Obyčejné diferenciální rovnice

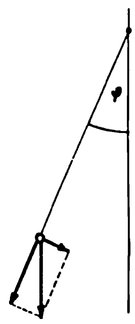
1. Úvod

In: Jaroslav Kurzweil (author): Obyčejné diferenciální rovnice. (Czech). Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1978. pp. 17--28.

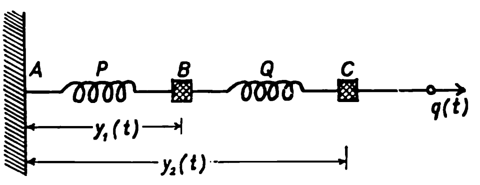
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402079

1. Úvod

1.1. Řešení diferenciálních rovnic dobře vystihují časový průběh velké řady dějů v neživé i živé přírodě. Také se dobře uplatňují při vyšetřování některých jevů, které se s časem nemění, např. tvar tenké pružné tyče, která je namáhána. Pro ilustraci uvedeme několik příkladů z mechaniky.



Obr. 1



Obr. 2

Je-li např. $\varphi(t)$ úhlová výchylka matematického kyvadla od svislé polohy v okamžiku t (obr. 1) a $\psi(t)$ úhlová rychlost, pak je

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = \psi(t),$$

$$\frac{d\psi}{dt}(t) = -\alpha\,\psi(t) - \beta \sin \varphi(t) \tag{1.1}$$

(konstanta $\alpha \geqq 0$ charakterizuje vliv tření, β je poměr gravitační konstanty k délce kyvadla, hmotnost kyvadla je rovna 1).

Na obr. 2 jsou znázorněny hmotné body A, B, C. Bod B má hmotnost m_1 a je spojen pružinou P s pevným bodem A. Bod C má hmotnost m_2 a je spojen pružinou Q s hmotným bodem B; na bod C kromě toho působí vnější síla, jejíž hodnota v okamžiku t je $q(t)$; $q\colon R \to R$.

Mechanické vlastnosti pružiny P jsou dány její charakteristikou h_1: vzdálenost u bodů A, B nesmí klesnout pod dané číslo $\gamma_1 > 0$ ani nesmí překročit číslo γ_2, kde $\gamma_2 > \gamma_1$. Je-li $\gamma_1 < u < \gamma_2$, pak body A, B jsou k sobě přitahovány silou $h_1(u)$, tj. $h_1: (\gamma_1, \gamma_2) \to R$. Charakteristikou pružiny Q je funkce $h_2: (\delta_1, \delta_2) \to R$, kde $0 < \delta_1 < \delta_2$. Kromě toho na body B, resp. C působí síla tření, která je úměrná okamžité rychlosti bodu B, resp. C a působí proti směru pohybu. Nechť $y_1(t)$ znamená polohu a $v_1(t)$ rychlost bodu B v okamžiku t; nechť $y_2(t)$ je poloha a $v_2(t)$ rychlost bodu C v okamžiku t. Potom platí

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}(t) = v_1(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}(t) = v_2(t),$$

$$m_1 \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}(t) = -h_1(y_1(t)) + h_2(y_2(t) - y_1(t)) - \alpha\, v_1(t),$$

$$m_2 \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}(t) = -h_2(y_2(t) - y_1(t)) - \beta\, v_2(t) + q(t); \tag{1.2}$$

α, β jsou kladné konstanty.

(První dvojice rovnic plyne z definice rychlosti, druhá dvojice rovnic vyplývá z pohybového zákona.)

1.2. Nechť n je přirozené číslo, G podmnožina v R^{n+1} a nechť $f_i: G \to R$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Soustavu rovnic

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}(t) = f_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.1}$$

budeme nazývat *soustavou obyčejných diferenciálních rovnic*. Pro další postup je důležité, jaké podmínky klademe na řešení soustavy (2.1). V kapitolách 1, 2 vystačíme s touto definicí:

1.2.1. Definice: Nechť $\mathscr{I}$ je otevřený interval v R, $u_i: \mathscr{I} \to R$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, nechť funkce u_i mají spojité derivace $\mathrm{d}u_i/\mathrm{d}t$. Nechť soustava (2.1) je splněna pro každé $t \in \mathscr{I}$, dosadíme-li

$$u_i(t) \text{ a } \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}(t) \text{ za } x_i(t) \text{ a za } \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}(t) \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

