KAPITOLA XIII

FOURIEROVY ŘADY

Je-li $l \neq 0$ konečné reálné číslo, říkáme, že funkce f (jedné proměnné) má periodu l, jestliže platí toto: Je-li definována hodnota $f(\xi)$, je definována i hodnota $f(\xi + ml)$ pro každé celé m a je $f(\xi + ml) = f(\xi)$. Znak $f \in \mathbf{L}(a, b)$ značí, jak víme, že Lebesgueův integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje. Je-li $0 < l < +\infty$, nechť $f \in \mathcal{P}(l)$ značí, že f má periodu l a že $f \in \mathbf{L}(0, l)$; v důsledku periodicity je pak $f \in \mathbf{L}(a, b)$ pro každou dvojici a, b $(-\infty < a < b < +\infty)$. U funkce f s periodou l má $\int_0^l f(x)\,dx$ týž smysl jako $\int_\xi^{\xi+l} f(x)\,dx$ pro jakékoliv $\xi \in \mathbf{E}_1$ (viz kap. VII, § 1, pozn. 4). Všechny konvergentní integrály v této kapitole značí Lebesgueovy (neboli „absolutně konvergentní“) integrály, pokud není výslovně jinak řečeno. Připouštějí se obecně komplexní funkce reálné proměnné, pokud není jinak řečeno; důkazy jsou prováděny často jen pro reálné funkce, jestliže důkaz pro komplexní funkci se dostane prostě sečtením reálné a imaginární části.

§ 1. Trigonometrické polynomy a řady. Budiž n celé, $n \geqq 0$; a_k, b_k komplexní čísla. Potom funkci (v oboru $\mathbf{E}_1$)

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

nazýváme trigonometrickým polynomem (o periodě 2π) stupně nejvýše n-tého. Je-li aspoň jedno z čísel a_n, b_n různé od nuly, říkáme, že T je stupně n-tého[1]). Užitím vztahů

$$\cos z = \tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

[1]) Zavedení součinitele $\frac{1}{2}$ při a_0 jest ovšem jen formalita; ale je účelná při výpočtech. V pozn. 1 dokážeme, že funkci $T(x)$ je možno jen jedním způsobem vyjádřiti trigonometrickým polynomem o periodě 2π.

můžeme T přepsati do tvaru

$$T(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) , \tag{2}$$

$$c_0 = \tfrac{1}{2} a_0, \; c_k = \tfrac{1}{2}(a_k - ib_k), \; c_{-k} = \tfrac{1}{2}(a_k + ib_k) \text{ pro } k > 0 . \tag{3}$$

Trigonometrický polynom (1) je podle (3) stupně právě n-tého tehdy a jen tehdy, je-li aspoň jedno z čísel c_n, c_{-n} různé od nuly.

Poznámka 1. Budiž (1) stupně n-tého;[2]) položíme-li $e^{ix} = z$ (tedy $z \neq 0$), můžeme podle (2) psáti

$$T(x) = \frac{1}{z^n} (c_0 z^n + \sum_{k=1}^{n} (c_k z^{k+n} + c_{-k} z^{-k+n})) =$$

$$= z^n \left(c_0 \left(\frac{1}{z} \right)^n + \sum_{k=1}^{n} \left(c_k \left(\frac{1}{z} \right)^{-k+n} + c_{-k} \left(\frac{1}{z} \right)^{k+n} \right) \right) .$$

Je-li $c_n \neq 0$, je první závorka polynom v z stupně $2n$; je-li však $c_{-n} \neq 0$, je druhá závorka polynom v $\frac{1}{z}$ stupně $2n$. Tedy existuje nejvýše $2n$ různých hodnot z, pro něž $T(x) = 0$ (kde $e^{ix} = z$).

V každém polouzavřeném intervalu délky 2π leží proto nejvýše $2n$ různých hodnot x, pro které $T(x) = 0$, ježto dvěma různým hodnotám x takového intervalu odpovídají dvě různé hodnoty z [3]).

Odtud plyne, že funkci $T(x)$, která je trigonometrickým polynomem, lze vyjádřiti jako trigonometrický polynom jediným způsobem, t. j. koeficienty a_k, b_k, c_k v (1), (2) a tedy též stupeň polynomu jsou funkcí T jednoznačně určeny. Je-li totiž pro všechna $x \in \mathbf{E}_1$ (nebo aspoň pro nekonečně mnoho hodnot x, ležících v omezeném intervalu)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) ,$$

je nutně (převeďte vše na levou stranu) $A_0 = a_0, \ldots, A_n = a_n$, $B_1 = b_1, \ldots, B_n = b_n$ (jinak by totiž rozdíl obou trigonometrických polynomů měl jistý stupeň m, $0 \leqq m \leqq n$ — viz [2]) — což není možné).

[2]) Jestliže všechny koeficienty jsou rovny nule, nepřisuzujeme trigonometrickému polynomu žádný stupeň (podobně jako u obyčejných polynomů $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$).

[3]) Rovnice $e^{ix} = e^{iy}$ platí totiž jen tehdy, je-li $y - x = 2k\pi$ (k celé).

Obdobně k trigonometrickým polynomům nazýváme každou nekonečnou řadu tvaru

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{4}$$

(ať je konvergentní či divergentní) **trigonometrickou řadou** o periodě 2π; tuto řadu lze opět psáti ve tvaru

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) , \tag{5}$$

při čemž platí (3). Funkce $T(x)$ v (1) má ovšem periodu 2π. Totéž platí o součtu řady (4); podrobněji: Je-li řada (4) konvergentní pro hodnotu $x = \xi$, je konvergentní a má týž součet pro všechny hodnoty x tvaru $\xi + 2m\pi$ (m celé).

Budeme se často zabývati t. zv. **reálnými** trigonometrickými polynomy a řadami, u nichž a_k, b_k jsou reálná. Obecný případ se potom dostane prostě sečtením reálné a imaginární části. Proměnná x bude ovšem reálná.

K trigonometrickým řadám jsme vedeni, když v mocninné řadě

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots \quad (c_k = a_k + ib_k;\ a_k, b_k \text{ reálná}) \tag{6}$$

dosadíme za komplexní proměnnou z výraz re^{ix} ($r > 0$, x reálné). Reálná a imaginární část mocninné řady (6) jsou pak trigonometrické řady

$$\begin{aligned} &a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k r^k \cos kx - b_k r^k \sin kx) , \\ &b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k r^k \cos kx + a_k r^k \sin kx) . \end{aligned} \tag{7}$$

Dovedeme-li sečísti mocninnou řadu (6), dovedeme sečísti i řady (7). Tímto způsobem lze skutečně sečísti mnoho trigonometrických řad; často přitom užíváme též věty Abelovy (**D II**, věta 236). Vezměme jen jeden příklad.

Příklad 1. Pro $|z| < 1$ (z komplexní) známe z **D II**, kap. XII, § 5 rovnici

$$-\lg (1 - z) = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots \tag{8}$$

Řada vpravo je tedy konvergentní pro $z = re^{ix}$, $0 \leqq r < 1$, x reálné. Ale řada vpravo je konvergentní i pro $z = e^{ix}$, pokud x je reálné, $e^{ix} \neq 1$. Neboť potom jest pro každé $n \in \boldsymbol{N}$

$$(9) \qquad |e^{ix} + e^{2ix} + \ldots + e^{nix}| = \left|\frac{e^{ix} - e^{(n+1)ix}}{1 - e^{ix}}\right| \leqq \frac{2}{|1 - e^{ix}|},$$

což je číslo nezávislé na n. Z toho podle věty 44 v **D II** plyne, že řada vpravo v (8) je konvergentní pro $z = e^{ix}$, $e^{ix} \neq 1$. Podle Abelovy věty platí tedy toto: je-li x takové, že $e^{ix} \neq 1$, jest

$$(10) \qquad \lim_{r \to 1-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} r^k e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{ikx}.$$

Podobná limitní rovnice platí tedy i pro reálnou a imaginární část. Na př. srovnáním reálných částí dostáváme z (8) pro $0 \leqq r < 1$

$$(11) \qquad -\lg |1 - re^{ix}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k} \cos kx$$

a odtud podle (10) limitním přechodem $r \to 1-$

$$(12) \qquad \begin{aligned} -\lg |1 - e^{ix}| &= -\lg |e^{\frac{1}{2}ix} - e^{-\frac{1}{2}ix}| = -\lg\left(2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}, \end{aligned}$$

pokud x není tvaru $2m\pi$ (m celé). Na př. máme

$$(13) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} = -\lg\left(2 \sin\frac{x}{2}\right) \text{ pro } 0 < x < 2\pi.$$

Podobně bychom mohli srovnáním imaginárních částí sečísti řadu $\sum k^{-1} \sin kx$, s níž se ostatně ještě setkáme. Řadu příkladů k stanovení součtu trigonometrické řady z příslušné řady mocninné viz v **D II**, kap. XII, § 5.

Poznámka 2. Poněkud obecněji budeme vyšetřovati trigonometrické řady o libovolné periodě l ($l > 0$), t. j. řady tvaru (rovnítko je míněno formálně: k-tý člen je týž u obou řad)

$$(14)\qquad \begin{aligned}&\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2k\pi}{l}x + b_k \sin\frac{2k\pi}{l}x\right) = \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}x} + c_{-k} e^{-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}x}\right),\end{aligned}$$

kde ovšem opět platí (3); obdobně trigonometrické polynomy o periodě l. Zobecnění je nepodstatné: substituce $\frac{2\pi}{l}x = x'$ převádí řadu (14) na tvar (4), (5). Proto budeme často věty vyslovovati jen pro periodu 2π, ale užívati jich budeme pro libovolnou periodu l. Rozdíl mezi oběma řadami v (14) je rovněž pouze formální; budeme užívati jedné nebo druhé, podle toho, co bude právě pohodlnější.

§ 2. Definice Fourierovy řady. Budiž $l > 0$, $\xi \in \mathbf{E}_1$; buďte m, n přirozená čísla. Potom jest

$$(15)\qquad \int_{\xi}^{\xi+l} \mathrm{d}x = l,\ \int_{\xi}^{\xi+l} \cos\frac{2m\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = \int_{\xi}^{\xi+l} \sin\frac{2m\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

$$\int_{\xi}^{\xi+l} \cos\frac{2m\pi}{l}x \sin\frac{2n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

$$\int_{\xi}^{\xi+l} \cos\frac{2m\pi}{l}x \cos\frac{2n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = \int_{\xi}^{\xi+l} \sin\frac{2m\pi}{l}x \sin\frac{2n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = 0 \text{ pro } m \neq n\,,$$

$$\int_{\xi}^{\xi+l} \cos^2\frac{2m\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = \int_{\xi}^{\xi+l} \sin^2\frac{2m\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = \frac{l}{2}\,.$$

Důkaz plyne ihned přímým výpočtem, užijeme-li vzorců $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$, $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\,.\,\cos(\alpha-\beta)$, $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$. Odtud plyne ihned tato věta:

Věta 179. *Budiž* $l > 0$; *nechť řada* (14) *je stejnoměrně konvergentní v* $(-\infty, +\infty)$; *její součet označme* $f(x)$.[4]) *Potom jest*

[4]) Vzhledem k periodicitě funkcí cosinus a sinus stačí, je-li konvergence stejnoměrná v nějakém polouzavřeném intervalu délky l. Součet řady, t. j. funkce f, má pak periodu l.

$$(16)\quad a_0 = \frac{2}{l}\int_{\xi}^{\xi+l} f(x)\,dx\,,\quad a_k = \frac{2}{l}\int_{\xi}^{\xi+l} f(x)\cos\frac{2k\pi}{l}x\,dx\,,$$
$$b_k = \frac{2}{l}\int_{\xi}^{\xi+l} f(x)\sin\frac{2k\pi}{l}x\,dx \text{ pro } k > 0\,;$$

$$(17)\quad c_k = \frac{1}{l}\int_{\xi}^{\xi+l} f(x)\,e^{-\frac{2k\pi i}{l}x}\,dx \text{ pro každé celé } k\,.$$

Důkaz. Násobíme-li v rovnici

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2k\pi}{l}x + b_k\sin\frac{2k\pi}{l}x\right)$$

obě strany číslem $\cos\frac{2m\pi}{l}x$ nebo $\sin\frac{2m\pi}{l}x$ a integrujeme potom člen po členu od ξ do $\xi + l$ (což smíme podle věty 56),[5]) obdržíme vzhledem k (15) vzorce (16); z (3) pak ihned plyne (17).

Poznámka 1. Vzhledem k periodičnosti nezávisí čísla (16), (17) na volbě čísla ξ. Napišme ještě zvlášť odvozené vzorce pro periodu 2π:

$$(18)\quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{\xi}^{2\pi+\xi} f(x)\cos kx\,dx\,,\quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{\xi}^{2\pi+\xi} f(x)\sin kx\,dx\,,$$
$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{\xi}^{2\pi+\xi} f(x)\,e^{-ikx}\,dx\,.$$

Ve větě 179 jsme dokázali toto: Je-li funkce $f(x)$ rozvinutelna v trigonometrickou řadu (14), stejnoměrně konvergentní[5]) v $(-\infty, +\infty)$, jsou koeficienty a_k, b_k nutně dány vzorci (16). Ale integrály v (16) existují vždy, kdykoliv je $f(x) \in \mathsf{L}(\xi, \xi + l)$; můžeme proto ke každé takové funkci f sestrojiti řadu (14) (v prvním nebo druhém tvaru), při čemž koeficienty a_k, b_k, po případě c_k jsou dány vzorci (16), (17). Tuto řadu nazýváme Fourierovou řadou funkce f pro interval $\langle\xi, \xi + l\rangle$. Řekněme to jako definici:

[5]) Místo stejnoměrné konvergence stačí na př. též předpokládati, že částečné součty řady (14) mají společnou „integrabilní majorantu“ (věta 65).

Definice 28. *Budiž $f \in \mathsf{L}(\xi, \xi + l)$ $(l > 0)$. Řadu (14),[6]) v níž čísla a_k, b_k (po příp. c_k) jsou určena rovnicemi (16) (po příp. (17)), nazýváme Fourierovou řadou funkce $f(x)$ pro interval $\langle \xi, \xi + l\rangle$ a tento vztah vyjadřujeme symbolem*

$$f(x) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{2k\pi}{l} x\right) \text{ v int. } \langle \xi, \xi + l\rangle .^{7)} \tag{19}$$

Čísla a_k, b_k, po případě c_k nazýváme Fourierovými koeficienty funkce f v $\langle \xi, \xi + l\rangle$.[8])

Prosím čtenáře, aby pečlivě rozlišoval symboly $\sim$, $\cong$, $\approx$:

$f \sim g$ znamená, že skoro všude je $f(x) = g(x)$; též se tak označuje ekvivalence množin.

$f \cong g$ znamená, že $\lim\,(f(x) : g(x)) = 1$;

vzorec (19) $f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum \ldots$ znamená, že řada vpravo je Fourierovou řadou funkce f, t. j. že její koeficienty a_k, b_k jsou dány vzorci (16).

Na rozdíl od znaků $\sim$, $\cong$ neříká tedy znak $\approx$ prozatím nic o hodnotě pravé strany (ani — dokonce — o konvergenci řady) v (19). Tyto vztahy ($\sim$, $\cong$, $\approx$) je ještě třeba precisovati, jak víme: na př. píšeme $f \sim g$ $(M; \mu)$ atd.

V literatuře se často vyskytuje jen jeden znak; ale zavedl jsem tři, aby nevznikl omyl.

Poznámka 2. Ze vzorců (16), (17) je patrno: Má-li funkce $f(x)$ Fourierovy koeficienty a_k, b_k a funkce $g(x)$ Fourierovy koeficienty a'_k, b'_k,[9]) má funkce $A\,f(x) + B\,g(x)$ (A, B konstanty) Fourierovy koeficienty $Aa_k + Ba'_k$, $Ab_k + Bb'_k$. Obdobně pro koeficienty, dané vzorcem (17).

Poznámka 3. Má-li funkce $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ Fourierovy koeficienty[9]) $a_k^{(n)}$, $b_k^{(n)}$ a je-li řada $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ stejnoměrně konvergentní v $\langle \xi, \xi + l\rangle$,[10]) má funkce f Fourierovy koeficienty

[6]) V prvním nebo druhém tvaru.

[7]) Podobného symbolu užíváme při druhém tvaru řady (14). Dodatek „v int. $\langle \xi, \xi + l\rangle$" vynecháváme, je-li jasno, o který interval jde. Funkce f nemusí být periodická.

[8]) Ze souvislosti bude vždy patrno, zda jde o koeficienty (16) či (17).

[9]) Všechno stále pro týž interval $\langle \xi, \xi + l\rangle$.

[10]) Stačí opět, mají-li částečné součty $f_1 + \ldots + f_n$ společnou integrabilní majorantu.

$$(20) \qquad a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_k^{(n)}\,, \quad b_k = \sum_{n=1}^{\infty} b_k^{(n)}\,.$$

Důkaz. Ve vzorci

$$a_k = \frac{2}{l} \int_{\xi}^{\xi+l} (f_1(x) + f_2(x) + \ldots) \cos \frac{2k\pi}{l} x \, \mathrm{d}x$$

lze integrovati člen po členu; podobně pro b_k.

Obdobný výsledek platí pro koeficienty c_k v (17).

Poznámka 4. Je-li

$$(21) \qquad f(x) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{2k\pi}{l} x \right)$$

v $\langle \xi, \xi + l \rangle$, máme pro $\alpha \in \mathbf{E}_1$, $\beta \in \mathbf{E}_1$, $\alpha \neq 0$ a pro funkce g, h, definované vztahy $g(x) = f(\alpha x)$, $h(x) = f(x - \beta)$ tyto Fourierovy řady:

$$(22) \qquad g(x) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\alpha k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{2\alpha k\pi}{l} x \right) \quad \text{v} \left\langle \frac{\xi}{\alpha}, \frac{\xi + l}{\alpha} \right\rangle,$$

$$(23) \qquad h(x) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi}{l} (x - \beta) + b_k \sin \frac{2k\pi}{l} (x - \beta) \right) \quad \text{v} \langle \xi + \beta, \xi + \beta + l \rangle\,.$$

K tomu napřed malou poznámku: Předně, abychom v (23) dostali k-tý člen v obvyklém tvaru, musíme rozepsat

$$\cos \frac{2k\pi}{l} (x - \beta) = \cos \frac{2k\pi}{l} \beta \,.\, \cos \frac{2k\pi}{l} x + \sin \frac{2k\pi}{l} \beta \,.\, \sin \frac{2k\pi}{l} x$$

a podobně pro sinus. Za druhé, při vztahu (22) bychom pro $\alpha < 0$ měli psáti interval $\left\langle \frac{\xi + l}{\alpha}, \frac{\xi}{\alpha} \right\rangle$ $\left(\text{délky } \frac{l}{|\alpha|} > 0 \right)$ a k-tý člen bychom (pro $\alpha < 0$) měli psáti ve tvaru $a_k \cos \frac{2|\alpha|\, k\pi}{l} x - b_k \sin \frac{2|\alpha|\, k\pi}{l} x$, ježto jde o interval délky $l : |\alpha|$ a ne $l : \alpha$. Důkaz ihned ze vzorců (16); na př. „sinusový“ koeficient v řadě pro $g(x) = f(\alpha x)$ při záporném α je (substituce $\alpha x = t$)

$$\frac{2|\alpha|}{l}\int_{\frac{\xi+l}{\alpha}}^{\frac{\xi}{\alpha}} f(\alpha x)\sin\frac{2|\alpha|\,k\pi}{l}\,x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{l}\int_{\xi}^{\xi+l} f(t)\sin\left(-\frac{2k\pi}{l}\,t\right)\mathrm{d}t = -\,b_k\,.$$

Vzorce (22), (23) se pamatují velmi snadno: do řady (21) se formálně místo x píše αx nebo $x - \beta$, načež příslušný interval je ten, který musí proběhnout x, má-li αx po příp. $x - \beta$ proběhnout interval $\langle \xi, \xi + l \rangle$.

Poznámka 5. Má-li funkce f periodu l, můžeme v (16), (17) číslo ξ jakkoliv změnit; nemá-li však f periodu l, dostali bychom po této změně v (16), (17) obecně jiná čísla.[11])

Poznámka 6. Nechť má f periodu l, takže v (16), (17) můžeme psáti meze $-\frac{1}{2}l$, $\frac{1}{2}l$. Potom z (16) a z (3) ihned plyne:

I. Je-li funkce f reálná, jsou a_k, b_k reálná a tedy c_k, c_{-k} komplexně sdružená. (Zde ještě není třeba předpokládati periodičnost.)

