech ve smyslu kap. VIII. Až do § 6 (včetně) jde o Lebesgue-Stieltjesovy integrály; v § 7 bude zaveden ještě další pojem integrálu.

§ 1. Vyjádření integrálu $\int\limits_M f \, \mathrm{d}\mu$ integrálem s jinou měrou. Poznámka 1. Budiž μ funkce intervalu s vlastností $\mathbf{S}_r$; v kap. I jsme ukázali, jak je možno definiční obor této funkce rozšířit na všechny t. zv. množiny μ-měřitelné. Funkci takto rozšířenou jsme nazvali *měrou* a značili jsme ji (a budeme ji většinou značit) týmž písmenem μ jako funkci intervalu, z níž jsme vyšli; nedorozumnění je vyloučeno. Tvrdím nyní:

Množina $M \subset \mathbf{E}_r$ je μ-měřitelná tehdy a jen tehdy, lze-li psáti $M = G \dot{-} N$, kde G je množina typu G_δ a N je množina, která je částí množiny G_1, jež je typu G_δ a má míru $\mu(G_1) = 0$.

Důkaz. Je-li M udaného tvaru, je zřejmě μ-měřitelná. Je-li naopak μ-měřitelná, má podle věty 20 tvar $M = G \dot{-} N$, kde G je typu G_δ

a $\mu(N) = 0$. Podle téže věty existuje tedy G_1 typu G_δ tak, že $N \subset G_1$, $\mu(G_1) = \mu(G_1 \dot{-} N) = 0$.

Poznámka 2. Budiž I omezený interval v $\mathbf{E}_r$. Potom existují omezené intervaly otevřené $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ a uzavřené $L_1 \subset L_2 \subset \ldots$ tak, že $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n = I = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$.

Důkaz. Pro $r = 1$ je to snadné: Je-li $I = (a, b)$, volme $K_n = (a, b)$, $L_n = \left\langle a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right\rangle$ (pro $a + \frac{1}{n} > b - \frac{1}{n}$ klademe $L_n = \emptyset$ — podobně dále); je-li $I = \langle a, b)$, volme $K_n = \left(a - \frac{1}{n}, b\right)$, $L_n = \left\langle a, b - \frac{1}{n} \right\rangle$ a podobně pro $I = (a, b\rangle$, $I = \langle a, b\rangle$ (zde $L_n = \langle a, b\rangle$). Je-li $I = i^1 \times \ldots \times i^r \subset \mathbf{E}_r$, volme pro každé $h = 1, 2, \ldots, r$ podle předešlého otevřené omezené $k_1^h \supset k_2^h \supset \ldots$ a uzavřené $l_1^h \subset l_2^h \subset \ldots$ tak, že $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} k_n^h = i^h = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} l_n^h$, a klaďme $K_n = k_n^1 \times \ldots \times k_n^r$, $L_n = l_n^1 \times \ldots \times l_n^r$. Potom vskutku předně každý bod $x \in \bigcap K_n$ má h-tou souřadnici ve všech k_n^h, tedy v i^h, tedy $x \in I$; za druhé, je-li $x \in I$, je $x_h \in i^h$, tedy $x_1 \in l_{n_1}^1, \ldots, x_r \in l_{n_r}^r$ pro jistá $n_1, \ldots, n_r$; kladu-li tedy $n = \operatorname{Max}(n_1, \ldots, n_r)$, je $x \in L_n$, tedy $x \in \bigcup L_n$.

Věta 127. *Předpoklady: Budiž μ míra v $\mathbf{E}_r$. Budiž g funkce μ-měřitelná a skoro všude nezáporná v $\mathbf{E}_r$. Nechť integrál*

$$\nu(M) = \int_M g \, d\mu \tag{1}$$

konverguje pro každý omezený interval $M \subset \mathbf{E}_r$.

Tvrzení:

1. Funkce intervalu ν má vlastnost $\mathbf{S}_r$ a definuje tedy (ve smyslu pozn. 1) jistou míru ν.

2. Každá μ-měřitelná množina je ν-měřitelná; každá μ-nulová množina je ν-nulová.

3. Každá funkce μ-měřitelná v množině A je ν-měřitelná v A.

4. Vzorec (1) dává ν-míru množiny M nejenom pro omezené intervaly, nýbrž pro každou μ-měřitelnou množinu M.

Důkaz. 1. Aditivnost, konečnost a nezápornost funkce ν je zřejmá. Budiž I libovolný omezený interval a volme K_n, L_n jako v pozn. 2. Podle vzorce (1), věty 49 a pozn. 3 v kap. III, § 2 je $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(K_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu(L_n) = \nu(I)$; tedy má ν vlastnost $\mathbf{S}_r$ (viz kap. I, § 6, pozn. 6).

2. Máme tedy míru ν, definovanou pro všechny ν-měřitelné množiny a za druhé „množinovou funkci" ν^*, definovanou pro každou μ-měřitelnou množinu rovnicí

$$\nu^*(M) = \int_M g \, d\mu \, .[1] \tag{2}$$

Je-li M omezený interval, je

$$\nu^*(M) = \nu(M) \, . \tag{3}$$

Je-li tedy $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ (disjunktní sjednocení omezených intervalů), je podle vět 18, 48

$$\nu(M) = \sum \nu(I_n) = \sum \nu^*(I_n) = \nu^*(M) \, ,$$

t. j. (3) platí i pro množiny z $\mathfrak{C}_r$, tedy pro otevřené množiny. Je-li M omezená typu G_δ, tedy $M = \bigcap G_n$ ($G_1 \supset G_2 \supset \ldots$ omezené otevřené), je podle věty 24 a pozn. 3 v kap. III, § 2

$$\nu(M) = \lim \nu(G_n) = \lim \nu^*(G_n) = \nu^*(M) \, ;$$

je-li konečně M typu G_δ (ale ne omezená), je $M = \bigcup G_n$ ($G_1 \subset G_2 \subset \ldots$ typu G_δ a omezené) a podle vět 49, 23 platí opět (3). Tedy platí (3) pro každé M typu G_δ.

Je-li M μ-nulová, existuje μ-nulová $N \supset M$ typu G_δ, načež

$$\nu(N) = \nu^*(N) = \int_N g \, d\mu = 0 \, ,$$

takže $M \subset N$ je též ν-nulová. A z pozn. 1 je ihned vidět, že každá μ-měřitelná množina je ν-měřitelná. Tvrzení 3 plyne ihned z 2.

Je-li M μ-měřitelná, je $M = G \dot{-} N$ (G typu G_δ, $\mu(N) = 0$). Víme, že pro množinu G je $\nu(G) = \nu^*(G)$, t. j. $\nu(G) = \int_G g \, d\mu$; a ježto $M \sim G \, (\mu)$, $M \sim G \, (\nu)$ (podle 2), je $\nu(M) = \int_M g \, d\mu$. Tím je věta 127 dokázána.

---

[1]) Podle předpokladu je $\nu^*(M)$ konečné, je-li M omezená.

Věta 128. *Předpoklady a označení* (1) *jako ve větě 127. Budiž f μ-měřitelná v M. Potom je*

$$(4) \qquad \int_M f \,\mathrm{d}\nu = \int_M fg \,\mathrm{d}\mu \,,$$

jestliže aspoň jeden z integrálů existuje.

Důkaz. Je-li f charakteristická funkce μ-měřitelné množiny N, je podle věty 127

$$\int_M f \,\mathrm{d}\nu = \int_{MN} \mathrm{d}\nu = \nu(MN) = \int_{MN} g \,\mathrm{d}\mu = \int_M fg \,\mathrm{d}\mu$$

a (4) platí. Lineární kombinací přejdu k případu, že f je jednoduchá, nezáporná, konečná a μ-měřitelná. Běžným limitním přechodem (podle věty 39 a 57) dostanu (4) pro nezáporné f a rozkladem na f^+ a f^- pro libovolné f (pamatujme, že $g \geqq 0$).

Věta 128 je důležitá — na př. v počtu pravděpodobnosti i jinde. S jejím použitím se setkáme v § 6.

Věta 129. *Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$ množina μ-měřitelná, $\mu(M) < +\infty$. Budiž f funkce μ-měřitelná a μ-skoro všude konečná v M. Definujme funkci intervalu ν v $\mathbf{E}_1$ rovnicí*

$$(5) \qquad \nu(I) = \mu(\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, f(x) \in I)) \,.$$

Potom je

$$(6) \qquad \int_M f \,\mathrm{d}\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \,\mathrm{d}\nu \,,$$

konverguje-li jeden z těchto integrálů.

Pravá strana značí ovšem $\int_{\mathbf{E}_1} g \,\mathrm{d}\nu$, kde $g(x) = x$ pro každé $x \in \mathbf{E}_1$. Integrál vpravo (jednorozměrný!) vypadá velmi jednoduše, ovšem pamatujme, že ν je dáno r-rozměrným integrálem

$$\nu(I) = \int_A \mathrm{d}\mu \quad (A = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, f(x) \in I) \,.$$

Důkaz. Musíme dokázati, že ν definuje míru ve smyslu pozn. 1. Aditivnost, nezápornost a konečnost ($\nu(I) \leqq \mu(M) < +\infty$) je jasná. Jde ještě o vlastnost $\mathbf{S}_r$. Budiž I omezený interval v $\mathbf{E}_1$. Sestrojme omezené intervaly otevřené $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ a uzavřené $L_1 \subset L_2 \subset \ldots$ tak, že $\bigcap K_n = I = \bigcup L_n$. Položíme-li $k_n = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, f(x) \in K_n)$, $l_n = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, f(x) \in L_n)$, je zřejmě $k_1 \supset k_2 \supset \ldots$, $l_1 \subset l_2 \subset \ldots$, $\bigcap k_n = \bigcup l_n = i$, kde $i = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, f(x) \in I)$. Věty 23, 24 dávají $\mu(i) = \lim \mu(k_n) = \lim \mu(l_n)$, tedy podle (5) $\nu(I) = \lim \nu(K_n) = \lim \nu(L_n)$, takže ν má vlastnost $\mathbf{S}_r$ (podle kap. I, § 6, pozn. 6).

Smíme — v dalším důkazu — předpokládati, že f je konečná všude v M. Budeme se opírati o větu 53. Zvolíme $\delta > 0$, sestrojíme rozdělení $\mathfrak{D}_\delta$, dané dělicími body $l_n = n\delta$ $(n = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots)$ a zvolíme $\xi_n = l_n$. Položíme-li $M_n = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, l_{n-1} \leqq f(x) < l_n)$, je součet příslušný k integrálu v (6) vlevo (ve smyslu věty 53)

$$S(\mathfrak{D}_\delta, \Xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} l_n \, \mu(M_n) \, . \tag{7}$$

Součet, příslušný k integrálu vpravo, je

$$T(\mathfrak{D}_\delta, \Xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} l_n \, \nu(N_n) \, , \tag{8}$$

kde

$$N_n = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in \mathbf{E}_1, l_{n-1} \leqq x < l_n)$$

(neboť integrandem vpravo je funkce $g(x) = x$). Ale podle vzorce (5), kde klademe $I = \langle l_{n-1}, l_n)$, je $\nu(N_n) = \nu(I) = \mu(M_n)$, takže řady (7), (8) jsou identické. Tedy: je-li jedna z nich absolutně konvergentní, je i druhá; má-li jedna z nich limitu A pro $\delta \to 0 +$, má i druhá limitu A; a nyní stačí užíti věty 53.

§ 2. Závislost $\int_M f \, d\mu$ na funkci μ. Věta 130. *Buďte μ_1, μ_2 funkce s vlastností $\mathbf{S}_r$; $0 \leqq c < +\infty$. Definujme funkce intervalu λ, ν, ϱ rovnicemi*

$$\lambda(I) = c\,\mu_1(I), \quad \nu(I) = \mu_1(I) + \mu_2(I), \quad \varrho(I) = \mu_1(I) - \mu_2(I) \, .$$

Jsou to zřejmě konečné aditivní funkce intervalu. Potom λ, ν mají vlastnost $\mathbf{S}_r$; jestliže pro každý omezený interval I je $\mu_1(I) \geqq \mu_2(I)$ (t. j. $\varrho(I) \geqq 0$), má též ϱ vlastnost $\mathbf{S}_r$.

Důkaz. Ježto μ_1, μ_2 mají vlastnost $\mathbf{S}_r$, lze na míry μ_1, μ_2 (ve smyslu § 1, pozn. 1) užíti celé naší theorie z kap. I. Budiž I omezený interval a sestrojme K_n, L_n jako v § 1, pozn. 2. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_i(K_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_i(L_n) = \mu_i(I)$ pro $i = 1, 2$. Sečtením dostaneme $\lim \nu(K_n) = \lim \nu(L_n) = \nu(I)$, což bylo dokázati. Podobně pro λ a pro ϱ.

Poznámka 1. Lze tedy vytvořiti míry λ, ν, ϱ i vnější míry λ_e, ν_e, ϱ_e; budeme je ovšem po příp. značit též

$$c\mu_1,\ \mu_1 + \mu_2,\ \mu_1 - \mu_2;\ (c\mu_1)_e,\ (\mu_1 + \mu_2)_e,\ (\mu_1 - \mu_2)_e\,.$$ [2])

Věta 131. *Mají-li* μ_1, μ_2 *vlastnost* $\mathbf{S}_r$ *a je-li* $0 < c < +\infty$, *je*

$$(c\mu_1)_e(M) = c\,.\,(\mu_1)_e(M)\,, \tag{9}$$

$$(\mu_1 + \mu_2)_e(M) = (\mu_1)_e(M) + (\mu_2)_e(M)\,. \tag{10}$$

Důkaz. Užijme raději znaků $\lambda = c\mu_1$, $\nu = \mu_1 + \mu_2$. Je-li $C \in \mathfrak{C}_r$, t. j. $C = \bigcup I_n$ (disjunktní sjednocení omezených intervalů), je

$$\lambda(C) = \sum \lambda(I_n) = \sum c\, \mu_1(I_n) = c\, \mu_1(C)$$

a podobně $\nu(C) = \mu_1(C) + \mu_2(C)$. Podle definice vnější míry je tedy

$$\lambda_e(M) = \inf_{M\subset C\in\mathfrak{C}_r} \lambda(C) = c \inf \mu_1(C) = c(\mu_1)_e(M)\,,$$

což je (9). Pro ν je to o něco složitější. Jest

$$\nu_e(M) = \inf_{M\subset C\in\mathfrak{C}_r} \nu(C) = \inf_{M\subset C\in\mathfrak{C}_r} (\mu_1(C) + \mu_2(C))\,.$$

Ježto pro $M \subset C \in \mathfrak{C}_r$ je $\mu_i(C) \geqq (\mu_i)_e(M)$, je

$$\nu_e(M) \geqq (\mu_1)_e(M) + (\mu_2)_e(M)\,. \tag{11}$$

Obrácená nerovnost je jasná, je-li vpravo $+\infty$. Budiž tedy $(\mu_i)_e(M) = A_i < +\infty$ pro $i = 1, 2$; budiž $\varepsilon > 0$. Zvolme $C_i \supset M$, $C_i \in \mathfrak{C}_r$ $(i = 1, 2)$ tak, že $\mu_i(C_i) < A_i + \varepsilon$, takže $C_1C_2 \supset M$ a tedy

$$\nu_e(M) \leqq \nu(C_1C_2) = \mu_1(C_1C_2) + \mu_2(C_1C_2) < A_1 + \varepsilon + A_2 + \varepsilon\,,$$

tedy $\nu_e(M) \leqq A_1 + A_2$, což spolu s (11) dává (10).

Poznámka 2. Odtud plyne: M je μ_1-nulová tehdy a jen tehdy, je-li $c\mu_1$-nulová. M je $(\mu_1 + \mu_2)$-nulová tehdy a jen tehdy, je-li současně μ_1-nulová i μ_2-nulová.

---

[2]) Načež na př. $(\mu_1 + \mu_2)_e(M)$ značí ovšem $\nu_e(M)$.

Věta 132. *Nechť μ_1, μ_2 mají vlastnost $\mathbf{S}_r$; $0 < c < +\infty$. Potom platí:*

1. Množina M je $c\mu_1$-měřitelná tehdy a jen tehdy, je-li μ_1-měřitelná, načež $(c\mu_1)(M) = c\mu_1(M)$.

2. Množina M je $(\mu_1 + \mu_2)$-měřitelná tehdy a jen tehdy, je-li μ_1-měřitelná i μ_2-měřitelná, načež

$$(\mu_1 + \mu_2)(M) = \mu_1(M) + \mu_2(M)\,.$$

3. Je-li $\mu_1(I) \geqq \mu_2(I)$ pro každý omezený interval a je-li M μ_1-měřitelná, je též $(\mu_1 - \mu_2)$-měřitelná i μ_2-měřitelná a je

$$(\mu_1 - \mu_2)\,M \leqq \mu_1(M)\,, \quad \mu_2(M) \leqq \mu_1(M)\,.$$

Důkaz. Mějme na paměti (věta 22), že množiny μ-měřitelné jsou právě množiny tvaru $F \cup N$, kde F je typu F_σ, $\mu(N) = 0$. Odtud, z pozn. 2 a z věty 131 plyne ihned tvrzení 1. Rovněž je patrno, že množina $(\mu_1 + \mu_2)$-měřitelná, t. j. množina tvaru $M = F \cup N$ (F typu F_σ, $(\mu_1 + \mu_2)(N) = 0$) je μ_1-měřitelná i μ_2-měřitelná a že $(\mu_1 + \mu_2)\,.\,(M) = \mu_1(M) + \mu_2(M)$. Je-li naopak M μ_i-měřitelná pro $i = 1, 2$, t. j. $M = F_i \cup N_i$, F_i typu F_σ, $\mu_i(N_i) = 0$, je $M = (F_1 \cup F_2) \cup (N_1N_2)$, kde $\mu_1(N_1N_2) = \mu_2(N_1N_2) = 0$, tedy i (pozn. 2) $(\mu_1 + \mu_2)\,.\,(N_1N_2) = 0$, takže M je $(\mu_1 + \mu_2)$-měřitelná. Označíme-li opět $\varrho = \mu_1 - \mu_2$, plyne konečně tvrzení 3 z tvrzení 2, neboť $\mu_1 = \mu_2 + \varrho$.

Poznámka 3. Z věty 132 a pozn. 2 plyne ihned:[3]) Funkce f je $c\mu_1$-měřitelná v M ($0 < c < +\infty$) tehdy a jen tehdy, je-li μ_1-měřitelná v M. Je $(\mu_1 + \mu_2)$-měřitelná v M tehdy a jen tehdy, je-li μ_1-měřitelná i μ_2-měřitelná v M. V případě $\mu_1(I) \geqq \mu_2(I)$ je každá funkce μ_1-měřitelná též $(\mu_1 - \mu_2)$-měřitelná a μ_2-měřitelná v M. Teď ještě integrály:

Věta 133. *Nechť μ_1, μ_2 mají vlastnost $\mathbf{S}_r$; nechť $0 < c < +\infty$. Potom platí rovnice*

$$\int_M f \,\mathrm{d}(\mu_1 + \mu_2) = \int_M f \,\mathrm{d}\mu_1 + \int_M f \,\mathrm{d}\mu_2\,, \tag{12}$$

jakmile jedna strana má smysl. Totéž platí o rovnici

$$\int_M f \,\mathrm{d}(c\mu_1) = c \int_M f \,\mathrm{d}\mu_1\,. \tag{13}$$

---

[3]) Stačí si uvědomit definici měřitelné funkce (def. 7).

