7. Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

In: Jaroslav Kurzweil (author): Obyčejné diferenciální rovnice. (Czech). Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1978. pp. 148--164.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402085

7. Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu mají některé velmi názorné a jednoduché vlastnosti. Byly proto velmi podrobně vyšetřovány a staly se odrazovým můstkem k vyšetřování lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů, kde je ovšem situace značně složitější.

7.1. Budeme vyšetřovat lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_2(t)\,x = 0\,, \tag{1.1}$$

kde funkce $a_1, a_2: \mathscr{I} \to R$ jsou spojité a $\mathscr{I}$ je interval. Nechť $\tilde{p}$ je primitivní funkce k a_1 v $\mathscr{I}$; položme $p(t) = e^{\tilde{p}(t)}$ pro $t \in \mathscr{I}$, $q(t) = p(t)\,a_2(t)$. Je-li $\mathscr{J}$ interval obsažený v $\mathscr{I}$ a má-li funkce $u: \mathscr{J} \to R$ spojité derivace prvního a druhého řádu, platí

$$p(t)\left[\frac{d^2u}{dt^2}(t) + a_1(t)\frac{du}{dt}(t) + a_2(t)\,u(t)\right] =$$

$$= p(t)\frac{d^2u}{dt^2}(t) + p(t)\,a_1(t)\frac{du}{dt}(t) + q(t)\,u(t) = \frac{d}{dt}\left[p\frac{du}{dt}\right](t) + q(t)\,u(t)\,.$$

Odtud plyne: Je-li u řešení rovnice (1.1), je také řešením rovnice

$$\frac{d}{dt}\left[p\frac{dx}{dt}\right](t) + q(t)\,x(t) = 0\,, \tag{1.2}$$

která se obvykle zapisuje ve tvaru

$$\frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{dx}{dt}\right] + q(t)\,x = 0\,. \tag{1.3}$$

Naopak, je-li u řešení rovnice (1.3), je také řešením rovnice (1.1).

7.1.1. Poznámka: Řešením rovnice (1.3) rozumíme funkci $u: \mathscr{J} \to R$ takovou, že u má spojité derivace prvního a druhého řádu a že platí (1.2) pro každé $t \in \mathscr{J}$, píšeme-li u místo x. Funkce p, q zřejmě splňují tuto podmínku:

Funkce $p: \mathscr{I} \to R$ je spojitá a má spojitou derivaci, $p(t) > 0$ pro $t \in \mathscr{I}$, a funkce $q: \mathscr{I} \to R$ je spojitá. $$(1.4)$$

Rovnice (1.3) se někdy nazývá *lineární diferenciální rovnice druhého řádu v samoadjungovaném tvaru* a o postupu, kterým jsme přešli od rovnice (1.1) k rovnici (1.3), se říká, že jsme rovnici (1.1) upravili na samoadjungovaný tvar.

Rovnicí (1.3) se budeme zabývat za slabšího předpokladu:

Funkce $p, q: \mathscr{I} \to R$ jsou spojité, $p(t) > 0$ pro $t \in \mathscr{I}$. $$(1.5)$$

Užíváme-li předpokladu (1.5), není vhodné současně užívat pojmu řešení rovnice (1.3), jak je popsán v Poznámce 7.1.1 (viz Poznámku 7.1.6). Proto budeme užívat této definice:

7.1.2. Definice: *Řešením lineární diferenciální rovnice* 2. *řádu* (1.3) budeme nazývat funkci $u: \mathscr{J} \to R$, je-li $\mathscr{J}$ interval obsažený v $\mathscr{I}$, má-li funkce u spojitou derivaci $\dot{u}$, má-li funkce $p(t)\,\dot{u}(t)$ spojitou derivaci a platí-li (1.2) v každém bodě $t \in \mathscr{J}$, dosadíme-li u za x.

Nechť platí (1.5). Nechť $u_1, u_2: \mathscr{J} \to R$ je řešení soustavy

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{p(t)}\, x_2\,, \qquad \dot{x}_2 = -q(t)\, x_1\,. \tag{1.6}$$

Podle první z rovnic (1.6) je

$$p(t)\,\dot{u}_1(t) = u_2(t)$$

a podle druhé z rovnic (1.6) dostaneme, že u_1 je řešení rovnice (1.3).

Naopak, je-li $u: \mathscr{J} \to R$ řešení rovnice (1.3), položme $u_1(t) = u(t)$, $u_2(t) = p(t)\,\dot{u}_1(t)$. Zřejmě u_1, u_2 je řešení soustavy (1.6).

Rovnice (1.3) a soustava (1.6) jsou tedy ekvivalentní [v obdobném smyslu jako rovnice (1.1.1) a soustava (1.5.1)]. Odtud z Věty 4.2.1 a z Poznámky 4.3.3 plyne, že platí

7.1.3. Věta: *Nechť platí* (1.5). *Nechť je* $t_0 \in \mathscr{I}$, $y_1, y_2 \in R$. *Potom existuje řešení* $u: \mathscr{I} \to R$ *rovnice* (1.3) *takové, že je* $u(t_0) = y_1$, $\dot{u}(t_0) = y_2$. *Je-li* $v: \mathscr{I} \to R$ *řešení rovnice* (1.3), *pro které* $v(t_0) = y_1$, $\dot{v}(t_0) = y_2$, *potom* $v = u$ (*tedy* u *je určeno jednoznačně*).