II. Je-li f sudá (t. j. $f(-x) = f(x)$), je $b_k = 0$ pro $k > 0$, a tedy $c_k = c_{-k}$.

III. Je-li f lichá (t. j. $f(-x) = -f(x)$), je $a_k = 0$ pro $k \geqq 0$, a tedy $c_0 = 0$, $c_k = -c_{-k}$ pro $k > 0$.

§ 3. Částečné součty Fourierovy řady. V dalším, pokud výslovně nepodotknu něco jiného, budu mluviti o Fourierově řadě pro interval $\langle \xi, 2\pi + \xi \rangle$; slova „periodická funkce" budou značiti funkci s periodou 2π a pod.

Každé funkci $f(x) \in \mathbf{L}(\xi, 2\pi + \xi)$ jsme přiřadili Fourierovu řadu

$$\tag{24} \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,,$$

jež je ostatně totožná s řadou

$$\tag{25} c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx})\,;$$

---

[11]) Jinými slovy: funkce s periodou l má touž Fourierovu řadu v intervalu $\langle \xi, \xi + l \rangle$ jako v $\langle \eta, \eta + l \rangle$; nemá-li f periodu l, mohou tyto dvě řady být různé.

přitom koeficienty jsou dány vzorci (18). Nyní nás přirozeně zajímá, jaký vztah má tato řada k funkci f, na př. zda je konvergentní a zda má součet $f(x)$, či nějaký jiný součet úzce související s hodnotami funkce f.

Znakem $s_m(x)$ označme součet $m + 1$ prvních členů Fourierovy řady (24) neboli (25) — a podržme toto označení. (Tedy $s_0(x) = \frac{1}{2}a_0$ atd.) Obecný člen řady (25) má podle (18) tvar (integrační proměnnou označuji v)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\xi}^{2\pi+\xi} f(v)\,(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(v-x)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(v-x)})\,\mathrm{d}v\,;$$

je-li funkce f periodická — což na chvíli předpokládejme — můžeme volit integrační meze $x - \pi$, $x + \pi$ a sečtením obdržíme

$$s_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(v) \sum_{k=-m}^{m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(v-x)}\,\mathrm{d}v\,. \tag{26}$$

$$\sum_{k=-m}^{m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+1)y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}my}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+\frac{1}{2})y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m+\frac{1}{2})y}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}y}} = \frac{\sin(m + \frac{1}{2})y}{\sin\frac{1}{2}y}\,, \tag{27}$$

pokud není $y = 2p\pi$ (p celé). Odtud

$$s_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(v)\,\frac{\sin(m + \frac{1}{2})(v - x)}{\sin\frac{1}{2}(v - x)}\,\mathrm{d}v\,. \tag{28}$$

Interval integrační rozdělíme na dvě části: v $\langle x, x + \pi\rangle$ zavedeme substituci $v = x + 2t$, v $\langle x - \pi, x\rangle$ substituci $v = x - 2t$; obdržíme ihned

$$s_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} (f(x + 2t) + f(x - 2t))\,\frac{\sin(2m + 1)\,t}{\sin t}\,\mathrm{d}t\,. \tag{29}$$

Shrňme:

Věta 180. *Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. Potom pro součet $s_m(x)$ prvních $m + 1$ členů Fourierovy řady platí vzorce* (28), (29).

Podotkněme: pro konstantní funkci $f(x) = 1$ je zřejmě v (24) $\frac{1}{2}a_0 = 1$, $a_k = b_k = 0$ pro $k > 0$, tedy $s_m(x) = 1$, tedy podle (29)

$$(30) \qquad \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin (2m + 1) t}{\sin t} \, dt = 1 \text{ pro } m = 0, 1, 2, \dots$$

Věta 180 nám poskytuje formální aparát, s nímž budeme pracovati.

§ 4. Věta o lokalisaci. Napřed odvodíme tuto důležitou větu:

Věta 181 (Riemann). *Budiž* $\varphi \in \mathbf{L}(a, b)$ $(-\infty \leqq a < b \leqq +\infty)$. *Potom pro* $a \leqq \alpha \leqq b$, $a \leqq \beta \leqq b$ *je*

$$(31) \qquad \lim_{\mu \to +\infty} \int_\alpha^\beta \varphi(x) \cos \mu x \, dx = \lim_{\mu \to +\infty} \int_\alpha^\beta \varphi(x) \sin \mu x \, dx = 0 \,;$$

konvergence je stejnoměrná vzhledem k α, β *v oboru* $a \leqq \alpha \leqq b$, $a \leqq \beta \leqq \leqq b$.

V limitním přechodu (31) je μ „spojitě proměnná", t. j. jde o limitu pro $\mu \to +\infty$, $\mu \in \mathbf{E}_1$ a ne pro $\mu \in \mathbf{N}$.

Důkaz. Bez újmy obecnosti budiž φ definována všude v $\langle a, b \rangle$. Položme $\varphi(x) = 0$ pro $x < a$ a pro $x > b$, takže smíme předpokládati $a = -\infty$, $b = +\infty$. Budiž dáno $\varepsilon > 0$ (jež bude pevné až do konce důkazu). Podle věty 51 existuje číslo p $(0 < p < +\infty)$ tak, že

$$(32) \qquad \int_{-\infty}^{-p} |\varphi(x)| \, dx + \int_p^{+\infty} |\varphi(x)| \, dx < \varepsilon \,.$$

Podle téže věty existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(33) \qquad \text{míra } (M) < \delta \Rightarrow \int_M |\varphi(x)| \, dx < \varepsilon \,.^{12})$$

Budiž M_n množina oněch $x \in \langle -p, p \rangle$, pro něž je $|\varphi(x)| > n$. Ježto φ je skoro všude konečná, je

$$\text{míra } \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n\Big) = 0 \,, \quad M_n \supset M_{n+1} \,, \quad \text{míra } (M_1) \leqq 2p \,,$$

[12]) Píši „míra (M)" místo $\mu(M)$, aby se to nemátlo s číslem μ.

takže (věta 24) $\lim$ míra $(M_n) = 0$. Existuje tedy $n \in N$ tak, že míra $(M_n) < \delta$ a tedy podle volby čísla δ (viz (33)) je

$$(34) \qquad \int_{M_n} |\varphi(x)|\, dx < \varepsilon\,; \quad |\varphi(x)| \leqq n \text{ pro } x \in \langle -p, p\rangle \dot{-} M_n\,.$$

Podržíme nyní pevně tato čísla n, p. Položme $f(x) = \varphi(x)$ pro $x \in \langle -p, p\rangle \dot{-} M_n$, $f(x) = 0$ pro ostatní x, takže všude je $|f(x)| \leqq n$.

Podle Luzinovy věty 40 existuje otevřená množina A míry menší než $\frac{\varepsilon}{n}$ tak, že f je spojitá v neprázdné uzavřené množině $\langle -p, p\rangle \dot{-} A$;[13]) mimo to je všude $|f(x)| \leqq n$. Podržme v dalším takové A. Sestrojme nyní k funkci f funkci g tak, jak je to popsáno v **D II**, pozn. 3 (str. 169—170) v kap. V, § 5; t. j. definujeme $g(x) = f(x)$ v $\langle -p, p\rangle \dot{-} A$ a v uzávěru každého styčného intervalu této množiny budiž g lineární funkcí. Podle věty 77 v **D II** je g spojitá v $\langle -p, p\rangle$ a je ovšem též $|g(x)| \leqq n$ v $\langle -p, p\rangle$. Ježto g je v tomto intervalu stejnoměrně spojitá, existuje $m \in N$ tak, že

$$(35) \qquad \left(-p \leqq x \leqq p,\ -p \leqq y \leqq p,\ |x - y| \leqq \frac{2p}{m}\right) \Rightarrow \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{p}\,.$$

Podržme v dalším takové m.

Budiž nyní $0 < \mu < +\infty$, $-\infty \leqq \alpha < \beta \leqq +\infty$.

Položme

$$(36) \qquad I_1(\mu) = \int_\alpha^\beta \varphi(x) \cos \mu x\, dx\,, \quad I_2(\mu) = \int_\alpha^\beta f(x) \cos \mu x\, dx\,.$$

Podle (32), (34) je zřejmě

$$(37) \qquad |I_1(\mu) - I_2(\mu)| < 2\varepsilon\,.$$

I. Jestliže $\langle -p, p\rangle \,.\, (\alpha, \beta) = \emptyset$, je zřejmě $I_2(\mu) = 0$, tedy

$$(38) \qquad |I_1(\mu)| < 2\varepsilon\,.$$

[13]) Můžeme předpokládat, že body $-p, p$ nepatří k A; kdyby patřily k A, tedy je vynechám, načež se stanou isolovanými body množiny $\langle -p, p\rangle \dot{-} A$, takže spojitost v těchto bodech je triviální.

II. Je-li však $\langle -p, p\rangle \,.\, (\alpha, \beta) \neq \emptyset$, položme $\alpha_1 = \mathrm{Max}\,(-p, \alpha)$, $\beta_1 = \mathrm{Min}\,(p, \beta)$, načež $-p \leqq \alpha_1 < \beta_1 \leqq p$ a zřejmě

$$I_2(\mu) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x) \cos \mu x \,\mathrm{d}x\,. \tag{39}$$

Položíme-li v tomto případě

$$I_3(\mu) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} g(x) \cos \mu x \,\mathrm{d}x\,, \tag{40}$$

je

$$|I_2(\mu) - I_3(\mu)| \leqq 2n\,.\,\text{míra}\,(A) < 2\varepsilon\,. \tag{41}$$

Rozdělme nyní $\langle\alpha_1, \beta_1\rangle$ body $\alpha_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = \beta_1$ na m stejných dílů,[14] jejichž délky jsou vesměs nejvýše rovny $\dfrac{2p}{m}$. Potom je

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) \cos \mu x \,\mathrm{d}x &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x) - g(x_i)) \cos \mu x \,\mathrm{d}x\, + \\ &+ g(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos \mu x \,\mathrm{d}x\,.\end{aligned} \tag{42}$$

Podle (35) je zde první sčítanec vpravo v absolutní hodnotě nejvýše $\dfrac{\varepsilon}{p}\,.\,\dfrac{2p}{m} = \dfrac{2\varepsilon}{m}$, druhý nejvýše $n\,.\,\dfrac{2}{\mu}$. Sečtu-li přes $i = 1, \ldots, m$, dostanu

$$|I_3(\mu)| \leqq 2\varepsilon + \frac{2nm}{\mu}\,, \tag{43}$$

a tedy podle (37), (41)

$$|I_1(\mu)| < 6\varepsilon + \frac{2nm}{\mu}\,, \tag{44}$$

a podle (38) platí tento odhad i v případě I. Tedy: Pro všechna $\mu > \dfrac{nm}{\varepsilon}$ (všimněte si, že pravá strana nezávisí na α, β) je $|I_1(\mu)| < 8\varepsilon$, čímž je dokázáno tvrzení pro kosinus. Pro sinus je důkaz stejný.

[14]) m bylo již určeno; viz (35).

Poznámka 1. Z (31) plyne ihned

$$(45) \qquad \lim_{\mu \to +\infty} \int_\alpha^\beta \varphi(x)\, e^{i\mu x}\, dx = 0$$

(stejnoměrná konvergence). Změnou znamení u sinu dostáváme týž výsledek pro $\mu \to -\infty$.

Poznámka 2. Je-li $f \in L(\xi, 2\pi + \xi)$, mají její Fourierovy koeficienty a_k, b_k, c_k, c_{-k} (viz vzorce (18)) pro $k \to \infty$ limitu 0. To plyne ihned z věty 181.

Poznámka 3. Věty 181 nemůžeme ovšem užíti na integrál (29), protože funkce $(f(x + 2t) + f(x - 2t)) : \sin t$ (to jest součinitel při $\sin (2m + 1)\, t$) nemusí mít konvergentní Lebesgueův integrál od 0 do $\frac{1}{2}\pi$ — vadí zde jmenovatel $\sin t$, jenž má pro $t \to 0$ limitu 0. Ale můžeme jí užíti, nahradíme-li dolní integrační mez 0 libovolnou kladnou mezí δ $(0 < \delta < \frac{1}{2}\pi)$. To nás vede k této důležité větě (Riemannově):

Věta 182. *Budiž $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. Zvolme libovolné δ takové, že $0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$. Položme*

$$(46) \quad s_m(x, \delta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x + 2t) + f(x - 2t)) \frac{\sin (2m + 1)\, t}{\sin t}\, dt\,.$$

Potom jest

$$(47) \qquad \lim_{m \to \infty} (s_m(x) - s_m(x, \delta)) = 0\,,$$

a to stejnoměrně pro $x \in (-\infty, +\infty)$.[15]

Důkaz stačí provésti pro reálná f a můžeme se přitom omeziti (vzhledem k periodicitě) na interval $\langle 0, 2\pi\rangle$. Jest (užiji druhé věty o střední hodnotě ve tvaru vzorce (71) na konci kap. V)

$$s_m(x) - s_m(x, \delta) = \frac{1}{\pi} \int_\delta^{\frac{1}{2}\pi} (f(x + 2t) + f(x - 2t)) \frac{\sin (2m + 1)\, t}{\sin t}\, dt =$$

[15]) Konvergence je stejnoměrná při libovolném, ale pevném δ. Kdybychom δ zmenšovali, konvergence by se mohla zvolňovati.

$$(48) \qquad = \frac{1}{\pi \sin \delta} \int_{\delta}^{\eta} (f(x + 2t) + f(x - 2t)) \sin (2m + 1) t \, dt$$

$$(\delta \leqq \eta \leqq \tfrac{1}{2}\pi) .$$

Jest (substituce $x + 2t = v$)

$$\int_{\delta}^{\eta} f(x + 2t) \sin (2m + 1) t \, dt =$$

$$= \frac{\cos (m + \frac{1}{2}) x}{2} \int_{x+2\delta}^{x+2\eta} f(v) \sin (m + \tfrac{1}{2}) v \, dv -$$

$$- \frac{\sin (m + \frac{1}{2}) x}{2} \int_{x+2\delta}^{x+2\eta} f(v) \cos (m + \tfrac{1}{2}) v \, dv ,$$

což podle věty 181 konverguje stejnoměrně k nule pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (stačí ve větě 181 vzíti $a = 0$, $b = 3\pi$). Podobně (substituce $x - 2t = v$) plyne, že též $\int_{\delta}^{\eta} f(x - 2t) \sin (2m + 1) t \, dt$ konverguje stejnoměrně k nule.[16])

Poznámka 4. Speciálně pro konstantní $f(x) = 1$ máme z (47) a z (30) rovnici

$$(49) \qquad \lim_{m \to \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin (2m + 1) t}{\sin t} dt = 1 ,$$

platnou pro každé $\delta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$.

Poznámka 5. Věta 182 je hledanou větou o lokalisaci. Budiž $A < a < b < B$ a budiž $f \in \mathcal{T}(2\pi)$, $g \in \mathcal{T}(2\pi)$. Skoro všude v $\langle A, B \rangle$ budiž $f(x) = g(x)$. Zvolím-li $\delta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ tak malé, že $A < a - 2\delta$, $b + 2\delta < B$, je z (46) vidět, že pro $x \in \langle a, b \rangle$ má integrál (46) touž hodnotu jako obdobný integrál pro funkci g. Podle (47) tedy platí: Konvergence, divergence, stejnoměrná konvergence a součet Fourie-

[16]) Kdyby nám nebylo šlo o stejnoměrnost, nýbrž jen o rovnici (47), byla by stačila aplikace věty 181 přímo na první integrál v (48), bez jakékoliv další úpravy.

rovy řady funkce f jsou pro $a \leqq x \leqq b$ tytéž jako u Fourierovy řady funkce g. Přitom na hodnotách funkcí f, g mimo interval $\langle A, B\rangle$ (vázaný pouze podmínkami $A < a < b < B$) vůbec nezáleží — pokud ovšem f, g patří do $\mathcal{P}(2\pi)$.

Poznámka 6. Vedle integrálu (49) nás bude zajímati též integrál téže funkce v jiných mezích. Dokažme: *Jest*

$$\left|\int_\alpha^\beta \frac{\sin \mu t}{\sin t}\, dt\right| \leqq \tfrac{3}{2}\pi \text{ pro } \mu > 0,\ 0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq \tfrac{1}{2}\pi. \tag{50}$$

Důkaz. Víme, že $|\sin \mu t| \leqq \mu t$ pro $\mu \geqq 0$, $t \geqq 0$, a že $\sin t \geqq \dfrac{2}{\pi} t$ pro $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}\pi$. Jestliže tedy $\beta \leqq \dfrac{1}{\mu}$, jest

$$\left|\int_\alpha^\beta \frac{\sin \mu t}{\sin t}\, dt\right| \leqq \int_0^{\mu^{-1}} \frac{\mu t}{2\pi^{-1} t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Jestliže za druhé $\alpha \geqq \dfrac{1}{\mu}$, jest

$$\left|\int_\alpha^\beta \frac{\sin \mu t}{\sin t}\, dt\right| = \left|\frac{1}{\sin \alpha}\int_\alpha^\xi \sin \mu t\, dt\right| \leqq \frac{\pi}{2\alpha}\cdot\frac{2}{\mu} \leqq \pi.$$

Jestliže konečně $\alpha < \dfrac{1}{\mu} < \beta$, píši $\int_\alpha^\beta = \int_\alpha^{\mu^{-1}} + \int_{\mu^{-1}}^\beta$ a užiji obou předešlých odhadů.

Cvičení

O funkci f v těchto cvičeních předpokládejme, že $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. Znaky a_k, b_k, $s_m(x)$ mají význam z (18), (29).

1. Budiž f omezená. Potom pro každé x je posloupnost

$$\frac{s_m(x)}{\lg m} \quad (m = 2, 3, 4, \ldots) \tag{51}$$

omezená. Existuje-li konečná $\lim\limits_{t\to 0} (f(x+t) + f(x-t)) = 2A$, má posloupnost (51) dokonce limitu 0.

Návod:

$$(52) \qquad |s_m(x)| \leqq \frac{1}{\pi} \cdot C \left(\int_0^{\frac{1}{m}} (2m+1)\,dt + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\pi}{2t}\,dt \right).$$

V druhém případě

$$s_m(x) - A = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} (f(x+2t) + f(x-2t) - 2A) \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t}\,dt + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\frac{1}{2}\pi} \ldots; \qquad (53)$$

druhý integrál má při pevném $\delta > 0$ limitu 0 pro $m \to \infty$. První odhadneme jako v (52), až na to, že $|f(x+2t) + f(x-2t) - 2A|$ je velmi malé, zvolíme-li δ dosti malé.

2. Je-li $f(x)$ nerostoucí v $(0, 2\pi)$[17]), je $b_k \geqq 0$. Návod: Bez újmy obecnosti budiž $f(2\pi -) = 0$. Potom $\pi b_k = f(0+) \int_0^{\xi} \sin kx\,dx$.

3. Je-li $f(x)$ konvexní v $(0, 2\pi)$, t. j. je-li

$$f(x) \leqq \frac{(x_2 - x)\,f(x_1) + (x - x_1)\,f(x_2)}{x_2 - x_1} \quad \text{pro} \quad 0 < x_1 < x < x_2 < 2\pi,$$

jest $a_k \geqq 0$ pro $k > 0$.

Návod: πa_k je součtem integrálů

$$\int_{\frac{2m\pi}{k}}^{\frac{2(m+1)\pi}{k}} f(x)\cos kx\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2k}} \cos kt \left(f\left(\frac{2m\pi}{k} + t\right) - f\left(\frac{(2m+1)\pi}{k} - t\right) - \right.$$

$$\left. - f\left(\frac{(2m+1)\pi}{k} + t\right) + f\left(\frac{(2m+2)\pi}{k} - t\right)\right) dt,$$

a závorka je nezáporná.

4. Má-li funkce f derivaci řádu $n - 1$, absolutně spojitou v $\langle 0, 2\pi \rangle$, je $\lim\limits_{k\to\infty} k^n a_k = \lim\limits_{k\to\infty} k^n b_k = 0$. Návod: V (18) integrujte n-kráte per partes.