Poznámka 4. V případě $\mu_1(I) \geqq \mu_2(I)$ dostáváme: Existuje-li $\int\limits_M f \,\mathrm{d}\mu_1$, existuje i $\int\limits_M f \,\mathrm{d}(\mu_1 - \mu_2)$ a $\int\limits_M f \,\mathrm{d}\mu_2$ a v případě $f(x) \geqq 0$ je potom

$$\int\limits_M f \,\mathrm{d}\mu_1 \geqq \mathrm{Max}\,\Big(\int\limits_M f \,\mathrm{d}(\mu_1 - \mu_2),\ \int\limits_M f \,\mathrm{d}\mu_2\Big)\,.$$

Neboť je $\mu_1 = \mu_2 + \varrho$, kde $\varrho = \mu_1 - \mu_2$, a užije se rovnice (12).

Důkaz proveďme pro (12) (pro (13) je ještě lehčí). Budiž f $(\mu_1 + \mu_2)$-měřitelná v M — jinak by totiž ani levá ani pravá strana neměla smysl. Je-li f charakteristická funkce množiny N, je levá strana v (12) rovna $\int\limits_{MN} \mathrm{d}(\mu_1 + \mu_2) = (\mu_1 + \mu_2)(MN)$ a pravá je obdobně $\mu_1(MN) + \mu_2(MN)$; podle věty 132 tedy rovnice platí. Odtud přejdeme k nezáporným konečným jednoduchým funkcím, limitním přechodem k nezáporným funkcím a rozkladem $f = f^+ - f^-$ (opatrně odečítat!) k libovolným funkcím.

§ 3. Odstranění předpokladu $\mu(I) \geqq 0$. V četných otázkách matematických i fysikálních je třeba oprostiti se od předpokladu $\mu(I) \geqq 0$. Je-li na př. $\mu(I)$ elektrický náboj, obsažený v intervalu I, je funkce μ aditivní, ale může býti $\mu(I) < 0$.

Poznámka 1. Zopakujme terminologii. Je-li každému omezenému intervalu $I \subset \mathbf{E}_r$ přiřazeno jisté číslo $\mu(I) \in \mathbf{E}_1^*$ (tedy reálné číslo, ale po případě též $+\infty$ nebo $-\infty$), říkáme, že μ je funkce intervalu (v $\mathbf{E}_r$). Jestliže pro každý omezený interval $I \subset \mathbf{E}_r$ je $\mu(I)$ konečné (po příp. $\mu(I) \geqq 0$), říkáme ovšem, že μ je konečná (po příp. nezáporná) funkce intervalu. Jestliže pro libovolné omezené intervaly I, I_1, I_2, vyhovující podmínkám $I = I_1 \cup I_2$, $I_1 I_2 = \emptyset$, platí rovnice $\mu(I) = \mu(I_1) + \mu(I_2)$, říkáme, že μ je aditivní funkce intervalu. V kap. I (§ 6, pozn. 5 a věta 7) jsme zjistili, jak lze každou konečnou aditivní funkci intervalu μ [4]) rozšířit na celý obor $\mathfrak{A}_r$:[5]) vyjádříme-li $M \in \mathfrak{A}_r$ jako disjunktní sjednocení intervalů $M = \bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k$, definujeme $\mu(M) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(I_k)$. Toto rozšíření konečné aditivní funkce intervalu μ na obor $\mathfrak{A}_r$ budeme značit týmž

[4]) Přitom jsme nepředpokládali — pokud to nebylo výslovně řečeno — že μ je nezáporná.

[5]) $\mathfrak{A}_r$ jsme zavedli v def. 1 (kap. I, § 5).

písmenem μ. Podotkněme, že pro konečnou aditivní funkci μ je vždy $\mu(\emptyset) = 0$.

Definice 17. *Buď μ konečná aditivní funkce intervalu v $\mathbf{E}_r$. Pro každý omezený interval $I \subset \mathbf{E}_r$ položme*

$$\pi(I) = \sup_{\substack{A \in \mathfrak{A}_r \\ A \subset I}} \mu(A)\,, \quad \nu(I) = \sup_{\substack{A \in \mathfrak{A}_r \\ A \subset I}} (-\mu(A))\,; \tag{14}$$

funkce intervalu π, ν, $\alpha = \pi + \nu$ nazýváme po řadě positivní variací, negativní variací a variací (nebo totální variací) funkce μ.

Poznámka 2. Tři variace funkce μ (po příp. μ_n) budeme značiti vždy π, ν, α (po příp. π_n, ν_n, α_n), pokud nezavedu výslovně jiné označení. Ježto mezi čísly $\mu(A)$ v (14) je též číslo $\mu(\emptyset) = 0$, je $0 \leqq \pi(I) \leqq + \infty$, $0 \leqq \nu(I) \leqq + \infty$, $0 \leqq \alpha(I) \leqq + \infty$. Zřejmě $\pi(\emptyset) = \nu(\emptyset) = \alpha(\emptyset) = 0$. Je jasno, že funkce $-\mu$ má positivní variaci ν, negativní π. Dále je zřejmo, že funkce $c\mu$ má pro $0 < c < + \infty$ po řadě variace $c\pi$, $c\nu$, $c\alpha$ a pro $0 > c > - \infty$ variace $|c|\nu$ (positivní), $|c|\pi$ (negativní), $|c|\alpha$ (totální).

Dále je zřejmo toto: jsou-li μ_1, μ_2 konečné aditivní funkce intervalu, $\mu = \mu_1 + \mu_2$, je pro každý omezený interval $\pi(I) \leqq \pi_1(I) + \pi_2(I)$ a podobně pro ν, α. Neboť pro $A \in \mathfrak{A}_r$, $A \subset I$ je $\mu(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A) \leqq \pi_1(I) + \pi_2(I)$, načež se vlevo přejde k supremu. Konečně: Je-li μ nezáporná konečná aditivní funkce intervalu, je $\mu = \pi$, $\nu = 0$, $\alpha = \mu$. Neboť pro každý omezený interval I a každou $A \in \mathfrak{A}_r$, $A \subset I$ je podle věty 7, II $0 \leqq \mu(A) \leqq \mu(I)$, takže největší hodnotu dostáváme pro $A = I$ a nejmenší pro $A = \emptyset$. Tedy (podle (14)) $\pi(I) = \mu(I)$, $\nu(I) = \mu(\emptyset) = 0$. Je-li μ nekladná, je ovšem $\pi = 0$, $\nu = - \mu$, $\alpha = - \mu$.

Věta 134. *Buď μ konečná aditivní funkce intervalu. Potom π, ν (a tedy i α) jsou nezáporné aditivní funkce intervalu* (ne nutně konečné).

Důkaz. Buďte I, I_1, I_2 omezené intervaly, $I = I_1 \cup I_2$, $I_1 I_2 = \emptyset$.

1. Ježto $I_k \subset I$ ($k = 1, 2$), je podle (14) zřejmě $\pi(I_k) \leqq \pi(I)$. Rovnice

$$\pi(I) = \pi(I_1) + \pi(I_2) \tag{15}$$

je tedy jistě správná, je-li vpravo $+\infty$. Budiž tedy $\pi(I_k) < +\infty$ pro $k = 1, 2$. Je-li $A \subset I$, $A \in \mathfrak{A}_r$, je $AI_k \in \mathfrak{A}_r$ a tedy

$$\mu(A) = \mu(AI_1) + \mu(AI_2) \leqq \pi(I_1) + \pi(I_2) ;$$

přechodem k supremu vlevo plyne

$$\pi(I) \leqq \pi(I_1) + \pi(I_2) . \tag{16}$$

Budiž za druhé $\varepsilon > 0$; volme $A_k \in \mathfrak{A}_r$, $A_k \subset I_k$ $(k = 1, 2)$ tak, že $\mu(A_k) > > \pi(I_k) - \varepsilon$, načež (ježto $A_1A_2 = \emptyset$) je podle (14) a podle věty 7, I $\pi(I) \geqq \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$, tedy $\pi(I) > \pi(I_1) + \pi(I_2) - 2\varepsilon$, což spolu s (16) dává (15).

2. Funkce ν je positivní variací funkce $-\mu$, tedy je aditivní podle 1.

Definice 18. *Budiž μ konečná aditivní funkce intervalu. Jestliže pro každý omezený interval I je $\alpha(I) < +\infty$ (t. j. $\pi(I) < +\infty$, $\nu(I) < +\infty$), říkáme, že μ má variaci konečnou (zkratka: v. k.).*[6])

Poznámka 3. Jestliže μ (konečná aditivní) je nezáporná nebo nekladná, má μ podle pozn. 2 v. k. Dále (podle pozn. 2): mají-li μ_1, μ_2 v. k. a je-li $\mu_3 = c\mu_1$, $\mu_4 = \mu_1 + \mu_2$ $(c \in \mathbf{E}_1)$, mají i μ_3, μ_4 v. k. a je $\alpha_3 = |c|\alpha_1$, $\alpha_4 \leqq \alpha_1 + \alpha_2$.

Věta 135. *Má-li μ variaci konečnou, je $\mu = \pi - \nu$, t. j. pro každý omezený interval I je*

$$\mu(I) = \pi(I) - \nu(I) . \tag{17}$$

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$; sestrojme $A \in \mathfrak{A}_r$, $A \subset I$ tak, že $\mu(A) > > \pi(I) - \varepsilon$. Jest $\nu(I) \geqq -\mu(I \dot- A)$, tedy $\mu(I) = \mu(A) + \mu(I \dot- A) > > \pi(I) - \varepsilon - \nu(I)$. Tedy $\mu(I) \geqq \pi(I) - \nu(I)$. Užijeme-li tohoto výsledku na funkci $-\mu$, máme $-\mu(I) \geqq \nu(I) - \pi(I)$. Poslední dvě nerovnosti dávají (17).

V (17) je funkce s v. k. vyjádřena jako rozdíl dvou konečných nezáporných aditivních funkcí intervalu; naopak, takový rozdíl má podle pozn. 3 vždy v. k. Tedy:

Věta 136. *Funkce intervalu má v. k. tehdy a jen tehdy, je-li rovna rozdílu dvou konečných nezáporných aditivních funkcí intervalu.*

---

[6]) Vztah k funkcím jedné proměnné, jež mají v. k. (viz **D II**, kap. V, § 9), probereme v § 5.

Poznámka 4. Budiž μ funkce intervalu s v. k., tedy $\mu = \pi - \nu$, $\alpha = \pi + \nu$. Konečné nezáporné aditivní funkce intervalu π, ν, α lze ve smyslu pozn. 1 rozšířiti na celý obor $\mathfrak{A}_r$. Rovnice $\mu(A) = \pi(A) - \nu(A)$, $\alpha(A) = \pi(A) + \nu(A)$ platí pro každý omezený interval A, a tedy (podle věty 7) platí i pro každou množinu $A \in \mathfrak{A}_r$. Jestliže π, ν mají vlastnost S_r, lze sestrojiti míry π, ν a definovati potom míru $\mu(M) = \pi(M) - \nu(M)$ a integrál $\int_M f \, d\mu = \int_M f \, d\pi - \int_M f \, d\nu$, pokud pravá strana má smysl. To také podrobně provedeme, napřed však rozřešíme otázku: Jak lze přímo na funkci μ poznati, zda π, ν mají vlastnost S_r? K tomu cíli zavedeme jinou vlastnost S_r^*, jejíž vztah k S_r budeme studovat.[7])

Definice 19. *Budiž μ konečná funkce intervalu v E_r. Budeme říkati, že μ má vlastnost S_r^*, jestliže platí toto:*

1. μ je aditivní funkce intervalu s variací konečnou.

2. Pro každou klesající posloupnost omezených intervalů $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ s prázdným průnikem $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$ je $\lim_{n \to \infty} \mu(I_n) = 0$.

Věta 137. *Budiž $c \in E_1$, $c \neq 0$. Potom platí:*

1. μ má vlastnost S_r^* tehdy a jen tehdy, má-li $c\mu$ vlastnost S_r^*.

2. Mají-li μ_1, μ_2 vlastnost S_r^*, má i $\mu_1 + \mu_2$ vlastnost S_r^*.

3. Jsou-li μ_1, μ_2 nezáporné konečné aditivní funkce intervalu, má $\mu_1 + \mu_2$ vlastnost S_r^* tehdy a jen tehdy, má-li μ_1 i μ_2 vlastnost S_r^*.

Důkaz. Pokud se týče podmínky 1 z def. 19, stačí si všimnout poznámky 3. Pokud se týče podmínky 2, stačí přejít k limitě $n \to \infty$ ve vztazích

$$(c\mu)(I_n) = c\,\mu(I_n), \quad (\mu_1 + \mu_2)(I_n) = \mu_1(I_n) + \mu_2(I_n)\,.$$

Věta 138. *Budiž μ nezáporná funkce intervalu. Potom μ má vlastnost S_r tehdy a jen tehdy, má-li vlastnost S_r^*.*

Důkaz. 1. Nechť μ má vlastnost S_r, takže je konečná, aditivní, nezáporná a má v. k. (pozn. 2). Funkci μ mohu rozšířiti na míru ve

[7]) Pro funkce μ, jež nabývají též záporných hodnot, se vlastnost S_r nehodí, protože čísla $\inf \mu(I_1)$, $\sup \mu(I_2)$ z definice vlastnosti S_r (kap. I, § 6) ztrácejí zde svoji důležitost.

smyslu pozn. 1 v § 1. Jsou-li nyní $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ omezené intervaly s prázdným průnikem, je $\mu(I_1) < +\infty$ a podle věty 24 je $\lim_{n\to\infty} \mu(I_n) = \mu(\lim I_n) = \mu(\bigcap I_n) = \mu(\emptyset) = 0$, takže μ má vlastnost $\mathbf{S}_r^*$.

2. Nechť μ má vlastnost $\mathbf{S}_r^*$, takže je aditivní a konečná (a ovšem nezáporná). Funkci μ lze rozšířit na $\mathfrak{A}_r$[8]) a užívati věty 7. Máme ještě dokázati toto: Je-li $\varepsilon > 0$, I omezený interval, existuje omezený otevřený interval $I_1 \supset I$ a uzavřený interval $I_2 \subset I$ tak, že $\mu(I_1) < \mu(I) + \varepsilon$, $\mu(I_2) > \mu(I) - \varepsilon$. Budiž tedy I, ε dáno. Podle pozn. 2 v § 1 zvolme otevřené omezené intervaly $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ a uzavřené intervaly $L_1 \subset L_2 \subset \ldots$ tak, že $\bigcap K_n = I = \bigcup L_n$. Stačí dokázati, že

$$\lim_{n\to\infty} \mu(K_n \dot{-} L_n) = 0 . \tag{18}$$

Neboť potom pro jisté n bude $\mu(K_n \dot{-} L_n) < \varepsilon$, tedy (věta 7)

$$\begin{aligned} \mu(K_n) &= \mu(I) + \mu(K_n \dot{-} I) < \mu(I) + \varepsilon , \\ \mu(L_n) &= \mu(I) - \mu(I \dot{-} L_n) > \mu(I) - \varepsilon \end{aligned}$$

(neboť $K_n \dot{-} I \subset K_n \dot{-} L_n$, $I \dot{-} L_n \subset K_n \dot{-} L_n$). Pro $I = \emptyset$ stačí voliti $K_n = L_n = \emptyset$. Budiž tedy $I \neq \emptyset$, takže $L_n \neq \emptyset$ aspoň od jistého n počínaje — tedy pro v š e c h n a n, vynecháme-li konečný počet členů. Pišme

$$K_n = k_n^1 \times \ldots \times k_n^r , \quad L_n = l_n^1 \times \ldots \times l_n^r ;$$[9])

podle pozn. 2 v kap. I, § 4 je $k_n^h \supset l_n^h$; $k_n^h \supset k_{n+1}^h$; $l_n^h \subset l_{n+1}^h$. Jest $k_n^h \dot{-} l_n^h = q_n^h \cup s_n^h$, kde q_n^h, s_n^h jsou dva disjunktní intervaly (přitom nechť q_n^h leží „vlevo" od l_n^h — pokud není prázdný, s_n^h „vpravo" od l_n^h — pokud není prázdný). Všechno se odehrává v $\mathbf{E}_1$, je to velmi jednoduché a proto tyto úvahy jen názorně naznačuji. Množina $K_n \dot{-} L_n$ je sjednocení $2r$ intervalů:

$$\begin{aligned} K_n \dot{-} L_n = (q_n^1 \times k_n^2 \times \ldots \times k_n^r) \cup (s_n^1 \times k_n^2 \times \ldots \times k_n^r) \cup \\ \cup (k_n^1 \times q_n^2 \times k_n^3 \times \ldots \times k_n^r) \cup (k_n^1 \times s_n^2 \times k_n^3 \times \ldots \times k_n^r) \cup \\ \cup \ldots \cup (k_n^1 \times \ldots \times k_n^{r-1} \times q_n^r) \cup (k_n^1 \times \ldots \times k_n^{r-1} \times s_n^r) . \end{aligned} \tag{19}$$

[8]) Viz pozn. 5 v kap. I, § 6.

[9]) k_n^h, l_n^h jsou intervaly v $\mathbf{E}_1$.

Podle věty 7 je $\mu(K_n \dot{-} L_n)$ nejvýše rovno součtu měr oněch $2r$ intervalů, jež stojí v (19) vpravo. Vezměme na př. první sčítanec

$$A_n = (q_n^1 \times k_n^2 \times \ldots \times k_n^r) \subset K_n \dot{-} L_n .$$

Ježto k_n^h klesají, l_n^h rostou (s rostoucím n), je zřejmě $q_1^1 \supset q_2^1 \supset \ldots$ (a obdobně $s_1^1 \supset s_2^1 \supset \ldots$), takže $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ Dále jsou A_n omezené intervaly a konečně

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (K_n \dot{-} L_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \dot{-} \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = I \dot{-} I = \emptyset ;$$

podle vlastnosti $\boldsymbol{S}_r^*$ je tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ a podobně pro ostatních $2r - 1$ výrazů v (19) vpravo. Tedy platí vskutku (18).

A nyní přijde to hlavní:

Věta 139. *Budiž μ aditivní funkce intervalu s konečnou variací. Potom μ má vlastnost $\boldsymbol{S}_r^*$ tehdy a jen tehdy, mají-li π, ν vlastnost $\boldsymbol{S}_r^*$ (t. j. vlastnost $\boldsymbol{S}_r$ — podle věty 138 — ježto π, ν jsou nezáporné).*

Poznámka 5. Funkce π, ν mají podle věty 137, tvrzení 3 vlastnost $\boldsymbol{S}_r$ tehdy a jen tehdy, má-li $\alpha = \pi + \nu$ vlastnost $\boldsymbol{S}_r$.

Důkaz věty 139. 1. Mají-li π, ν vlastnost $\boldsymbol{S}_r^*$, má podle věty 137 i $\mu = \pi - \nu$ tuto vlastnost.

2. Nechť μ má vlastnost $\boldsymbol{S}_r^*$. Stačí dokázati, že π má vlastnost $\boldsymbol{S}_r^*$ (neboť potom i $\nu = \pi - \mu$ má vlastnost $\boldsymbol{S}_r^*$). Budiž tedy dána posloupnost omezených intervalů $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ s prázdným průnikem. Je tedy[10])

$$\pi(I_1) \geqq \pi(I_2) \geqq \ldots ,$$

takže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \pi(I_n)$. Máme dokázati, že tato limita je nula.