[tím rozumíme mj., že můžeme dosadit do pravých stran (2.1), tj. že $(t, u_1(t), \ldots, u_n(t)) \in G$ pro $t \in \mathscr{I}$]. Potom soustavu funkcí $u_1, \ldots, u_n$ nazveme *řešením soustavy* (2.1). Interval $\mathscr{I}$ nazýváme *definičním oborem řešení* $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

1.3. **Příklad:** Nechť $\mathscr{I}$ je otevřený interval, $s \in \mathscr{I}$, $y \in R$. Nechť funkce $k\colon \mathscr{I} \to R$ je spojitá. Položme

$$u(t) = y \exp \int_s^t k(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}\,. \tag{3.1}$$

Výpočtem se přesvědčíme, že funkce u je řešením diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(t) = k(t)\,x_1(t)\,. \tag{3.2}$$

[Rovnice (3.2) je ovšem speciálním případem soustavy (2.1); klademe $n = 1$, $G = \mathscr{I} \times R, f_1(t, x_1) = k(t)\,x_1$.]

1.4. Také soustavy (1.1) a (1.2) jsou speciálními případy soustavy (2.1). V případě soustavy (1.1) klademe $n = 2$, $G = R^3$, $f_1(t, x_1, x_2) = x_2, f_2(t, x_1, x_2) = -\alpha x_2 - \beta \sin x_1$ (píšeme x_1, x_2 místo φ, ψ). V případě soustavy (1.2) klademe $n = 4$,

$$\begin{aligned}
&G = \{(t, x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^5 \mid \gamma_1 < x_1 < \gamma_2, \delta_1 < x_2 - x_1 < \delta_2\}\,,\\
&f_1(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3\,, \quad f_2(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4\,,\\
&f_3(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = [-h_1(x_1) + h_2(x_2 - x_1) - \alpha x_3]/m_1\,,\\
&f_4(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = [-h_2(x_2 - x_1) - \beta x_4 + q(t)]/m_2\\
&\text{pro } (t, x_1, x_2, x_3, x_4) \in G
\end{aligned}$$

[píšeme x_1, x_2, x_3, x_4 místo y_1, y_2, v_1, v_2; v třetí z rovnic (1.2) jsme dělili číslem m_1, v čtvrté číslem m_2].

1.5. Je-li dvojice funkcí φ, ψ řešením soustavy (1.1) [tj. zobrazují-li funkce φ, ψ interval $\mathscr{I}$ do R, mají-li spojitou derivaci a je-li splněna soustava (1.1) v každém bodě $t \in \mathscr{I}$], potom podle první z rovnic (1.1) má funkce φ spojitou derivaci druhého řádu a podle druhé z rovnic (1.1) platí

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\alpha \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t) - \beta \sin \varphi(t) \tag{5.1}$$

pro každé $t \in \mathscr{I}$. Naopak, nechť funkce $\varphi\colon \mathscr{I} \to R$ má spojitou derivaci druhého řádu a nechť platí (5.1) v každém $t \in \mathscr{I}$. Položme

$$\psi(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}\,.$$

Snadno se přesvědčíme, že dvojice φ, ψ je řešením soustavy (1.1). V tomto smyslu jsou rovnice (5.1) a soustava (1.1) ekvivalentní; také se užívá rčení, že rovnici (5.1) lze převést na soustavu (1.1). Obdobně je soustava (1.2) ekvivalentní se soustavou

$$\frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{1}{m_1}\left[-h_1(y_1(t)) + h_2(y_2(t) - y_1(t)) - \alpha \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}(t)\right],$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2}(t) = \frac{1}{m_2}\left[-h_2(y_2(t) - y_1(t)) - \beta \frac{dy_2}{dt}(t) + q(t)\right]. \tag{5.2}$$

Nechť G je podmnožina v R^{n+1}, $h\colon G \to R$. Rovnici

$$\frac{d^n u}{dt^n}(t) = h\left(t, u(t), \frac{du}{dt}(t), \ldots, \frac{d^{n-1}u}{dt}(t)\right) \tag{5.3}$$

nazýváme *obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu* nebo jen *diferenciální rovnicí n-tého řádu*.