5. Je-li dána libovolná trigonometrická řada

$$(54) \qquad \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

---

[17]) Funkce z $\mathcal{P}(2\pi)$, která by byla nerostoucí v uzavřeném $\langle 0, 2\pi \rangle$, byla by v důsledku periodicity konstantní.

nazýváme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos kx - a_k \sin kx) \tag{55}$$

konjugovanou řadou k řadě (54) (podobně ovšem i pro jinou periodu než 2π). Nejlépe si zapamatujete vztah mezi těmito řadami takto: Jsou-li na př. a_k, b_k reálná a dosadíte-li do mocninné řady

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + ib_k)\, z^k \tag{56}$$

za z podle rovnice $z = e^{-ix}$ (x reálné),[18]) dává řada (54) reálnou a řada (55) imaginární část řady (56). Dokažte: Je-li řada (54) Fourierovou řadou funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$, je součet $S_m(x)$ prvních m členů konjugované řady dán vzorcem

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (f(x + 2t) - f(x - 2t)) \left(\operatorname{cotg} t - \frac{\cos (2m + 1)\, t}{\sin t}\right) dt\,. \tag{57}$$

Důkaz podobný jako u věty 180.

6. Položíte-li pro $0 < \delta < \pi$

$$\tau_m(x, \delta) = \frac{1}{\pi} \int_\delta^{\frac{1}{2}\pi} (f(x + 2t) - f(x - 2t)) \frac{\cos (2m + 1)\, t}{\sin t}\, dt\,, \tag{58}$$

je (při libovolném, ale pevném $\delta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$)

$$\lim_{m\to\infty} \tau_m(x, \delta) = 0 \text{ stejnoměrně v } (-\infty, +\infty)\,. \tag{59}$$

(Důkaz jako u věty 182.) Odtud plyne: okolnost, zda existuje $\lim_{m\to\infty} S_m(x)$, závisí jen na průběhu funkce f v intervalu $(x - 2\delta, x + 2\delta)$.

§ 5. Kriterium Diniovo a Dirichlet-Jordanovo. Věty předešlých dvou paragrafů nám dovolují odvoditi důležité věty o konvergenci a součtu Fourierových řad.

Věta 183 (Dini). *Budiž $f \in \mathcal{P}(2\pi)$, $x \in \mathbf{E}_1$, $0 < \delta < +\infty$. Nechť existuje číslo $A \in \mathbf{K}$ tak, že integrál*

$$\int_0^\delta \frac{|f(x + 2t) + f(x - 2t) - 2A|}{t}\, dt \tag{60}$$

---

[18]) Zatím ryze formálně, bez ohledu na konvergenci.

konverguje.[19]) *Potom Fourierova řada funkce f v bodě x konverguje a má součet A.*

Důkaz. Podle (49) a věty 182 jde jen o to, zda výraz (kde $0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$)

$$(61)\quad s_m(x, \delta) - A \cdot \frac{2}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2A}{t}\cdot\frac{t}{\sin t}\cdot\sin(2m+1)t\,dt$$

má limitu 0 pro $m \to +\infty$. Ale to je pravda, neboť první zlomek v integrandu patří do $\mathbf{L}(0, \delta)$, takže totéž platí o jeho součinu s omezenou funkcí $t : \sin t$. A nyní stačí užíti věty 181.

Příklad 1 (Lipzchitz). Budiž $f \in \mathcal{T}(2\pi)$, $x \in \mathbf{E}_1$. Nechť existuje číslo $\varepsilon > 0$, číslo α $(0 < \alpha < +\infty)$ a číslo C $(0 < C < +\infty)$ tak, že pro všechna $x' \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ je $|f(x) - f(x')| \leqq C|x - x'|^\alpha$. Potom Fourierova řada funkce f má v bodě x součet $f(x)$. (Tato podmínka je speciálně splněna s hodnotou $\alpha = 1$, má-li f v bodě x konečnou derivaci nebo — obecněji — všechna čtyři derivovaná čísla (viz **D II**, kap. V, § 8) konečná.

Důkaz. Položíme-li $A = f(x)$, je pro $0 < t < \frac{1}{2}\varepsilon$

$$(62)\quad \frac{|f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)|}{t} \leqq \frac{2^{1+\alpha}C}{t^{1-\alpha}},$$

a integrál pravé strany od nuly do libovolné konečné kladné meze konverguje.

To je tedy první výsledek, ukazující vztah mezi funkcí a součtem její Fourierovy řady: Je-li $f \in \mathcal{T}(2\pi)$, má její Fourierova řada součet $f(x)$ na př. v každém bodě, ve kterém existuje konečná $f'(x)$.

Zajímá nás ovšem též otázka stejnoměrné konvergence:

Věta 184. *Budiž $f \in \mathcal{T}(2\pi)$, $-\infty < a < b < +\infty$. Nechť f je konečná a spojitá v $\langle a, b\rangle$ a nechť*

[19]) Jaké δ zvolím, je lhostejné; může vadit jen bod $t = 0$. Také znamení absolutní hodnoty je zbytečné, ježto jde o Lebesgueův (t. j. absolutně konvergentní) integrál.

$$(63) \qquad \lim_{\delta_1 \to 0+} \int_0^{\delta_1} \frac{|f(x + 2t) + f(x - 2t) - 2f(x)|}{t} \, dt = 0 \, ,$$

a to stejnoměrně v $\langle a, b \rangle$. Potom Fourierova řada funkce f konverguje v $\langle a, b \rangle$ stejnoměrně k součtu $f(x)$.[20])

Důkaz. Ve vzorci (61) pišme $f(x)$ místo A a položme třeba $\delta = 1$. Podle věty 182 a podle (49) jde jen o to, dokázati, že výraz (61) (pro $A = f(x)$, $\delta = 1$) konverguje k nule stejnoměrně v $\langle a, b \rangle$.

Budiž tedy $\varepsilon > 0$; podle předpokladu existuje tedy δ_1 $(0 < \delta_1 < 1)$ tak, že integrál v (63) je menší než ε pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$. Toto δ_1 podržme pevné. Ježto pro $0 < t < \delta_1$ je $t : \sin t < \frac{1}{2}\pi$, $|\sin (2m + 1) t| \leqq 1$, plyne odtud, že

$$(64) \qquad \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta_1} (f(x + 2t) + f(x - 2t) - 2f(x)) \frac{\sin (2m + 1) t}{\sin t} \, dt \right| < \\ < \frac{1}{\pi} \cdot \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \varepsilon \, .$$

Dokážeme-li ještě, že existuje m_0 tak, že pro všechna $m > m_0$ a všechna $x \in \langle a, b \rangle$ je $\left| \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{1} \right| < \frac{1}{2}\varepsilon$,[21]) bude tím dokázáno, že pro $m > m_0$ je výraz (61) v absolutní hodnotě menší než ε, což stačí. Stačí tedy dokázati, že $\left| \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{1} \right|$ konverguje pro $m \to \infty$ k nule stejnoměrně v $\langle a, b \rangle$. Ale předně

$$\lim_{m \to \infty} \frac{2}{\pi} f(x) \int_{\delta_1}^{1} \frac{\sin (2m + 1) t}{\sin t} \, dt = 0$$

---

[20]) Kdyby f byla konečná a spojitá v otevřeném intervalu (α, β) a kdyby (63) platilo stejnoměrně v každém intervalu $\langle a, b \rangle \subset (\alpha, \beta)$, konvergovala by Fourierova řada k $f(x)$ stejnoměrně v každém intervalu $\langle a, b \rangle \subset (\alpha, \beta)$ — to plyne z věty 184. Místo abychom říkali, že řada konverguje stejnoměrně v každém omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, ležícím v otevřeném intervalu (α, β), říkáme též, že řada konverguje stejnoměrně uvnitř intervalu (α, β).

[21]) Integrand jako v (64).

podle věty 181 (ale dá se to dokázat triviálně přímo), a to stejnoměrně, ježto činitel $f(x)$ je spojitý a tedy omezený. Dále podle 2. věty o střední hodnotě ($\delta_1 \leqq \eta \leqq 1$)

$$\int_{\delta_1}^{1} \frac{f(x+2t)}{\sin t} \sin (2m+1)\, t \, dt = \frac{1}{\sin \delta_1} \int_{\delta_1}^{\eta} f(x+2t) \sin (2m+1)\, t \, dt ;$$

substituce $x + 2t = v$, $t = \frac{1}{2}(v - x)$ dává výraz

$$\begin{aligned}(65) \qquad & \frac{\cos (m+\frac{1}{2})\, x}{2 \sin \delta_1} \int_{x+2\delta_1}^{x+2\eta} f(v) \sin (m+\tfrac{1}{2})\, v \, dv - \\ & - \frac{\sin (m+\frac{1}{2})\, x}{2 \sin \delta_1} \int_{x+2\delta_1}^{x+2\eta} f(v) \cos (m+\tfrac{1}{2})\, v \, dv .\end{aligned}$$

Ježto pro $a \leqq x \leqq b$ je $\langle x + 2\delta_1, x + 2\eta\rangle \subset \langle a, b + 2\rangle$ a je $f \in \mathbf{L}(a, b + 2)$,[22]) konverguje podle věty 181 výraz (65) pro $m \to \infty$ k nule stejnoměrně pro $x \in \langle a, b\rangle$ (integrační meze leží v $\langle a, b + 2\rangle$). Podobně pro integrál s $f(x - 2t)$.

Příklad 2. Budiž $f \in \mathcal{P}(2\pi)$, $A < B$, $0 < \alpha < +\infty$, $0 < C < +\infty$, a pro všechna $x \in (A, B)$, $x' \in (A, B)$ budiž $|f(x) - f(x')| \leqq C|x - x'|^\alpha$. Potom Fourierova řada funkce f konverguje k $f(x)$ stejnoměrně uvnitř (A, B). Důkaz. Budiž $A < a < b < B$. Volme $\delta_1 > 0$ tak, že $A < a - 2\delta_1$, $b + 2\delta_1 < B$. Potom platí (62) pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$, $t \in (0, \delta_1)$ a tedy (63) platí stejnoměrně v $\langle a, b\rangle$, takže (věta 184) Fourierova řada konverguje k f stejnoměrně v $\langle a, b\rangle$.

Speciálně: Má-li $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ omezenou derivaci v (A, B), je $f(x) - f(x') = f'(\xi)(x - x')$ a hořejší podmínka je splněna s hodnotou $\alpha = 1$; tedy Fourierova řada konverguje k f stejnoměrně uvnitř (A, B). Ale tento speciální případ je málo zajímavý, ježto je obsažen v následující větě 185.

Poznámka 1. Je-li $f \in \mathcal{P}(2\pi)$, plyne z periodicity ihned toto: konverguje-li Fourierova řada k funkci f v nějakém intervalu $\langle \xi, \xi + 2\pi\rangle$

[22]) Je totiž $f \in \mathbf{L}(\alpha, \beta)$ pro libovolná konečná α, β.

(délky 2π) — po příp. stejnoměrně v tomto intervalu, konverguje tato řada k f v $(-\infty, +\infty)$, po příp. stejnoměrně v $(-\infty, +\infty)$. Této poznámky budu často mlčky používati.

Věta 185 (Dirichlet a Jordan). *Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ je reálná funkce, která má variaci konečnou v $\langle a, b\rangle$. Potom platí:*

I. V každém bodě $x \in (a, b)$ je Fourierova řada funkce f konvergentní a má součet $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$[23]*) (tedy součet $f(x)$, je-li f spojitá v bodě x).*

II. Je-li mimo to f spojitá v $\langle a, b\rangle$, je tato Fourierova řada stejnoměrně konvergentní v každém intervalu $\langle a + \lambda, b - \lambda\rangle$, $0 < \lambda < \frac{1}{2}(b - a)$ (neboli: je stejnoměrně konvergentní uvnitř (a, b)).

Důkaz. Je-li δ takové, že $0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$, je podle věty 182

$$s_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta (f(x+2t) + f(x-2t))\frac{\sin(2m+1)t}{\sin t}\,dt + \lambda_m(x, \delta),$$

kde (při pevném δ)

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_m(x, \delta) = 0 \text{ stejnoměrně v } (-\infty, +\infty). \tag{66}$$

Podobně: násobíme-li rovnici (49) v § 4, pozn. 4 výrazem $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ (což je funkce omezená v (a, b)), obdržíme

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\delta (f(x+) + f(x-))\frac{\sin(2m+1)t}{\sin t}\,dt + \mu_m(x, \delta),\end{aligned} \tag{67}$$

kde

$$\lim_{m\to\infty} \mu_m(x, \delta) = 0 \text{ stejnoměrně v } (a, b).$$

Položíme-li tedy $\Delta_m(x) = s_m(x) - \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$, máme pro každé $\delta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$

[23]) Píši $f(x+) = \lim_{t\to x+} f(t)$, $f(x-) = \lim_{t\to x-} f(t)$.

$$\Delta_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta ((f(x+2t) - f(x+)) + \tag{68}$$
$$+ (f(x-2t) - f(x-)))\frac{\sin(2m+1)t}{\sin t}\,dt + \varrho_m(x,\delta)\,,$$

$$\lim_{m\to\infty} \varrho_m(x,\delta) = 0 \text{ stejnoměrně v } (a,b)\,. \tag{69}$$

Máme dokázati toto:

I. Pro každé $x \in (a, b)$ jest

$$\lim_{m\to\infty} \Delta_m(x) = 0\,. \tag{70}$$

II. Je-li f spojitá v $\langle a, b\rangle$, je pro každé $\lambda \in (0, \frac{1}{2}(b-a))$

$$\lim_{m\to\infty} \Delta_m(x) = 0 \text{ stejnoměrně v } \langle a+\lambda, b-\lambda\rangle\,. \tag{71}$$

Ježto f má variaci konečnou v $\langle a, b\rangle$, jest $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$, kde φ, ψ jsou konečné a neklesající v $\langle a, b\rangle$; je-li mimo to f spojitá v $\langle a, b\rangle$, jsou i φ, ψ spojité v $\langle a, b\rangle$.[24]) Z rovnice $f(x+h) = \varphi(x+h) - \psi(x+h)$ plyne limitním přechodem $h \to 0+$ nebo $h \to 0-$:

$$f(x+) = \varphi(x+) - \psi(x+) \text{ pro } a \leqq x < b\,,$$
$$f(x-) = \varphi(x-) - \psi(x-) \text{ pro } a < x \leqq b\,.$$

Je-li tedy $x \in (a, b)$ a je-li δ tak malé, že $a < x - 2\delta < x + 2\delta < b$, lze integrál v (68) rozložiti na čtyři integrály I_1, I_2, I_3, I_4, při čemž

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta (\varphi(x+2t) - \varphi(x+))\frac{\sin(2m+1)t}{\sin t}\,dt\,; \tag{72}$$

I_2, I_3, I_4 mají obdobný tvar. Funkce $\varphi(x+2t) - \varphi(x+)$ (proměnné t) je neklesající v $\langle 0, \delta\rangle$ a má pro $t \to 0+$ limitu 0. Integrál I_1 se nezmění, nahradíme-li tuto funkci pro $t = 0$ nulou a také monotonní charakter této funkce se tím nezmění. Podle druhé věty o střední hodnotě máme tedy

[24]) Viz **D II**, věta 94.

$$(73)\quad I_1 = \frac{1}{\pi}\,(\varphi(x+2\delta) - \varphi(x+)) \int_{\vartheta}^{\delta} \frac{\sin(2m+1)\,t}{\sin t}\,dt,\ 0 \leqq \vartheta \leqq \delta,$$

načež z pozn. 6 v § 4 plyne

$$(74)\qquad |I_1| \leqq \tfrac{3}{2}|\varphi(x+2\delta) - \varphi(x+)|$$

a obdobně

$$(75)\qquad |I_2| \leqq \tfrac{3}{2}|\psi(x+2\delta) - \psi(x+)|,$$

$$(76)\qquad |I_3| \leqq \tfrac{3}{2}|\varphi(x-2\delta) - \varphi(x-)|,$$

$$(77)\qquad |I_4| \leqq \tfrac{3}{2}|\psi(x-2\delta) - \psi(x-)|,$$

a to pro každé m.

Budiž nyní předně dáno $x \in (a, b)$. Budiž dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $\delta > 0$ tak malé, aby bylo $a < x - 2\delta < x + 2\delta < b$ a za druhé tak malé, aby pravé strany v (74) až (77) byly vesměs menší než $\frac{\varepsilon}{5}$; to lze, neboť pro $\delta \to 0+$ mají tyto pravé strany limitu 0; prostá hodnota integrálu v (68) je pak pro každé m menší než $\frac{4}{5}\varepsilon$. Na to zvolme (při tomto pevně zvoleném δ) číslo m_0 tak, že pro $m > m_0$ je $|\varrho_m(x, \delta)| < \frac{\varepsilon}{5}$; to lze podle (69). Podle (68) potom bude $|\Delta_m(x)| < \varepsilon$ pro všechna $m > m_0$, čímž I dokázáno.

Budiž za druhé f spojitá v $\langle a, b\rangle$, takže též φ, ψ jsou spojité v $\langle a, b\rangle$. Budiž dále dáno λ takové, že $a < a + \lambda < b - \lambda < b$ (t. j. $0 < \lambda < \frac{1}{2}(b - a)$). Budiž konečně dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme kladné číslo δ předně menší než $\frac{1}{2}\lambda$, takže pro $x \in \langle a + \lambda, b - \lambda\rangle$ leží body $x \pm 2\delta$ v $\langle a, b\rangle$. Za druhé volme δ tak malé, aby pro všechna $x \in \langle a + \lambda,\ b - \lambda\rangle$ bylo $|\varphi(x \pm 2\delta) - \varphi(x)| < \frac{2\varepsilon}{15}$, $|\psi(x \pm 2\delta) - \psi(x)| < \frac{2\varepsilon}{15}$; to lze, neboť funkce φ, ψ jsou stejnoměrně spojité v $\langle a, b\rangle$ (viz **D II**, věta 63). Při této volbě čísla δ je z (74) až (77)[25]) patrno, že integrál v (68) má prostou hodnotu menší než $\frac{4}{5}\varepsilon$, a to pro každé m a každé $x \in \langle a + \lambda, b - \lambda\rangle$. Podle (69) lze dále (při tomto

[25]) Nyní jest ovšem $\varphi(x+) = \varphi(x-) = \varphi(x)$, $\psi(x+) = \psi(x-) = \psi(x)$.

pevně zvoleném δ) zvoliti m_0 tak, že pro všechna $m > m_0$ a pro všechna $x \in (a, b)$ jest $|\varrho_m(x, \delta)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Podle (68) potom bude $|\Delta_m(x)| < \varepsilon$ pro všechna $m > m_0$ a pro všechna $x \in \langle a + \lambda, b - \lambda\rangle$, čímž též II jest dokázáno.

Věta 186. *Budiž $f \in \mathcal{P}(2\pi)$; budiž*

$$f(x) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,. \tag{78}$$

Potom funkce $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \frac{1}{2}a_0x$ má periodu 2π; její Fourierova řada jest

$$\tfrac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-b_k \cos kx + a_k \sin kx}{k} \quad \left(\tfrac{1}{2}A_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}\right); \tag{79}$$

tato řada je stejnoměrně konvergentní v $(-\infty, +\infty)$ a má součet $F(x)$.[26])

Důkaz. $F(x)$ je absolutně spojitá a má tedy konečnou variaci v každém omezeném uzavřeném intervalu. Dále jest

$$F(x + 2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt - a_0\pi = 0$$

(viz (18)). Tedy má F periodu 2π. Podle věty 185 je Fourierova řada funkce F stejnoměrně konvergentní v $(-\infty, +\infty)$ a má součet $F(x)$. Její koeficienty A_k, B_k dostaneme integrací per partes:

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x) \sin kx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi k}\,[F(x) \cos kx]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi k}\int_0^{2\pi}(f(x) - \tfrac{1}{2}a_0) \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\,a_k\,,$$

a obdobně $A_k = -\dfrac{1}{k}\,b_k$ pro $k > 0$. Fourierova řada funkce F má

[26]) Jinými slovy: Fourierova řada funkce $F(x)$ se dostane formální integrací Fourierovy řady pro funkci $f(x) - \frac{1}{2}a_0$ v mezích $0, x$. Kdežto však u řady (78) nemáme zaručenu její konvergenci, je řada (79) stejnoměrně konvergentní se součtem $F(x)$.

tedy vskutku tvar (79); hodnota pro A_0 se obdrží z toho, že pro $x = 0$ je součet řady roven $F(0) = 0$.

Věta 187. *Nechť funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ má všechny Fourierovy koeficienty a_k, b_k rovny nule. Potom je $f(x) = 0$ skoro všude.*

Důkaz. Podle věty 186 je (s tamním označením) $F(x) = \frac{1}{2}A_0$, tedy je všude $F'(x) = 0$; ale $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ (neboť $a_0 = 0$), tedy $F'(x) = f(x)$ skoro všude.