Napřed dokážeme pomocné tvrzení:

Tvrzení T. Budiž m přirozené číslo, $\varepsilon > 0$, $\pi(I_m) > \varepsilon$. Potom existuje přirozené číslo $n > m$ a množina $A \in \mathfrak{A}_r$, $A \subset I_m \dot{-} I_n$ tak, že $\mu(A) > \varepsilon$. Důkaz. Existuje $B \in \mathfrak{A}_r$, $B \subset I_m$, $B = \bigcup\limits_{k=1}^{p} L_k$ (disjunktní

[10]) Viz větu 7, II (π je nezáporná).

sjednocení intervalů) tak, že pro číslo $\tau = \mu(B) = \sum_{k=1}^{p} \mu(L_k)$ platí $\tau > \varepsilon$. Pro každé k ($k = 1, 2, \ldots, p$) tvoří omezené intervaly $L_k I_1 \supset \supset L_k I_2 \supset \ldots$ posloupnost s prázdným průnikem: $\bigcap_{n=1}^{\infty} L_k I_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$. Tedy $\lim_{n \to \infty} \mu(L_k I_n) = 0$ podle vlastnosti S_r^*. Existuje tedy $n > m$ tak, že $|\mu(L_k I_n)| < \frac{\tau - \varepsilon}{p}$ pro $k = 1, \ldots, p$. Položme $A = B \dot{-} I_n$, tedy $A \subset I_m \dot{-} I_n$, $A \in \mathfrak{A}_r$. Potom $B = A \cup BI_n$, což je disjunktní sjednocení. Tedy

$$\tau = \mu(B) = \mu(A) + \mu(BI_n) = \mu(A) + \sum_{k=1}^{p} \mu(L_k I_n) <$$

$$< \mu(A) + p \cdot \frac{\tau - \varepsilon}{p}\,, \text{ t. j. } \mu(A) > \tau - (\tau - \varepsilon) = \varepsilon\,,$$

čímž tvrzení T dokázáno.

Předpokládejme nyní, že

$$\lim_{n \to \infty} \pi(I_n) = \alpha > 0\,; \tag{20}$$

z toho odvodíme spor. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha$. Pro každé n je $\pi(I_n) \geqq \alpha > \varepsilon$. Postupným užitím tvrzení T dostáváme:

1. Existuje index $s_2 > 1$ a množina A_1 tak, že $A_1 \subset I_1 \dot{-} I_{s_2}$, $A_1 \in \mathfrak{A}_r$, $\mu(A_1) > \varepsilon$.

2. Existuje index $s_3 > s_2$ a množina A_2 tak, že $A_2 \subset I_{s_2} \dot{-} I_{s_3}$, $A_2 \in \mathfrak{A}_r$, $\mu(A_2) > \varepsilon$ atd.

Tak dostáváme (klademe-li $s_1 = 1$) posloupnost množin $A_1, A_2, \ldots$ tak, že

$$A_n \subset I_{s_n} \dot{-} I_{s_{n+1}}\,, \quad A_n \in \mathfrak{A}_r\,, \quad \mu(A_n) > \varepsilon$$
$$(1 = s_1 < s_2 < s_3 < \ldots)\,.$$

Pro $m > n$ je zřejmě $A_m \subset I_{s_m} \subset I_{s_{n+1}}$, tedy $A_m A_n = \emptyset$. Pro každé přirozené q leží množina $C_q = A_1 \cup \ldots \cup A_q \in \mathfrak{A}_r$ v intervalu I_1 a je $\mu(C_q) = \sum_{n=1}^{q} \mu(A_n) > q\varepsilon$.

Tedy $\pi(I_1) > q\varepsilon$ pro každé přirozené q, tedy $\pi(I_1) = +\infty$ — spor, ježto μ má podle předpokladu v. k.

Má-li μ vlastnost S_r^*, mají podle věty 139 též π, ν, α vlastnost S_r^*, takže máme k disposici (ježto π, ν, α jsou nezáporné) celou theorii π-míry, π-měřitelnosti, jakož i theorii integrálu $\int\limits_M f \,\mathrm{d}\pi$ a podobně pro ν, α. Je proto přirozeno definovati:

Definice 20. *Nechť μ má vlastnost S_r^*. Budeme říkati, že množina M je μ-měřitelná (po příp. že funkce f je μ-měřitelná v M), je-li množina M (po příp. funkce f v M) současně π-měřitelná i ν-měřitelná (neboli: je-li α-měřitelná — viz větu 132 a pozn. 3 v § 2).*

Definujeme potom

$$\mu(M) = \pi(M) - \nu(M)\,, \quad \int\limits_M f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_M f \,\mathrm{d}\pi - \int\limits_M f \,\mathrm{d}\nu\,, \tag{21}$$

má-li pravá strana smysl. Má-li $\int\limits_M f \,\mathrm{d}\mu$ konečnou hodnotu, nazveme jej (stejně jako dříve) konvergentním.

Poznámka 6. Definice se vztahuje i na komplexní f. Může zde nastati případ, že M je μ-měřitelná a přes to $\mu(M)$ neexistuje — když totiž $\pi(M) = \nu(M) = +\infty$. Pro nezáporné μ je $\mu = \pi$, $\nu = 0$ a naše definice je v souhlase s dřívějšími (v kap. I, II, III). Věty o míře, měřitelnosti a integrálu vznikají z vět, platných pro nezáporné míry, prostě kombinací podle def. 20; někde ovšem mohou vzniknout obtíže při odečítání. Proberu v následujících poznámkách a ve větách 140, 141 několik takových vět. Přitom stále předpokládám, že μ má vlastnost S_r^*, načež definiční obor funkce μ (což byla původně funkce intervalu) rozšířím pomocí první rovnice (21); takto rozšířenou funkci budu opět značit μ a budu ji nazývat zobecněnou měrou (abych vyznačil, že případ $\mu(M) < 0$ není vyloučen).[11]

Poznámka 7. Z definice je patrno: $\int\limits_M f \,\mathrm{d}\mu$ konverguje tehdy a jen tehdy, když konvergují $\int\limits_M f \,\mathrm{d}\pi$, $\int\limits_M f \,\mathrm{d}\nu$, t. j. (věta 133) když konverguje $\int\limits_M f \,\mathrm{d}\alpha$, t. j. (věta 45) když f je α-měřitelná v M a $\int\limits_M |f| \,\mathrm{d}\alpha$ konverguje.

[11]) Vedle tohoto názvu se v ruštině užívá též názvu „zarjad“ (= náboj). Halmós říká „signed measure“.

V tomto případě je podle věty 45 (pro komplexní f pak viz kap. III, § 6)

$$\Big|\int_M f\,\mathrm{d}\mu\Big| = \Big|\int_M f\,\mathrm{d}\pi - \int_M f\,\mathrm{d}\nu\Big| \leqq \Big|\int_M f\,\mathrm{d}\pi\Big| + \Big|\int_M f\,\mathrm{d}\nu\Big| \leqq \int_M |f|\,\mathrm{d}\pi + \int_M |f|\,\mathrm{d}\nu\,,$$

t. j. (ježto $\alpha = \pi + \nu$)

(22) $$\Big|\int_M f\,\mathrm{d}\mu\Big| \leqq \int_M |f|\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Poznámka 8. Má-li M konečnou μ-míru, má i každá μ-měřitelná (t. j. α-měřitelná) množina $M_1 \subset M$ konečnou μ-míru. Důkaz. $\pi(M_1) \leqq \pi(M)$, $\nu(M_1) \leqq \nu(M)$ jsou konečná čísla. Nemusí ovšem být $\mu(M_1) \leqq \mu(M)$.

Poznámka 9 (viz větu 18). Má-li M konečnou μ-míru a tvoří-li M_z ($z \in Z$) disjunktní spočetný systém μ-měřitelných množin $M_z \subset M$, je $\mu(\bigcup_{z\in Z} M_z) = \sum_{z\in Z}\mu(M_z)$, což je opět konečné číslo. Důkaz: Rovnice platí pro π i pro ν, načež odečteme. Všimněme si při tom, že $\pi(M) < < +\infty$, $\nu(M) < +\infty$.

Podobně se dokáže z věty 23 a 24: I. Je-li $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$, $M = = \lim M_n$, jsou-li M_n μ-měřitelné a je-li $\mu(M)$ konečná, je $\mu(M) = = \lim \mu(M_n)$.

II. Je-li $M_1 \supset M_2 \supset \ldots$, $M = \lim M_n$, jsou-li M_n μ-měřitelné a má-li některé M_n konečnou μ-míru, je $\mu(M) = \lim \mu(M_n)$.

Poznámka 10 (viz větu 42). Jestliže $\int_M f\,\mathrm{d}\mu$ konverguje a $M_1 \subset M$ je μ-měřitelná, je i $\int_{M_1} f\,\mathrm{d}\mu$ konvergentní. Důkaz. To platí pro π a ν, načež odečteme.

Poznámka 11 (viz věty 47, 48). Budiž $M = \bigcup_{z\in Z} M_z$ disjunktní sjednocení spočetného systému μ-měřitelných množin M_z. Potom je

(23) $$\int_M f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{z\in Z}\int_{M_z} f\,\mathrm{d}\mu\,,$$

konverguje-li integrál vlevo. Je-li Z konečná množina, stačí, když konvergují integrály vpravo. Důkaz. Napíši rovnici pro π a pro ν a odečtu.

Poznámka 12 (viz větu 58). Pro reálné funkce f_1, f_2 jest

(24) $$\int_M (f_1 + f_2)\,\mathrm{d}\mu = \int_M f_1\,\mathrm{d}\mu + \int_M f_2\,\mathrm{d}\mu\,,$$

má-li pravá strana smysl. Důkaz: Nechť má pravá strana smysl; její hodnota je (vynechávám znak M) $\int f_1 \, d\pi - \int f_1 \, d\nu + \int f_2 \, d\pi - \int f_2 \, d\nu$, kde tedy nevystupuje současně $+\infty$ a $-\infty$. Tedy to lze přepsat do tvaru $(\int f_1 \, d\pi + \int f_2 \, d\pi) - (\int f_1 \, d\nu + \int f_2 \, d\nu)$, což podle věty 58 je $\int (f_1 + f_2) \, d\pi - \int (f_1 + f_2) \, d\nu$; ale to je právě (podle definice) $\int (f_1 + f_2) \, d\mu$. Pro komplexní f_1, f_2 platí (24), jsou-li integrály vpravo konvergentní.

Poznámka 13 (viz větu 54). Je-li $c \neq 0$ konečné komplexní číslo, je

$$\int_M cf \, d\mu = c \int_M f \, d\mu \,,$$

je-li jeden z integrálů konvergentní. Důkaz: napíši rovnici pro π a ν a odečtu.

Poznámka 14. Za „zanedbatelné" množiny, které nemají vlivu na míru a integrál, nelze zde považovati množiny, pro něž $\mu(M) = 0$ (neboť taková množina se může skládati ze dvou částí, jejichž míry jsou různé od nuly a ruší se), nýbrž ony množiny (viz definici 20), které jsou současně π-nulové a ν-nulové, t. j. které jsou α-nulové.

Poznámka 15 (viz větu 65). Nechť f_n jsou μ-měřitelné v M; nechť existuje funkce g, mající konvergentní integrál $\int_M g \, d\mu$ a taková, že pro α-skoro všechna x v M je $|f_n(x)| \leqq g(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Potom je

$$\int_M f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu \tag{25}$$

a všechny integrály v (25) konvergují.

Důkaz. Co platí α-skoro všude, platí též π-skoro všude. Podle pozn. 7 a věty 65 je $\int_M f \, d\pi = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\pi$ (vesměs s konvergentními integrály). Podobně pro ν, načež odečteme.

Nyní si všimneme ještě závislosti integrálu na μ (podobně jako v § 2, ale teď také pro zobecněné míry).

Věta 140. *Budiž $c \neq 0$ konečné reálné číslo. Potom*

$$\int_M f \, d(c\mu) = c \int_M f \, d\mu \,, \tag{26}$$

má-li aspoň jedna strana smysl.

Důkaz. 1. Nechť pravá strana, t. j. $c\int f\,\mathrm{d}\pi - c\int f\,\mathrm{d}\nu$ má smysl (vynechávám symbol M). Pro $c > 0$ je to podle věty 133 $\int f\,\mathrm{d}(c\pi) - \int f\,\mathrm{d}(c\nu)$, ale to je právě $\int f\,\mathrm{d}(c\mu)$, ježto $c\pi$, $c\nu$ jsou positivní a negativní variace funkce $c\mu$. Pro $c < 0$ lze pravou stranu psáti

$$- |c| \int f\,\mathrm{d}\pi + |c| \int f\,\mathrm{d}\nu = \int f\,\mathrm{d}(|c|\,\nu) - \int f\,\mathrm{d}(|c|\,\pi)$$

podle věty 133; ale to je opět $\int f\,\mathrm{d}(c\mu)$, ježto $c\mu$ má nyní positivní variaci $|c|\,\nu$ a negativní $|c|\,\pi$.

2. Nechť levá strana má smysl; potom rovnici (26) dostanu, píši-li v 1. $c\mu$, $\frac{1}{c}$, μ místo μ, c, $c\mu$.

Věta 141.

$$\int_M f\,\mathrm{d}(\mu_1 + \mu_2) = \int_M f\,\mathrm{d}\mu_1 + \int_M f\,\mathrm{d}\mu_2\,, \tag{27}$$

má-li pravá strana smysl.

Důkaz. Položme $\mu = \mu_1 + \mu_2$ (variace funkce μ značíme ovšem π, ν, α) a nechť pravá strana má smysl. Tedy μ_1 i μ_2 mají vlastnost $\mathbf{S}_r^*$ a tedy i μ. Pravá strana je (nepíši M)

$$\begin{aligned} &\int f\,\mathrm{d}\pi_1 + \int f\,\mathrm{d}\pi_2 - \int f\,\mathrm{d}\nu_1 - \int f\,\mathrm{d}\nu_2 = \\ &= \int f\,\mathrm{d}(\pi_1 + \pi_2) - \int f\,\mathrm{d}(\nu_1 + \nu_2) \end{aligned} \tag{28}$$

(věta 133). Víme však, že $\pi \leqq \pi_1 + \pi_2$, $\nu \leqq \nu_1 + \nu_2$ (pozn. 2), takže $\sigma = \pi_1 + \pi_2 - \pi$, $\tau = \nu_1 + \nu_2 - \nu$ jsou nezáporné funkce s vlastností $\mathbf{S}_r^*$ (tedy $\mathbf{S}_r$). Ale $\sigma - \tau = (\pi_1 - \nu_1) + (\pi_2 - \nu_2) - (\pi - \nu) = \mu_1 + \mu_2 - \mu = 0$. Ježto $\pi_1 + \pi_2 = \pi + \sigma$, $\nu_1 + \nu_2 = \nu + \tau = \nu + \sigma$, je pravá strana v (28) podle věty 133 rovna

$$\left(\int f\,\mathrm{d}\pi + \int f\,\mathrm{d}\sigma\right) - \left(\int f\,\mathrm{d}\nu + \int f\,\mathrm{d}\sigma\right).$$

Ježto tento výraz má smysl, je $\int f\,\mathrm{d}\sigma$ konečné číslo, tedy lze provésti odečtení a dostaneme $\int f\,\mathrm{d}\pi - \int f\,\mathrm{d}\nu$, t. j. právě levou stranu rovnice (27).

§ 4. Rovnice $\int_M f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M f\,\mathrm{d}\mu_n$.

Půjde o tuto otázku: Jsou dány míry (po příp. zobecněné) $\mu_1, \mu_2, \dots$ takové, že $\lim_{n\to\infty} \mu_n(I) = \mu(I)$ pro každý omezený interval I. Ptáme se, za jakých podmínek platí rovnice uvedená v nadpise. Odvodíme dvě věty tohoto druhu; první se týká případu $0 \leqq \mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \ldots$, druhá pak toho případu, že existuje jakási „společná majoranta“ ϱ, t. j. nezáporná míra ϱ taková, že $\alpha_n(I) \leqq \varrho(I)$. Všimněte si jisté analogie s větami 57, 65. Později odvodíme (viz § 8) ještě další věty tohoto typu, kterých se velmi často užívá a které se týkají tohoto speciálního případu: $r = 1$, M je interval, f je spojitá v M. Zato od posloupnosti $\mu_1, \mu_2, \ldots$ se v těchto větách bude požadovati méně.

Věta 142. *Buďte $\mu_1, \mu_2, \ldots$ funkce s vlastností $\mathbf{S}_r$ (tedy nezáporné); pro každý omezený interval $I \subset \mathbf{E}_r$ budiž $\mu_n(I) \leqq \mu_{n+1}(I)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\mu(I) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(I) < +\infty$. Potom platí:*

1. μ má vlastnost $\mathbf{S}_r$, takže definuje (nezápornou) míru μ.

2. Pro každou $M \subset \mathbf{E}_r$ je

$$\mu_e(M) = \lim (\mu_n)_e(M) . \tag{29}$$

3. Množina M je μ-nulová tehdy a jen tehdy, je-li μ_n-nulová pro každé n.

4. Množina M je μ-měřitelná tehdy a jen tehdy, je-li μ_n-měřitelná pro každé n.

5. Obdobně pro měřitelnost funkcí.

6. Je-li $f(x) \geqq 0$ μ-skoro všude v M, je

$$\int_M f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M f \,\mathrm{d}\mu_n , \tag{30}$$

má-li jedna strana rovnice smysl.

7. Je-li f funkce μ-měřitelná v M a existuje-li číslo c $(0 < c < +\infty)$ tak, že $\int_M |f| \,\mathrm{d}\mu_n < c$ pro $n = 1, 2, \ldots$, platí opět (30).

Důkaz. 1. Že μ je aditivní funkce intervalu, plyne z

$$\mu_n(I_1 \cup I_2) = \mu_n(I_1) + \mu_n(I_2) \quad (I_1 \cap I_2 = \emptyset)$$

limitním přechodem. Klaďme nyní stále $\varrho_n = \mu - \mu_n$. To je nezáporná aditivní funkce intervalu, jejíž definici lze tedy rozšířit na obor $\mathfrak{A}_r$. Budiž I nějaký omezený interval a zvolme otevřený omezený interval $I_0 \supset I$. Budiž $\varepsilon > 0$; ježto $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_n(I_0) = \mu(I_0) - \lim \mu_n(I_0) =$

$= 0$, existuje n tak, že $\varrho_n(I_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Zvolme takové n. Pro každé $A \subset I_0$, $A \in \mathfrak{A}_r$ je potom $\varrho_n(A) < \frac{1}{2}\varepsilon$ (věta 7). Zvolme uzavřený interval $I_2 \subset I$ a otevřený interval $I_1 \supset I$ tak, že $\mu_n(I_2) > \mu_n(I) - \frac{1}{2}\varepsilon$, $\mu_n(I_1) < \mu_n(I) + \frac{1}{2}\varepsilon$; přitom budiž $I_1 \subset I_0$ (jinak bychom vzali $I_1 I_0$ místo I_1). Ježto $\mu_n = \mu - \varrho_n$, je

$$\mu(I_2) \geqq \mu_n(I_2) > \mu_n(I) - \tfrac{1}{2}\varepsilon = \mu(I) - \varrho_n(I) - \tfrac{1}{2}\varepsilon > \mu(I) - \varepsilon\,,$$
$$\mu(I_1) = \mu_n(I_1) + \varrho_n(I_1) < \mu_n(I) + \tfrac{1}{2}\varepsilon + \varrho_n(I_1) < \mu(I) + \varepsilon\,,$$

takže μ má vlastnost $\boldsymbol{S}_r$.