Obdobně jako v Definici 1.2.1 budeme říkat, že funkce v je *řešením rovnice* (5.3), je-li $v\colon \mathcal{J} \to R$, kde $\mathcal{J}$ je otevřený interval v R, a jsou-li splněny tyto podmínky:

(i) Funkce v má spojité derivace do řádu n.

(ii) Rovnice (5.3) je splněna v každém bodě $t \in \mathcal{J}$, dosadíme-li

$$v(t), \frac{dv}{dt}(t), \ldots, \frac{d^n v}{dt^n}(t) \quad \text{za} \quad u(t), \frac{du}{dt}(t), \ldots, \frac{d^n u}{dt^n}(t)$$

[ovšem musí být

$$\left(t, v(t), \ldots, \frac{d^{n-1}v}{dt^{n-1}}(t)\right) \in G \quad \text{pro} \quad t \in \mathcal{J}\Bigg].$$

Speciálně rovnice (5.1) je diferenciální rovnice druhého řádu [a soustava (5.2) je soustava dvou diferenciálních rovnic druhého řádu, (2.1) je soustava n diferenciálních rovnic prvního řádu].

Položíme-li v (5.3) $u = x_1$, $du/dt = x_2, \ldots, d^{n-1}u/dt^{n-1} = x_n$, převedeme rovnici (5.3) na soustavu

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt}(t) = x_2(t)\,,\\
&\frac{dx_2}{dt}(t) = x_3(t)\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dx_{n-1}}{dt}(t) = x_n(t)\,,\\
&\frac{dx_n}{dt}(t) = h(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))\,.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Snadno se ukáže, že (5.4) a (5.3) jsou ekvivalentní v témž smyslu, jako jsou ekvivalentní (5.1) a (1.1).

1.6. Buď n přirozené číslo, H podmnožina v R^n, $g_i\colon H \to R$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Soustava

$$\frac{dx_i}{dt}(t) = g_i(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.1}$$

se nazývá *soustava autonomních diferenciálních rovnic*, neboť na pravých stranách soustavy (6.1) proměnná t se vyskytuje pouze jako argument funkcí x_i (tj. argument složek hledaného řešení $x_1, \ldots, x_n$), nikoliv však explicitně. Pro stručnost se obvykle mluví o *autonomní soustavě*. Soustava (6.1) je přirozeně zvláštním případem soustavy (2.1) [klademe $G = R \times H$, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n) = g_i(x_1, \ldots, x_n)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$].

Obdobně rovnice (5.1) je autonomní diferenciální rovnice druhého řádu; soustava (1.2) je autonomní jen v tom případě, je-li q konstantní funkce. Slova neautonomní se užívá ve dvojí souvislosti. Řekneme-li, že daná konkrétní rovnice je neautonomní, máme na mysli, že není autonomní. Řekneme-li, že nějaké tvrzení platí pro neautonomní rovnice, máme obvykle na mysli, že nepotřebujeme předpokládat, že rovnice je autonomní; tvrzení ovšem platí také pro autonomní rovnice.

1.7. Pro zkrácení zápisu se obvykle vynechává argument t (tzv. nezávisle proměnná) u funkcí x_i (tzv. závisle proměnné) a jejich derivací. Současně se derivace označují tečkami, tj. je-li $\mathscr{I}$ otevřený interval a má-li funkce $u: \mathscr{I} \to R$ derivaci, označujeme ji $\dot{u}$ [je $\dot{u}: \mathscr{I} \to R$ a $\dot{u}(\alpha) \in R$ je hodnota derivace $\dot{u}$ v bodě $\alpha \in \mathscr{I}$]. Existují-li derivace vyšších řádů, znamená $\ddot{u}$ derivaci druhého řádu, $u^{(i)}$ derivaci i-tého řádu pro $i = 1, 2, \ldots$. [Pro úplnost se někdy klade $u^{(0)} = u$.] Soustava (2.1) se tak zapisuje ve tvaru

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.1}$$

rovnice (5.1) se zapisuje ve tvaru

$$\ddot{\varphi} = -\alpha\dot{\varphi} - \beta \sin \varphi. \tag{7.2}$$

Nezávisle proměnná v diferenciální rovnici se může ovšem značit jiným písmenem než t (např. φ, x, y, τ). Pak budeme derivaci funkce r nezávisle proměnné φ značit $dr/d\varphi$ atd.