Cvičení

1. Je-li v okolí počátku $f(x) = |x|^\alpha \cos \frac{1}{x}$ $(\alpha > 0)$, můžeme užíti v bodě $x = 0$ Diniovy věty (ve tvaru příkl. 1). Pro $\alpha \leqq 1$ nemá však f variaci konečnou v žádném intervalu $\langle -\lambda, \lambda \rangle$, takže v bodě $x = 0$ nelze užíti Jordanovy věty. Naopak: Je-li v okolí počátku $f(x) = \frac{1}{\lg |x|}$ $(f(0) = 0)$, lze užíti v bodě $x = 0$ Jordanovy věty (monotonie), ale nelze užíti Diniovy věty pro $x = 0$, neboť integrál (60) nekonverguje pro žádné A.

2. Nechť f má variaci konečnou v $\langle 0, 2\pi \rangle$; potom posloupnosti ka_k, kb_k $(k = 1, 2, \ldots)$ jsou omezené. Návod: Na vzorce (18) (s hodnotou $\xi = 0$) užijte 2. věty o střední hodnotě, předpokládajíce f monotonní.

3. Budiž $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. Dokažte: Jestliže pro jisté x konverguje

$$\text{(80)} \qquad \int_0^\delta \frac{|f(x + 2t) - f(x - 2t)|}{t}\,dt \quad (0 < \delta < +\infty)\,,$$

je řada konjugovaná k řadě Fourierově[27]) funkce f konvergentní v bodě x a má součet

$$\text{(81)} \qquad \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (f(x + 2t) - f(x - 2t)) \operatorname{cotg} t\,dt\,.$$

Všimněte si: Kdežto okolnost, zda konjugovaná řada v bodě x konverguje, závisí podle cvič. 6 v § 4 pouze na průběhu funkce f v intervalu $(x - 2\delta, x + 2\delta)$, závisí hodnota jejího součtu podle (81) na celém průběhu funkce f.

[27]) Viz cvič. 5 v § 4.

4. Konvergence integrálu (80) je zaručena, existují-li čísla A, $\alpha > 0$ tak, že pro $-\delta < t < \delta$ je $|f(x + 2t) - f(x)| \leqq A|t|^\alpha$. To je na př. splněno, má-li funkce f v bodě x konečnou derivaci.

5. Gibbsův zjev. Nechť f má periodu 2π a variaci konečnou v $\langle 0, 2\pi \rangle$. Jestliže v nějakém bodě c je $f(c+) \neq f(c-)$, je součet Fourierovy řady funkce f nespojitý v bodě c (podle věty 185) a tedy tato řada není stejnoměrně konvergentní v žádném intervalu $(c - \delta, c + \delta)$ $(\delta > 0)$, t. j. její částečný součet $s_m(x)$ se i při velkém m v některém bodě tohoto intervalu „značně" liší od součtu celé řady, t. j. od $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$. Studujme podrobněji křivky $y = s_m(x)$ v tomto jednoduchém případě: Budiž $c \in E_1$, $f(x) = -\frac{1}{2}$ pro $c - \pi < x < c$, $f(x) = \frac{1}{2}$ pro $c < x < c + \pi$, $f(c) = f(c + \pi) = 0$ a dále nechť má f periodu 2π (kreslete!). Užijme věty 182, kladouce $\delta = \frac{1}{2}\pi$, $x = c + \xi$, $|\xi| \leqq \frac{1}{2}\pi$, takže $f(c + \xi \pm 2t) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} (\xi \pm 2t)$ pro $0 < t < \frac{1}{4}\pi$; vychází, že

$$\lim_{m\to\infty} \left(s_m(c + \xi) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\xi} \frac{\sin (2m + 1) t}{\sin t} \, dt \right) = 0 \,, \tag{82}$$

a to stejnoměrně pro $|\xi| \leqq \dfrac{\pi}{2}$. Ježto $\dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$ je omezená v $\langle -\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi \rangle$, vychází z věty 181, že

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\xi} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) \sin (2m + 1) t \, dt = 0 \,, \tag{83}$$

a to opět stejnoměrně pro $|\xi| \leqq \dfrac{\pi}{2}$. Konečně

$$\int_0^{\frac{1}{2}\xi} \frac{\sin (2m + 1) t}{t} \, dt = \int_0^{m\xi} \frac{\sin v}{v} \, dv + \int_{m\xi}^{(m+\frac{1}{2})\xi} \frac{\sin v}{v} \, dv \,,$$

kde poslední člen opět stejnoměrně konverguje k nule. Klademe-li

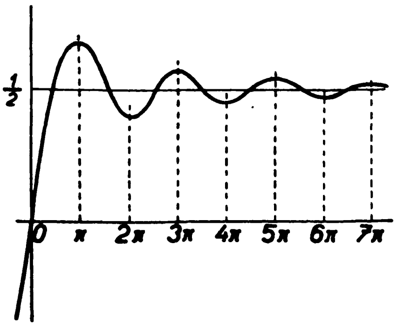
$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\sin v}{v} \, dv \,, \tag{84}$$

vidíme, že

$$\lim_{m\to\infty} (s_m(c + \xi) - F(m\xi)) = 0 \tag{85}$$

stejnoměrně pro $|\xi| \leqq \frac{1}{2}\pi$.

V (85) jsou liché funkce ξ, stačí vyšetřovati $\xi \geqq 0$. Z (84) plyne $F'(x) = \sin x : (\pi x)$ a snadno najdete tento průběh: $F(0) = 0$, potom F stoupá až do hodnoty $x = \pi$, potom klesá až do $x = 2\pi$, stoupá až do $x = 3\pi$ atd.; $F(\pi) > F(3\pi) > F(5\pi) > \ldots$; $0 < F(2\pi) < F(4\pi) < F(6\pi) < \ldots$ Z kap. VIII, § 4, příkl. 1 víme, že $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \frac{1}{2}$. Největší hodnota funkce F je $F(\pi)$. Numerickým výpočtem (viz na př. kap. XVII nebo J I, kap. VI) bychom zjistili, že je přibližně $F(\pi) = 0{,}59$. Funkce F tedy stoupá od $F(0) = 0$ k hodnotě $F(\pi)$, která překračuje $\frac{1}{2}$ asi o 18% a potom osciluje stále méně okolo hodnoty $\frac{1}{2}$, která je její limitou. Viz schematicky (ne přesně!) na obr. 9 (kde ovšem měřítka na osách se různí a oscilace jsou zakresleny asi dvakráte větší než mají být, aby obrázek nebyl příliš plochý). Křivka $y = F(m\xi)$ vznikne z $y = F(\xi)$ tím, že tuto křivku m-kráte „stlačíme“, t. j. všechny abscisy dělíme číslem m. Vzhledem k stejnoměrné konvergenci v (85) můžeme při libovolném $\varepsilon > 0$ nahraditi křivku $y = s_m(x)$ křivkou $y = F(m(x - c))$ s chybou menší než ε pro všechna m od jistého počínaje, a to v celém intervalu $\langle c - \frac{1}{2}\pi, c + \frac{1}{2}\pi\rangle$. Průběh křivky $y = s_m(x)$ vypadá tedy — až na chybu menší než ε — pro velká m v intervalu $\langle c, c + \pi\rangle$ asi takto: $s_m(x)$ stoupne od hodnoty 0 v bodě $x = c$ až k hodnotě asi $\frac{1}{2} \cdot 1{,}18$ v bodě $c + \frac{\pi}{m}$, načež osciluje (s extrémy poblíže bodů $c + \frac{\pi}{m}$, $c + \frac{2\pi}{m}$, $c + \frac{3\pi}{m}, \ldots$) okolo hodnoty $\frac{1}{2}$; amplitudy oscilací rychle klesají, funkce $s_m(x)$ se „skoro“ ustálí na hodnotě $\frac{1}{2}$; teprve v blízkosti bodu $c + \pi$ se opět funkce „rozkmitá“, přeběhne přes hodnotu 0 v bodě $c + \pi$ k minimu asi $-\frac{1}{2} \cdot 1{,}18$ v bodě $c + \pi + \frac{\pi}{m}$, načež obdobný průběh se opakuje, tentokráte pod osou x atd. Tomuto překročení skoku funkce v bodě $c + \frac{\pi}{m}$ se právě říká Gibbsův zjev. Načrtněte!



Obr. 9.

Je snadno, zobecniti tuto úvahu. Nechť $a < c < b$, nechť g má variaci konečnou v $\langle a, b\rangle$, nechť $g(c+) - g(c-) = d \neq 0$; pro všechna ostatní $x \in \langle a, b\rangle$ budiž g spojitá. Potom pišme $g(x) = d \cdot f(x) + h(x)$, kde f je naše dřívější funkce, takže h je spojitá a má v. k. v $\langle a, b\rangle$. Potom Fourierova řada funkce h je v okolí bodu c stejnoměrně konvergentní a částečné součty Fourierovy řady funkce g oscilují okolo $g(x)$ podobně jako tomu bylo u $f(x)$. Promyslete si podrobnosti!

§ 6. Příklady. Poznámka 1. Nechť f je reálná a omezená v $\langle a, b\rangle$. Nechť existují čísla $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_\nu = b$ taková, že v každém otevřeném intervalu (a_{i-1}, a_i) je buďto f monotonní nebo má omezenou derivaci. Potom f má v. k. v $\langle a, b\rangle$. (Tohoto tvaru bude většina funkcí v dalších příkladech.) Důkaz. Nechť $|f(x)| \leqq M$. Budiž $a_{i-1} = x_0 < < x_1 < \ldots < x_n = a_i$; potom

$$S = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqq 4M + \sum_{k=2}^{n-1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| .$$

Jestliže f je monotonní v (a_{i-1}, a_i), je $S \leqq 4M + |\sum_{k=2}^{n-1} (f(x_k) - f(x_{k-1}))| \leqq \leqq 6M$; jestliže $|f'(x)| \leqq N$ v (a_{i-1}, a_i), je

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqq (x_k - x_{k-1}) \,.\, N \text{ pro } k = 2, \ldots, n-1 \,,$$

tedy $S \leqq 4M + (a_i - a_{i-1})\, N$. Tedy má f v. k. v každém $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$, tedy i v $\langle a, b\rangle$.

Poznámka 2. Nechť φ je neklesající v $\langle \alpha, \beta\rangle$, nechť f má variaci konečnou v $\langle \varphi(\alpha), \varphi(\beta)\rangle$, takže $f(x) = p(x) - n(x)$ je rozdíl dvou monotonních funkcí. Tedy i $f(\varphi(y)) = p(\varphi(y)) - n(\varphi(y))$ je v $\langle \alpha, \beta\rangle$ rozdílem dvou monotonních funkcí, t. j. $f(\varphi(y))$ má konečnou variaci v $\langle \alpha, \beta\rangle$. Odtud je patrno, že větu 185 je ihned možno převésti na případ obecné periody l substitucí $x = \dfrac{2\pi}{l}\, y$ (viz též pozn. 4 v § 2).

Poznámka 3. Většinu vět této kapitoly jsme vyslovili pro funkce periodické, ale dá se jich použíti i na Fourierovy řady funkcí neperiodických. Budiž $f \in \mathbf{L}(\xi, \xi + l)$; sestrojme Fourierovu řadu $\mathfrak{F}$ funkce f v intervalu $\langle \xi, \xi + l\rangle$. Budiž φ funkce s periodou l, která v $\langle \xi, \xi + l)$ splývá s funkcí f. Potom je $\mathfrak{F}$ také Fourierovou řadou funkce φ. Jestliže na př. f má variaci konečnou v $\langle \xi, \xi + l\rangle$, platí totéž o φ, takže lze užíti věty 185. Pro každé $x \in (\xi, \xi + l)$ je součet řady $\mathfrak{F}$ roven $\frac{1}{2}(\varphi(x+) + + \varphi(x-))$, t. j. $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ a tedy je roven $f(x)$ v každém bodě spojitosti funkce f, ležícím v $(\xi, \xi + l)$. Ale v krajních bodech ξ, $\xi + l$ je třeba dáti pozor; je totiž $\varphi(\xi +) = f(\xi +)$, ale (periodicita!) $\varphi(\xi -) = \varphi(\xi + l -) = f(\xi + l -)$, takže součet řady $\mathfrak{F}$ v bodě ξ je $\frac{1}{2}(f(\xi +) + f(\xi + l -))$. Když je f spojitá v $\langle \xi, \xi + l\rangle$, je součet řady $\mathfrak{F}$ v bodě ξ roven $\frac{1}{2}(f(\xi) + f(\xi + l))$, není tedy roven $f(\xi)$, jestliže $f(\xi) \neq f(\xi + l)$; v tomto případě také není funkce φ spojitá v bodě ξ (neboť $\varphi(\xi +) = f(\xi)$, $\varphi(\xi -) = f(\xi + l)$) a tedy také stejnoměrnost konvergence řady $\mathfrak{F}$ se poruší v okolí bodu ξ. Totéž platí v bodě $\xi + l$

(neboť funkce φ i členové řady $\mathfrak{F}$ mají periodu l). Jestliže ovšem $f(\xi) = f(\xi + l)$ a f je spojitá v $\langle \xi, \xi + l \rangle$, je tam i φ spojitá, takže řada $\mathfrak{F}$ má v $\langle \xi, \xi + l \rangle$ součet $f(x)$ a je stejnoměrně konvergentní v $(-\infty, +\infty)$ — vše stále ovšem za předpokladu, že f má variaci konečnou v $\langle \xi, \xi + l \rangle$.

Poznámka 4. Ještě jiné modifikace v užití našich vět jsou možné. Na př. chci-li vyjádřiti funkci f v $(0, \pi)$ kosinovou řadou (t. j. $b_k = 0$) o periodě 2π, definuji $f(-x) = f(x)$, čímž dostanu sudou funkci; viz nyní pozn. 6 v § 2. Podobně dostanu sinovou řadu (t. j. $a_k = 0$), definuji-li $f(-x) = -f(x)$.

Proberme nyní několik příkladů; použitelnost věty 185 je v nich zřejmá; též výpočet Fourierových koeficientů je snadný a přenechávám jej čtenáři.

Příklad 1. Budiž $f(x) = \frac{1}{2} - x$ pro $0 < x < 1$; dále měj f periodu 1 a položme ještě $f(0) = \frac{1}{2}(f(0+) + f(0-)) = \frac{1}{2}(f(0+) + f(1-)) = 0$. Fourierova řada nám dává

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{\pi k} = \tfrac{1}{2} - x \text{ pro } 0 < x < 1, \quad = 0 \text{ pro } x = 0,\ x = 1; \tag{86}$$

dále ovšem periodicky s periodou 1.[28])

Konvergence je stejnoměrná v každém uzavřeném intervalu, neobsahujícím žádné celé číslo. V intervalu, jenž obsahuje nějaké celé číslo, není konvergence stejnoměrná, ježto součet řady není v takovém intervalu funkcí spojitou (viz **D II**, věta 60).

Je poučno všimnouti si částečných součtů této řady pro $0 < x < 1$ (pro $x = 0$, $x = 1$ je všechno rovno nule). Pišme $2\pi x = z$, tedy $0 < z < 2\pi$. Píši-li $S_m(z) = \sum_{k=0}^{m} e^{ikz}$, mám[29])

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} \frac{e^{ikz}}{k} &= \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k} (S_k(z) - S_{k-1}(z)) = \\ &= \sum_{k=m}^{n} S_k(z) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{S_n(z)}{n+1} - \frac{S_{m-1}(z)}{m}. \end{aligned} \tag{87}$$

[28]) Načrtněte si graf.
[29]) Abelova parciální sumace.

Dále pro $0 < z < 2\pi$

$$(88) \qquad |S_m(z)| = \left|\frac{e^{i(m+1)z} - 1}{e^{iz} - 1}\right| \leqq \frac{2}{|e^{\frac{1}{2}iz} - e^{-\frac{1}{2}iz}|} = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}z}.$$

Tedy jest podle (87)

$$(89) \quad \left|\sum_{k=m}^{n} \frac{e^{ikz}}{k}\right| \leqq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}z}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m}\right) = \frac{2}{m \sin \frac{1}{2}z}$$

pro $0 < z < 2\pi$, $0 < m \leqq n$; m, n celá.

Odtud je patrna stejnoměrná konvergence v každém intervalu $\langle\lambda, 2\pi - \lambda\rangle$ $(0 < \lambda < \pi)$, neboť v tomto intervalu je $\sin \frac{1}{2}z \geqq \sin \frac{1}{2}\lambda$. Vezmeme-li reálnou a imaginární část, obdržíme

$$(90) \qquad \left|\sum_{k=m}^{n} \frac{\sin kz}{k}\right| \leqq \frac{2}{m \sin \frac{1}{2}z}, \quad \left|\sum_{k=m}^{n} \frac{\cos kz}{k}\right| \leqq \frac{2}{m \sin \frac{1}{2}z}$$

pro $0 < z < 2\pi$, $0 < m \leqq n$; m, n celá. Odhad v (90) je nevýhodný, je-li z blízko 0 nebo 2π. Odvodíme nyní odhad

$$(91) \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kz}{k}\right| \leqq 1 + 2\pi,$$

platný pro každé reálné z a každé přirozené n. Pro $z = 0$, $z = 2\pi$ je levá strana rovna nule. Ježto $\sin kz = -\sin k(2\pi - z)$, stačí (vzhledem k periodičnosti) vyšetřovati hodnoty $0 < z \leqq \pi$. Pro tyto hodnoty z jest $|\sin kz| \leqq kz$, $\sin \frac{1}{2}z \geqq \frac{1}{\pi} z$. Tedy (s užitím (90))

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kz}{k}\right| \leqq \sum_{1 \leqq k < \frac{1}{z}} \frac{kz}{k} + \left|\sum_{\frac{1}{z} \leqq k \leqq n} \frac{\sin kz}{k}\right| \leqq \frac{1}{z} \cdot z + \frac{2z}{\pi^{-1}z},$$

čímž (91) dokázáno.

Užijeme-li věty 65, vidíme z (91), že řadu (86) lze integrovati člen po členu.[30]) Integrujeme-li na př. obě strany v (86) od 0 do $\frac{1}{2}$, obdržíme

[30]) To plyne ostatně též z věty 186.

$$\frac{1}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2\pi^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k^2\pi^2} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \right) = \frac{3}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{92}$$

Odtud je na př. viděti význam Fourierových řad pro výpočet řad s konstantními členy.

Příklad 2. Jest

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \begin{cases} \frac{1}{4}\pi & \text{pro } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{pro } x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi \\ -\frac{1}{4}\pi & \text{pro } \pi < x < 2\pi \end{cases} \tag{93}$$

Příklad 3. Pro jakékoliv komplexní α, jež není tvaru $\alpha = m\mathrm{i}$ (m celé), jest

$$\pi \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\mathrm{e}^{2\alpha\pi} - 1} = \frac{1}{2\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha \cos kx - k \sin kx}{k^2 + \alpha^2} \quad \text{pro } 0 < x < 2\pi. \tag{94}$$

Pro $x = 0$ je pravá strana rovna $\frac{\pi}{2} \frac{\mathrm{e}^{2\alpha\pi} + 1}{\mathrm{e}^{2\alpha\pi} - 1}$. Klademe-li $2\alpha\pi = z$, máme (pro $x = 0$)

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{e}^z + 1}{\mathrm{e}^z - 1} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + 4k^2\pi^2} \tag{95}$$

pro každé z, nemající tvar $z = 2m\pi\mathrm{i}$ (m celé). Položíme-li ještě $z = 2\mathrm{i}t$, máme

$$\operatorname{cotg} t = \mathrm{i} \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + 1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} - 1} = \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - k^2\pi^2} \tag{96}$$

pro každé komplexní t, nemající tvar $t = m\pi$ (m celé). Položíme-li v (94) $x = \pi$ a potom $\pi\alpha = \mathrm{i}t$, obdržíme

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} - 1} = \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k t}{t^2 - k^2\pi^2} \tag{97}$$

pro každé komplexní t, nemající tvar $t = m\pi$ (m celé).

Vzorce (95) až (97) dávají rozklady levých stran v „částečné zlomky" — ovšem řada zlomků je zde nekonečná. Z rovnice (96) odvodíme ještě jeden důležitý vzorec. Řada vpravo je stejnoměrně konvergentní v každém intervalu $\langle 0, (1 - \delta)\,\pi \rangle$ $(0 < \delta < 1)$, neboť má tam konvergentní majorantu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi}{\pi^2(k^2 - (1 - \delta)^2)} \,.$$

Integrujeme-li tedy člen po členu od 0 do t $(0 < t < \pi)$ a uvážíme-li, že

$$\lim_{t \to 0+} (\lg \sin t - \lg t) = \lim_{t \to 0+} \lg \frac{\sin t}{t} = 0 \,,$$

obdržíme

$$\lg \sin t = \lg t + \sum_{k=1}^{\infty} \lg \frac{t^2 - k^2\pi^2}{-k^2\pi^2} \,,$$

(98) $$\sin t = t \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{k^2\pi^2}\right)^{31)}$$

pro $0 < t < \pi$. Tvrdím však, že *tento vzorec platí pro každé komplexní* t.