2. Zřejmě $(\mu_n)_e \leqq (\mu_{n+1})_e \leqq \mu_e$, takže limita v (29) existuje. Budiž předně M omezená množina, tedy $M \subset I$, kde I je omezený interval. Podle věty 131 je

$$\mu_e(M) = (\mu_n)_e(M) + (\varrho_n)_e(M)\,; \tag{31}$$

ale $(\varrho_n)_e(M) \leqq (\varrho_n)_e(I)$, $\lim \varrho_n(I) = 0$, takže z (31) plyne (29). Budiž za druhé M neomezená. Zřejmě lze psáti $M = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} M_p$, kde M_p jsou omezené, $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ Podle věty 27 je

$$\mu_e(M) = \lim_{p\to\infty} \mu_e(M_p)\,.$$

Budiž $T < \mu_e(M)$; zvolme p tak, že $\mu_e(M_p) > T$. Ježto pro omezené množiny platí (29), existuje q tak, že $(\mu_q)_e(M_p) > T$; ježto $M \supset M_p$, plyne odtud $(\mu_q)_e(M) > T$ a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} (\mu_n)_e(M) \geqq (\mu_q)_e(M) > T$. Tedy z $\mu_e(M) > T$ plyne $\lim\limits_{n\to\infty} (\mu_n)_e\,(M) > T$. Tedy jest $\mu_e(M) \leqq$ $\leqq \lim\,(\mu_n)_e\,(M)$; obrácená nerovnost je zřejmá.

3. Je-li M μ-nulová, je tím spíše μ_n-nulová. Naopak, je-li M μ_n-nulová pro každé n, je též $\mu_e(M) = 0$ podle 2.

4. Je-li M μ-měřitelná, je také μ_n-měřitelná pro každé n (věta 132). Budiž naopak M μ_n-měřitelná pro každé n, t. j. (věta 22) $M = A_n \cup$ $\cup\, N_n$ (A_n typu F_σ, $\mu_n(N_n) = 0$). Potom $M = (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} N_n)$; zde je první člen typu F_σ, druhý je množina μ_n-nulová pro každé n, tedy (viz 3) množina μ-nulová.

5. Plyne ihned z 3, 4.

6. Nechť $f(x)$ není nikde v M záporná. Budiž dále f μ-měřitelná v M[12]) (neboť jinak by ani pravá ani levá strana v (30) neměly smysl). Je-li předně f jednoduchá konečná s hodnotami $0 \leqq c_1 < c_2 < \ldots < c_p$ a klademe-li $M_i = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, f(x) = c_i)$, je

$$\int_M f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{p} c_i \,\mu(M_i)\,, \quad \int_M f \,\mathrm{d}\mu_n = \sum_{i=1}^{p} c_i \,\mu_n(M_i) \tag{32}$$

a z (29) plyne (30). Je-li f libovolná, zvolme podle věty 39 konečné jednoduché μ-měřitelné funkce $0 \leqq f_1 \leqq f_2 \leqq \ldots$, $\lim f_p(x) = f(x)$ μ-skoro všude v M, načež (vynechávám znak M)

$$\int f_p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_p \,\mathrm{d}\mu_n \tag{33}$$

a podle věty 57

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{p\to\infty} \int f_p \,\mathrm{d}\mu\,. \tag{34}$$

Budiž $T < \int f \,\mathrm{d}\mu$; najdeme napřed (viz (34)) p tak, že $\int f_p \,\mathrm{d}\mu > T$ a potom n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $\int f_p \,\mathrm{d}\mu_n > T$ (viz (33)), tedy tím spíše $\int f \,\mathrm{d}\mu_n > T$ a tedy i $\lim\limits_{n\to\infty} \int f \,\mathrm{d}\mu_n \geqq T$. Tedy z $\int f \,\mathrm{d}\mu > T$ plyne $\lim \int f \,\mathrm{d}\mu_n \geqq T$; tedy $\lim \int f \,\mathrm{d}\mu_n \geqq \int f \,\mathrm{d}\mu$. Obrácená nerovnost je jasná, neboť $\mu_n \leqq \mu$.

7. V tomto případě je podle 6

$$\int f^+ \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f^+ \,\mathrm{d}\mu_n \leqq c < +\infty$$

a obdobně pro f^-. Tedy smíme odečíst.

Věta 143. *Buďte $\mu_1, \mu_2, \ldots$ zobecněné míry v $\mathbf{E}_r$; nechť pro každý omezený interval $I \subset \mathbf{E}_r$ existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(I) = \mu(I)\,. \tag{35}$$

Nechť dále existuje nezáporná míra ϱ tak, že pro každý omezený interval $I \subset \mathbf{E}_r$ a pro každé přirozené n je

$$\alpha_n(I) \leqq \varrho(I) \tag{36}$$

[12]) T. j. μ_n-měřitelná pro každé n, t. j. (což značí totéž) μ_n-měřitelná pro všechna dosti velká n.

($\alpha_n, \alpha, \pi_n, \pi, \nu_n, \nu$ *značí variace funkcí* μ_n, μ). *Potom platí: Jestliže konverguje*

$$\int_{E_r} f \, d\varrho \,, \tag{37}$$

potom

$$\int_{E_r} f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{E_r} f \, d\mu_n \,. \tag{38}$$

Poznámka 1. V (37), (38) lze psáti M místo E_r, klademe-li $f(x) = 0$ pro $x \in E_r \dot{-} M$ a je-li M ϱ-měřitelná.

Důkaz. I. Zřejmě je μ konečná[13]) aditivní funkce intervalu, takže její definiční obor lze rozšířit na $\mathfrak{A}_r$. Je-li I omezený interval, $A_k \subset I$, $A_k \in \mathfrak{A}_r$ pro $k = 1, 2$, je

$$\mu_n(A_1) + (-\mu_n(A_2)) \leqq \pi_n(I) + \nu_n(I) \leqq \varrho(I) \,,$$

tedy limitním přechodem (neboť (35) platí zřejmě nejenom pro intervaly, nýbrž pro všechny množiny z $\mathfrak{A}_r$)

$$\mu(A_1) + (-\mu(A_2)) \leqq \varrho(I)$$

a přechodem k supremu (pro všechna $A_k \in \mathfrak{A}_r$, $A_k \subset I$)

$$\alpha(I) = \pi(I) + \nu(I) \leqq \varrho(I) \,. \tag{39}$$

Odtud je patrno, že μ má vlastnost S_r^* a že z ϱ-měřitelnosti (množiny nebo funkce) plyne μ_n-měřitelnost (viz (36)) a μ-měřitelnost; dále z konvergence $\int_N f \, d\varrho$ plyne $|\int_N f \, d\mu| \leqq \int_N |f| \, d\alpha \leqq \int_N |f| \, d\varrho < +\infty$ a podobně pro μ_n.

II. Budiž nyní f charakteristická funkce omezeného intervalu I. Potom rovnice (38) znamená totéž co (35), takže (38) platí. A odtud ihned plyne: (38) platí, je-li f charakteristická funkce množiny $A \in \mathfrak{A}_r$.

III. V dalším průběhu důkazu předpokládejme, že (37) konverguje. Nechť především f je charakteristická funkce množiny M, takže $\varrho(M) = \int_{E_r} f \, d\varrho < +\infty$. Máme dokázati, že platí (38), t. j.

$$\lim \mu_n(M) = \mu(M) \,. \tag{40}$$

[13]) Je totiž $|\mu_n(I)| \leqq \alpha_n(I) \leqq \varrho(I)$ a tedy i $|\mu(I)| \leqq \varrho(I)$ (viz (35)).

Budiž $\varepsilon > 0$; podle věty 13 existuje $A \in \mathfrak{A}_r$ tak, že $\varrho(\Delta(M, A)) < \varepsilon$. Ježto

$$\mu(A \cup M) = \mu(A) + \mu(M \dot{-} A) = \mu(M) + \mu(A \dot{-} M),$$

plyne

$$|\mu(A) - \mu(M)| \leqq |\mu(A \dot{-} M)| + |\mu(M \dot{-} A)| \leqq \varrho(A \dot{-} M) + \\ + \varrho(M \dot{-} A) < \varepsilon$$

a obdobně $|\mu_n(A) - \mu_n(M)| < \varepsilon$.

Ježto podle II je $\lim \mu_n(A) = \mu(A)$, existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ platí $|\mu_n(A) - \mu(A)| < \varepsilon$ a tedy $|\mu(M) - \mu_n(M)| < 3\varepsilon$, t. j. (38) platí. Tedy platí (38) zřejmě také pro každou jednoduchou konečnou funkci f, pro kterou (37) konverguje.

IV. Nechť konečně f je libovolná funkce, pro kterou (37) konverguje. Můžeme tedy předpokládati, že f je všude konečná. Podle věty 39 (s pozn. [15])) existují jednoduché konečné ϱ-měřitelné funkce $f_1, f_2, \ldots$ tak, že všude je $\lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$, $|f_k(x)| \leqq |f(x)|$, tedy

$$\lim |f_k(x) - f(x)| = 0, \quad |f_k(x) - f(x)| \leqq 2|f(x)|.$$

Odtud plyne podle věty 65

$$\lim \int_{E_r} |f_k - f| \, d\varrho = 0.$$

Budiž $\varepsilon > 0$; potom existuje k tak, že $\int_{E_r} |f_k - f| \, d\varrho < \varepsilon$ a tedy i $|\int_{E_r} (f_k - f) \, d\mu| < \varepsilon$ a obdobně pro μ_n. Podržme toto k pevně; potom podle III existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je

$$|\int_{E_r} f_k \, d\mu_n - \int_{E_r} f_k \, d\mu| < \varepsilon$$

a tedy (vynechávám znak E_r)

$$|\int f \, d\mu - \int f \, d\mu_n| = |\int (f - f_k) \, d\mu + \int f_k \, d\mu - \int f_k \, d\mu_n + \\ + \int (f_k - f) \, d\mu_n| < 3\varepsilon.$$

Tedy platí (38).

§ 5. Vyjádření aditivní funkce intervalu v E_1 funkcí jedné proměnné. Je-li μ konečná aditivní funkce intervalu v E_1, existuje konečná reálná funkce f v oboru E_1 tak, že je

$$\mu(\langle a, b)) = f(b) - f(a) \text{ pro } -\infty < a < b < +\infty, \tag{41}$$

a tato funkce f je určena *až na aditivní konstantu* jednoznačně.

Vskutku, má-li platit (41), musí být

$$\begin{aligned} \mu(\langle 0, x)) &= f(x) - f(0) \text{ pro } x > 0, \\ \mu(\langle x, 0)) &= f(0) - f(x) \text{ pro } x < 0, \end{aligned} \tag{42}$$

takže $f(x)$ je určeno jednoznačně rovnicemi (42), jakmile volím (libovolně) $f(0)$. Definuji-li f rovnicemi (42), platí potom vskutku (41); neboť předně pro $a < 0 < b$ je $\mu(\langle a, b)) = \mu(\langle a, 0)) + \mu(\langle 0, b)) = f(0) - f(a) + f(b) - f(0)$, za druhé pro $0 < a < b$ je $\mu(\langle a, b)) = \mu(\langle 0, b)) - \mu(\langle 0, a)) = f(b) - f(0) - f(a) + f(0)$ a podobně za třetí pro $a < b < 0$ (pro $a = 0$ nebo $b = 0$ viz přímo (42)). Vyřešíme nyní otázku, jak musí vypadat funkce f, aby μ mělo vlastnost S_1^* (t. j. aby μ definovalo zobecněnou míru). Zaveďme tuto definici: Konečnou reálnou funkci f v oboru E_1, která má konečnou variaci uvnitř E_1 a je spojitá zleva v každém bodě, nazveme distribuční funkcí (viz však pozn. 7).

Věta 144. *Má-li μ vlastnost S_1^*, je funkce f, definovaná*[14]) *rovnicí* (41) *neboli rovnicemi* (42), *distribuční funkcí. Naopak, je-li f distribuční funkce, existuje právě jedna funkce μ s vlastností S_1^*, pro kterou platí* (41); *pro tuto funkci μ je pak*

$$\mu((x)) = f(x+) - f(x) \text{ pro } x \in E_1. \tag{43}$$

Poznámka 1. (x) značí jednobodovou množinu; $f(x+)$, $f(x-)$ limitu zprava a zleva (ty u distribučních funkcí existují). Rovnicemi (41), (43) je funkce intervalu μ jednoznačně určena, neboť následkem aditivnosti je $\mu((a, b\rangle) = \mu(\langle a, b)) + \mu((b)) - \mu((a)) = f(b+) - f(a+)$ a podobně $\mu((a, b)) = f(b) - f(a+)$, $\mu(\langle a, b\rangle) = f(b+) - f(a)$.

Uvědomme si (podle (43)), že míra jednobodové množiny je různá od nuly tehdy a jen tehdy, je-li příslušná distribuční funkce v tomto bodě nespojitá (ovšem zprava).

---

[14]) až na aditivní konstantu.

Poznámka 2. Budeme říkati, že funkce μ, f z věty 144 jsou si navzájem přiřazeny. Budeme někdy značit znakem μ_f funkci intervalu, přiřazenou funkci f, a obdobně f_μ funkci jedné proměnné, přiřazenou funkci μ.[15]) Vzpomeňme si (**D II**, věta 93), že positivní, negativní a totální variace distribuční funkce jsou též distribučními funkcemi (t. j. jsou spojité zleva v každém bodě).

Důkaz. I. Nechť předně μ má vlastnost S_1^*. Potom (věta 135 a 139) $\mu = \pi - \nu$, kde π, ν jsou nezáporné a mají vlastnost S_1^*, t. j. S_1. Rovnice

$$\pi(\langle a, b)) = f_1(b) - f_1(a),\quad \nu(\langle a, b)) = f_2(b) - f_2(a) \tag{44}$$

definují zřejmě dvě neklesající funkce. Ježto pro π platí celá theorie míry, je (věta 24)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(f_1(b) - f_1\left(b - \frac{1}{n}\right)\right) &= \lim_{n\to\infty}\pi\left(\left\langle b - \frac{1}{n}, b\right)\right) = \\ &= \pi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\langle b - \frac{1}{n}, b\right)\right) = \pi(\emptyset) = 0\,,\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(f_1\left(b + \frac{1}{n}\right) - f_1(b)\right) &= \lim_{n\to\infty}\pi\left(\left\langle b, b + \frac{1}{n}\right)\right) = \\ &= \pi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\langle b, b + \frac{1}{n}\right)\right) = \pi((b))\,,\end{aligned} \tag{46}$$

tedy f_1 je spojitá zleva, $\pi((b)) = f_1(b+) - f_1(b)$; podobně pro f_2. Klademe-li $f = f_1 - f_2$, vidíme z (44), (45), (46), že platí (41), dále že f je distribuční funkce a že platí (43).

II. Nechť naopak je f distribuční funkce; tedy $f = f_1 - f_2$, kde f_1, f_2 (positivní a negativní variace funkce f) jsou neklesající a též spojité zleva. Definujme $\mu(\langle a, b))$ rovnicí (41); má-li μ míti vlastnost S_1^*, musí platit[16])

$$\begin{aligned}\mu((b)) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\langle b, b + \frac{1}{n}\right)\right) &= \lim_{n\to\infty}\mu\left(\left\langle b, b + \frac{1}{n}\right)\right) = \\ = \lim_{n\to\infty}\left(f\left(b + \frac{1}{n}\right) - f(b)\right) &= f(b+) - f(b)\end{aligned} \tag{47}$$

---

[15]) Zdůrazňuji, že znak f_μ není zcela jednoznačný: μ určuje f_μ pouze až na aditivní konstantu. Naopak μ_f je jednoznačně určeno funkcí f.

[16]) μ totiž potom definuje zobecněnou míru, pro kterou platí na př. poznámka 9, II z § 3 o $\mu(\lim M_n)$.

a dále musí platit (aditivita!) vzorce z pozn. 1. Definujme takto μ. Jde ještě o to ukázat, že toto μ má vlastnost S_1^*. Definujme tedy obdobně π, ν rovnicemi (44), dále rovnicemi $\pi((b)) = f_1(b+) - f_1(b)$, $\nu((b)) = f_2(b+) - f_2(b)$ a rovnicemi obdobnými vzorcům z pozn. 1 (pro π, f_1 resp. ν, f_2 místo μ, f).

Ježto potom zřejmě $\mu = \pi - \nu$, stačí podle vět 137, 138 ukázat, že nezáporné aditivní funkce π, ν mají vlastnost S_1. Ale to je snadné; na př.

$$\pi(\langle a, b)) = f_1(b) - f_1(a) =$$
$$= \lim \left(f_1(b) - f_1\left(a - \frac{1}{n} +\right)\right) = \lim \pi\left(\left(a - \frac{1}{n}, b\right)\right)$$

(v důsledku spojitosti zleva) a dále

$$\pi(\langle a, b)) = f_1(b) - f_1(a) =$$
$$= \lim \left(f_1\left(b - \frac{1}{n} +\right) - f_1(a)\right) = \lim \pi\left(\left\langle a, b - \frac{1}{n}\right\rangle\right);$$

podobně pro intervaly typu $(a, b\rangle$, (a, b), $\langle a, b\rangle$ (též pro $b = a$) a pro funkci ν.

Poznámka 3. Z (41), (43) a ze vzorců pozn. 1 plyne, že μ je nezáporná tehdy a jen tehdy, je-li příslušná distribuční funkce neklesající.

Poznámka 4. Z (41), (43) plyne, že $f_{c\mu} = cf_\mu$, $f_{\mu+\varrho} = f_\mu + f_\varrho$[17]) a obráceně $\mu_{cf} = c\mu_f$, $\mu_{f+g} = \mu_f + \mu_g$, jestliže $c \in \mathbf{E}_1$.

Poznámka 5. Budiž $f = f_1 - f_2$, kde f je distribuční funkce, f_1, f_2 její positivní a negativní variace.[18]) Buďte μ, π, ν funkce intervalu, přiřazené funkcím f, f_1, f_2, takže $\mu = \pi - \nu$ (pozn. 4). *Tvrdím, že π je positivní (a tedy $\nu = \pi - \mu$ negativní) variace funkce μ (načež totální variaci $f_1 + f_2$ funkce f je přiřazena totální variace $\pi + \nu$ funkce μ).*

Důkaz. Označme znakem π^* positivní variaci funkce μ; ježto platí (44), stačí dokázati, že

$$\pi^*(\langle a, b)) = f_1(b) - f_1(a) \tag{48}$$

[17]) Tuto rovnici — vzhledem k určenosti až na konstantu — je nutno (zde i v dalším) čísti opatrně: $f_\mu + f_\varrho$ je jednou z distribučních funkcí, přiřazených zobecněné míře $\mu + \varrho$.

[18]) f_1, f_2 jsou tedy též distribuční funkce (pozn. 2).