V diferenciální rovnici budeme opět vynechávat nezávisle proměnnou jako argument hledané funkce a jejích derivací. Např. v rovnici

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{r} \quad (r \neq 0) \tag{7.3}$$

hledáme řešení r jako funkci proměnné φ; přesvědčíme se, že pro každé $c \in R$ funkce $r_c: (c, \infty) \to R$

$$r_c(\varphi) = [2(\varphi - c)]^{1/2} \tag{7.4}$$

je řešením rovnice (7.3). V rovnici

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \tag{7.5}$$

hledáme řešení y jako funkci proměnné x; přesvědčíme se, že pro každé $b \in R$ je funkce $y_b: (-\pi/2 + b, \pi/2 + b) \to R$

$$y_b(x) = \operatorname{tg}(x - b) \tag{7.6}$$

řešením rovnice (7.5).

1.8. Nechť $w_1, \ldots, w_n$ je řešení soustavy (2.1), $w_i: \mathscr{J} \to R$ (viz Definici 1.2.1). Řešení $v_1, \ldots, v_n$ soustavy (2.1), $v_i: \mathscr{I} \to R$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, se nazývá *prodloužení řešení* $w_1, \ldots, w_n$, je-li $\mathscr{J} \subset \mathscr{I}$ a platí-li $v_i(t) = w_i(t)$ pro $t \in \mathscr{J}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. (Při přechodu od řešení $w_1, \ldots, w_n$ k řešení $v_1, \ldots, v_n$ můžeme říkat, že jsme řešení $w_1, \ldots, w_n$ prodloužili na interval $\mathscr{I}$.) Při tom z formálních důvodů jsme nevyloučili případ, že $\mathscr{I} = \mathscr{J}$; je-li však $\mathscr{I} \neq \mathscr{J} \subset \mathscr{I}$, potom řešení $v_1, \ldots, v_n$ se nazývá *vlastní prodloužení řešení* $w_1, \ldots, w_n$.

Zvláštní význam mají řešení, k nimž neexistuje žádné vlastní prodloužení. Taková řešení budeme nazývat *maximálními*. Např. funkce u definovaná v (3.1) je maximálním řešením rovnice (3.2), neboť je definovaná na $\mathscr{I}$. Také funkce r_c definovaná v (7.4) je maximálním řešením rovnice (7.3). Všimněme si, že pravá strana rovnice (7.3) je definovaná pro $r \in R - \{0\} = H$. Kdyby řešení q bylo prodloužením řešení r_c – pro nějaké pevné c – muselo by být q definované a spojité v bodě c a tak by bylo

$$q(c) = \lim_{k \to \infty} q\left(c + \frac{1}{k}\right) = \lim_{k \to \infty} \left(2 \cdot \frac{1}{k}\right)^{1/2} = 0,$$

tedy $q(c) \notin H$. Současně by mělo platit $q(c) \in H$, neboť q je řešení a podle Definice 1.2.1 a podle odst. 1.6 musí být možné dosadit hodnotu $q(c)$ do pravé strany rovnice (7.3). [Také by ovšem měla existovat konečná derivace

$$\frac{dq}{d\varphi}(c)$$

a mělo by platit

$$\frac{dq}{d\varphi}(c) = \lim_{k \to \infty} \frac{dq}{d\varphi}\left(c + \frac{1}{k}\right).$$

Přitom je

$$\frac{dq}{d\varphi}\left(c + \frac{1}{k}\right) = \frac{dr_c}{d\varphi}\left(c + \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{k}{2}\right)^{1/2},$$

tedy

$$\lim_{k \to \infty} \frac{dq}{d\varphi}\left(c + \frac{1}{k}\right) = \infty$$

a to není možné.]

Také řešení y_b rovnice (7.5) je maximální. To plyne ze vztahů

$$\lim_{x \to b + \pi/2 -} y_b(x) = \infty \,, \quad \lim_{x \to b - \pi/2 +} y_b(x) = -\infty \,.$$

1.8.1. Poznámka: V literatuře se často píše „řešení" místo „maximální řešení"; přitom však „řešení" může také znamenat řešení, které není (nemusí být) maximální. Obvykle lze snadno vystihnout, v jakém smyslu se slova řešení užívá. V této knize „řešení" bude znamenat řešení, které nemusí být maximální.