Důkaz. Pro $m = 1, 2, \ldots$ a pro každé komplexní z položme

(99) $$P_m(z) = \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{z}{k^2}\right) = 1 + \sum_{r=1}^{m} \sigma_{r,m} z^r \,;$$

přitom klademe

(100) $$\sigma_{r,m} = \sum_{\substack{k_j = 1 \\ k_1 < k_2 < \ldots < k_r}}^{m} \frac{1}{k_1^2 k_2^2 \ldots k_r^2} \,, \quad \sigma_r = \sum_{\substack{k_j = 1 \\ k_1 < k_2 < \ldots < k_r}}^{\infty} \frac{1}{k_1^2 k_2^2 \ldots k_r^2} \,.^{32)}$$

---

[31]) Je-li $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots = \gamma$, je $\lim\limits_{m \to \infty} (\alpha_1 + \ldots + \alpha_m) = \gamma$, tedy $\lim\limits_{m \to \infty} e^{\alpha_1} e^{\alpha_2} \ldots e^{\alpha_m} = \lim\limits_{m \to \infty} e^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m} = e^{\gamma}$, t. j. $e^{\alpha_1} . e^{\alpha_2} . e^{\alpha_3} \ldots = e^{\gamma}$. O nekonečných součinech viz **D II**, kap. III, § 7.

[32]) Sčítá se tedy přes všechna přirozená $k_1, \ldots, k_r$, jež splňují podmínky $k_1 < \ldots < k_r \leqq m$, po příp. podmínky $k_1 < \ldots < k_r$. Pro $r > m$ nelze ovšem podmínkám $k_1 < \cdots < k_r \leqq m$ vyhověti, první součet v (100) je prázdný, tedy $\sigma_{r,m} = 0$.

Odhadněme tato čísla. Jest (pro přirozené p)

$$\sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{p^2} + \int_p^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} \leqq \frac{2}{p}, \tag{101}$$

a tedy

$$0 \leqq \sigma_{r,m} < \sigma_r \leqq \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{1}{k_1^2} \sum_{k_2=2}^{\infty} \frac{1}{k_2^2} \cdots \sum_{k_r=r}^{\infty} \frac{1}{k_r^2} \leqq \frac{2^r}{r!}. \tag{102}$$

Odtud plyne konvergence mocninné řady

$$F(z) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \sigma_r z^r \tag{103}$$

pro každé komplexní z. Odhadněme rozdíl $\sigma_r - \sigma_{r,m}$. Všichni členové v (100), v nichž $k_r \leqq m$, se zruší, a tedy vyjde

$$0 \leqq \sigma_r - \sigma_{r,m} \leqq \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{1}{k_1^2} \cdots \sum_{k_{r-1}=r-1}^{\infty} \frac{1}{k_{r-1}^2} \sum_{k_r=m+1}^{\infty} \frac{1}{k_r^2} \leqq \frac{2^r}{(r-1)!\,(m+1)}.$$

Tedy jest (podle pozn. [32]) je $\sigma_{r,m} = 0$ pro $r > m$)

$$|F(z) - P_m(z)| = \left|\sum_{r=1}^{\infty} (\sigma_r - \sigma_{r,m})\, z^r\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{2|z|}{m+1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2|z|)^{r-1}}{(r-1)!} = \frac{2|z|}{m+1}\, \mathrm{e}^{2|z|}.$$

Tedy jest $\lim_{m\to\infty} P_m(z) = F(z)$, t. j.

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k^2}\right) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \sigma_r z^r \text{ pro každé } z.$$

Tedy jest pro každé komplexní t

$$t \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{k^2\pi^2}\right) = t + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \sigma_r \frac{t^{2r+1}}{\pi^{2r}}. \tag{104}$$

Současně je však pro každé komplexní t

$$\sin t = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)!} t^{2r+1}. \tag{105}$$

Mocninné řady v (104), (105) mají však podle (98) týž součet pro $0 < t < \pi$, tedy mají tytéž koeficienty (**D II**, kap. XI, věta 226), tedy mají týž součet pro všechna komplexní t; tedy platí (98) pro všechna komplexní t.

Příklad 4. Uvedu nyní pro funkci $f(x) = x$ čtyři různé rozvoje, platné v $(0, 1)$. Budou to rozvoje o periodě 2, lišící se podle toho, jak doplním definici funkce $f(x)$ v intervalu $(-1, 0)$.

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin k\pi x}{k} = \begin{cases} x \text{ pro } -1 < x < 1 \\ 0 \text{ pro } x = 1,\ x = -1\,. \end{cases} \tag{106}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2} = |x| \text{ pro } -1 \leqq x \leqq 1\,. \tag{107}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin k\pi x}{k} = \\ &= \begin{cases} x \text{ pro } 0 \leqq x < 1 \\ 0 \text{ pro } -1 < x \leqq 0 \\ \frac{1}{2} \text{ pro } x = 1,\ x = -1\,. \end{cases} \end{aligned} \tag{108}$$

$$1 - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi x}{k} = \begin{cases} x \text{ pro } 0 < x < 2\ ^{33)} \\ 1 \text{ pro } x = 0,\ x = 2\,. \end{cases} \tag{109}$$

Třetí rozvoj dostaneme ostatně jako aritmetický průměr prvních dvou.

Poznámka 5. Věta 179 praví: Je-li funkce dána jako součet trigonometrické řady stejnoměrně konvergentní v $(-\infty, +\infty)$, je tato řada Fourierovou řadou té funkce. Na př. je-li

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos kx}{k^2} + e^{-k}\sin kx\right),$$

je řada vpravo Fourierovou řadou funkce f. Speciálně to platí pro řady konečné, t. j. pro trigonometrické polynomy. Je-li na př.

$$g(x) = 2 + 5\cos x - 2\sin 3x\,,$$

je pravá strana Fourierovou řadou funkce g (při čemž členové rovní nule nejsou vypsáni). Tato poznámka nám někdy ulehčuje početní mechanismus. Na př. je-li

---

[33]) Také můžeme říci: levá strana je rovna x pro $0 < x < 1$, a je rovna $x + 2$ pro $-1 < x < 0$.

$$f(x) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,,$$

je (viz též pozn. 2 v § 2)

$$f(x) - \tfrac{1}{2}a_0 - \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \approx \sum_{k=m+1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,.$$

Cvičení

1. Nechť komplexní číslo α není celé. Potom je předně

$$\pi \cos \alpha x = \frac{\sin 2\alpha\pi}{2\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - k^2}(\alpha \sin 2\alpha\pi \cos kx + k(\cos 2\alpha\pi - 1) \sin kx)$$

pro $0 < x < 2\pi$; pro $x = 0$ máme

$$\tfrac{1}{2}\pi(\cos 2\alpha\pi + 1) = \frac{\sin 2\alpha\pi}{2\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha \sin 2\alpha\pi}{\alpha^2 - k^2}\,.$$

Za druhé: Pro $-\pi \leqq x \leqq \pi$ jest

$$\pi \cos \alpha x = \sin \alpha\pi \left(\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos kx}{\alpha^2 - k^2}\right).$$

Za třetí: Pro $0 < x < \pi$ jest

$$\pi \cos \alpha x = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - k^2}(1 + (-1)^{k+1} \cos \alpha\pi)\, k \sin kx\,. \tag{110}$$

2. Nechť m je celé. Potom pro $0 < x < \pi$ jest

$$\pi \cos mx = 4 \sum_{\substack{k=1\\ k \not\equiv m \ (\mathrm{mod}\ 2)}}^{\infty} \frac{k}{k^2 - m^2} \sin kx\,. \tag{111}$$

Znak $k \equiv m \pmod q$ značí, že $\dfrac{k - m}{q}$ je celé číslo (čte se: k je kongruentní s m modulo q); znak $\not\equiv$ značí „není kongruentní".

3. Výsledek cvič. 2 lze také obdržeti ze (110) takto: Fourierovu řadu funkce $\pi \cos mx$ dostaneme z Fourierovy řady funkce $\pi \cos \alpha x$ limitním přechodem $\alpha \to m$. Proveďte!

4. Pro každé reálné x jest

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1} = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 kx}{4k^2 - 1}\,.$$

5. Z rovnice (98) plyne pro $t = \frac{1}{2}\pi$ Wallisova formule (viz **J I**, kap. III, § 5, pozn. 3).

6. Budiž $\alpha > 0$; potom jest pro každé reálné x

$$|\cos x|^\alpha = \frac{2}{\pi}\left(I(\alpha, 0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha, k)\cos 2kx\right), \tag{112}$$

kde

$$I(\alpha, k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^\alpha x \cos 2kx \, dx. \tag{113}$$

Vyjádřím-li $\cos(2k + 1)x$ dvěma způsoby, obdržím rovnici

$$\cos(2k + 2)x\cos x + \sin(2k + 2)x\sin x = \\ = \cos 2kx\cos x - \sin 2kx\sin x;$$

násobím-li $\cos^{\alpha-1} x$ a integruji, obdržím snadno $(\alpha + 2k + 2)\, I(\alpha, k + 1) = (\alpha - 2k)\, I(\alpha, k)$. Tím obdrží (112) definitivní tvar

$$|\cos x|^\alpha = \frac{4}{\pi} I(\alpha, 0)\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\alpha + 2}\cos 2x + \frac{\alpha(\alpha - 2)}{(\alpha + 2)(\alpha + 4)}\cos 4x + \right. \\ \left. + \frac{\alpha(\alpha - 2)(\alpha - 4)}{(\alpha + 2)(\alpha + 4)(\alpha + 6)}\cos 6x + \ldots\right).$$

Pro celá α dovedeme ještě vypočísti $I(\alpha, 0)$ (viz (113)) a máme pro celé $m > 0$

$$|\cos^{2m-1} x| = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2m - 2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2m - 1)}\left(\frac{1}{2} + \frac{2m - 1}{2m + 1}\cos 2x + \right. \\ \left. + \frac{(2m - 1)(2m - 3)}{(2m + 1)(2m + 3)}\cos 4x + \ldots\right), \tag{114}$$

$$\cos^{2m} x = 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2m}\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{m + 1}\cos 2x + \right. \\ \left. + \frac{m(m - 1)}{(m + 1)(m + 2)}\cos 4x + \ldots\right).$$

Poslední rozvoj jest ovšem konečný (t. j. je to trigonometrický polynom).

7. Budiž $g(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ pro $0 < x < 2\pi$; dále nechť má g periodu 2π (načrtněte!); tedy na př. pro $-2\pi < x < 0$ je $g(x) = -\frac{1}{2}(\pi + x)$. Pro každé reálné x, jež není tvaru $2m\pi$ (m celé), je

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}. \tag{115}$$

V bodě 0 má funkce g „skok" $g(0+) - g(0-) = \pi$. Řada konjugovaná k řadě (115) (viz cvič. 5, 6 v § 4 a cvič. 3, 4 v § 5) je $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \cos kx$. Její částečné součty $S_m(x)$ mají pro $x = 0$ tuto vlastnost:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S_m(0)}{\lg m} = 1 .$$

8. Budiž $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. Nechť pro určitou hodnotu x_0 existuje konečná limita

$$\lim_{t\to 0+} (f(x_0 + t) - f(x_0 - t)) = D . \tag{116}$$

Potom částečné součty S_m řady konjugované k Fourierově řadě funkce f mají tuto vlastnost:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S_m(x_0)}{\lg m} = \frac{D}{\pi} . \tag{117}$$

Na př. existují-li limity $f(x_0 +)$, $f(x_0 -)$ a jsou různé, je konjugovaná řada divergentní.

Návod: Z cvič. 7 je patrno, že tvrzení je správné pro funkci $D\pi^{-1} g(x - x_0)$. Stačí tedy dokázati ještě toto tvrzení pro funkci $f(x) - D\pi^{-1} g(x - x_0)$; t. j. stačí je dokázati v případě, že v (116) je $D = 0$. Budiž $\varepsilon > 0$; pro $0 < t < \delta$ je (vzhledem k $D = 0$) $|f(x_0 + 2t) - f(x_0 - 2t)| < \varepsilon$, zvolíme-li vhodně $\delta > 0$. Rozložme integrál v (57) na tři: $\int_0^{\frac{1}{m}} + \int_{\frac{1}{m}}^{\delta} + \int_{\delta}^{\frac{1}{2}\pi}$. Třetí jest omezený pro $m \to \infty$; druhý je v prosté hodnotě menší než Const . $\varepsilon \int_{m^{-1}}^{\delta} t^{-1}\, dt <$ Const . ε . $\lg m$; první integrál je pak rovněž omezený pro $m \to \infty$, neboť jest

$$\left| \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}t - \frac{\cos (m + \frac{1}{2})\, t}{\sin \frac{1}{2}t} \right| = \left| 2 \sum_{k=1}^{m} \sin kt \right| \leqq 2m .$$

9. Z příkl. 2 obdržíte přechodem ke konjugované řadě a užitím výsledku cvič. 3, 4 v § 5

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos (2k + 1)\, x}{2k + 1} = \tfrac{1}{2} \lg |\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}x|$$

pro každé reálné x, jež nemá tvar $x = m\pi$ (m celé). Tento výsledek můžeme ovšem odvoditi i jinými způsoby, na př. z řady

$$\lg (1 + re^{ix}) - \lg (1 - re^{ix}) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k + 1}\, r^{2k+1} e^{(2k+1)ix}$$

$(0 < r < 1)$ limitním přechodem $r \to 1$ — podle Abelovy věty (**D II, věta 236**).[34])

10. Řada

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\lg k}$$

není Fourierovou řadou žádné funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ (návod: věta 186). Přitom je tato řada konvergentní pro každé x, dokonce stejnoměrně v každém intervalu $\langle \varepsilon, 2\pi - \varepsilon \rangle$ $(0 < \varepsilon < \pi)$ (důkaz podle vzoru příkl. 1).

§ 7. Poissonova sumační formule. Věta 188. *Budiž $a \in \mathbf{E}_1$, $l > 0$, n přirozené číslo. Budiž f funkce, jež má konečnou variaci v $\langle a, a + nl \rangle$. Potom jest*

$$\tfrac{1}{2}f(a+) + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(f(a+kl-) + f(a+kl+)) + \tfrac{1}{2}f(a+nl-) =$$

$$= \frac{1}{l}\int_a^{a+nl} f(x)\,dx + \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^{a+nl} f(x)\cos\frac{2k\pi(x-a)}{l}\,dx\,. \tag{118}$$

Poznámka 1. Věty lze ovšem užíti též na komplexní funkce (užije se zvlášť na reálnou a imaginární část).

Poznámka 2. Pravou stranu v (118) lze též psáti

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{k=-m}^{m}\int_a^{a+nl} f(x)\,e^{\frac{2k\pi \mathrm{i}}{l}(x-a)}\,dx\,. \tag{119}$$

Poznámka 3. Nejčastější případ této „Poissonovy sumační formule“ je ten, že funkce f je spojitá v $\langle a, a + nl \rangle$. Potom levá strana jest

$$\tfrac{1}{2}f(a) + f(a+l) + f(a+2l) + \ldots + f(a+(n-1)\,l) + \tfrac{1}{2}f(a+nl)\,. \tag{120}$$

Důkaz plyne téměř okamžitě z věty 185. Budiž k celé, $0 \leqq k \leqq n - 1$. Budiž $g(x)$ funkce s periodou l, jež pro $0 < x < l$ je definována rovnicí $g(x) = f(a + kl + x)$. Podle věty 185[35]) jest

[34]) Nakonec jde jen o reálnou část, t. j. vlevo o logaritmy absolutních hodnot; tedy odpadají obtíže s určováním amplitudy.

[35]) Aplikované s periodou l místo 2π, a to v bodě $x = 0$.

$$(121)\qquad \tfrac{1}{2}(g(0+)+g(l-)) = \tfrac{1}{2}A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m\,,$$

$$A_m = \frac{2}{l}\int_0^l g(t)\cos\frac{2m\pi}{l}t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{l}\int_0^l f(a+kl+t)\cos\frac{2m\pi}{l}t\,\mathrm{d}t\,.$$

Substituce $a + kl + t = x$ dává $\left(\text{jest}\ \cos\frac{2m\pi}{l}(x-a-kl) = \right.$ $\left. = \cos\frac{2m\pi}{l}(x-a)\right)$

$$A_m = \frac{2}{l}\int_{a+kl}^{a+(k+1)l} f(x)\cos\frac{2m\pi}{l}(x-a)\,\mathrm{d}x\,,$$

takže podle (121) jest

$$\tfrac{1}{2}f(a+kl+) + \tfrac{1}{2}f(a+(k+1)\,l-) =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{a+kl}^{a+(k+1)l} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{a+kl}^{a+(k+1)l} f(x)\cos\frac{2m\pi}{l}(x-a)\,\mathrm{d}x\,.$$

Sečteme-li přes hodnoty $k = 0, 1, \ldots, n-1$, obdržíme (118).

Příklad 1. Budiž n přirozené číslo; Gaussovým součtem nazveme výraz

$$(122)\qquad G(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{k^2}{n}}\,.$$

Tento součet je důležitý v teorii čísel; vypočtěme jej. Užijeme věty 188 $\left(l = 1,\ a = 0,\ f(x) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{x^2}{n}}\right)$. Ježto $f(0) = \tfrac{1}{2}f(0) + \tfrac{1}{2}f(n) = 1$, obdržíme

$$(123)\qquad \begin{aligned} G(n) &= \lim_{m\to\infty}\sum_{k=-m}^{m}\int_0^n \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\left(\frac{x^2}{n}+kx\right)}\,\mathrm{d}x = \\ &= n\lim_{m\to\infty}\sum_{k=-m}^{m}\int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n(y^2+ky)}\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

(substituce $x = ny$). Substituce $y + \tfrac{1}{2}k = z$ dává

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n(y^2+ky)}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}k^2n}\int_{\frac{1}{2}k}^{\frac{1}{2}(k+2)} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz^2}\,\mathrm{d}z\,.$$

Činitel před integrálem vpravo jest 1 pro sudé k a jest roven i^{-n} pro liché k. Omezíme-li se v (123) na sudá $m = 2r$, obdržíme

$$(124) \qquad G(n) = n \lim_{r \to \infty} \left(\int_{-r}^{r+1} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n z^2} \, \mathrm{d}z + \mathrm{i}^{-n} \int_{-r+\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n z^2} \, \mathrm{d}z \right).$$

Položme (zde jde o nevlastní integrál)

$$(125) \qquad \gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n z^2} \, \mathrm{d}z\,;$$

konvergence integrálu je patrna integrací per partes: pro $0 < a < b$ i pro $0 > a > b$ jest

$$\int_a^b \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x^2} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x^2}}{4\pi \mathrm{i} x} \right]_a^b + \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x^2}}{4\pi \mathrm{i} x^2} \, \mathrm{d}x\,;$$

limitní přechod $b \to +\infty$ nebo $b \to -\infty$ ukazuje konvergenci integrálu v mezích $-\infty$, $+\infty$. Z (124) tedy plyne

$$(126) \qquad G(n) = \sqrt{n}\, \gamma (1 + \mathrm{i}^{-n}).$$

Pro $n = 1$ je $G(1) = 1$, tedy máme $1 = \gamma(1 + \mathrm{i}^{-1})$, t. j.