(neboť potom — ježto π, π^* jsou míry — je nutně také $\pi^*((b)) =$ $= \lim \pi^* \left(\left\langle b, b + \frac{1}{n}\right)\right) = f_1(b+) - f_1(b)$ a z (44) vychází podobně táž hodnota pro $\pi((b))$). Podle definice v kap. IX (§ 3, pozn. 1, vzorce (44)) je $f_1(b) - f_1(a)$ positivní variace funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$, t. j.

$$X = f_1(b) - f_1(a) = \sup \sum_{k=1}^{p-1} (f(a_{k+1}) - f(a_k))^+ , \tag{49}$$

kde supremum se bere přes všechna možná rozdělení $a = a_1 < a_2 <$ $< \ldots < a_p = b$, t. j.

$$X = \sup \sum_{k=1}^{p-1} (\mu(\langle a_k, a_{k+1})))^+ . \tag{50}$$

Naproti tomu je

$$Y = \pi^*(\langle a, b)) = \sup_{\substack{A \in \mathfrak{A}_1 \\ A \subset \langle a, b)}} \mu(A) = \sup \sum_{m=1}^{q} \mu(I_m) , \tag{51}$$

kde supremum se bere přes všechny disjunktní systémy intervalů $I_m \subset \langle a, b)$. Součet v (51) nezmenším, vynechám-li záporné sčítance, t. j. píši-li μ^+ místo μ. Odtud je vidět, že každý součet v (50) vystupuje také v (51), takže $X \leqq Y$. Chceme ještě dokázati, že $Y \leqq X$. Budiž tedy $\varepsilon > 0$ a zvolme disjunktní $I_m \subset \langle a, b)$ tak, že

$$\sum_{m=1}^{q} (\mu(I_m))^+ > Y - \varepsilon . \tag{52}$$

Jest $\langle a, b) \dot{-} \bigcup_{m=1}^{q} I_m \in \mathfrak{A}_1$; tato množina je tedy sjednocením disjunktních intervalů $J_1, \ldots, J_t$ a součet v (52) se nezmenší, přidáme-li ještě $\sum_{m=1}^{t} (\mu(J_m))^+$. Tedy dostáváme jistý rozklad intervalu $\langle a, b)$ na disjunktní intervaly $K_1, \ldots, K_r$ a je

$$\sum_{m=1}^{r} (\mu(K_m))^+ > Y - \varepsilon . \tag{53}$$

Ježto $(x + y)^+ \leqq x^+ + y^+$ a ježto μ je aditivní, nezmenší se součet v (53), rozložím-li každý K_m na několik disjunktních intervalů. Provedu to tak, že každý K_m tvaru $\langle \alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta\rangle$, $\langle \alpha, \beta\rangle$ $(\alpha < \beta)$ rozložím na $(\alpha) \cup (\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta) \cup (\beta)$, $(\alpha) \cup (\alpha, \beta) \cup (\beta)$; tím dostanu[19]) zřejmě sudý počet intervalů $L_1, \ldots, L_{2s}$ tvaru (x_1), (x_1, x_2), (x_2), $\ldots$, (x_s), (x_s, x_{s+1}) $(a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{s+1} = b)$, kde

$$(54) \qquad \sum_{m=1}^{2s} (\mu(L_m))^+ > Y - \varepsilon .$$

Nyní zvolím $\delta > 0$ tak malé, že pro $m = 1, \ldots, s$ je

$$(55) \qquad \delta < x_{m+1} - x_m, \ |f(x_m + \delta) - f(x_m +)| < \frac{\varepsilon}{2s} .$$

Provedu potom rozdělení na intervaly M_m:

$$\langle x_1, x_1 + \delta), \langle x_1 + \delta, x_2), \langle x_2, x_2 + \delta), \ldots, \langle x_s, x_s + \delta), \langle x_s + \delta, x_{s+1}) .$$

To již je rozklad takový, jaký je přípustný v (50). Jest podle (55) a podle pozn. 1

$$(56) \qquad \begin{aligned} |\mu(M_{2m-1}) - \mu(L_{2m-1})| &= |\mu(x_m, x_m + \delta)| < \frac{\varepsilon}{2s} , \\ |\mu(L_{2m}) - \mu(M_{2m})| &= |\mu(x_m, x_m + \delta)| < \frac{\varepsilon}{2s} . \end{aligned}$$

Ježto $|x^+ - y^+| \leqq |x - y|$, plyne z (54), (56) $\sum_{m=1}^{2s} (\mu(M_m))^+ > Y - 2\varepsilon$, tedy $X > Y - 2\varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$, $X \geqq Y$.

Poznámka 6. Věta 144 nám dovoluje zavésti nové označení Lebesgue-Stieltjesova integrálu v E_1, kterého se hojně užívá. Budiž μ funkce intervalu, m příslušná distribuční funkce. Potom místo $\int_M f \, d\mu$ se psává $\int_M f \, dm$ nebo — s jistou „licencí" — $\int_M f(x) \, dm(x)$ (nebo $\int_M f(t) \, dm(t)$ a pod.),[20]) což nám dovoluje psáti bez dalších vysvětlivek na př.

$$\int_M e^{-x^2} \sin x \, d(x^3 - \cos x) .$$

Jsou-li π, ν, α variace[21]) funkce μ a obdobně p, n, a variace funkce m,[21])

[19]) Kreslete si náčrtek!
[20]) Mluví se potom také o m-míře a m-měřitelnosti místo μ-míry a μ-měřitelnosti.
[21]) Positivní, negativní a totální.

víme z pozn. 5, že funkce p, n, a jsou po řadě přiřazeny funkcím π, ν, α, takže definici integrálu v (21) lze přepsati takto: $\int\limits_M f(x)\,\mathrm{d}m(x) = \int\limits_M f(x)\,\mathrm{d}p(x) - \int\limits_M f(x)\,\mathrm{d}n(x)$, má-li pravá strana smysl; pozn. 7 z § 3 lze přepsati takto: $I = \int\limits_M f(x)\,\mathrm{d}m(x)$ konverguje tehdy a jen tehdy, konverguje-li $J = \int\limits_M |f(x)|\,\mathrm{d}a(x)$, načež $|I| \leqq J$. Dále (viz větu 141): Jest

$$\int\limits_M f(x)\,\mathrm{d}(m_1(x) + m_2(x)) = \int\limits_M f(x)\,\mathrm{d}m_1(x) + \int\limits_M f(x)\,\mathrm{d}m_2(x)\,,$$

má-li pravá strana smysl atd. Krátce: všechny tyto věci mohu psáti s distribučními funkcemi, neohlížeje se na příslušné funkce intervalu.

Poznámka 7. Budiž μ nezáporná míra a budiž $\mu(\mathbf{E}_1) < +\infty$.[22a]) Volíme-li $f(x) = \mu((-\infty, x))$, platí zřejmě (41); dále je podle vět 23, 24

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(-n) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, -n)) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, -n)) = \\ = \mu(\emptyset) = 0\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, n)) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, n)) = \mu(\mathbf{E}_1)\,.$$

Názvu „distribuční funkce" se užívá nejčastěji v tomto užším smyslu, při čemž se klade ještě obyčejně $\mu(\mathbf{E}_1) = 1$. T. j. názvu „distribuční funkce" se obyčejně (hlavně v počtu pravděpodobnosti) užívá pro funkce $f(x)$, jež jsou neklesající, všude spojité zleva a pro něž je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Poznámka 8. Obdobné úvahy by bylo možno provésti i v $\mathbf{E}_r$ pro $r > 1$. V rovnici analogické k (41) by ovšem f byla funkce r proměnných a místo první diference $f(b) - f(a)$ by vystupovala jistá „r-tá diference". Nebudeme se tím zabývat. Poznamenávám ještě: kdybychom místo rovnice (41) byli vyšli z rovnice $\mu(\langle a, b\rangle) = f(b) - f(a)$, byli bychom došli k funkcím spojitým zprava.

[22a]) Takové míry se vyskytují v počtu pravděpodobnosti. Představme si, že konáme nějaký pokus, při čemž výsledkem pokusu je nějaké konečné reálné číslo; budiž $\mu(M)$ pravděpodobnost, že toto číslo padne do M. Ježto toto číslo určitě padne do $\mathbf{E}_1$, je $\mu(\mathbf{E}_1) = 1$ („jistota" je měřena pravděpodobností 1).

§ 6. Výpočet Lebesgue-Stieltjesova integrálu v E_1. Věta 145. *Budiž f funkce měřitelná podle Lebesguea v $M \subset \mathsf{E}_1$. Budiž g funkce absolutně spojitá uvnitř E_1. Potom*

$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_M f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{57}$$

má-li jeden z integrálů smysl.

Vpravo je Lebesgueův integrál; věta nás tedy poučuje o převedení Lebesgue-Stieltjesova integrálu na Lebesgueův, je-li g a. s. uvnitř E_1.

Důkaz. Číslované rovnice tohoto důkazu jest čísti takto: Má-li jedna strana smysl, je rovnice správná. Buďte p, n positivní a negativní variace funkce g. Potom předně (viz pozn. 6 v § 5)

$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_M f(x)\,\mathrm{d}p(x) - \int_M f(x)\,\mathrm{d}n(x)\,. \tag{58}$$

Podle věty 121 jsou funkce p, n absolutně spojité uvnitř E_1 a je

$$p(b) - p(a) = \int_a^b g'^{+}(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad n(b) - n(a) = \int_a^b g'^{-}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Jsou-li tedy π, ν příslušné funkce intervalu, je pro každý interval I o krajních bodech a, b[22b]) (označíme-li ještě znakem λ Lebesgueovu míru)

$$\pi(I) = \int_I g'^{+}\,\mathrm{d}\lambda\,, \quad \nu(I) = \int_I g'^{-}\,\mathrm{d}\lambda\,,$$

a věta 128 dává

$$\begin{aligned} \int_M f\,\mathrm{d}p &= \int_M f\,\mathrm{d}\pi = \int_M fg'^{+}\,\mathrm{d}\lambda\,, \\ \int_M f\,\mathrm{d}n &= \int_M f\,\mathrm{d}\nu = \int_M fg'^{-}\,\mathrm{d}\lambda\,. \end{aligned} \tag{59}$$

Budiž P, resp. N množina oněch bodů z M, pro něž je $g' \geqq 0$, resp. $g' < 0$. Jest $P \cup N \sim M\,(\lambda)$, neboť g' skoro všude existuje. V P je $g'^{+} = g'$, $g'^{-} = 0$, v N je $g'^{+} = 0$, $g'^{-} = -g'$, takže z (58), (59) plyne

$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_P fg'\,\mathrm{d}\lambda + \int_N fg'\,\mathrm{d}\lambda = \int_M fg'\,\mathrm{d}\lambda\,, \tag{60}$$

což je rovnice (57).

[22b]) Ježto p, n jsou spojité, je jedno, zda body a, b patří k I nebo ne.

Věta 146. *Budiž s distribuční funkce,*[23]) *která je funkcí skoků;*[24]) *t. j. existuje spočetná množina* $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ $(x_i \neq x_k$ pro $i \neq k)$ *bodů a posloupnost reálných čísel* $t_1, t_2, \ldots$ *tak, že pro* $-\infty < a < b <$ $< +\infty$ *je*

$$s(b) - s(a) = \sum_{a \leq x_i < b} t_i\,, \quad \sum_{a \leq x_i < b} |t_i| < +\infty\,.$$

Budiž $M \subset \mathsf{E}_1$*; budiž f funkce reálná, definovaná ve všech bodech* x_i*, které leží v* M*. Potom*

$$\int_M f\, ds = \sum_{x_i \in M} f(x_i)\, t_i\,, \tag{61}$$

má-li jedna strana smysl. Přitom pravou stranu je nutno pojímati jako součet zobecněné řady: ten má smysl tehdy a jen tehdy, je-li konvergentní buďto řada kladných nebo řada záporných členů (nebo obě).

Důkaz. Nechť předně s je neklesající, t. j. $t_i \geqq 0$ a nechť $f(x_i) \geqq 0$ pro každé i. Budiž σ nezáporná míra, přiřazená funkci s. Potom je $\sigma((x_i)) = s(x_i +) - s(x_i) = t_i$, tedy $\sigma(\langle a, b) X) = \sum_{x_i \in \langle a,b)} \sigma((x_i)) = \sum_{x_i \in \langle a,b)} t_i$. Ale současně $\sigma(\langle a, b)) = s(b) - s(a) = \sum_{x_i \in \langle a,b)} t_i$, tedy $\sigma(\langle a, b) \dot{-} X) = \sigma(\langle a, b)) -$ $- \sigma(\langle a, b) X) = 0$ pro $-\infty < a < b < +\infty$. Odtud ihned $\sigma(\mathsf{E}_1 \dot{-}$ $\dot{-} X) = 0$ a tedy (ježto $\int_{(x_i)} f\, d\sigma = f(x_i)\, \sigma((x_i)) = f(x_i)\, t_i$) vychází vskutku

$$\int_M f(x)\, ds(x) = \int_{MX} f\, d\sigma = \sum_{x_i \in M} \int_{(x_i)} f\, d\sigma = \sum_{x_i \in M} f(x_i)\, t_i\,,$$

což je (61). V následujícím čtěte číslované rovnice opět v tomto smyslu: rovnice platí, má-li aspoň jedna strana smysl. Budiž nyní za druhé s neklesající, ale f libovolné. Podle definice a podle (61) je

$$\int_M f\, ds = \int_M f^+\, ds - \int_M f^-\, ds = \sum_{x_i \in M} f^+(x_i)\, t_i - \sum_{x_i \in M} f^-(x_i)\, t_i = \sum_{x_i \in M} f(x_i)\, t_i. \tag{62}$$[25])

Budiž konečně i s libovolná; její rozklad na positivní a negativní variaci $s = p - n$ vypadá takto: $p(b) - p(a) = \sum_{a \leq x_i < b} t_i^+$, $n(b) - n(a) =$ $= \sum_{a \leq x_i < b} t_i^-$, takže podle definice a podle (62) je

---

[23]) Tedy spojitá zleva!

[24]) O funkcích skoků viz podrobněji v kap. IX, § 2 a počátek § 3; hlavně větu 119.

[25]) Sami si vždy rozmyslete, že levá strana každé rovnice má smysl tehdy a jen tehdy, má-li pravá strana smysl.

$$(63)\quad \int_M f\,\mathrm{d}s = \int_M f\,\mathrm{d}p - \int_M f\,\mathrm{d}n = \sum_{x_i \in M} f(x_i)\,t_i^+ - \sum_{x_i \in M} f(x_i)\,t_i^- = \sum_{x_i \in M} f(x_i)\,t_i\,.$$ [25])

Poznámka 1. Budiž g distribuční funkce, p, n její positivní a negativní variace. Rozložme tyto tři funkce podle věty 125 na jejich absolutně spojitou část, singulární spojitou část a funkci skoků:

$$(64)\quad g = g_1 + g_2 + g_3,\ p = p_1 + p_2 + p_3,\ n = n_1 + n_2 + n_3\,.$$

Funkce p_i, n_i jsou neklesající, t. j. k nim příslušné funkce intervalu jsou nezáporné. Podle pozn. 6 v § 5 a podle věty 133 je tedy (vynechávám znak integračního oboru M)

$$\begin{aligned} \int f\,\mathrm{d}g &= \int f\,\mathrm{d}p - \int f\,\mathrm{d}n\,,\\ \int f\,\mathrm{d}p &= \int f\,\mathrm{d}p_1 + \int f\,\mathrm{d}p_2 + \int f\,\mathrm{d}p_3\,,\\ \int f\,\mathrm{d}n &= \int f\,\mathrm{d}n_1 + \int f\,\mathrm{d}n_2 + \int f\,\mathrm{d}n_3\,,\end{aligned}$$

při čemž těmto a dalším rovnicím jest opět rozuměti ve smyslu: „rovnice platí, má-li jedna strana smysl". Tedy

$$(65)\quad \int f\,\mathrm{d}g = \int f\,\mathrm{d}p_1 + \int f\,\mathrm{d}p_2 + \int f\,\mathrm{d}p_3 - \int f\,\mathrm{d}n_1 - \int f\,\mathrm{d}n_2 - \int f\,\mathrm{d}n_3\,.$$

Ale víme (věta 126), že funkce p_i, n_i jsou positivní a negativní variace funkce g_i, takže $\int f\,\mathrm{d}g_i = \int f\,\mathrm{d}p_i - \int f\,\mathrm{d}n_i$.

Tedy lze (65) psáti též

$$(66)\quad \int f\,\mathrm{d}g = \int f\,\mathrm{d}g_1 + \int f\,\mathrm{d}g_2 + \int f\,\mathrm{d}g_3\,.$$

Abych tedy vyšetřil existenci a hodnotu integrálu $\int_M f\,\mathrm{d}g$, mohu buďto rozložit $g = g_1 + g_2 + g_3$ a počítat podle (66) nebo rozložit napřed $g = p - n$, potom rozložit p a n podle (64) a počítat podle (65). Integrály $\int f\,\mathrm{d}g_1$, $\int f\,\mathrm{d}g_3$ se dají podle vět 145, 146 přivésti na „klasické" úkony: Lebesgueův integrál a nekonečnou řadu. Jak lze počítat $\int f\,\mathrm{d}g_2$ aspoň v některých případech, povíme si v § 7, pozn. 4.

Příklad 1. Budiž $M \subset \mathsf{E}_r$ množina μ-měřitelná (μ budiž nezáporná míra), $\mu(M) < +\infty$. Budiž f funkce μ-měřitelná a μ-skoro všude konečná v M. Definujme funkci g v oboru E_1 rovnicí

$$g(y) = \mu(\mathop{\mathcal{E}}_x(x \in M, f(x) < y))\,.$$

Potom je

$$(67)\quad \int_M f\,\mathrm{d}\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} y\,\mathrm{d}g(y)\,,$$

jestliže jeden z těchto integrálů konverguje. To plyne ihned z věty 129, neboť tamní ν vyhovuje rovnici $\nu(\langle a, b)) = g(b) - g(a)$. Jestliže nadto g je absolutně spojitá uvnitř $\mathbf{E}_1$, lze rovnici (67) psáti ve tvaru

$$\int_M f \, \mathrm{d}\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, g'(y)\, \mathrm{d}y \tag{68}$$

(věta 145). Tím je r-rozměrný integrál Lebesgue-Stieltjesův při nezáporné míře μ (ve speciálním případě Lebesgueův) převeden na jednoduchý Lebesgueův integrál v případě, že g je absolutně spojitá uvnitř $\mathbf{E}_1$ a že dovedeme stanovit $g'(y)$ (nepotřebujeme znát $g(y)$; zjistíme-li na př., že $g'(y)$ existuje všude a že $g'(y)$ je omezená v každém omezeném intervalu, je tím zaručeno, že $g(y)$ je a. s. uvnitř $\mathbf{E}_1$).

Cvičení

1. Budiž s distribuční funkce (funkce skoků) z věty 146: $s(b) - s(a) = \sum_{a \leq x_i < b} t_i$, $\sum_{a \leq x_i < b} |t_i| < +\infty$ pro $-\infty < a < b < +\infty$. Příslušnou míru označme σ. Všechny množiny jsou σ-měřitelné. Pro které množiny M platí, že $\sigma(M)$ je 1. konečná, 2. $+\infty$, 3. $-\infty$, 4. neexistuje?