1.9. Množinu $W \subset R^{n+1}$ budeme nazývat *charakteristikou soustavy* (2.1), existuje-li takové řešení $w_1, \ldots, w_n$ soustavy (2.1), $w_i\colon \mathscr{I} \to R$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, že platí

$$W = \{(t, w_1(t), \ldots, w_n(t)) \mid t \in \mathscr{I}\} \,.$$

W je tedy graf řešení $w_1, \ldots, w_n$. Je-li $w_1, \ldots, w_n$ maximální řešení, pak W se nazývá *maximální charakteristika*. Pokud je třeba vyjádřit vztah mezi charakteristikou W a řešením $w_1, \ldots, w_n$, budeme říkat, že charakteristika W odpovídá řešení $w_1, \ldots, w_n$ nebo že W je *charakteristika řešení* $w_1, \ldots, w_n$. Znalost charakteristiky je ekvivalentní znalosti příslušného řešení. V literatuře se často píše „charakteristika" místo „maximální charakteristika".

V tomto odstavci vyložíme geometrický význam pojmu charakteristika. Aby výklad nebyl příliš dlouhý a abychom se nevzdálili tématu, budeme užívat některých pojmů (např. pojmu tečný vektor), aniž je budeme definovat. Názorná představa je velmi užitečná k porozumění řadě problémů.

Pro stručnost budeme v tomto odstavci říkat, že množina $L \subset R^{n+1}$ je speciální křivka, existuje-li otevřený interval $\mathscr{I} \subset R$ a takové spojité funkce $l_i\colon \mathscr{I} \to R$, $i = 1, 2, \ldots, n$, že platí

$$L = \{(t, l_1(t), \ldots, l_n(t)) \mid t \in \mathscr{I}\} \,.$$

Z vlastností pojmu derivace plyne bezprostředně, že charakteristika má v každém svém bodě tečnu a že vektor

$$(1, f_1(t, w_1(t), \ldots, w_n(t)), \ldots, f_n(t, w_1(t), \ldots, w_n(t)))$$

je tečný vektor charakteristiky W v bodě $(t, w_1(t), \ldots, w_n(t))$ pro $t \in \mathscr{I}$. Platí však také opačné tvrzení. Nechť speciální křivka L má v každém svém bodě tečnu a nechť platí

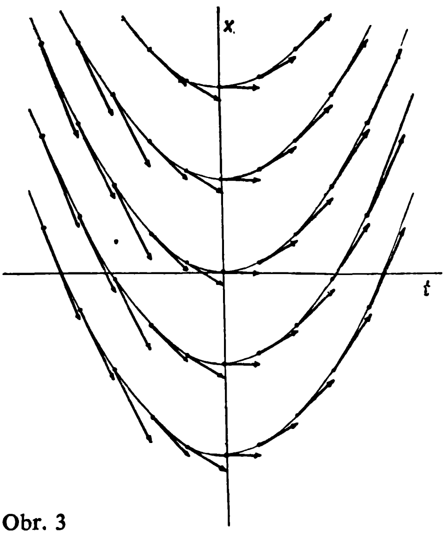
(i) Je-li $(y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n) \in L$, pak
$(1, f_1(y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n), \ldots, f_n(y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n))$
je tečný vektor k L v bodě $(y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n)$.

(ii) Funkce $f_i(t, l_1(t), \ldots, l_n(t))$ proměnné $t \in \mathscr{I}$ jsou spojité.

Potom $l_1, \ldots, l_n$ je řešení soustavy (2.1) a L je charakteristika. Je-li $l_1, \ldots, l_n$ maximální řešení, pak L je maximální charakteristika.

Zobrazení, které každému bodu $(y_0, \dots, y_{n-1}, y_n) \in G$ přiřazuje vektor $(1, f_1(y_0, \dots, y_n), \dots, f_n(y_0, \dots, y_n))$, se nazývá *vektorové pole*. Úloha hledat řešení soustavy (2.1) je tedy ekvivalentní úloze hledat takové speciální křivky L, aby v každém bodě $(y_0, \dots, y_n)$ speciální křivky L byl vektor pole tečným vektorem ke křivce L a aby se tečný vektor spojitě měnil, pokud se pohybujeme po L.

Vektorové pole a charakteristiky pro rovnici $\dot{x} = t$ jsou znázorněny na obr. 3.