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(1 + \mathrm{i})$$

(tím jsme znovu stanovili integrál (125), t. j. v podstatě Fresnelovy integrály z kap. VIII, § 4, příkl. 2). Ze (126) potom plyne:[36])

$$\begin{aligned} G(n) &= (1 + \mathrm{i}) \sqrt{n} && \text{pro } n \equiv 0 \pmod 4 \\ G(n) &= \sqrt{n} && \text{pro } n \equiv 1 \pmod 4 \\ G(n) &= 0 && \text{pro } n \equiv 2 \pmod 4 \\ G(n) &= \mathrm{i}\sqrt{n} && \text{pro } n \equiv 3 \pmod 4 . \end{aligned}$$

Příklad 2. *Pro $s > 0$ jest*

$$(127) \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k^2 \pi s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k^2 \frac{\pi}{s}} .$$

Absolutní konvergence obou řad je jasná. Označím-li funkci vlevo $\vartheta(s)$, dává rovnice (127) tuto funkční rovnici:

[36]) Znak $a \equiv b \pmod p$ (čti: a je kongruentní s b podle modulu p) značí, že číslo $a - b$ je dělitelno číslem p.

$$(128) \qquad \vartheta(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\,\vartheta\left(\frac{1}{s}\right) \text{ pro } s > 0\,.$$

Důležitost rovnice (127) je jasná: Není-li s příliš malé (na př. je-li $s \geqq 1$), konverguje řada vlevo velmi rychle. Je-li však s malé, konverguje řada vlevo špatně, zato řada vpravo konverguje velmi rychle. Rovnice (127) dává nám tedy prostředky ke studiu důležité funkce $\vartheta(s)$ pro malé kladné hodnoty s. **Důkaz** rovnice (127) provedeme větou 188; ježto jde o nekonečnou řadu, musíme přitom provésti ještě příslušnou limitní úvahu. Pro celé $q > 0$ dostaneme z věty 188 (pro $a = -q$, $l = 1$, $n = 2q$, $f(x) = e^{-x^2\pi s}$)[37])

$$(129) \qquad \sum_{k=-q}^{q}{}' e^{-k^2\pi s} = \int_{-q}^{q} e^{-x^2\pi s}\,dx + 2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-q}^{q} e^{-x^2\pi s}\cos 2k\pi x\,dx\,.$$

Užijeme-li známé hodnoty (integrand je funkce sudá)

$$(130) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2\pi s}\cos 2k\pi x\,dx = \sqrt{\frac{1}{s}}\,e^{-k^2\frac{\pi}{s}}$$

(viz kap. VII, § 8), vidíme, že pravá strana v (129) má hodnotu

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2\frac{\pi}{s}} - A_q\,,$$

kde

$$(131) \qquad A_q = 2\int_q^{+\infty} e^{-x^2\pi s}\,dx + 4\sum_{k=1}^{\infty}\int_q^{+\infty} e^{-x^2\pi s}\cos 2k\pi x\,dx\,.$$

Dokáži-li, že $\lim\limits_{q\to\infty} A_q = 0$, bude tím (127) dokázáno, neboť levá strana v (129) má pro $q \to \infty$ limitu $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-k^2\pi s}$.

Píši-li

$$(132) \qquad B_{q,k} = \int_q^{+\infty} e^{-x^2\pi s}\cos 2k\pi x\,dx\,,$$

[37]) Značka Σ' značí, že oba krajní členy součtu (pro $k = -q$ a pro $k = q$) jest opatřiti činitelem $\frac{1}{2}$.

obdržím integrací per partes pro celé $k > 0$

$$(133) \quad B_{q,k} = \left[\frac{e^{-x^2\pi s}\sin 2k\pi x}{2k\pi}\right]_q^{+\infty} + \frac{s}{k}\int_q^{+\infty} x e^{-x^2\pi s}\sin 2k\pi x \, dx\,.$$

Ježto q, k jsou celá kladná, je první člen vpravo roven nule. Jest

$$\frac{d}{dx}(xe^{-x^2\pi s}) = e^{-x^2\pi s}(1 - 2x^2\pi s)\,;$$

předpokládáme-li tedy $q^2 > \frac{1}{2\pi s}$, je funkce $xe^{-x^2\pi s}$ klesající v $\langle q, +\infty)$, takže 2. věta o střední hodnotě (viz (71) na konci kap. V) dává pro $q' > q$

$$(134) \quad \left|\int_q^{q'} xe^{-x^2\pi s}\sin 2k\pi x\, dx\right| = \left|qe^{-q^2\pi s}\int_q^{q'}\sin 2k\pi x\, dx\right| \leqq \frac{qe^{-q^2\pi s}}{k\pi}\,;$$

užijeme-li (134), obdržíme limitním přechodem $q' \to \infty$ ze (133)

$$|B_{q,k}| \leqq \frac{s}{\pi}\, qe^{-q^2\pi s} \cdot \frac{1}{k^2}\,,$$

a tedy podle (131)

$$|A_q| \leqq 2\int_q^{+\infty} e^{-x^2\pi s}\, dx + \frac{4s}{\pi}\, qe^{-q^2\pi s} \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

pro $q > \sqrt{\frac{1}{2\pi s}}$, takže vskutku $\lim\limits_{q\to\infty} A_q = 0$.

Cvičení

1. Větu 188 lze poněkud zobecniti takto: Budiž $a \in E_1$, $l > 0$, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$. Nechť funkce f má konečnou variaci v $\langle\alpha, \beta\rangle$. Potom jest

$$(135) \quad \begin{aligned} &\sum_{\alpha \leqq a + kl \leqq \beta}{}' \tfrac{1}{2}(f(a + kl -) + f(a + kl +)) = \\ &= \frac{1}{l}\int_\alpha^\beta f(x)\, dx + \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_\alpha^\beta f(x)\cos\frac{2k\pi(x - a)}{l}\, dx\,. \end{aligned}$$

Přitom se sčítá přes ona celá k, pro něž je $\alpha \leqq a + kl \leqq \beta$; čárka u Σ pak značí: je-li α tvaru $a + kl$, je příslušný člen součtu $\frac{1}{2}f(\alpha +)$; podobně, je-li β tvaru $a + kl$, je příslušný člen $\frac{1}{2}f(\beta -)$. Návod: Položíte $f(x) = 0$ vně intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ a užijete věty 188.

2. Věty 188 užíváme i při dvojnásobných, trojnásobných, ... součtech. Vezměme jeden příklad. Pro $x > 0$ budiž $A(x)$ počet mřížových bodů (t. j. bodů $[u, v]$ s celočíselnými souřadnicemi u, v), jež leží v kruhu $u^2 + v^2 \leqq x$; přitom mřížové body na kružnici bereme pouze s vahou $\frac{1}{2}$ a mřížové body $[\pm\sqrt{x}, 0]$, $[0, \pm\sqrt{x}]$ (jestliže $\sqrt{x}$ je celé číslo) dokonce s vahou $\frac{1}{4}$. Ukažte:

$$(136) \qquad A(x) = \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{a=-\infty}^{+\infty} \iint_{u^2+v^2 \leqq x} \cos 2a\pi u \cos 2b\pi v \, du \, dv \right).$$

Přitom nechť $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n$ značí $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=-m}^{m} c_n$.

Návod: Lze také říci, že event. mřížové body $[\pm\sqrt{x}, 0]$ počítám s vahou nula, body $[0, \pm\sqrt{x}]$ s vahou $\frac{1}{2}$. Položme $\varphi(v) = \sum'_{|m|\leqq\sqrt{x-v^2}} 1$ pro $v \neq \pm\sqrt{x}$,[38]) $\varphi(\pm\sqrt{x}) = 0$; potom zřejmě $A(x) = \sum'_{|n|\leqq\sqrt{x}} \varphi(n)$.

Dvojím užitím věty 188 (nejpohodlněji ve tvaru cvič. 1) obdržíme[39])

$$(137) \qquad \varphi(v) = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \int_{-\sqrt{x-v^2}}^{\sqrt{x-v^2}} \cos 2a\pi u \, du = \frac{1}{\pi} \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2a\pi \sqrt{x-v^2}}{a}$$

pro $v^2 < x$ (a zřejmě i pro $v^2 = x$),

$$(138) \qquad A(x) = \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \left(\sum_{a=-\infty}^{+\infty} \int_{-\sqrt{x-v^2}}^{\sqrt{x-v^2}} \cos 2a\pi u \cos 2b\pi v \, du \right) dv .$$

Užijeme-li na poslední výraz v (137) odhadu (91) z § 6, příkl. 1, vidíme podle věty 65, že můžeme zaměnit pořadí symbolů $\sum_a$, $\int dv$; tak dostanete (136).

Vzhledem k tomu, že integrály v (136) jsou sudé funkce a, b, je patrno, že součty $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n$ zde lze pojímati i v obecnějším (a obvyklejším) smyslu jakožto $\sum_{n=0}^{\infty} c_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}$.

Všimněte si, že člen s $a = b = 0$ v (136) dává právě obsah kruhu πx; ostatní členy mají význam jakýchsi členů korekčních.

---

[38]) Označení je jasné: jde o $\Sigma'_{|m|\leqq\sqrt{x-v^2}} f(m)$, kde $f(t) = 1$ pro všechna t. Číslo $x > 0$ je pevně dáno.

[39]) Znak $\frac{\sin \alpha\beta}{\beta}$ nechť pro $\beta = 0$ značí číslo α.

§ 8. Aproximace funkcí polynomy a trigonometrickými polynomy. Vraťme se opět k Fourierově řadě. Budiž f funkce konečná a spojitá s periodou $l > 0$. Budiž

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\frac{2k\pi i}{l} x} \tag{139}$$

částečný součet její Fourierovy řady. Pišme $D_n(f) = \max_{-\infty < x < +\infty} |f(x) - s_n(x)|$. Jestliže nadto má f variaci konečnou v $\langle 0, l \rangle$, víme z věty 185, že $s_n(x)$ konvergují k $f(x)$ stejnoměrně v $(-\infty, +\infty)$, t. j. že $\lim_{n\to\infty} D_n(f) = 0$. Ale jak rychlá je tato konvergence? Na to dává jistou odpověď tato věta:

Věta 189. *Nechť f je funkce s periodou $l > 0$, jež má v $\langle 0, l \rangle$ absolutně spojitou derivaci řádu $p \geqq 1$. Potom je* $c_n = o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$, $c_{-n} = o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$, $D_n(f) = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$ *pro $n \to \infty$, $n \in \mathbf{N}$, t. j.*

$$\lim_{n\to\infty} n^{p+1} c_n = \lim_{n\to\infty} n^{p+1} c_{-n} = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} n^p D_n(f) = 0 \tag{140}$$

(symbol o byl zaveden v **D II**, kap. VI, § 13 a znovu připomenut v kap. VII, § 1, pozn. 7).

Důkaz. Substituce $x = \frac{l}{2\pi} t$ převádí periodu l na periodu 2π; stačí tedy předpokládati $l = 2\pi$. Podle věty 185 je

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\,.$$

Užijme na $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$ věty 99 (integrace per partes, $(p+1)$-kráte opakovaná); závorka $[\ ]_0^{2\pi}$ se rovná nule následkem periodičnosti, takže

$$c_k = \frac{1}{2\pi (ik)^{p+1}} \int_0^{2\pi} f^{(p+1)}(x)\, e^{-ikx}\, dx\,; \tag{141}$$

ježto $f^{(p+1)} \in \mathsf{L}(0, 2\pi)$ (neboť je to derivace absolutně spojité funkce), má integrál v (141) limitu 0 [40]) pro $|k| \to +\infty$ podle věty 181. Budiž $\varepsilon > 0$; potom existuje n_0 tak, že $|c_k| < \varepsilon |k|^{-p-1}$ pro $|k| \geqq n_0$. Pro $n \geqq n_0$ je tedy pro všechna $x \in \mathsf{E}_1$

$$|f(x) - s_n(x)| < 2\varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-p-1} < 2\varepsilon \int_n^{\infty} u^{-p-1}\, du = \frac{2\varepsilon}{p} n^{-p} ;$$

odtud plyne i druhý vztah (140).

Podobně pro algebraické polynomy:

Věta 190. *Nechť funkce f má v intervalu $\langle a, b\rangle$ absolutně spojitou derivaci řádu p-tého ($p \geqq 1$). Potom existuje posloupnost polynomů $P_0, P_1, P_2, \ldots$ tak, že polynom P_n je stupně nejvýše n-tého a že*

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| = o\left(\frac{1}{n^p}\right) \tag{142}$$

pro $n \to \infty$, $n \in \mathsf{N}$.[41])

Poznámka 1. Než přistoupíme k důkazu, dokažme tuto drobnost: Je-li $g(x)$ funkce absolutně spojitá v $\langle -1, 1\rangle$, je „složená" funkce $g(\cos \Theta)$ absolutně spojitá v $\langle -\pi, \pi\rangle$.

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$; potom existuje $\delta > 0$ tak, že[42])

$$\begin{gathered}(-1 \leqq y_p \leqq x_p \leqq y_{p-1} < x_{p-1} \leqq \ldots \leqq y_1 < x_1 \leqq 1\,, \\ \sum_{i=1}^{p} (x_i - y_i) < \delta) \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} |g(x_i) - g(y_i)| < \varepsilon\,.\end{gathered} \tag{143}$$

Je-li nyní

$$0 \leqq \varphi_1 < \psi_1 \leqq \cdots \leqq \varphi_{p-1} < \psi_{p-1} \leqq \varphi_p < \psi_p \leqq \pi\,, \quad \sum_{i=1}^{p} (\psi_i - \varphi_i) < \delta\,,$$

a položíme-li $\cos \varphi_i = x_i$, $\cos \psi_i = y_i$, je $x_i - y_i = \sin \xi \,.\, (\psi_i - \varphi_i)$ ($\varphi_i < \xi < \psi_i$, tedy $0 < \sin \xi < 1$), takže je splněna premisa v (143)

[40]) To dává již první rovnici (140).

[41]) Levá strana je funkcí čísla n.

[42]) Ježto $\cos \Theta$ je v $\langle 0, \pi\rangle$ klesající, hodí se mně toto číslování.

a tedy i její závěr, t. j. $\sum_{i=1}^{p} |g(\cos \psi_i) - g(\cos \varphi_i)| < \varepsilon$. Tedy je $g(\cos \Theta)$ a. s. v $\langle 0, \pi \rangle$ a ježto je to funkce sudá, je zřejmě též a. s. v $\langle -\pi, 0 \rangle$.

Poznámka 2. Provedeme-li pro $n \in \boldsymbol{N}$, $\Theta \in \boldsymbol{K}$ umocnění v rovnicích $\mathrm{e}^{\pm ni\Theta} = (\mathrm{e}^{\pm i\Theta})^n$, t. j.

$$\cos n\Theta \pm \mathrm{i} \sin n\Theta = (\cos \Theta \pm \mathrm{i} \sin \Theta)^n ,$$

sečteme-li tyto dvě rovnice a užijeme vztahu $\sin^2 \Theta = 1 - \cos^2 \Theta$, obdržíme

$$\begin{aligned} \cos n\Theta = \cos^n \Theta + \binom{n}{2} \cos^{n-2} \Theta (\cos^2 \Theta - 1) + \\ + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \Theta (\cos^2 \Theta - 1)^2 + \ldots \end{aligned} \tag{144}$$

(pokračuje se tak dlouho, pokud se neobjeví záporný mocnitel). Tedy $\cos n\Theta$ je polynom stupně n-tého v $\cos \Theta$; koeficient při $\cos^n \Theta$ jest $1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = 2^{n-1}$ pro $n > 0$. [43])

Definuji-li tedy polynomy T_n rovnicemi

$$\begin{aligned} T_0(x) = 1, \; T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \Big(x^n + \binom{n}{2} x^{n-2}(x^2 - 1) + \\ + \binom{n}{4} x^{n-4}(x^2 - 1)^2 + \ldots \Big) \text{ pro } n > 0 , \end{aligned} \tag{145}$$

je koeficient při x^n roven jedné a pro každé komplexní Θ je

$$\cos (0\Theta) = T_0(\cos \Theta) , \quad \cos (n\Theta) = 2^{n-1} T_n(\cos \Theta) \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots$$

S těmito polynomy se setkáme ještě později (kap. XIV, § 9, Čebyševovy polynomy).

Důkaz věty 190. Stačí vyšetřovati případ $a = -1$, $b = 1$ (na který se dají ostatní případy převésti substitucí $x = \frac{1}{2}(b + a) +$

---

[43]) To plyne sečtením obou rovnic

$$(1 \pm 1)^n = 1 \pm \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \pm \binom{n}{3} + \binom{n}{4} \pm \cdots$$

$+ \frac{1}{2}(b - a)\,t)$. Položme $F(\Theta) = f(\cos \Theta)$, což je zřejmě sudá funkce s periodou 2π. Derivace $F^{(p)}(\Theta)$ je polynom ve výrazech $\sin \Theta$, $\cos \Theta$, $f'(\cos \Theta), \ldots, f^{(p)}(\cos \Theta)$ (derivuje se podle pravidla o složených funkcích). Tedy (pozn. 1) je $F^{(p)}(\Theta)$ a. s. v $\langle -\pi, \pi \rangle$ (neboli v $\langle 0, 2\pi \rangle$). Je-li $S_n(\Theta)$ částečný součet Fourierovy řady funkce F, je (věta 189)

$$\max_{-\infty < \Theta < +\infty} |F(\Theta) - S_n(\Theta)| = o\left(\frac{1}{n^p}\right). \tag{146}$$

Napišme $S_n(\Theta)$ ve tvaru (1) (s kosinusy a sinusy); ježto je F sudá, vypadnou sinusové členy a obdržíme $S_n(\Theta) = \frac{1}{2}A_{0,n} + \sum_{k=1}^{n} A_{k,n} \cos k\Theta$; toto lze podle pozn. 2 psáti

$$S_n(\Theta) = \sum_{k=0}^{n} C_{k,n} \cos^k \Theta\,. \tag{147}$$

Budiž nyní $-1 \leqq x \leqq 1$; existuje tedy Θ $(0 \leqq \Theta \leqq \pi)$ tak, že $x = \cos \Theta$, tedy $F(\Theta) = f(x)$ a z (147) plyne

$$F(\Theta) - S_n(\Theta) = f(x) - P_n(x)\,,$$

kde $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_{k,n} x^k$. Odtud a z (146) plyne (142).

Otázka, jak dobře lze danou spojitou funkci aproximovati polynomy, po případě — když je periodická — trigonometrickými polynomy, je jednou ze základních otázek t. zv. konstruktivní theorie funkcí. Tato nauka byla založena Čebyševem; vedoucí postavení v ní má dnes škola sovětská, vedená akademikem Bernštejnem. Věty 189, 190 lze ještě podstatně zlepšit — zostřit i zobecnit.

§ 9. Spojitá funkce s divergentní Fourierovou řadou. Funkce, mající konečnou variaci v $\langle 0, 2\pi \rangle$, mají podle věty 185 konvergentní Fourierovu řadu. Mezi funkce s variací konečnou patří mnohé funkce spojité, i některé funkce nespojité. Vzniká tudíž otázka, zda snad každá konečná spojitá funkce má konvergentní Fourierovu řadu. Odpověď je záporná: *Sestrojíme funkci $F(x)$ o periodě 2π, konečnou a spojitou v $(-\infty, +\infty)$, jejíž Fourierova řada je divergentní pro $x = 0$.*

K tomu cíli definujme pro každé přirozené n trigonometrický polynom f_n rovnicí

$$f_n(x) = \frac{1}{n} + \frac{\cos x}{n-1} + \frac{\cos 2x}{n-2} + \ldots +$$

$$+ \frac{\cos (n-1)x}{1} - \frac{\cos (n+1)x}{1} - \frac{\cos (n+2)x}{2} - \ldots - \frac{\cos 2nx}{n}.$$

Pravá strana je podle pozn. 5 v § 6 Fourierovou řadou funkce f_n. Označím-li $s_{m,n}(x)$ součet prvních $m + 1$ členů Fourierovy řady funkce $f_n(x)$, je zřejmě

$$s_{m,n}(0) \geqq 0,\ \ s_{n,n}(0) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} > \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lg n\,. \tag{148}$$

Jest

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} (\cos (n-k)x - \cos (n+k)x) = 2 \sin nx \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k},$$

takže jest podle (91) $|f_n(x)| \leqq 2 + 4\pi$. Řada

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot f_{2^{n^3}}(x) \tag{149}$$

je tedy stejnoměrně konvergentní v $(-\infty, +\infty)$; funkce F je tedy spojitá v $(-\infty, +\infty)$ a má periodu 2π. Podle pozn. 3 v § 2 dostanu Fourierovy koeficienty funkce F tak, že sečtu příslušné Fourierovy koeficienty jednotlivých členů řady v (149). Značí-li tedy $s_m(x)$ součet prvních $m + 1$ členů Fourierovy řady funkce F, jest

$$s_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot s_{m,\,2^{n^3}}(x)$$

a tedy speciálně podle (148)

$$s_{2^{m^3}}(0) \geqq \frac{1}{m^2}\, s_{2^{m^3},\,2^{m^3}}(0) > \frac{1}{m^2} \lg 2^{m^3} = m \lg 2\,.$$

Posloupnost $s_1(0), s_2(0), \ldots$ nemůže tedy být konvergentní, takže Fourierova řada funkce F je pro $x = 0$ divergentní.

Tento velmi jednoduchý příklad pochází od Fejéra.

§ 10. Metoda aritmetických průměrů (věta Fejérova). Budiž $s_0, s_1, \ldots$ nějaká posloupnost konečných čísel; položme

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}(s_0 + s_1 + \ldots + s_n).$$

Víme toto (**D II**, věta 29): Existuje-li konečná $\lim_{n\to\infty} s_n$, existuje též $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ a obě limity jsou stejné. Může se však státi, že druhá limita existuje, i když první limita neexistuje. Této „metody aritmetických průměrů" užijeme nyní na Fourierovy řady.