2. V cvič. 1 specialisujme: x_i jsou čísla $1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$; $t_i = (-1)^{x_i}$. Řešte tytéž otázky jako v cvič. 1. Zde $\sigma(\mathbf{E}_1)$ neexistuje, ale existuje

$$\int_{\mathbf{E}_1} \frac{\mathrm{d}s(x)}{x^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

3. Budiž $g(x) = 2x^2$ pro $x \leqq 1$, $g(x) = 5$ pro $1 < x \leqq 2$, $g(x) = 7 - x$ pro $2 < x \leqq 4$, $g(x) = 10x$ pro $x > 4$. Potom

$$\int_{\langle 0,4\rangle} x \, \mathrm{d}g(x) = \int_0^1 4x^2 \, \mathrm{d}x + 1 \,.\, 3 - \int_2^4 x \, \mathrm{d}x + 4 \,.\, 37$$

(dopočtěte). Pro integrační obor $(0, 4\rangle$ vyjde totéž, pro integrační obory $\langle 0, 4)$, $(0, 4)$ odpadne poslední člen. Vynecháte-li z integračního oboru bod 1, zmenší se integrál o 3; vynecháte-li bod 2, integrál se nezmění.

4. Sestrojte distribuční funkci $g(x)$ tak, aby platilo: Neobsahuje-li interval $\langle a, b\rangle$ žádné celé číslo, je $g(b) - g(a) = \dfrac{1}{1 + b^2} - \dfrac{1}{1 + a^2}$; pro celé n je pak

$g(n+) - g(n) = n \operatorname{sgn} n$. Pro všechny intervaly I (omezené i neomezené, uzavřené, polouzavřené i otevřené) vypočtěte $\int_I x^2 \, dg(x)$, pokud existuje (kdy existuje?). Tentýž úkol pro míru, t. j. pro $\int_I dg(x)$.

§ 7. Stieltjesův integrál. Dosud jsme se zabývali Lebesgue-Stieltjesovým integrálem; bude-li to třeba, budeme jej značiti $(\mathcal{LS}) \int_M f \, d\mu$ (po případě, jako v § 6, $(\mathcal{LS}) \int_M f(x) \, dg(x)$). Původní definice Stieltjesova (jedná se v ní jen o integrály v E_1, kde integračním oborem je interval) byla jiná; pro její historický i dnešní význam o ní krátce pojednáme.

Buďte f, g konečné reálné funkce v $\langle a, b \rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Zvolme libovolné rozdělení

$$\mathfrak{D}: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_p = b\,;$$

znakem $\|\mathfrak{D}\|$ označme jeho „normu", t. j. číslo $\operatorname*{Max}_{1 \leq i \leq p} (x_i - x_{i-1})$. Zvolme dále posloupnost p bodů:

$$\Xi: \quad \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p \quad (x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i) \tag{69}$$

a sestrojme součet

$$S(\mathfrak{D}, \Xi) = S(\mathfrak{D}, \Xi, f, g) = \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1}))\,. \tag{70}$$

Budeme říkati, že

$$\lim_{\|\mathfrak{D}\| \to 0} S(\mathfrak{D}, \Xi) = I \tag{71}$$

($I \in \mathsf{E}_1$), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna rozdělení $\mathfrak{D}$ s normou menší než δ a pro všechny možné volby posloupnosti Ξ v (70) je $|S(\mathfrak{D}, \Xi) - I| < \varepsilon$. Potom ovšem pro každou posloupnost rozdělení $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots$ s $\lim_{n \to \infty} \|\mathfrak{D}_n\| = 0$ a pro jakoukoliv volbu příslušných posloupností $\Xi_1, \Xi_2, \ldots$ je $\lim_{n \to \infty} S(\mathfrak{D}_n, \Xi_n) = I$ (v obvyklém smyslu, jakožto limita posloupnosti), takže číslo I v (71) je jednoznačně určeno.[26])

[26]) Je vidět, že v $\mathfrak{D}$ místo $x_{i-1} < x_i$ smíme připouštět též $x_{i-1} \leqq x_i$; členy s $x_{i-1} = x_i$ v (70) se rovnají nule.

Definice 21. *Existuje-li konečná limita I v (71), nazývám ji Stieltjesovým integrálem funkce f („integrovaná funkce") podle funkce g („integrující funkce") od a do b, znak*

$$(72) \qquad \int_a^b f\,\mathrm{d}g \quad \textit{nebo} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) \quad \textit{nebo} \quad (\mathcal{S})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)\,.$$

Jak je vidět, nedefinovali jsme Stieltjesův integrál s hodnotou $+\infty$ nebo $-\infty$, ač by to bylo možno. Až do konce § 8, pokud nebude výslovně zdůrazněno něco jiného, půjde o Stieltjesův integrál.

Poznámka 1. Odvodíme nyní podmínku „Bolzano-Cauchyova typu": Integrál (72) existuje tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí implikace

$$(73) \qquad (\|\mathfrak{D}'\| < \delta,\ \|\mathfrak{D}''\| < \delta) \Rightarrow |S(\mathfrak{D}', \Xi') - S(\mathfrak{D}'', \Xi'')| < \varepsilon\,.$$

Důkaz. 1. Existuje-li (72), existuje limita (71); tedy ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\|\mathfrak{D}\| < \delta \Rightarrow |S(\mathfrak{D}, \Xi) - I| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Odtud však plyne správnost implikace (73).

2. Budiž naše podmínka splněna. Zvolme posloupnost rozdělení $\mathfrak{D}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathfrak{D}_n\| = 0$. Potom ze (73) plyne, že posloupnost čísel $S(\mathfrak{D}_n, \Xi_n)$ vyhovuje obyčejné Bolzano-Cauchyově podmínce a tedy existuje konečná limita $\lim\limits_{n\to\infty} S(\mathfrak{D}_n, \Xi_n) = I$. Tvrdím, že platí (71) (t. j. že (72) existuje a má hodnotu I). Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$ a zvolme $\delta > 0$ tak, aby platila implikace (73). Potom zvolme n tak, že $\|\mathfrak{D}_n\| < \delta$ a že

$$(74) \qquad |S(\mathfrak{D}_n, \Xi_n) - I| < \varepsilon\,.$$

Pro libovolné rozdělení $\mathfrak{D}$ s normou menší než δ bude podle (73) platit $|S(\mathfrak{D}, \Xi) - S(\mathfrak{D}_n, \Xi_n)| < \varepsilon$, tedy podle (74)

$$\|\mathfrak{D}\| < \delta \Rightarrow |S(\mathfrak{D}, \Xi) - I| < 2\varepsilon\,.$$

Tedy vskutku platí (71).

Poznámka 2. Shrňme některé triviální vlastnosti.

I. Je-li $g(x) = x$ v $\langle a, b\rangle$, znamená Stieltjesův integrál $(\mathcal{S})\int_a^b f(x)\,.$ $.\,\mathrm{d}g(x)$ totéž jako vlastní integrál Riemannův $(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

V **J I** byly příslušné věty uvedeny v trochu jiném tvaru než by se nám zde hodily — je proto k důkazu třeba říci několik slov. Všimněme si v **J I** napřed věty 21; v našem případě je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = g(x_i) - g(x_{i-1})$ a věta 21 tedy právě říká, že v případě existence Riemannova integrálu mají součty $S(\mathfrak{D}, \Xi)$ tento integrál za limitu (ve smyslu (71)), t. j. že Stieltjesův integrál existuje a rovná se Riemannovu. Naopak, existuje-li Stieltjesův integrál, plyne ze (71) (kde $I = (\mathscr{S})\int_a^b f \, \mathrm{d}g$), že pro každou posloupnost rozdělení $\mathfrak{D}_n$ s vlastností $\lim_{n \to \infty} \|\mathfrak{D}_n\| = 0$ a pro libovolné volby Ξ_n je $\lim_{n \to \infty} S(\mathfrak{D}_n, \Xi_n) = I$. Ale to podle věty 67 v **J I**[27]) právě znamená, že existuje vlastní Riemannův integrál (který potom ovšem, podle bodu 1, se rovná Stieltjesovu). Prosím za prominutí, že tato trivialita vyžadovala poměrně mnoho slov.

II. Je-li g konstantní v $\langle a, b \rangle$, je $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}g(x) = 0$. Je-li $c \in \mathbf{E}_1$, je $\int_a^b c \, \mathrm{d}g(x) = c(g(b) - g(a))$.

III. Jsou-li k, m konečná reálná čísla různá od nuly, je

$$\int_a^b k \, f(x) \, \mathrm{d}(m \, g(x)) = km \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}g(x) \,,$$

má-li jedna strana smysl.

IV. Jest

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) \, \mathrm{d}g(x) = \int_a^b f_1(x) \, \mathrm{d}g(x) + \int_a^b f_2(x) \, \mathrm{d}g(x) \,,$$

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}(g_1(x) + g_2(x)) = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}g_1(x) + \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}g_2(x) \,,$$

má-li pravá strana smysl.

V. Je-li $a < b < c$, je

$$\int_a^c f(x) \, \mathrm{d}g(x) = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}g(x) + \int_b^c f(x) \, \mathrm{d}g(x) \,,$$

[27]) Slovo „funkce“ v **J I** značí konečnou reálnou funkci.

jestliže všechny tři integrály existují. Důkaz. Při hledání limity, kterou je integrál definován, se omezím na taková rozdělení intervalu $\langle a, c\rangle$, při nichž b je dělicím bodem. (Viz doplněk v cvič. 2.)

Věta 147 (t. zv. integrace per partes). *Jest*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g + \int_a^b g\,\mathrm{d}f = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)\,, \tag{75}$$

jestliže jeden z integrálů existuje.[28]

Důkaz. Nechť existuje třeba $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$. Sestrojme součet

$$S(\mathfrak{D}, \Xi, g, f) = \sum_{i=1}^{p} g(\xi_i)(f(x_i) - f(x_{i-1})) =$$
$$= \sum_{i=1}^{p-1} f(x_i)(g(\xi_i) - g(\xi_{i+1})) + f(x_p)\,g(\xi_p) - f(x_0)\,g(\xi_1)\,,$$

kde

$$a = x_0 \leqq \xi_1 \leqq x_1 \leqq \ldots \leqq x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i \leqq \ldots \leqq \xi_p \leqq x_p = b\,. \tag{76}$$

Přidejme a uberme ještě $g(b)\,f(b) - g(a)\,f(a)$; dostaneme

$$S(\mathfrak{D}, \Xi, g, f) = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \tag{77}$$
$$- \{f(a)(g(\xi_1) - g(a)) + \sum_{i=1}^{p-1} f(x_i)(g(\xi_{i+1}) - g(\xi_i)) + f(b)(g(b) - g(\xi_p))\}\,.$$

Ale podle (76) je výraz v závorce $\{\ \}$ roven $S(\mathfrak{D}^*, \Xi^*, f, g)$, kde (načrtněte si body (76)) $\mathfrak{D}^*$ má dělicí body $a \leqq \xi_1 \leqq \xi_2 \leqq \ldots \leqq \xi_p \leqq b$[29]) a Ξ^* se skládá z bodů $a = x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p = b$. Ježto $x_{i+2} - x_i \leqq 2\|\mathfrak{D}\|$, je z (76) ihned patrno, že $\|\mathfrak{D}^*\| \leqq 2\|\mathfrak{D}\|$. Jestliže tedy $\|\mathfrak{D}\| \to 0$, má pravá strana v (77) limitu $f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f\,\mathrm{d}g$, tedy má i levá strana limitu, a to touž limitu, t. j. existuje též $\int_a^b g\,\mathrm{d}f$ a platí (75).

Věta 148. *Nechť f je konečná a spojitá v $\langle a, b\rangle$ a g má variaci konečnou v $\langle a, b\rangle$. Potom $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existuje.*[28]

---

[28]) Jde stále o Stieltjesovy integrály.
[29]) Viz pozn. [26]).

Důkaz. g je rozdílem dvou funkcí neklesajících. Vidíme proto z III (pro $k = 1$, $m = -1$) a IV v pozn. 2, že stačí důkaz vésti za předpokladu, že g je neklesající. f je omezená, $|f(x)| \leqq K$ pro $a \leqq x \leqq b$ a stejnoměrně spojitá v $\langle a, b \rangle$. Ke každému přirozenému n existuje tedy $\delta_n > 0$ tak, že

$$(78) \qquad (a \leqq x \leqq b,\ a \leqq y \leqq b,\ |x - y| < \delta_n) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n} \,.$$

Pro každý součet je tedy předně

$$(79) \qquad |S(\mathfrak{D}, \Xi)| \leqq K \sum_{i=1}^{p} (g(x_i) - g(x_{i-1})) = K(g(b) - g(a)) \,.$$

Za druhé: buďte $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ libovolná rozdělení, pro něž $\|\mathfrak{D}_i\| < \delta_n$ ($i = 1, 2$). Tvrdím, že

$$(80) \qquad |S(\mathfrak{D}_1, \Xi_1) - S(\mathfrak{D}_2, \Xi_2)| \leqq \frac{2}{n} (g(b) - g(a))$$

(při libovolné volbě Ξ_1, Ξ_2). Tím bude existence integrálu podle pozn. 1 dokázána.

K důkazu nerovnosti (80) sestrojím $S(\mathfrak{D}^*, \Xi^*)$, kde $\mathfrak{D}^*$ je libovolné společné zjemnění rozdělení $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$. Budiž $\mathfrak{D}_1$ rozdělení $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = b$. Interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ obsahuje několik dělicích bodů rozdělení $\mathfrak{D}^*$, na př. $x_{i-1} = y_k < y_{k+1} < \ldots < y_l = x_i$. Jeho příspěvek k součtu $S(\mathfrak{D}_1, \Xi_1)$ je

$$(81) \qquad f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) \qquad \sum_{m=k+1}^{l} f(\xi_i)(g(y_m) - g(y_{m-1})) \,.$$

Příspěvek téhož intervalu k součtu $S(\mathfrak{D}^*, \Xi^*)$ je

$$(82) \qquad \sum_{m=k+1}^{l} f(\xi_m^*)(g(y_m) - g(y_{m-1})) \,.$$

Ježto všechny hodnoty funkce f se zde podle (78) liší navzájem o méně než $\frac{1}{n}$, je rozdíl čísel (81), (82) v absolutní hodnotě nejvýše

$$\frac{1}{n} \sum_{m=k+1}^{l} (g(y_m) - g(y_{m-1})) = \frac{1}{n} (g(x_i) - g(x_{i-1})) \,;$$

odtud

$$|S(\mathfrak{D}_1, \Xi_1) - S(\mathfrak{D}^*, \Xi^*)| \leqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} (g(x_i) - g(x_{i-1})) = \frac{g(b) - g(a)}{n};$$

obdobně

$$|S(\mathfrak{D}_2, \Xi_2) - S(\mathfrak{D}^*, \Xi^*)| \leqq \frac{g(b) - g(a)}{n}$$

a odtud plyne (80).

Poznámka 3. Nechť g má variaci konečnou v $\langle a, b \rangle$, tedy $g = p - n$, kde p, n jsou neklesající v $\langle a, b \rangle$. Ale g nemusí být spojitá zleva. Přiřaďme proto každé funkci g, jež má variaci konečnou v $\langle a, b \rangle$, funkci g^* takto: Pro $x \leqq a$ klaďme $g^*(x) = g(a)$; pro $a < x \leqq b$ klaďme $g^*(x) = g(x -)$; pro $x > b$ klaďme $g^*(x) = g(b)$. Proveďte náčrtek! V každém bodě z $(a, b\rangle$ nahradím prostě hodnotu $g(x)$ její limitou zleva. Proveďme to také pro funkce p, n. Je zřejmo, že funkce p^*, n^* budou neklesající v $(-\infty, +\infty)$. Dále jsou spojité zleva v každém bodě c.[30]) Konečně je zřejmě $g^* = p^* - n^*$, takže g^* je distribuční funkce.

Tvrdím nyní:

Věta 149. *Budiž f konečná a spojitá v $\langle a, b \rangle$, nechť g má variaci konečnou v $\langle a, b \rangle$. Sestrojme g^*, jak bylo vylíčeno. Potom*

$$(83)\quad (\mathscr{S})\int_a^b f\, \mathrm{d}g = (\mathscr{S})\int_a^b f\, \mathrm{d}g^* + f(b)(g(b) - g(b -)) = (\mathscr{L}\mathscr{S}) \int_{\langle a, b \rangle} f\, \mathrm{d}g^* .$$

To je vztah mezi Stieltjesovým a Lebesgue-Stieltjesovým integrálem pro spojité f.

Důkaz. Budiž především g neklesající. Všechny tři integrály zřejmě existují. Vezměme rozdělení $\mathfrak{D}$, dané body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_p = b$, které volíme tak, aby g byla spojitá v bodech $x_1, \ldots, x_{p-1}$. Body $\xi_1, \ldots, \xi_p$ volím nyní speciálním způsobem. Je-li

[30]) Stačí vyšetřit body $a < c \leqq b$. Ježto monotonní funkce má jen spočetně mnoho bodů nespojitosti, existují body spojitosti $c_1 < c_2 < \ldots$ funkce p tak, že $\lim c_n = c$, načež $p^*(c -) = \lim p^*(c_n) = \lim p(c_n -) = \lim p(c_n) = p(c -) = p^*(c)$.

$m_i = \underset{x_{i-1} \leqq x \leqq x_i}{\mathrm{Min}} f(x)_i$, $M_i = \underset{x_{i-1} \leqq x \leqq x_i}{\mathrm{Max}} f(x)$, je podle věty 43[31]) (teď jde o Lebesgue-Stieltjesovy integrály)

$$m_i(g^*(x_i) - g^*(x_{i-1})) \leqq \int_{\langle x_{i-1}, x_i)} f \, \mathrm{d}g^* \leqq M_i(g^*(x_i) - g^*(x_{i-1})) \,,$$

a tedy pro vhodné ξ_i $(x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i)$

$$\int_{\langle x_{i-1}, x_i)} f \, \mathrm{d}g^* = f(\xi_i)(g^*(x_i) - g^*(x_{i-1})) \,.$$

Dále

$$\int_{(b)} f \, \mathrm{d}g^* = f(b)(g^*(b+) - g^*(b)) = f(b)(g(b) - g(b-)) \,.$$

Ježto

$$\int_{\langle a, b\rangle} = \sum_{i=1}^{p} \int_{\langle x_{i-1}, x_i)} + \int_{(b)} \,,$$

vychází

(84) $$(\mathcal{LS}) \int_{\langle a, b\rangle} f \, \mathrm{d}g^* = S(\mathfrak{D}, \Xi, f, g^*) + f(b)(g(b) - g(b-)) \,.$$

Sestrojme ještě (při témže $\mathfrak{D}$ a Ξ)

$$S(\mathfrak{D}, \Xi, f, g) = \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) \,.$$

Zde je $g(x_i) = g^*(x_i)$ pro $i = 0, 1, \ldots, p-1$, pouze pro $x_p = b$ je $g(x_p) = g(b)$, $g^*(x_p) = g(b-)$, takže

(85) $$S(\mathfrak{D}, \Xi, f, g) = S(\mathfrak{D}, \Xi, f, g^*) + f(\xi_p)(g(b) - g(b-)) \,.$$

Zde je $0 \leqq b - \xi_p \leqq \|\mathfrak{D}\|$. Nechme nyní probíhati $\mathfrak{D}$ takovou posloupnost rozdělení $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots$, že $\lim_{n \to \infty} \|\mathfrak{D}_n\| = 0$. Potom z (85) plyne první rovnice (83) a z (84) druhá.