Obr. 3

1.10. Pro autonomní soustavy je užitečný pojem trajektorie. Množina $\tilde{W}$ se nazývá *trajektorie rovnice* (6.1), existuje-li takové řešení $w_1, \dots, w_n$ soustavy (6.1), $w_i \colon \mathscr{I} \to R$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, že je

$$\tilde{W} = \{(w_1(t), \dots, w_n(t)) \mid t \in \mathscr{I}\}.$$

$\tilde{W}$ je tedy množina hodnot, kterých nabývá řešení $w_1, \dots, w_n$. $\tilde{W}$ se nazývá *maximální trajektorie rovnice* (6.1), je-li řešení $w_1, \dots, w_n$ maximální. Pokud bude třeba vyjádřit vztah mezi trajektorií $\tilde{W}$ a řešením $w_1, \dots, w_n$, budeme říkat, že trajektorie $\tilde{W}$ odpovídá řešení $w_1, \dots, w_n$ nebo i že $\tilde{W}$ je *trajektorie řešení* $w_1, \dots, w_n$.

1.10.1. Poznámka: V literatuře se často píše trajektorie místo maximální trajektorie.

Příklad: Buď $r \in R$, $r \geqq 0$, $v \in R$, $v \neq 0$. Funkce w_1, w_2,

$$w_1(t) = r \cos vt, \quad w_2(t) = -r \sin vt \quad \text{pro} \quad t \in R$$

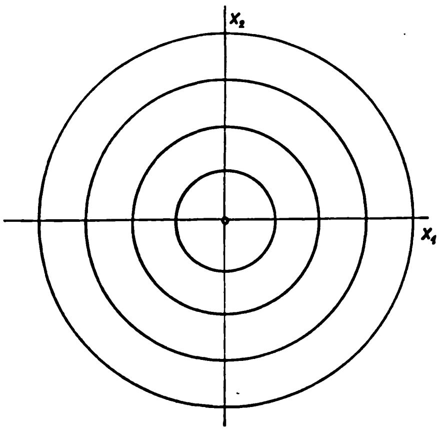
jsou maximální řešení soustavy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= vx_2, \\ \dot{x}_2 &= -vx_1. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Příslušné maximální trajektorie jsou množiny

$$\{(r \cos \nu t, -r \sin \nu t) | t \in R\},$$

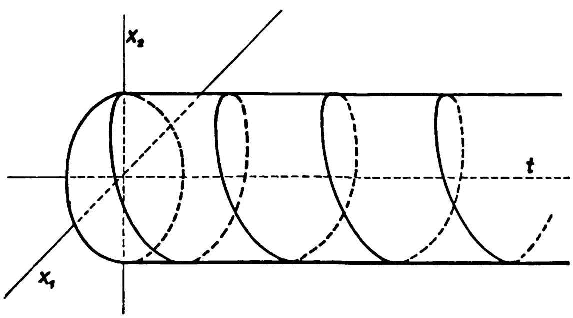
a jsou to tedy kružnice se středem v počátku a s poloměrem $r > 0$; dále je maximální trajektorií množina, která obsahuje počátek jako svůj jediný bod (viz obr. 4).



Obr. 4

Bod $(u_1(t), u_2(t))$ znamená hodnotu řešení u_1, u_2 v okamžiku t; tento bod se pohybuje po trajektorii $(r > 0)$ po směru pohybu hodinových ručiček v případě $\nu > 0$ (a proti směru hodinových ručiček v případě $\nu < 0$).

V případě jedné autonomní rovnice pojem maximální trajektorie není zajímavý. Např. každé řešení y rovnice (7.5) vede k téže maximální trajektorii a tou je množina R.



Obr. 5

Nechť trajektorie $\tilde{W}$ odpovídá řešení $w_1, \ldots, w_n$ a nechť je $y \in \tilde{W}$. Nechť W je charakteristika řešení $w_1, \ldots, w_n$. Existuje $\tau \in \mathscr{I}$ tak, že je $(\tau, y) \in W$. W je speciální křivka v R^{n+1} a $(1, g_1(y), \ldots, g_n(y))$ je tečný vektor k W v bodě (τ, y); proto $\tilde{W}$ je křivka v R^n, a je-li $(g_1(y), \ldots, g_n(y))$ nenulový vektor, pak $(g_1(y), \ldots, g_n(y))$ je tečný vektor k $\tilde{W}$ v bodě y. Vztah trajektorie a charakteristiky v případě soustavy (10.1) je znázorněn na obr. 5.