Věta 191. *Budiž $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. Budiž $s_m(x)$ součet prvních $m + 1$ členů Fourierovy řady funkce f v bodě x; položme*

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} s_k(x) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{150}$$

Potom platí:

I. Je-li x bod takový, že existuje konečná

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} = A\,, \tag{151}$$

jest

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m(x) = A\,.$$

II. Je-li $f(x)$ konečná a spojitá v $\langle a, b\rangle$ a mimo to ještě spojitá zleva v bodě a a zprava v bodě b, je pro každé $x \in \langle a, b\rangle$

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m(x) = f(x)\,, \tag{152}$$

a tato konvergence je stejnoměrná v $\langle a, b\rangle$.

Všimněte si, že se na rozdíl od pouhé spojitosti v $\langle a, b\rangle$ předpokládá „oboustranná" spojitost i v krajních bodech a, b.

Poznámka 1. Z tvrzení I plyne: Existují-li v bodě x konečné limity $f(x+)$, $f(x-)$, jest

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m(x) = \tfrac{1}{2}(f(x+) + f(x-))\,; \tag{153}$$

je-li tedy speciálně funkce f spojitá a konečná v bodě x, jest

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m(x) = f(x)\,. \tag{154}$$

(Naproti tomu, jak jsme zjistili v § 9, nemusí v tomto případě existovati konečná $\lim\limits_{m\to\infty} s_m(x)$. Vidíte, že aritmetické průměry $\sigma_m(x)$ dávají výsledky úplnější než $s_m(x)$.)

Poznámka 2. Než přistoupíme k vlastnímu důkazu, odvodíme vzorec pro $\sigma_m(x)$. Vyjdeme ovšem ze vzorce (29) pro $s_m(x)$. Jest

$$\sum_{k=0}^{m} e^{(2k+1)it} = e^{it}\,\frac{e^{(2m+2)it}-1}{e^{2it}-1} = \frac{e^{(2m+2)it}-1}{2i\sin t}\;;$$

srovnejme imaginární části:

$$(155)\quad \sum_{k=0}^{m} \sin(2k+1)\,t = \frac{1-\cos(2m+2)\,t}{2\sin t} = \frac{(\sin(m+1)\,t)^2}{\sin t}\,.$$

Z (29) plyne pak užitím vzorce (155)

$$(156)\quad \sigma_m(x) = \frac{1}{(m+1)\,\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(f(x+2t)+f(x-2t))\left(\frac{\sin(m+1)\,t}{\sin t}\right)^2 dt\,.$$

Pro $f(x) = 1$ jest $s_m(x) = 1$ $(m = 0, 1, \ldots)$, tedy též $\sigma_m(x) = 1$, t. j.

$$(157)\qquad \frac{2}{(m+1)\,\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{\sin(m+1)\,t}{\sin t}\right)^2 dt = 1\,.$$

Důkaz věty 191. Pro libovolné x a libovolné A jest podle (156), (157)

$$(158)\qquad \sigma_m(x) - A = \sigma_m(x, \delta) + \tau_m(x, \delta)\,,$$

kde

$$(159)\qquad \sigma_m(x, \delta) = \frac{1}{(m+1)\,\pi}\int_0^{\delta}(f(x+2t)+f(x-2t)-2A)\left(\frac{\sin(m+1)\,t}{\sin t}\right)^2 dt\,,$$

$$(160)\quad \tau_m(x, \delta) = \frac{1}{(m+1)\,\pi}\int_{\delta}^{\frac{1}{2}\pi}\ldots\ (\text{týž integrand jako v (159)})\;;$$

přitom δ může býti jakékoliv reálné číslo; budeme vždy voliti $0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$.

Ze (160) ihned plyne

$$|\tau_m(x, \delta)| \leqq \frac{1}{(m+1)\,\pi \sin^2 \delta} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (|f(x+2t)| + |f(x-2t)| + 2|A|)\,\mathrm{d}t\,,$$

tedy (substituce $x \pm 2t = v$ a využije se potom periodicity)

$$\text{(161)}\quad \begin{aligned} |\tau_m(x, \delta)| &\leqq \frac{1}{(m+1)\sin^2 \delta} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} |f(v)|\,\mathrm{d}v + |A|\right) = \\ &= \frac{1}{(m+1)\sin^2 \delta} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(v)|\,\mathrm{d}v + |A|\right). \end{aligned}$$

Budiž předně x takové číslo, že existuje konečná limita (151). Budiž $\varepsilon > 0$. Zvolme $\delta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ tak, že

$$\text{(162)}\qquad 0 < t < \delta \Rightarrow |f(x+2t) + f(x-2t) - 2A| < \varepsilon\,.$$

Toto δ podržme pevné. Podle (159), (157) je potom pro každé m

$$\text{(163)}\qquad |\sigma_m(x, \delta)| \leqq \frac{\varepsilon}{(m+1)\,\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{\sin (m+1)\,t}{\sin t}\right)^2 \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\varepsilon\,.$$

Ze (161) je pak patrno, že existuje m_0 tak, že pro $m > m_0$ je $|\tau_m(x, \delta)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Odtud a ze (163) plyne tedy (viz (158)) $|\sigma_m(x) - A| < \varepsilon$ pro $m > m_0$; tím je dokázáno tvrzení I.

Budiž za druhé f konečná a spojitá v $\langle a, b\rangle$ a mimoto ještě spojitá zleva v bodě a a zprava v bodě b. Máme dokázati, že je

$$\lim_{m\to\infty} (\sigma_m(x) - f(x)) = 0 \text{ stejnoměrně v } \langle a, b\rangle\,.$$

Užijeme opět vzorců (158), (159), (161), kde klademe $A = f(x)$. Funkce f jest omezená, t. j. $|f(x)| \leqq K$ pro $a \leqq x \leqq b$, takže

$$\text{(164)}\qquad |\tau_m(x, \delta)| \leqq \frac{1}{(m+1)\sin^2 \delta} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(v)|\,\mathrm{d}v + K\right)$$

pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$.

Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta_1 > 0$ tak, že

$$(a \leqq u \leqq v \leqq b,\ |u - v| < \delta_1) \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{165}$$

(stejnoměrná spojitost). Následkem spojitosti v bodech a, b existuje dále $\delta_2 > 0$ tak, že

$$(|u - a| < \delta_2,\ |v - a| < \delta_2) \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,, \tag{166a}$$

$$(|u - b| < \delta_2,\ |v - b| < \delta_2) \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,. \tag{166b}$$

Položme $\delta = \frac{1}{2}\,\mathrm{Min}\,(\delta_1, \delta_2)$. Potom je patrno toto: Je-li $x \in \langle a, b\rangle$, $0 < t < \delta$, je buďto $x + 2t \in \langle a, b\rangle$ nebo $b < x + 2t < b + \delta_2$ a tedy $x > b - \delta_2$; v obou případech je podle (165), (166b) $|f(x + 2t) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$; podobně vyjde $|f(x - 2t) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. T. j. dostali jsme číslo $\delta > 0$ takové, že

$$(a \leqq x \leqq b,\ 0 < t < \delta) \Rightarrow |f(x \pm 2t) - f(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,.$$

Potom podle (159) (kde klademe $A = f(x)$) a podle (157) je

$$|\sigma_m(x, \delta)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{167}$$

pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ a všechna m.

Ze (164) dále plyne: Existuje m_0 tak, že pro $m > m_0$, $x \in \langle a, b\rangle$ je $|\tau_m(x, \delta)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ a tedy podle (167), (158) též $|\sigma_m(x) - f(x)| < \varepsilon$, čímž je dokázáno i tvrzení II.

Podotkli jsme již, že průměry $\sigma_m(x)$ dávají úplnější výsledky než částečné součty $s_m(x)$. Tato výhoda spočívá především na tom, že činitel $(\sin (m + 1)\, t : \sin t)^2$ v (156) je nezáporný, kdežto činitel $\sin (2m + 1)\, t : \sin t$ v (29) mění — při velkém m — velmi rychle své znamení.

Podotkněme ještě toto (viz **D II**, věta 29): existuje-li[44]) $\lim s_m(x)$, existuje i $\lim \sigma_m(x)$ a má touž hodnotu. Tedy: jestliže u funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ existuje limita[44]) (151), potom je $\lim \sigma_m(x) = A$ a tedy $\lim s_m(x)$ je buďto rovna A nebo vůbec neexistuje.[44])

[44]) Míním teď konečné limity.

Cvičení

1. Zjistěte, že pro $0 \leqq r < 1$, $v \in E_1$ je

$$\tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kv = \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r\cos v + r^2)}$$

(nejsnáze jako reálnou část geometrické řady). Při pevném r je konvergence stejnoměrná vzhledem k v v oboru $(-\infty, +\infty)$.

2. Budiž $f \in \mathcal{P}(2\pi)$,

$$f(x) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) . \tag{168}$$

Ježto $\lim a_k = \lim b_k = 0$, je pro $0 \leqq r < 1$ řada

$$g(x, r) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k r^k \cos kx + b_k r^k \sin kx) \tag{169}$$

konvergentní a to při pevném r stejnoměrně vzhledem k $x \in (-\infty, +\infty)$. Napíšete-li místo a_k, b_k vzorce (18) (ale s mezemi $x - \pi$, $x + \pi$), dostanete

$$g(x, r) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) \left(\tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k(t - x)\right) \mathrm{d}t \tag{170}$$

(musíte ukázat, že tuto řadu lze integrovat člen po členu). Dosadíte-li podle cvič. 1, dostáváte (stále pro $0 \leqq r < 1$)

$$\begin{aligned} g(x, r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - x) + r^2} \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (f(x + 2t) + f(x - 2t)) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos 2t + r^2} \mathrm{d}t . \end{aligned} \tag{171}$$

Je-li $f(x) = 1$ pro každé x, je i $g(x, r) = 1$ a tedy

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos 2t + r^2} \mathrm{d}t = 1 .$$

Integrál v (171) se nazývá Poissonovým integrálem.

Jestliže řada v (168) má pro jisté x konečný součet A, je podle Abelovy věty (**D II**, věta 236)

$$\lim_{r\to 1-} g(x, r) = A\,. \tag{172}$$

Ale limita v (172) může existovati i jindy. Vyšetřujme to. Činitel $\varphi(r, t) = \frac{1}{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos 2t+r^2}$ má podobné vlastnosti jako činitel $\frac{1}{(m+1)\pi}\cdot\left(\frac{\sin(m+1)t}{\sin t}\right)^2$ v (156) (tam šlo ovšem o limitu $m\to\infty$, zde jde o $r\to 1-$). Speciálně (pro $0 \leqq r < 1$) je $\varphi(r, t) > 0$ a pro $0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$ je

$$\varphi(r, t) \leqq \frac{1+r}{\pi(1-2r\cos 2\delta+r^2)}(1-r) \quad \text{pro} \quad \delta \leqq t \leqq \tfrac{1}{2}\pi\,, \tag{173}$$

tedy $\varphi(r, t) < C(1-r)$, kde C závisí jen na δ (ani na $r \in \langle 0, 1)$ ani na $t \in \langle\delta, \frac{1}{2}\pi\rangle$). Zcela obdobně jako v důkazu věty 191 můžete nyní dokázat toto: Budiž $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. I. Nechť pro jisté x existuje konečná limita (151); potom platí (172). II. Nechť f je konečná a spojitá v $\langle a, b\rangle$ a mimo to ještě spojitá zleva v bodě a a zprava v bodě b. Potom je

$$\lim_{r\to 1-} g(x, r) = f(x)$$

stejnoměrně v $\langle a, b\rangle$.

3. Integrál (171) má význam v teorii harmonických funkcí. Funkce $F(\xi, \eta)$ dvou reálných proměnných se nazývá harmonickou v otevřené množině G, je-li spojitá v G a je-li $\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2} = 0$ v každém bodě $[\xi, \eta] \in G$. Položíte-li $\xi = r\cos x$, $\eta = r\sin x$, $g(x, r) = F(\xi, \eta)$,[45]) kde $g(x, r)$ je dáno rovnicí (171) (neboli (169)), zjistíte snadno, že $F(\xi, \eta)$ je harmonická v kruhu $\xi^2 + \eta^2 < 1$.[46]) Integrál (171) dává tedy při dané funkci $f(x) \in \mathcal{P}(2\pi)$ funkci $F(\xi, \eta)$, jež je harmonická uvnitř jednotkové kružnice a pro kterou na př. platí $\lim_{r\to 1-} F(r\cos x, r\sin x) = f(x)$, je-li funkce f spojitá v bodě x.[47]) Ukažte (z tvrzení II): Je-li f nadto spojitá v $(-\infty, +\infty)$, a definuji-li funkci $F(\xi, \eta)$ pro $\xi^2 + \eta^2 = 1$ rovnicí $F(\cos x, \sin x) = f(x)$, je tato funkce spojitá v uzavřeném kruhu $\xi^2 + \eta^2 \leqq 1$. Jinými slovy: Integrál (171) řeší tuto úlohu: Nalézti funkci $F(\xi, \eta)$, spojitou v kruhu $\xi^2 + \eta^2 \leqq 1$ a harmonickou uvnitř tohoto kruhu, jež na kružnici $\xi^2 + \eta^2 = 1$ nabývá předepsaných hodnot $F(\cos x, \sin x) = f(x)$, za předpokladu, že funkce f (periodická s periodou 2π) je spojitá v $(-\infty, +\infty)$.

---

[45]) Geometrický význam: r, x jsou polární souřadnice bodu $[\xi, \eta]$.

[46]) Snadno zjistíte, že v (169) lze parciálně derivovati kolikráte chcete podle x i podle r člen po členu, a že ty derivace jsou spojité pro $0 \leqq r < 1$.

[47]) Obecněji: limita vlevo je rovna $\lim_{t\to 0+} \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t))$, pokud tato limita existuje.

§ 11.*Fourierův integrál.* Než uvedu problém, kterým se budeme zabývati, provedu malou heuristickou úvahu,[48]) která nám naznačí, oč jde a jaký výsledek asi můžeme očekávati. Mějme funkci $f(x)$, o které pro jednoduchost prozatím předpokládejme, že je spojitá v $(-\infty, +\infty)$ a že má konečnou variaci v každém omezeném intervalu. Chceme-li pro nějaké kladné l rozvinouti funkci f v intervalu $(-\frac{1}{2}l, \frac{1}{2}l)$ v trigonometrickou řadu o periodě l, sestrojíme Fourierovu řadu pro funkci o periodě l, jež v intervalu $(-\frac{1}{2}l, \frac{1}{2}l)$ splývá s funkcí f. Tato řada má tvar

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{2k\pi}{l} x\right), \tag{174}$$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} f(t) \cos \frac{2k\pi}{l} t \, dt, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} f(t) \sin \frac{2k\pi}{l} t \, dt. \tag{175}$$

Podle věty 185 je pak součet této řady pro $-\frac{1}{2}l < x < \frac{1}{2}l$ vskutku roven $f(x)$, t. j.

$$f(x) = \frac{1}{l} \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} f(t) \, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi}{l} \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} f(t) \cos \frac{2k\pi}{l} (t - x) \, dt. \tag{176}$$

Abychom dostali vzorec platný pro k a ž d é x, proveďme limitní přechod $l \to +\infty$, předpokládajíce, že $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \, dt$ konverguje, takže v (176) vpravo má první člen limitu 0. V řadě $\sum_{k=1}^{\infty}$ vystupují hodnoty funkce $\cos v(t - x)$ pro hodnoty $v = \frac{2k\pi}{l}$ $(k = 1, 2, \ldots)$; každé dvě po sobě následující z těchto hodnot se od sebe liší o $\frac{2\pi}{l}$. Dá se tedy očekávati, že pro $l \to +\infty$ bude pravá strana míti za limitu integrál a že rovnice (176) přejde v

[48]) Tak nazýváme úvahu, která nám dává tušiti výsledek, po případě cestu k němu. Po ní musí následovati ovšem přesná formulace výsledku a jeho důkaz. Přesto bývá taková heuristická úvaha cenná, ježto ukazuje cestu; přesné provedení bývá už někdy — ne vždy! — jen věcí rutiny.

$$(177) \qquad f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos v(t - x) \, dt \right) dv \, .$$

Jde nyní o to, dokázati vskutku tuto rovnici, po příp. ukázati, za jakých předpokladů platí.

Poznámka 1. Nechť $a \in E_1$ a nechť funkce f má konečnou variaci v $\langle a, b \rangle$ pro každé konečné $b > a$. Buďte $v(x)$, $p(x)$, $n(x)$ variace (totální, positivní a negativní) funkce f v intervalu $\langle a, x \rangle$. Je $v(x) = p(x) + n(x)$, $f(x) = (f(a) + p(x)) - n(x)$. Jestliže $v(x)$ je omezená v $\langle a, +\infty)$,[49] budeme říkati, že f má v. k. v $\langle a, +\infty)$; f je potom rozdílem dvou neklesajících funkcí $f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, omezených v $\langle a, +\infty)$. Je-li mimo to $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, lze funkce φ_1, φ_2 voliti tak, že též $\lim \varphi_1(x) = \lim \varphi_2(x) = 0$ (neboť existuje konečná $\lim \varphi_1(x) = \lim \varphi_2(x) = c$, a stačí psáti $f(x) = (\varphi_1(x) - c) - (\varphi_2(x) - c)$). Podobně pro interval $(-\infty, a\rangle$.

Poznámka 2. V celém tomto paragrafu budeme předpokládati, že funkce f je reálná a že nastává jeden z těchto případů:

I. $f \in L(-\infty, +\infty)$.

II. $f \in L(-H, H)$ *pro každé konečné* $H > 0$; *mimo to je* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ *a existuje konečné* $H_0 > 0$ *tak, že* f *má variaci konečnou v* $\langle H_0, +\infty)$ *i v* $(-\infty, -H_0\rangle$.

Případ I je příliš úzký; v aplikacích je leckdy důležito míti k disposici případ II. Na př. pro $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ nenastává případ I, ale nastává případ II (někdy také nastává I, ale nikoliv II; viz cvič. 9). Důkazy jsou v případě I mnohem jednodušší; čtenář, kterému tento případ postačí, může v následujícím vždy vynechati to, co se týká případu II.

---

[49]) Potom i $p(x)$, $n(x)$ jsou omezené.

1. pomocná věta. *V případě I jsou integrály*

$$(178)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos vu \, du\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin vu \, du$$

spojité funkce proměnné v v $(-\infty, +\infty)$.

Důkaz.[50]) Integrand je při pevném u spojitou funkcí v; „integrabilní majoranta" je $|f(u)|$, takže lze užíti věty 107.

2. pomocná věta. *Budiž* $\delta > 0$. *Potom v případě II integrály*

$$(179)\qquad \int_{H'}^{H''} f(u) \cos vu \, du\,, \quad \int_{H'}^{H''} f(u) \sin vu \, du$$

konvergují pro $H' \to +\infty$, $H'' \to +\infty$ *i pro* $H' \to -\infty$, $H'' \to -\infty$ *k nule, a to stejnoměrně pro* $|v| \geqq \delta$. *Tedy* (viz větu 114) *jsou integrály* (178)[51]) *spojité funkce proměnné v v množině* $|v| \geqq \delta$.

Důkaz. Budiž $H_0 < H' < H''$. Podle pozn. 1 rozložme $f = \varphi_1 - - \varphi_2$ (φ_i nerostoucí, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_i(x) = 0$, tedy $\varphi_i(x) \geqq 0$);[52]) potom na př.

$$\int_{H'}^{H''} \varphi_i(u) \cos vu \, du = \varphi_i(H') \int_{H'}^{\xi} \cos vu \, du\,,$$

což má prostou hodnotu $\leqq \dfrac{2\varphi_i(H')}{|v|} \leqq \dfrac{2\varphi_i(H')}{\delta}$.

Položme nyní pro $0 < A < +\infty$, $x \in \mathbf{E}_1$

$$(180)\qquad I_A(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos v(u - x) \, du \right) dv\,,$$

$$(181)\qquad I(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos v(u - x) \, du \right) dv\,,$$

kde vnitřní i vnější integrál mohou býti i zobecněné integrály ve smyslu kap. VIII (jejich konvergencí se teprve budeme zabývat).

---

[50]) Při důkazech mohu předpokládati, že f je v $(-\infty, +\infty)$ všude konečná (neboť v obou případech je skoro všude konečná).

[51]) Jsou to po příp. nevlastní integrály ve smyslu kap. VIII.

[52]) V pozn. 1 byly φ_i neklesající. Ale stačí psáti $f = (-\varphi_2) - (-\varphi_1)$, a zde již menšenec i menšitel je nerostoucí.