V obecném případě pišme $g = p - n$ (p, n neklesající), tedy $g^* = p^* - n^*$ a odečtěme příslušné rovnice pro p a n.

Poznámka 4. *Budiž g spojitá a s variací konečnou v $\langle a, b\rangle$, f absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$. Potom je*

(86) $$(\mathcal{S}) \int_a^b f \, \mathrm{d}g = f(b) \, g(b) - f(a) \, g(a) - \int_a^b g f' \, \mathrm{d}x \,,$$

kde poslední integrál je Lebesgueův.

---

[31]) Je-li γ funkce intervalu přiřazená k g^*, je $\gamma(\langle x_{i-1}, x_i)) = g^*(x_i) - g^*(x_{i-1})$.

Důkaz. Podle věty 147 a 148 je pro Stieltjesovy integrály

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b g\,\mathrm{d}f\,.$$

Funkce f^* vypadá zde takto: $f^*(x) = f(x)$ v $\langle a, b\rangle$, $f^*(x) = f(a)$ pro $x < a$, $f^*(x) = f(b)$ pro $x > b$; f^* je absolutně spojitá uvnitř $\mathbf{E}_1$. Podle věty 149 a 145 je

$$(\mathscr{S})\int_a^b g\,\mathrm{d}f = (\mathscr{L}\mathscr{S})\int_{\langle a,b\rangle} g\,\mathrm{d}f^* = \int_{\langle a,b\rangle} gf^{*\prime}\,\mathrm{d}x$$

(poslední integrál je Lebesgueův); ale $f^{*\prime} = f'$ skoro všude v (a, b). Tím je (86) dokázáno.

Rozšíříme-li definici funkce g tak, že klademe $g(x) = g(a)$ pro $x < a$, $g(x) = g(b)$ pro $x > b$, lze podle věty 149 psáti první integrál v (86) též ve tvaru $(\mathscr{L}\mathscr{S}) \int_{\langle a,b\rangle} f\,\mathrm{d}g$ (ježto g je spojitá, lze psáti též $\int_{(a,b)}$ a pod.). Tím je $(\mathscr{L}\mathscr{S}) \int_M f\,\mathrm{d}g$ též pro případ spojité singulární g převeden na Lebesgueův integrál, jestliže $M = \langle a, b\rangle$ a f je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$. To je doplněk, slíbený na konci pozn. 1 v § 6. Propočtěte si cvič. 1.

Poznámka 5. Ještě jeden triviální odhad. Je-li $|f(x)| \leqq K$ pro $a \leqq x \leqq b$ $(0 \leqq K < +\infty)$, má-li g konečnou variaci v $\langle a, b\rangle$ a existuje-li Stieltjesův $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, je

$$\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}g\right| \leqq K\,.\,V(\langle a, b\rangle; g)\,.$$

Důkaz:

$$\left|\sum_{i=1}^p f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1}))\right| \leqq K \sum_{i=1}^p |g(x_i) - g(x_{i-1})|\,.$$

Cvičení

1. Budiž g funkce, popsaná v **D II**, kap. V, § 9, cvič. 4; aby byla definována v $\mathbf{E}_1$, položme ještě $g(x) = 0$ pro $x < 0$, $g(x) = 1$ pro $x > 1$. Funkce g je spojitá singulární. Počítejme

$$I = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}g(x) = 1 - 2\int_0^1 x\,g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Integrál vlevo lze pojímati jako Stieltjesův nebo také jako Lebesgue-Stieltjesův přes interval (0, 1) nebo (0,1⟩ nebo ⟨0, 1) nebo ⟨0, 1⟩. Vpravo je integrál Lebesgueův. Ježto Cantorovo diskontinuum má míru 0, stačí integrovat přes jeho styčné intervaly; na každém z nich je g konstantní. Vyjde

$$I = \frac{5}{6} - \sum \frac{1}{3^{k+1}} \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_k}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \cdot \left(\frac{4a_1}{3} + \frac{4a_2}{3^2} + \ldots + \frac{4a_k}{3^k} + \frac{1}{3^k}\right),$$

kde se sčítá přes $k = 1, 2, \ldots$ a při daném k přes všechny posloupnosti $a_1, \ldots, a_k$, složené z nul a jedniček.

2. Budiž $-\infty < a < b < c < +\infty$. Potom rovnice

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}g(x)$$

A) platí, existuje-li integrál vlevo;[32])

B) nemusí platit, existují-li integrály vpravo.

Důkaz k bodu A): Integrál vlevo označme I. Budiž $\varepsilon > 0$. Zvolme $\delta > 0$ tak, že pro všechna rozdělení $\mathfrak{D}$ intervalu $\langle a, c\rangle$ s normou $\|\mathfrak{D}\| < \delta$ je $|S(\mathfrak{D}, \Xi) - I| < \varepsilon$. Sestrojme rozdělení $\mathfrak{D}_1$ intervalu $\langle a, b\rangle$ s normou menší než δ a příslušné Ξ_1 a ponechme $\mathfrak{D}_1$ i Ξ_1 pevné. Vezmu-li nyní jakákoliv dvě rozdělení $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ intervalu $\langle b, c\rangle$ s normami menšími než δ, dává $\mathfrak{D}_1$ a $\mathfrak{D}'$ dohromady rozdělení intervalu $\langle a, c\rangle$ s normou menší než δ a tedy $|S(\mathfrak{D}_1, \Xi_1) + S(\mathfrak{D}', \Xi') - I| < \varepsilon$, ať jsou body v Ξ' voleny jakkoliv (přípustným způsobem). Z téhož důvodu je $|S(\mathfrak{D}_1, \Xi_1) + S(\mathfrak{D}'', \Xi'') - I| < \varepsilon$, a tedy $|S(\mathfrak{D}', \Xi') - S(\mathfrak{D}'', \Xi'')| < 2\varepsilon$, t. j. je splněna podmínka z pozn. 1. Tedy existuje druhý (a podobně i první) integrál vpravo. A nyní viz V v pozn. 2.

Důkaz k bodu B): Budiž $f(x) = 0$ v $\langle 0, 1\rangle$, $f(x) = 1$ v $(1, 2\rangle$; $g(x) = 0$ v $\langle 0, 1)$, $g(x) = 1$ v $\langle 1, 2\rangle$. Zřejmě $\int_0^1 f\,\mathrm{d}g = \int_1^2 f\,\mathrm{d}g = 0$; dokažte, že $\int_0^2 f\,\mathrm{d}g$ neexistuje.

§ 8. Ještě o rovnici $\int_A f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f\,\mathrm{d}\mu_n$. Viz též § 4. Půjde zde o jednoduché integrály, A bude interval, f spojitá v A. Věty budu formulovat pro Stieltjesovy integrály; event. přechod k Lebesgue-Stieltjesovu integrálu lze provésti užitím věty 149. Větám tohoto paragrafu se říkává věty Hellyho; ale některé části se objevují již dříve u F. Riesze a J. Karamaty.

[32]) Jde o Stieltjesovy integrály.

Věta 150. *Buďte* $f, g, g_1, g_2, \ldots$ *funkce konečné v intervalu* $\langle a, b\rangle$; *budiž* $0 < K < +\infty$. *Budiž*

$$V(\langle a, b\rangle; g_n) \leqq K \text{ pro } n = 1, 2, \ldots, \tag{87}$$

f *budiž spojitá v* $\langle a, b\rangle$. *Nechť je dále splněn jeden z těchto předpokladů:*

I. $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ *všude v* $\langle a, b\rangle$.

II. Existuje množina M, *hustá v* $\langle a, b\rangle$ *a obsahující body* a, b *tak, že pro každé* $x \in M$ *je* $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$, *při čemž funkce* g *buďto je spojitá aspoň s jedné strany v každém bodě intervalu* (a, b) *nebo má variaci konečnou v* $\langle a, b\rangle$.

Potom g *má variaci konečnou v* $\langle a, b\rangle$ *a je (Stieltjesovy integrály)*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_n(x)\,. \tag{88}$$

Důkaz. V případě I položme pro jednoduchost $M = \langle a, b\rangle$. Zvolme rozdělení $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = b$ tak, že $x_i \in M$ ($i = 0, 1, \ldots, p$ — pamatujme, že $a \in M$, $b \in M$). Potom podle (87) je

$$\sum_{i=1}^{p} |g_n(x_i) - g_n(x_{i-1})| \leqq K \tag{89}$$

a odtud pro $n \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{p} |g(x_i) - g(x_{i-1})| \leqq K\,. \tag{90}$$

V případě I platí (90) pro každé rozdělení, tedy

$$V(\langle a, b\rangle; g) \leqq K\,. \tag{91}$$

Vezměme případ II, a to ten podpřípad, že g je v každém bodě intervalu (a, b) spojitá aspoň s jedné strany. Zvolme libovolné rozdělení $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_p = b$. Tvrdím, že

$$s = \sum_{i=1}^{p} |g(y_i) - g(y_{i-1})| \leqq K \tag{92}$$

(tím bude opět dokázáno (91)). Budiž $\varepsilon > 0$. Ježto M je hustá v $\langle a, b\rangle$, mohu voliti čísla $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = b$ tak, že leží vesměs v M

a že $|g(x_i) - g(y_i)| < \varepsilon$ pro $i = 0, 1, \ldots, p$. Potom však platí (90) a tedy $s < K + 2p\varepsilon$. Ježto ε bylo libovolné, plyne odtud (92). V druhém podpřípadě případu II jsme přímo předpokládali, že g má konečnou variaci v $\langle a, b\rangle$ a případným zvětšením konstanty K docílím toho, že opět platí (91). Tedy všechny integrály v (88) existují.

Budiž nyní $\varepsilon > 0$. Zvolme takové rozdělení $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_p = b$, že $x_i \in M$ a že v každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ je oscilace funkce f (t. j. rozdíl mezi jejím supremem a infimem) menší než ε. Toto rozdělení podržme pevně. Jest

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathrm{d}g(x) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_i))\,\mathrm{d}g(x)\,.$$

Podle pozn. 5 v § 7 je tedy

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}g(x) - f(x_i)(g(x_i) - g(x_{i-1}))\right| \leqq \varepsilon\, V(\langle x_{i-1}, x_i\rangle; g)\,.$$

Sečtením přes $i = 1, \ldots, p$ plyne

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) - \sum_{i=1}^{p} f(x_i)(g(x_i) - g(x_{i-1}))\right| \leqq \varepsilon\, V(\langle a, b\rangle; g) \leqq \varepsilon K$$

a obdobně

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_n(x) - \sum_{i=1}^{p} f(x_i)(g_n(x_i) - g_n(x_{i-1}))\right| \leqq \varepsilon K\,.$$

Odečtením dostáváme

$$\begin{aligned} &\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_n(x)\right| \leqq \\ &\leqq \left|\sum_{i=1}^{p} f(x_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) - \sum_{i=1}^{p} f(x_i)(g_n(x_i) - g_n(x_{i-1}))\right| + 2K\varepsilon\,. \end{aligned} \tag{93}$$

Ale všechny body x_i leží v M, takže první člen vpravo (t. j. $|\sum \ldots - \sum \ldots|$) má pro $n \to \infty$ limitu 0. Existuje tedy n_0 tak, že pro $n > n_0$ je levá strana v (93) menší než $(2K + 1)\,\varepsilon$; tedy platí (88).

Poznámka 1. Jenom pro zbytek tohoto paragrafu zavedeme označení (vpravo stojí vždy Stieltjesův integrál; a, b jsou konečná čísla)

$$(94)\quad \begin{gathered} \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)\,, \\ \int_{-\infty}^b f\,\mathrm{d}g = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f\,\mathrm{d}g\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f\,\mathrm{d}g = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f\,\mathrm{d}g\,, \end{gathered}$$

existuje-li konečná limita vpravo.

Poznámka 2. Nechť f je konečná reálná funkce v $(-\infty, +\infty)$. Má-li f konečnou variaci v každém omezeném intervalu, říkáme, že má v. k. uvnitř $\mathbf{E}_1$. Potom existují tři neklesající (v $\mathbf{E}_1$) funkce v, p, n ($v(x) = p(x) + n(x) +$ konst), které jsme v kap. IX, § 3 nazvali totální, positivní a negativní variací funkce f. Jestliže v je omezená v $\mathbf{E}_1$, t. j. jestliže p, n jsou omezené v $\mathbf{E}_1$, budeme říkati, že f má v. k. v $\mathbf{E}_1$ (nejenom uvnitř $\mathbf{E}_1$). To znamená (ježto v, p, n jsou monotonní), že existují konečné limity

$$(95)\quad v(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} v(x)\,, \quad v(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} v(x)$$

a podobně pro p, n. Dále zavedeme označení

$$(96)\quad \begin{gathered} V((-\infty, +\infty); f) = v(+\infty) - v(-\infty) = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} V(\langle a, b\rangle; f)\,, \\ V(\langle a, +\infty); f) = v(+\infty) - v(a)\,, \\ V((-\infty, b\rangle; f) = v(b) - v(-\infty)\,. \end{gathered}$$

Podobně pro p, n.

Věta 151. *Budiž f spojitá a omezená v $(-\infty, +\infty)$. Nechť funkce $g, g_1, g_2, \ldots$ mají v. k. v $\mathbf{E}_1$. Nechť g je spojitá aspoň s jedné strany v každém bodě. Nechť existuje množina M hustá v $\mathbf{E}_1$ tak, že*

$$(97)\quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \text{ pro } x \in M$$

a nechť

$$(98)\quad \lim_{n\to\infty} V((-\infty, +\infty); g_n) = V((-\infty, +\infty); g)\,.$$

Potom

$$(99)\quad \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}g_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}g(x)\,.$$

Důkaz. Dokažme, že existuje integrál v (99) vpravo, t. j. že je splněna Bolzano-Cauchyova podmínka pro existenci konečné limity

$$\lim_{\substack{\xi \to -\infty \\ \eta \to +\infty}} \int_\xi^\eta f \, dg \, .$$

Existuje K $(0 < K < +\infty)$ tak, že

$$|f(x)| \leqq K \text{ pro všechna } x \in \mathbf{E}_1 \, .$$

Pro $-\infty < A < A' < +\infty$ je potom podle pozn. 5 v § 7

$$\left|\int_A^{A'} f \, dg\right| \leqq K(v(A') - v(A))$$

(ovšem v, v_n značí totální variaci funkcí g, g_n); ale zde pravá strana konverguje k nule pro $A \to +\infty$, $A' \to +\infty$ i pro $A \to -\infty$, $A' \to -\infty$. Podobně pro g_n.

Za druhé: Budiž $a \in M$, $b \in M$, $a < b$. Tvrdím především, že

$$\liminf_{n \to \infty} V(\langle a, b \rangle; g_n) \geqq V(\langle a, b \rangle; g) \, . \tag{100}$$

Označme totiž levou stranu v (100) H, zvolme $\varepsilon > 0$ a vyberme takovou posloupnost $k_1 < k_2 < \ldots$, že

$$V(\langle a, b \rangle; g_{k_n}) \leqq H + \varepsilon \text{ pro } n = 1, 2, \ldots \tag{101}$$

Všimneme-li si počátku důkazu věty 150[33]), vidíme (g je spojitá v každém bodě aspoň s jedné strany), že ze (101) plyne $V(\langle a, b \rangle; g) \leqq H + \varepsilon$, z čehož plyne (100).

Nyní dokončíme důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$; volme a, b $(-\infty < a < b < +\infty)$ tak, že

$$a \in M, b \in M, V(\langle a, b \rangle; g) > V((-\infty, +\infty); g) - \varepsilon \, . \tag{102}$$

Potom existuje podle (98), (100) n_1 tak, že pro $n > n_1$ je

$$V((-\infty, +\infty); g_n) < V((-\infty, +\infty); g) + \varepsilon \, ,$$
$$V(\langle a, b \rangle; g_n) > V(\langle a, b \rangle; g) - \varepsilon > V((-\infty, +\infty); g) - 2\varepsilon$$

a tedy $V((-\infty, a\rangle; g_n) + V(\langle b, +\infty); g_n) < 3\varepsilon$; ze (102) plyne $V((-\infty, a\rangle; g) + V(\langle b, +\infty); g) < \varepsilon$. Odtud podle pozn. 5 v § 7 [34])

[33]) Jde o vzorec (91).
[34]) Provede se to v omezeném intervalu a potom triviální limitní přechod.

$$(103) \qquad \left|\int_{-\infty}^{a} f \, dg_n\right| + \left|\int_{b}^{+\infty} f \, dg_n\right| \leqq 3K\varepsilon\,,$$

$$(104) \qquad \left|\int_{-\infty}^{a} f \, dg\right| + \left|\int_{b}^{+\infty} f \, dg\right| \leqq K\varepsilon\,.$$

Ale na interval $\langle a, b\rangle$ lze užíti věty 150; tedy existuje $n_2 > n_1$ tak, že pro $n > n_2$ je

$$(105) \qquad \left|\int_{a}^{b} f \, dg - \int_{a}^{b} f \, dg_n\right| < K\varepsilon$$

a tedy (ze (103), (104), (105))

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f \, dg - \int_{-\infty}^{+\infty} f \, dg_n\right| < 5K\varepsilon\,.$$

Věta 152. *Budiž f spojitá a konečná v $(-\infty, +\infty)$.*[35] *Nechť $g, g_1, g_2, \ldots$ jsou funkce konečné v $(-\infty, +\infty)$. Nechť g je spojitá aspoň s jedné strany v každém bodě. Nechť existuje množina M hustá v $\mathbf{E}_1$ tak, že platí* (97). *Nechť ke každému omezenému intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje konečné číslo $K = K_{a,b}$ tak, že platí* (87). *Nechť konečně*

$$(106) \qquad \lim_{A \to +\infty} \int_{A}^{+\infty} f \, dg_n = 0\,, \quad \lim_{A \to -\infty} \int_{-\infty}^{A} f \, dg_n = 0$$

stejnoměrně vzhledem k n. Potom platí (99).

Důkaz. Podle věty 150 má g zřejmě v. k. uvnitř $\mathbf{E}_1$[36]) a dále platí

$$(107) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_{a}^{b} f \, dg_n = \int_{a}^{b} f \, dg \ \text{ pro } -\infty < a < b < +\infty,$$
$$a \in M,\ b \in M\,.$$

Existenci integrálů v (99) vlevo předpokládáme; existenci integrálu vpravo dokážeme. Buďte $a \in M$, $b \in M$ konečná, $a < b$. Potom

$$\left|\int_{a}^{b} f \, dg\right| \leqq \left|\int_{a}^{b} f \, dg_n\right| + \left|\int_{a}^{b} f \, dg - \int_{a}^{b} f \, dg_n\right|.$$

Budiž $\varepsilon > 0$; existuje $A < +\infty$ tak, že pro $a > A$ je první člen vpravo menší než ε pro všechna n; zvolím-li a, b $(A < a < b < +\infty)$,

[35]) Nepředpokládá se omezenost.