1.11. Nechť $u_1, u_2, \ldots, u_n$ je řešení autonomní soustavy (6.1), $u_i: (\alpha, \beta) \to R$ pro $i = 1, 2, \ldots, n, \alpha < \beta$. Zvolme číslo $\sigma \in R$ a definujme funkce $u_{i\sigma}: (\alpha + \sigma, \beta + \sigma) \to R$ rovnicemi $u_{i\sigma}(t) = u_i(t - \sigma)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Protože je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t - \sigma) = 1,$$

je

$$\dot{u}_{i\sigma}(t) = \dot{u}_i(t - \sigma) = g_i(u_1(t - \sigma), \ldots, u_n(t - \sigma)) = g_i(u_{1\sigma}(t), \ldots, u_{n\sigma}(t)),$$

a tedy $u_{1\sigma}, u_{2\sigma}, \ldots, u_{n\sigma}$ je také řešení soustavy (6.1). Nechť U je charakteristika řešení $u_1, \ldots, u_n$ a nechť U_σ je charakteristika řešení $u_{1\sigma}, \ldots, u_{n\sigma}$. Z definice charakteristiky a z definice funkcí $u_{i\sigma}$ plyne, že charakteristika U_σ vznikne tím, že charakteristiku U přemístíme o délku σ ve směru osy t. Proto se také říká, že řešení $u_{1\sigma}, \ldots, u_{n\sigma}$ vznikne z řešení $u_1, \ldots, u_n$ posunutím v čase.

Nechť trajektorie $\tilde{U}$ odpovídá řešení $u_1, \ldots, u_n$ a nechť trajektorie $\tilde{U}_\sigma$ odpovídá řešení $u_{1\sigma}, \ldots, u_{n\sigma}$. Zřejmě je $\tilde{U} = \tilde{U}_\sigma$ pro každé $\sigma \in R$, tedy $\tilde{U}$ je společná trajektorie všech řešení $u_{1\sigma}, \ldots, u_{n\sigma}$ pro $\sigma \in R$.

1.12. Nechť $\Theta: H \to R$ je spojitá funkce, $\Theta(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ pro $(x_1, \ldots, x_n) \in H$. V tomto odstavci zodpovíme otázku, v jakém vztahu jsou trajektorie soustavy (6.1) a trajektorie soustavy

$$\dot{x}_i = g_i(x_1, \ldots, x_n)\, \Theta(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12.1}$$

Odpověď může na první pohled překvapit: Platí

1.12.1. Věta: *Je-li $\tilde{U}$ trajektorie soustavy* (6.1), *pak $\tilde{U}$ je také trajektorie soustavy* (12.1); *naopak každá trajektorie $\tilde{V}$ soustavy* (12.1) *je současně trajektorií soustavy* (6.1).

Důkaz: Dokažme první část Věty 1.12.1. Nechť $\tilde{U}$ je trajektorie soustavy (6.1). To znamená, že existuje interval $(\alpha, \beta) \subset R$ a funkce $u_i: (\alpha, \beta) \to R$, které mají spojité derivace a přitom platí

(i) $u_1, \ldots, u_n$ je řešení soustavy (6.1).

(ii) $\tilde{U} = \{(u_1(t), \ldots, u_n(t)) \mid t \in (\alpha, \beta)\}$.

Zvolme $\tau \in (\alpha, \beta)$ a definujme funkci $\varphi: (\alpha, \beta) \to R$ vztahem

$$\varphi(t) = \int_\tau^t [\Theta(u_1(\lambda), \ldots, u_n(\lambda))]^{-1}\, \mathrm{d}\lambda.$$

Je buď $\Theta(u_1(\lambda), \ldots, u_n(\lambda)) > 0$ pro $\lambda \in (\alpha, \beta)$, nebo je $\Theta(u_1(\lambda), \ldots, u_n(\lambda)) < 0$ pro $\lambda \in (\alpha, \beta)$.