Věta 192. *V případě I i II konverguje integrál* (180) *a má hodnotu*

$$I_A(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{\sin A(u-x)}{u-x} \, du = \tag{182}$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \frac{\sin At}{t} \, dt .$$

Zde jde také po případě o zobecněný integrál. Všimněte si podobnosti integrálu (182) se vzorcem (28).

Důkaz. Případ I. Podle Fubiniovy věty[53]) je

$$I_A(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^A f(u) \cos v(u-x) \, dv \right) du ;$$

vypočtu-li vnitřní integrál, dostanu (182).[54])

Případ II. Ten je podstatně obtížnější. Ježto bod $v = 0$ může podle 2. pomocné věty dělat obtíže, vyšetřujme napřed (pro $0 < a < A$)

$$I_{a,A}(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos v(u-x) \, du \right) dv . \tag{183}$$

Pro $-\infty < C < B < +\infty$ dává Fubiniova věta jako dříve

$$\int_a^A \left(\int_C^B f(u) \cos v(u-x) \, du \right) dv = \tag{184}$$
$$= \int_C^B f(u) \left(\frac{\sin A(u-x)}{u-x} - \frac{\sin a(u-x)}{u-x} \right) du .$$

---

[53]) $$\iint\limits_{\substack{0<v<A \\ -\infty<u<+\infty}} |f(u) \cos v(u-x)| \, du \, dv \leqq A \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)| \, du ,$$

takže Fubiniovy věty 74 lze užíti.

[54]) Všechny integrály v (180), (182) jsou zde Lebesgueovy.

Rozepíši-li $\cos v(u-x) = \cos vu \,.\, \cos vx + \sin vu \,.\, \sin vx$, vidím podle 2. pomocné věty, že funkce[55])

$$G(B, C, v) = \int_C^B f(u) \cos v(u-x)\, du \tag{185}$$

má pro $B \to +\infty$, $C \to -\infty$, $v \neq 0$ za limitu funkci

$$H(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos v(u-x)\, du\,, \tag{186}$$

při čemž konvergence je stejnoměrná vzhledem k v v intervalu $\langle a, A\rangle$ a funkce $H(v)$ je spojitá a tedy omezená v $\langle a, A\rangle$. Tedy také funkce $G(B, C, v)$ je omezená v oboru $B > Z$, $C < -Z$, $a \leqq v \leqq A$, volíme-li Z dosti veliké. Podle věty 106 [56]) má tedy

$$\int_a^A G(B, C, v)\, dv$$

(což je levá strana rovnice (184)) pro $B \to +\infty$, $C \to -\infty$ za limitu $\int_a^A H(v)\, dv$ (přejde se k limitě „za integračním znamením"). Tím dostáváme z rovnice (184) limitním přechodem $B \to +\infty$, $C \to -\infty$

$$\begin{aligned} \int_a^A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos v(u-x)\, du \right) dv &= \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left(\frac{\sin A(u-x)}{u-x} - \frac{\sin a(u-x)}{u-x} \right) du\,. \end{aligned} \tag{187}$$

Přitom vnitřní integrál vlevo i integrál vpravo mohou býti i nevlastní (ovšem integrály v (184) byly Lebesgueovy), kdežto vnější integrál vlevo $\int_a^A$ je integrál spojité konečné funkce $H(v)$ a tedy je to Lebesgueův integrál.

[55]) x je pevně zvolené číslo; G je spojitá funkce v (při pevných B, C).

[56]) Funkce $G(B, C, v)$ má totiž za „integrabilní majorantu" v oboru $B > Z$, $C < -Z$, $a \leqq v \leqq A$ jistou konečnou konstantu.

Vpravo je integrál rozdílu; dokážeme-li, že pro $0 < \alpha < +\infty$ konverguje integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{\sin \alpha(u-x)}{u-x}\, du\,, \tag{188}$$

můžeme rozepsati (187) podle věty 59 do tvaru

$$I_{a,A}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{\sin A(u-x)}{u-x}\, du - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{\sin a(u-x)}{u-x}\, du\,. \tag{189}$$

Konvergenci integrálu (188) dokážeme pak takto. Pro $x \geqq H_0$ jsme již rozepsali $f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$; podobně pro $x \leqq -H_0$ pišme $f(x) = \varphi_3(x) - \varphi_4(x)$, kde funkce φ_3, φ_4 jsou v $(-\infty, -H_0\rangle$ neklesající, $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi_i(x) = 0$ $(i = 3, 4)$, tedy $\varphi_i(x) \geqq 0$. Podotkněme, že $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ konverguje; tedy funkce $\int_{-\infty}^{z} \frac{\sin t}{t}\, dt$ je spojitá v $(-\infty, +\infty)$ a má konečnou limitu pro $z \to -\infty$ i pro $z \to +\infty$, takže je omezená v $(-\infty, +\infty)$. T. j. existuje c $(0 < c < +\infty)$ tak, že

$$\left| \int_{-\infty}^{z} \frac{\sin t}{t}\, dt \right| \leqq c\,, \quad \left| \int_{y}^{z} \frac{\sin t}{t}\, dt \right| \leqq 2c \text{ pro } y \in \mathbf{E}_1,\ z \in \mathbf{E}_1\,. \tag{190}$$

Pro $i = 1, 2$, $H_0 \leqq H' < H'' < +\infty$ je tedy

$$\int_{H'}^{H''} \varphi_i(u) \frac{\sin \alpha(u-x)}{u-x}\, du = \varphi_i(H') \int_{H'}^{\eta} \ldots = \varphi_i(H') \int_{\alpha(H'-x)}^{\alpha(\eta-x)} \frac{\sin t}{t}\, dt\,;$$

absolutní hodnota je nejvýše $2c\, \varphi_i(H')$ a to má limitu 0 pro $H' \to +\infty$. Obdobně pro $i = 3, 4$ a pro $-\infty < H'' < H' < -H_0$. Odtud plyne jednak konvergence integrálu (188) a za druhé (limitním přechodem $H'' \to +\infty$)

$$\left| \int_{H'}^{+\infty} f(u) \frac{\sin \alpha(u-x)}{u-x}\, du \right| \leqq 2c(\varphi_1(H') + \varphi_2(H')) \tag{191}$$

a obdobně

$$(192)\qquad \left| \int_{-\infty}^{-H'} f(u) \frac{\sin \alpha(u - x)}{u - x}\, du \right| \leqq 2c(\varphi_3(-H') + \varphi_4(-H'))$$

pro $0 < \alpha < +\infty$, $H_0 \leqq H' < +\infty$.

Konvergencí integrálu (188) je dokázán vzorec (189). Proveďme nyní limitní přechod $\alpha \to 0+$ v integrálu (188). Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje $H' \in (H_0, +\infty)$ tak, že pravé strany v (191), (192) jsou menší než $\frac{1}{4}\varepsilon$. Toto H' podržme; potom je tedy (ježto $|\sin \alpha(u - x)| \leqq \alpha |u - x|$)

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{\sin \alpha(u - x)}{u - x}\, du \right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \alpha \int_{-H'}^{H'} |f(u)|\, du$$

pro každé $\alpha \in (0, +\infty)$. Pro všechna dosti malá kladná α je tedy pravá strana menší než ε. Tedy (188) má limitu 0 pro $\alpha \to 0+$. Přejdu-li nyní v (189) k limitě pro $a \to 0+$, dostanu ihned (182).

Poznámka 3. Integrály $\int_{-\infty}^{+\infty}$ v (180), (181), (182) mohou býti nevlastní, ale integrály (s týmž integrandem) v libovolných konečných mezích jsou Lebesgueovy. Vnější integrál $\int_0^A$ v (180) může býti nevlastní, ale integrál $\int_a^A$ pro libovolné $a \in (0, A)$ je Lebesgueův.[57]) Můžeme tedy užíti definice z kap. VIII, § 1: *Integrál $I(x)$ v (181) konverguje*[58]) *tehdy a jen tehdy, existuje-li konečná* $\lim\limits_{A \to +\infty} I_A(x)$, *načež*

$$(193)\qquad I(x) = \lim_{A \to +\infty} I_A(x)\,.$$

Poznámka 4. Nechť nyní pro reálnou funkci f nastává případ I nebo II. Budiž dále dáno $x \in \mathbf{E}_1$ a sestrojme funkci f_1, která v intervalu $\langle x - \pi, x + \pi \rangle$ je rovna f[59]) a má periodu 2π. Zřejmě $f_1 \in \mathbf{L}(a, b)$ pro

[57]) Viz text za vzorcem (187).

[58]) Může býti ovšem nevlastní.

[59]) Ovšem: v těch bodech, kde f je definována.

každý omezený interval $\langle a, b\rangle$. Sestrojme Fourierovu řadu pro funkci f_1 o periodě 2π. Pro její částečné součty platí podle (28)[60])

$$s_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\,t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt\,. \tag{194}$$

Tyto součty jsou definovány pouze pro celá $m = 0, 1, 2, \ldots$ Připomínám: Je-li $a \in \mathbf{E}_1$, značí $[a]$ největší celé číslo, jež není větší než a.

Věta 193. *Nechť pro reálnou funkci f nastává případ I nebo II. Budiž $x \in \mathbf{E}_1$. Přidržíme-li se označení pozn. 4, je*

$$\lim_{A\to+\infty} (I_A(x) - s_{[A]}(x)) = 0\,. \tag{195}$$

Speciálně tedy: $I(x)$ (viz (181)) konverguje tehdy a jen tehdy, konverguje-li uvedená Fourierova řada v bodě x, načež $I(x)$ je roven součtu této řady.[61])

Poznámka 5. To je naše hlavní věta; dá se jí užíti ovšem i pro komplexní funkci (rozkladem na reálnou a imaginární část). Integrálu $I(x)$ se říká Fourierův integrál funkce f v bodě x. Na $I(x)$ můžeme podle věty 193 užíti kriterií pro konvergenci a součet Fourierovy řady. Na př. má-li f variaci konečnou v jistém intervalu $\langle x-\delta, x+\delta\rangle$ $(\delta > 0)$, je

$$I(x) = \tfrac{1}{2}(f(x+) + f(x-))\,.$$

Nebo: Existuje-li $\delta > 0$ a $S \in \mathbf{E}_1$ tak, že

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(x+2t) + f(x-2t) - 2S|}{t}\,dt$$

konverguje, je $I(x) = S$.

Důkaz věty 193. Budiž $0 < A < +\infty$ a položme $B = [A] + \frac{1}{2}$, takže $|B - A| \leqq \frac{1}{2}$. Podle (182), (194) je

$$I_A(x) - s_{[A]}(x) = K_A(x) + L_A(x)\,,$$

[60]) Pro $-\pi < t < \pi$ je $f_1(x+t)$ totéž co $f(x+t)$.

[61]) Říká se proto, že $I(x)$ je ekvikonvergentní s uvedenou Fourierovou řadou.

kde

$$(196)\qquad K_A(x) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{-\pi} + \int_{\pi}^{+\infty} f(x+t)\,\frac{\sin At}{t}\,\mathrm{d}t\right),$$

$$(197)\qquad L_A(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{\sin At}{t} - \frac{\sin Bt}{2\sin\frac{1}{2}t}\right)\mathrm{d}t\,.$$

Máme dokázati, že $\lim\limits_{A\to+\infty} K_A(x) = \lim\limits_{A\to+\infty} L_A(x) = 0$. Jest

$$\frac{\sin At}{t} - \frac{\sin Bt}{2\sin\frac{1}{2}t} = \frac{\sin At - \sin Bt}{t} + \sin Bt\,.\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}\right) =$$
$$= \varrho(t, A)\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\,t + \sigma(t)\sin Bt\,,$$

kde (pamatujme, že B je funkcí A)

$$\varrho(t, A) = (2\sin\tfrac{1}{2}(A-B)t) : t\,,\quad \sigma(t) = (2\sin\tfrac{1}{2}t - t) : 2t\sin\tfrac{1}{2}t$$
$$\text{pro}\quad 0 < |t| \leqq \pi\,,$$

$$\varrho(0, A) = \lim_{t\to0}\varrho(t, A) = A - B\,,$$

$$\sigma(0) = \lim_{t\to0}\sigma(t) = \lim_{t\to0}\left(-\tfrac{1}{24}t^3 + \ldots\right) : (t^2 + \ldots) = 0\,.$$

Tedy je předně $\varrho(t, A)\,\mathrm{sgn}\,(A-B)$ nerostoucí funkcí t v $\langle 0, \pi\rangle$ a tedy

$$\int_0^{\pi} f(x+t)\,\varrho(t, A)\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\,t\,\mathrm{d}t =$$
$$= (A-B)\int_0^{\eta} f(x+t)\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\,t\,\mathrm{d}t\quad (0 \leqq \eta \leqq \pi)\,,$$

a podobně pro $\int\limits_{-\pi}^{0}$. Podle věty 181 je tedy

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\varrho(t, A)\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\,t\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Za druhé je $\sigma(t)$ omezená v $\langle -\pi, \pi\rangle$ a věta 181 dává

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\sigma(t)\sin Bt\,\mathrm{d}t = 0$$

a tedy

$$\lim_{A\to+\infty} L_A(x) = 0\,.$$

V případě I je $f(x + t) \,.\, t^{-1} \in L(\pi, +\infty)$ (a též $\in L(-\infty, -\pi)$), takže podle věty 181 je $\lim K_A(x) = 0$. V případě II je pro $0 < A < +\infty$, $H' \geqq H_0$ podle (191) (substituce $x + t = u$)[62])

$$\left| \int\limits_{H'-x}^{+\infty} f(x + t) \frac{\sin At}{t} \, dt \right| \leqq 2c(\varphi_1(H') + \varphi_2(H')) \,.$$

Budiž $\varepsilon > 0$; volme $H' \geqq H_0$ a současně $H' > x + \pi$ tak, že $2c(\varphi_1(H') + \varphi_2(H')) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Toto H' podržme. Potom je pro $0 < A < +\infty$

$$\left| \int\limits_{\pi}^{+\infty} f(x + t) \frac{\sin At}{t} \, dt \right| \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon + \left| \int\limits_{\pi}^{H'-x} \frac{f(x + t)}{t} \sin At \, dt \right| .$$

Zde poslední člen vpravo má limitu 0 pro $A \to +\infty$ podle věty 181; pro dosti velká A je tedy levá strana menší než ε. Tedy má levá strana limitu 0. Podobně $\int\limits_{-\infty}^{-\pi}$ (viz (192)) má limitu 0. Tedy i $\lim\limits_{A \to +\infty} K_A(x) = 0$.

Cvičení

1. Věty 193 lze užíti též na integrál

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t) \cos v(t - x) \, dt \right) dv \tag{198}$$

s libovolnými mezemi $\alpha < \beta$; položíme prostě $f(t) = 0$ vně intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$.

2. Je-li f sudá, je integrál v (181) roven

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} f(t) \cos vt \, dt \right) \cos vx \, dv \,; \tag{199}$$

je-li f lichá, je tento integrál roven

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} f(t) \sin vt \, dt \right) \sin vx \, dv \,. \tag{200}$$

---

[62]) Vztahy (191), (192) platí vskutku v případě II.

3. Nechť f má variaci konečnou v každém intervalu $\langle 0, a\rangle$ (pro každé $a \in (0, +\infty)$); nechť $\int\limits_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$. Položme pro $x > 0$

$$(201)\qquad g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \cos xt\,\mathrm{d}t\,, \quad h(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \sin xt\,\mathrm{d}t\,.$$

Potom je pro každé $x > 0$

$$(202)\qquad \tfrac{1}{2}(f(x-) + f(x+)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} g(t) \cos xt\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} h(t) \sin xt\,\mathrm{d}t\,.$$ [63])

Všimněte si symetrie rovnic (201), (202).

4. Nechť f má konečnou variaci v každém omezeném uzavřeném intervalu. Nechť $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$. Položme

$$(203)\qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t\,;$$

potom je pro každé $x \in (-\infty, +\infty)$

$$(204)\qquad \tfrac{1}{2}(f(x-) + f(x+)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{T\to+\infty} \int\limits_{-T}^{T} g(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t\,.$$

Návod: Integrand vpravo jest

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(v) \cos t(x-v)\,\mathrm{d}v + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin t(x-v)\,\mathrm{d}v\,,$$

a druhý sčítanec je lichá funkce t. Máme zde obdobnou symetrii jako v cvič. 3; výhoda je ta, že vzorec (204) platí pro všechna x (ne jen pro kladná); nevýhoda ta, že existence integrálu $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}$ není zaručena (viz cvič. 6), takže místo něho musíme psáti limitu integrálu $\int\limits_{-T}^{T}$. Limitě $\lim\limits_{T\to+\infty} \int\limits_{-T}^{T} F(x)\,\mathrm{d}x$ se někdy říká „hlavní hodnota

[63]) Pro $x = 0$ je první integrál $f(0+)$, druhý je 0.

integrálu $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$“ a značívá se někdy $\int\limits_{\substack{-\infty\\ \text{v. p.}}}^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$; na př. $\displaystyle\int\limits_{\substack{-\infty\\ \text{v. p.}}}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \pi$, kdežto $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ ovšem neexistuje. Tohoto (ne zcela ustáleného) označení se užívá i v některých jiných případech. (v. p. = valeur principale.)

5. Položme v cvič. 1 $f(x) = 1$ pro $|x| \leqq 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Obdržíme pro reálné x:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{-1}^{1}\cos v(t-x)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}v = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\cos vx\,\frac{\sin v}{v}\,\mathrm{d}v =$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ pro } |x| < 1\,, \\ \frac{1}{2} \text{ pro } |x| = 1\,, \\ 0 \text{ pro } |x| > 1\,. \end{cases} \qquad \text{(T. zv. Dirichletův diskontinuitní faktor.)}$$

6. Vezměme opět funkci $f(x)$ z cvič. 5. Potom

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin t(x-v)\,\mathrm{d}v = \int\limits_{-1}^{1}\sin t(x-v)\,\mathrm{d}v = \frac{1}{t}\left(\cos t(x-1) - \cos t(x+1)\right).$$

Ukažte,[64]) že pro $|x| \neq 1$ existuje integrál této funkce (integrační proměnná je t) od $-\infty$ do $+\infty$,[65]) ale pro $|x| = 1$ že neexistuje.

7. Buď $a > 0$; potom z cvič. 2 pro $f(x) = \mathrm{e}^{-ax}$ plyne

$$\mathrm{e}^{-a|x|} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\cos xv\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\cos vt\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}v = \frac{2a}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos vx}{a^2+v^2}\,\mathrm{d}v\,,$$

$$\mathrm{e}^{-a|x|}\,.\,\operatorname{sgn} x = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\sin xv\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\sin vt\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}v = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{v\sin vx}{a^2+v^2}\,\mathrm{d}v$$

pro každé reálné x. Tyto integrály jsme již vypočetli v kap. VIII, § 6, příkl. 1 ($\operatorname{sgn} 0 = 0$).

---

[64]) x předpokládám reálné.

[65]) A je potom ovšem roven nule.

8. Podobně jako v cvič. 7 ukažte: Budiž $0 < \alpha < +\infty$, $0 < \beta < +\infty$. Potom jest[64])

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos vx \left(\frac{\sin(\alpha+v)\,\beta}{\alpha+v} + \frac{\sin(\alpha-v)\,\beta}{\alpha-v}\right) dv = \begin{cases} \cos\alpha x & \text{pro } |x| < \beta\,, \\ \frac{1}{2}\cos\alpha\beta & \text{pro } |x| = \beta\,, \\ 0 & \text{pro } |x| > \beta\,. \end{cases}$$

Speciálně:

$$\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos vx \,\frac{\cos\dfrac{v\pi}{2\alpha}}{\alpha^2 - v^2}\, dv = \begin{cases} \cos\alpha x & \text{pro } |x| \leqq \dfrac{\pi}{2\alpha} \\ 0 & \text{pro } |x| \geqq \dfrac{\pi}{2\alpha}\,. \end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} v\cos vx \,\frac{\sin\dfrac{v\pi}{\alpha}}{\alpha^2 - v^2}\, dv = \begin{cases} \cos\alpha x & \text{pro } |x| < \dfrac{\pi}{\alpha} \\ -\frac{1}{2} & \text{pro } |x| = \dfrac{\pi}{\alpha} \\ 0 & \text{pro } |x| > \dfrac{\pi}{\alpha}\,. \end{cases}$$

9. Položme $f(x) = \dfrac{\sin \pi x^3}{x^2}$; potom $\lim\limits_{n\to\infty} V(\langle n, n+1\rangle; f) = 6$. Pro f tedy nenastává případ II, ale zřejmě nastává případ I.