[36]) Stačí zjistiti konečnost čísla $V(\langle a, b\rangle; g)$ pro ty případy, kdy $a \in M$, $b \in M$.

existuje podle (107) n tak, že i druhý člen vpravo je $< \varepsilon$. Tedy $|\int_a^b f\,dg| < 2\varepsilon$ pro $A < a < b < +\infty$, $a \in M$, $b \in M$. To je Bolzano-Cauchyova podmínka, z níž plyne existence konečné limity

$$\lim_{\substack{y \to +\infty \\ y \in M}} \int_0^y f\,dg = L\,. \tag{108}$$

Odstraňme ještě podmínku $y \in M$. Jestliže je dáno $z \in E_1$, potom g je v bodě z spojitá na př. zprava a f (jsouc spojitá) je omezená v $\langle z, z+1 \rangle$: $|f(x)| < P < +\infty$. Podle věty 93 v **D II** je v[37]) spojitá v bodě z zprava, existuje tedy ke každému $\varepsilon > 0$ bod $y \in M$ $(z < y < z + 1)$ tak blízko bodu z, že $v(y) - v(z) < \frac{\varepsilon}{P}$, načež $|\int_z^y f\,dg| < P \cdot \frac{\varepsilon}{P} = \varepsilon$. Odtud a ze (108) zřejmě plyne $\lim_{z \to +\infty} \int_0^z f\,dg = L$; podobně pro $\int_{-\infty}^0$.

Zbytek důkazu je jednoduchý. Pro $-\infty < a < b < +\infty$ je

$$\begin{aligned}|\int_{-\infty}^{+\infty} f\,dg - \int_{-\infty}^{+\infty} f\,dg_n| \leqq |\int_b^{+\infty} f\,dg| + |\int_b^{+\infty} f\,dg_n| + |\int_{-\infty}^a f\,dg| + \\ + |\int_{-\infty}^a f\,dg_n| + |\int_a^b f\,dg - \int_a^b f\,dg_n|\,.\end{aligned} \tag{109}$$

Budiž $\varepsilon > 0$. Potom existují konečná $a \in M$, $b \in M$, $a < b$ tak, že první čtyři členy v (109) jsou $< \varepsilon$ pro všechna n. Zvolme takto a, b a užijme (107); existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je i poslední člen menší než ε. Odtud plyne (99).

Cvičení

1. Budiž g funkce, mající v. k. v E_1, budiž f spojitá a omezená v $(-\infty, +\infty)$. Položme $g^*(x) = g(x-)$. Potom zobecněný Stieltjesův integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} f\,dg$ ve smyslu pozn. 1 je roven $(\mathcal{LS}) \int_{E_1} f\,dg^*$. Větu 151 lze tedy formulovati pomocí Lebesgue-Stieltjesových integrálů.

[37]) Variace funkce g

§ 9. Záměna integrační proměnné v Lebesgue-Stieltjesově a Lebesgueově integrálu. Poznámka 1. Budiž g distribuční funkce; budiž φ funkce konečná, neklesající a spojitá v E_1. Potom funkce $h(u) = g(\varphi(u))$ je také distribuční funkce (která je ovšem neklesající, když g je neklesající). Důkaz. Spojitost zleva je jasná; jde jenom o variaci funkce $h = g * \varphi$.[38]) Budiž $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$; položme $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Máme dokázati, že $V(\langle\alpha, \beta\rangle; h) < +\infty$. Dokážeme více, totiž že

$$V(\langle\alpha, \beta\rangle; h) = V(\langle a, b\rangle; g) . \tag{110}$$

Budiž tedy

$$\alpha = \alpha_0 \leqq \alpha_1 \leqq \ldots \leqq \alpha_p = \beta \tag{111}$$

a položme

$$\varphi(\alpha_k) = a_k \quad (k = 0, 1, \ldots, p) , \tag{112}$$

takže

$$a = a_0 \leqq a_1 \leqq \ldots \leqq a_p = b . \tag{113}$$

Naopak, jsou-li dána a_k tak, že platí (113), existují (ježto φ nabývá v $\langle\alpha, \beta\rangle$ všech hodnot od $a = \varphi(\alpha)$ do $b = \varphi(\beta)$) čísla α_k tak, že platí (112), (111). Ale potom

$$\sum_{k=1}^{p} |g(a_k) - g(a_{k-1})| = \sum_{k=1}^{p} |g(\varphi(\alpha_k)) - g(\varphi(\alpha_{k-1}))| ,$$

takže čísla vlevo pro všechna rozdělení (113) probíhají touž množinu jako čísla vpravo pro všechna rozdělení (111) — přechodem k supremu dostáváme (110). Jsou-li $v(x)$, $p(x)$, $n(x)$ variace funkce $g(x)$ (viz kap. IX, § 3), je podle (44) v kap. IX, § 3 a podle (110)

$$v(\varphi(\beta)) - v(\varphi(\alpha)) = V(\langle\alpha, \beta\rangle; h) ,$$

t. j. *funkce $v(\varphi(u))$ je totální variací funkce $h(u) = g(\varphi(u))$*; ze vzorců (10) v kap. IX, § 2 plyne pak, že *$p(\varphi(u))$, $n(\varphi(u))$ jsou positivní a negativní variace funkce $g(\varphi(u))$.*

Poznámka 2. Funkce φ z pozn. 1 zobrazuje E_1 na jistý interval $I \subset E_1$. Je-li $M \subset I$, je $\varphi_{-1}(M) = \underset{x}{\mathcal{E}}(\varphi(x) \in M)$ „vzor“ množiny M.

[38]) Toto označení $g * \varphi$ pro „složenou funkci“ („složené zobrazení“) jsme zavedli v kap. VI, § 1.

Vylučme triviální případ, že by φ byla konstantní v $\mathbf{E}_1$. Koncový bod b intervalu I patří k I tehdy a jen tehdy, nabývá-li φ svého suprema b; potom nabývá hodnoty b v jistém intervalu $\langle\beta, +\infty) = \varphi_{-1}((b))$. Počáteční bod a intervalu I patří k I tehdy a jen tehdy, když φ nabývá svého infima a; potom nabývá hodnoty a v jistém intervalu $(-\infty, \alpha\rangle = \varphi_{-1}((a))$. Je-li I° vnitřek intervalu I, je jeho vzorem jistý otevřený interval K.[39]) Je-li $\langle c, d\rangle \subset I^\circ$ $(-\infty < c \leqq d < +\infty)$, je vzorem intervalu $\langle c, d\rangle$ zřejmě jistý uzavřený omezený interval $\langle\gamma, \delta\rangle \subset K$ (na př. γ je nejmenší hodnota u, pro kterou $\varphi(u) = c$); to platí i pro $c = d$.

Poznamenejme: Každý interval $i \subset \mathbf{E}_1$ lze psáti jako disjunktní sjednocení spočetného systému omezených intervalů, jejichž **uzávěry** leží v i. Neboť na př. interval $\langle c, d)$ lze psáti ve tvaru $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \langle c_{n-1}, c_n)$, kde volíme $c = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots$, $\lim c_n = d$, a uzávěry $\langle c_{n-1}, c_n\rangle$ leží v $\langle c, d)$. Tedy: Každou množinu $M \in \mathfrak{C}_1$ lze psáti jako disjunktní sjednocení $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, kde I_n jsou omezené intervaly, *jejichž uzávěry leží v* M. (K systému $\mathfrak{C}_1$ viz definici 3 a větu 5.)

Věta 153. *Budiž g distribuční funkce; budiž φ konečná, spojitá a neklesající v $\mathbf{E}_1$, takže $I = \varphi(\mathbf{E}_1)$ je interval. Budiž $M \subset I^\circ$ (I° značí vnitřek intervalu I). Budiž f funkce g-měřitelná v M, jež je definována všude v M. Potom je*

$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_{\varphi_{-1}(M)} f(\varphi(u))\,\mathrm{d}g(\varphi(u))\,, \tag{114}$$

má-li jeden z obou integrálů smysl (jde stále o Lebesgue-Stieltjesovy integrály).

Důkaz. Budiž $K = \varphi_{-1}(I^\circ)$, takže K je otevřený interval (viz pozn. 2).

Budeme napřed důkaz prováděti za předpokladu, že $M = I^\circ$, takže (114) má tvar

$$\int_{I^\circ} f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_K f(\varphi(u))\,\mathrm{d}g(\varphi(u))\,. \tag{115}$$

---

[39]) Jestliže φ nenabývá ani svého suprema, ani svého infima, je $I = I^\circ$, $K = (-\infty, +\infty)$; naopak; platí-li jedna z těchto rovnic, nenabývá φ ani svého infima ani svého suprema. To platí na př., je-li φ **rostoucí**.

I. Buďte dány g, φ (g distribuční funkce, φ konečná, spojitá a neklesající v $\mathbf{E}_1$); mimo to budiž v tomto odst. I funkce g neklesající v $\mathbf{E}_1$. Budeme říkati, že funkce f má vlastnost V, jestliže platí toto:

1. f je g-měřitelná v I° a nezáporná všude v I°.

2. Platí vzorec (115).

Potom platí:

α) Mají-li f_1, f_2 vlastnost V, má i $f_1 + f_2$ vlastnost V. Důkaz: Sečtu rovnice (115) pro funkce f_1, f_2.[40])

β) Mají-li f_1, f_2 vlastnost V, je-li $f_2(x) \leqq f_1(x)$, $f_2(x)$ konečné všude v I° a je-li $\int\limits_{I^\circ} f_2(x)\, dg(x) < +\infty$, má i $f_1 - f_2$ vlastnost V. Důkaz: Odečtu rovnice (115) pro funkce f_1, f_2.

γ) Mají-li f_n ($n = 1, 2, \ldots$) vlastnost V a je-li $f_n(x) \leqq f_{n+1}(x)$ pro $x \in I^\circ$, $n = 1, 2, \ldots$, má i $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ vlastnost V. Důkaz: Napíši rovnici (115) pro funkci f_n a přejdu vlevo i vpravo k limitě podle věty 57.

δ) Mají-li f_n ($n = 1, 2, \ldots$) vlastnost V, je-li $f_n(x) \geqq f_{n+1}(x)$ pro $x \in I^\circ$, $n = 1, 2, \ldots$ a je-li $\int\limits_{I^\circ} f_1(x)\, dg(x) < +\infty$, má i $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ vlastnost V. Důkaz: Jako v bodě γ, ale užije se věty 65.

A) Budiž $i = \langle a, b\rangle \subset I^\circ$. Potom charakteristická funkce χ_i má vlastnost V. Důkaz: Jest $\varphi_{-1}(i) = \langle\alpha, \beta\rangle$; přitom α je nejmenší číslo, pro které $\varphi(\alpha) = a$; β je největší číslo, pro které $\varphi(\beta) = b$. Pro $f = \chi_i$ je levá strana v (115) rovna g-míře intervalu $\langle a, b\rangle$, t. j. $\lim\limits_{x\to b+} g(x) - g(a)$;[41]) pravá strana je rovna $g * \varphi$ - míře intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$, t. j. $\lim\limits_{u\to\beta+} g(\varphi(u)) - g(\varphi(\alpha))$.[41]) Ježto pro $u > \beta$, $u \to \beta$ je $\varphi(u) > b$, $\varphi(u) \to b$, je zřejmě $\lim\limits_{u\to\beta+} g(\varphi(u)) - g(\varphi(\alpha)) = \lim\limits_{x\to b+} g(x) - g(a)$, t. j. pravá strana v (115) se vskutku rovná levé.

Výsledek platí ovšem i pro $a = b$.

B) Budiž i omezený interval, $\bar{i} \subset I^\circ$. Potom χ_i má vlastnost V. Důkaz: i se dostane z $\bar{i} = \langle a, b\rangle$ případným odečtením intervalů $\langle a, a\rangle$, $\langle b, b\rangle$, načež se užije **A**, β).

[40]) Znamení zde nepůsobí obtíží.
[41]) Viz § 5, věta 144 a pozn. 1.

C) Je-li $M \in \mathfrak{A}_1$, $\overline{M} \in I^\circ$, má χ_M vlastnost V. Důkaz plyne z **B**, α).

D) Je-li $M \in \mathfrak{C}_1$, $M \subset I^\circ$, má χ_M vlastnost V. Důkaz: Podle pozn. 2 je $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} i_n$ (disjunktní sjednocení omezených intervalů), kde $\bar{i}_n \subset I^\circ$. Podle **C** mají charakteristické funkce množin $M_n = i_1 \cup \ldots \cup i_n$ vlastnost V a nyní se užije γ).

E) Je-li $M \subset I^\circ$ omezená množina typu G_δ, má χ_M vlastnost V. Důkaz: Lze psáti $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde $G_n \supset G_{n+1}$, $G_n \subset I^\circ$ a G_n jsou otevřené (tedy $G_n \in \mathfrak{C}_1$). Nyní se užije **D)** a δ).

F) Je-li $M \subset I^\circ$ typu G_δ, má χ_M vlastnost V. Důkaz: M lze psáti jako limitu rostoucí posloupnosti omezených množin typu G_δ, načež se užije **E**, γ).

G) Je-li $M \subset I^\circ$ a má-li M g-míru rovnou nule, má χ_M vlastnost V. Důkaz: Existuje množina N typu G_δ o g-míře rovné nule, pro kterou $M \subset N \subset I^\circ$.

Podle **F)** je

$$0 = \int_{I^\circ} \chi_M(x) \, dg(x) = \int_{I^\circ} \chi_N(x) \, dg(x) = \int_K \chi_N(\varphi(u)) \, dg(\varphi(u)) \, .$$

To však znamená, že $\chi_N(\varphi(u))$ je $g * \varphi$ - skoro všude v K rovno nule a tedy i $\chi_M(\varphi(u))$ je $g * \varphi$ - skoro všude v K rovno nule (neboť $\chi_N(\varphi(u)) = 0 \Rightarrow \chi_M(\varphi(u)) = 0$). Tedy je i $\int_K \chi_M(\varphi(u)) \, dg(\varphi(u)) = 0$, t. j. pro $f = \chi_M$ platí rovnice (115).

H) Budiž $M \subset I^\circ$ množina g-měřitelná; potom χ_M má vlastnost V. Důkaz: $M = N \dot{-} P$, kde $P \subset N \subset I^\circ$, N je typu G_δ, P má g-míru rovnou nule. Jest $\chi_M = \chi_N - \chi_P$, načež se užije **F**, **G**, β).

K) Uvědomme si tento důsledek: *Je-li $M \subset I^\circ$ g-měřitelná, je $\varphi_{-1}(M)$ $g * \varphi$-měřitelná.* Neboť podle bodu **H)** existuje pro $f = \chi_M$ integrál v (115) vpravo, což je

$$\int_K \chi_M(\varphi(u)) \, dg(\varphi(u)) \, ,$$

a přitom zřejmě $\chi_M(\varphi(u)) = \chi_{\varphi_{-1}(M)}(u)$.

L) Každá funkce jednoduchá, konečná, g-měřitelná a nezáporná v I° má vlastnost V. To plyne ihned z **H)**, neboť taková funkce je lineární kombinací charakteristických funkcí měřitelných množin s nezápornými konečnými koeficienty.

M) Každá funkce nezáporná a g-měřitelná v I° má vlastnost V. Neboť takovou funkci lze vyjádřit podle věty 39 jako limitu neklesající posloupnosti funkcí (jednoduchých), jež podle **L)** mají vlastnost V, načež se užije γ).

II. Budiž $M \subset I^\circ$ g-měřitelná (g neklesající), takže podle **K)** je $\varphi_{-1}(M)$ množina $g * \varphi$-měřitelná. Budiž f nezáporná a g-měřitelná v M. Položíme-li $f(x) = 0$ pro $x \in I^\circ \dot{-} M$, je $f(\varphi(u)) = 0$ pro $u \in K \dot{-} \varphi_{-1}(M)$. Proto lze rovnici (115) — která podle **M)** platí — psáti ve tvaru (114). Budiž za druhé g neklesající, ale vynechme předpoklad, že $f(x) \geqq 0$. Potom napíši rovnici (114) pro funkci f^+ a f^- a odečtu. Tím je věta dokázána pro neklesající g. Konečně v obecném případě rozložím g na positivní a negativní variaci $g(x) = p(x) - n(x)$ a napíši rovnici

$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}p(x) = \int_{\varphi_{-1}(M)} f(\varphi(u))\,\mathrm{d}p(\varphi(u))$$

a obdobnou rovnici pro $n(x)$ (rovnice platí, má-li jedna strana smysl). Tyto rovnice odečtu; ježto $p(\varphi(u))$, $n(\varphi(u))$ jsou podle pozn. 1 právě positivní a negativní variace funkce $g(\varphi(u))$, znamená rozdíl

$$\int_{\varphi_{-1}(M)} f(\varphi(u))\,\mathrm{d}p(\varphi(u)) - \int_{\varphi_{-1}(M)} f(\varphi(u))\,\mathrm{d}n(\varphi(u))$$

co do existence i co do hodnoty totéž jako $\int_{\varphi_{-1}(M)} f(\varphi(u))\,\mathrm{d}g(\varphi(u))$. Tím je důkaz hotov.

Z této věty plyne speciálně věta o Lebesgueově integrálu:

Věta 154. *Budiž φ funkce absolutně spojitá a monotonní v $\langle\alpha, \beta\rangle$ $(-\infty < \alpha < \beta < +\infty)$. Budiž f definována všude v $\langle\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\rangle$,*[42] *budiž $f(x)$ měřitelná (podle Lebesguea) v $\langle\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\rangle$*[42] *a budiž $f(\varphi(u))$ měřitelná (podle Lebesguea) v $\langle\alpha, \beta\rangle$. Potom je*

[42]) Je-li φ nerostoucí, je $\varphi(\beta) \leqq \varphi(\alpha)$ a tedy bych vlastně měl psát $\langle\varphi(\beta), \varphi(\alpha)\rangle$.

$$(116) \qquad \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u\,,$$

má-li jeden z obou integrálů smysl (jde o Lebesgueovy integrály).

Důkaz. I. Budiž napřed φ neklesající; doplňme definici funkce φ, kladouce $\varphi(u) = \varphi(\alpha) + u - \alpha$ pro $u < \alpha$, $\varphi(u) = \varphi(\beta) + u - \beta$ pro $u > \beta$, takže φ je absolutně spojitá uvnitř $\mathbf{E}_1$. Položme $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$; zřejmě $\varphi_{-1}(\langle a, b\rangle) = \langle\alpha, \beta\rangle$. Užijme věty 153 pro $g(x) = x$, tedy $g(\varphi(u)) = \varphi(u)$; vychází

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\langle\alpha,\beta\rangle} f(\varphi(u))\,\mathrm{d}\varphi(u)\,,$$

má-li jedna strana smysl. Podle věty 145 znamená však pravá strana totéž co $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.

II. Budiž φ nerostoucí. Položme $F(x) = f(-x)$, $\Phi(u) = -\varphi(u)$, takže Φ je neklesající. Potom podle pozn. 2 v kap. VII, § 1 a podle bodu I je

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\varphi(\alpha)}^{-\varphi(\beta)} f(-x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(\beta)} F(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_{\alpha}^{\beta} F(\Phi(u))\,\Phi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u\,,$$

má-li některý z napsaných integrálů smysl.

Věty 154 (kterou jsem pro jednoduchost vyslovil a dokázal jen pro omezené integrační intervaly) lze užíti v mnohých případech, kdy věty 104 užíti nemůžeme (na př. tehdy, když množina oněch bodů, v nichž φ nemá derivaci, je hustá v $\langle\alpha, \beta\rangle$). Je také možno dokázati jiným způsobem malé zobecnění věty 154; na př. je zbytečno zvláště předpokládati měřitelnost funkce $f(\varphi(u))$.