Funkce φ je buď rostoucí, nebo klesající a je spojitá. Proto zobrazuje interval (α, β) na interval, který označíme (γ, δ), a na intervalu (γ, δ) je definovaná funkce inverzní k funkci φ: označíme ji ψ. Je

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = [\Theta(u_1(t), \ldots, u_n(t))]^{-1}, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

a pro inverzní funkci ψ platí

$$\frac{d\psi}{ds}(s) = \Theta(u_1(\psi(s)), \ldots, u_n(\psi(s))), \quad s \in (\gamma, \delta).$$

Definujme funkce v_i: $(\gamma, \delta) \to R$ rovnicemi

$$v_i(s) = u_i(\psi(s)).$$

Funkce v_i mají spojité derivace a je

$$\frac{dv_i}{ds}(s) = \frac{du_i}{dt}(\psi(s))\frac{d\psi}{ds}(s) = g_i(v_1(s), \ldots, v_n(s))\,\Theta(v_1(s), \ldots, v_n(s)).$$

$v_1, \ldots, v_n$ je řešení soustavy (12.1) a zřejmě je

$$\tilde{U} = \{(v_1(s), \ldots, v_n(s)) |\ s \in (\gamma, \delta)\},$$

což znamená, že $\tilde{U}$ je trajektorie soustavy (12.1).

Druhá část Věty 1.12.1 plyne z její první části, neboť od soustavy (12.1) přejdeme k soustavě (6.1) tím, že funkce g_i, které jsou na pravých stranách soustavy (12.1), násobíme funkcí $1/\Theta$. Věta je dokázána.

Obsah věty můžeme ilustrovat touto úvahou (u_i, v_j, φ, ψ má stále stejný význam): Představme si, že t znamená čas, takže bod $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$ proběhne trajektorii $\tilde{U}$, zatímco t roste od α k β. V okamžiku $t' \in (\alpha, \beta)$ má bod $u(t)$ polohu $u(t') = (u_1(t'), \ldots, u_n(t'))$ a okamžitou rychlost

$$\begin{aligned} \dot{u}(t') &= (\dot{u}_1(t'), \ldots, \dot{u}_n(t')) = \\ &= (g_1(u_1(t'), \ldots, u_n(t')), \ldots, g_n(u_1(t'), \ldots, u_n(t'))). \end{aligned}$$

Také proměnnou s budeme interpretovat jako čas (který měříme podle nějaké jiné časové stupnice). Bod $v(s) = (v_1(s), \ldots, v_n(s))$ proběhne trajektorii $\tilde{U}$, zatímco s roste od γ k δ. V okamžiku $s' = \varphi(t')$ je $v(s') = u(t')$, ale okamžitá rychlost bodu $v(s')$ je

$$\begin{aligned} &\frac{dv}{ds}(s') = \left(\frac{dv_1}{ds}(s'), \ldots, \frac{dv_n}{ds}(s')\right) = \\ &= (g_1(v_1(s'), \ldots, v_n(s'))\,\Theta(v_1(s'), \ldots, v_n(s')), \ldots, g_n(v_1(s'), \ldots, v_n(s')) \times \\ &\times \Theta(v_1(s'), \ldots, v_n(s'))). \end{aligned}$$

1.12.2. Poznámka: Podobným způsobem jako Větu 1.12.1 lze dokázat toto tvrzení: Je-li $\tilde{U}$ maximální trajektorie rovnice (6.1), pak $\tilde{U}$ je též maximální trajektorie rovnice (12.1), a naopak, je-li $\tilde{V}$ maximální trajektorie rovnice (12.1), je $\tilde{V}$ též maximální trajektorie rovnice (6.1).

1.13. Položme si otázku: Může nastat taková situace, že řešení $u_1, \ldots, u_n$ soustavy (2.1) nejen není maximální, ale ani žádné jeho prodloužení není maximální, tj. ke každému prodloužení řešení $u_1, \ldots, u_n$ existuje opět vlastní prodloužení. Odpověď na tuto otázku je záporná. Platí

1.13.1. Věta: *Ke každému řešení soustavy* (2.1) *existuje takové prodloužení, které je současně maximálním řešením.*

Větu 1.13.1 nebudeme dokazovat; její důkaz je velmi obdobný důkazu Věty 3.4.1 (viz Dodatek 3.2). Z Věty 1.13.1 plyne, že známe všechna řešení soustavy (2.1), známe-li všechna její maximální řešení.