7.1.4. Poznámka: Úvahy z tohoto odstavce ukazují, že může být účelné převádět rovnici vyššího řádu na soustavu i jinými způsoby, než je způsob popsaný v odst. 1.5.

7.1.5. Poznámka: Je-li splněna podmínka (1.4), pak zřejmě nezáleží na tom, zda pojmu řešení rovnice (1.3) rozumíme tak, jak je zaveden v Definici 7.1.2, nebo tak, jak je popsán v Poznámce 7.1.1.

7.1.6. Poznámka: Nechť platí (1.5), nechť $s \in \mathscr{J}$ a nechť funkce p nemá derivaci v bodě s. Nechť $u: \mathscr{J} \to R$ je řešení rovnice (1.3) ve smyslu Poznámky 7.1.1 a nechť $s \in \mathscr{J}$. Nechť y je hodnota derivace funkce $p(t)\,\dot{u}(t)$ v bodě s. Platí

$$\delta^{-1}[p(s+\delta)\,\dot{u}(s+\delta) - p(s)\,\dot{u}(s)] =$$
$$= \delta^{-1}\,p(s+\delta)\,[\dot{u}(s+\delta) - \dot{u}(s)] + \delta^{-1}\,\dot{u}(s)\,[p(s+\delta) - p(s)] \to y$$

pro $\delta \to 0$ ($\delta \neq 0$), a protože funkce p nemá derivaci v bodě s, platí $\dot{u}(s) = 0$.

Nemá-li funkce p derivaci v žádném bodě $t \in \mathscr{J}$, musí být $\dot{u}(t) = 0$ pro $t \in \mathscr{J}$, a tedy u je konstantní funkce. Je-li ještě $q(\tau) \neq 0$ pro nějaké $\tau \in \mathscr{J}$, potom je $u(\tau) = 0$ pro $t \in \mathscr{J}$.

7.2. Při vyšetřování rovnice (1.3) má základní význam pojem nulový bod řešení. *Nulovým bodem řešení* u lineární diferenciální rovnice 2. řádu (1.3) nazýváme takové číslo s, že je $u(s) = 0$. Přitom se zajímáme o maximální řešení u, která jsou netriviální [tj. existuje $\tau \in \mathscr{J}$ tak, že $u(\tau) \neq 0$].

Nechť u je takové řešení. Platí tato tři elementární tvrzení:

Je-li s nulový bod řešení u, pak je $\dot{u}(s) \neq 0$. (2.1)

Je-li s nulový bod řešení u a je-li současně s nulový bod maximálního řešení w rovnice (1.3), *pak $w(t) = \lambda\,u(t)$ pro $t \in \mathscr{J}$; přitom $\lambda = \dot{w}(s)/\dot{u}(s)$.* (2.2)

Množina $\mathscr{N}(u)$ nulových bodů řešení u nemá hromadný bod v $\mathscr{J}$. (2.3)

Tvrzení (2.1) a (2.2) plynou přímo z Věty 7.1.3. Kdyby $r \in \mathscr{J}$ byl hromadný bod nulových bodů řešení u, bylo by $u(r) = 0 = \dot{u}(r)$ a opět podle Věty 7.1.3 u by bylo triviální řešení; tedy platí i tvrzení (2.3).

V následující větě se porovnávají vlastnosti nulových bodů dvou diferenciálních rovnic; proto se tato věta někdy nazývá *porovnávací.*

7.2.1. Věta: *Nechť $p, q_1, q_2: \mathscr{J} \to R$ jsou spojité funkce a nechť je*

$$q_2(t) \geqq q_1(t) \tag{2.4}$$

pro $t \in \mathscr{J}$. Nechť u je netriviální maximální řešení rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right] + q_1(t)\,x = 0 \tag{2.5}$$

a nechť t_1, t_2 jsou po sobě jdoucí nulové body řešení u, tj. nechť je $t_1 < t_2$ a nechť platí

$$u(t_1) = 0 = u(t_2)\,, \quad u(t) \neq 0 \quad \textit{pro} \quad t_1 < t < t_2\,. \tag{2.6}$$

Nechť v je (libovolné) maximální řešení rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right] + q_2(t)\,x = 0\,. \tag{2.7}$$

Pak nastane jeden ze dvou případů:

Existuje $s \in (t_1, t_2)$ *tak, že je* $v(s) = 0$. (2.8)

$q_2(t) = q_1(t)$ *pro* $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ *a existuje takové číslo* $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$, *že je* $v(t) = \lambda\, u(t)$ *pro* $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$. (2.9)

Důkaz: Dokážeme, že nenastane-li případ (2.8), nastane případ (2.9).

Nechť tedy nenastane případ (2.8). Bez ztráty na obecnosti můžeme předpokládat, že je

$$u(t) > 0\,, \quad v(t) > 0 \quad \text{pro} \quad t \in (t_1, t_2) \tag{2.10}$$

[není-li splněna některá z nerovností (2.7), nahradíme funkci u funkcí $-u$, resp. funkci v funkcí $-v$]. Z (2.6) a (2.10) plyne $\dot{u}(t_1) \geqq 0$, $\dot{u}(t_2) \leqq 0$; nemůže však být ani $\dot{u}(t_1) = 0$, ani $\dot{u}(t_2) = 0$, neboť v takovém případě by bylo $u(t) = 0$ pro $t \in \mathcal{J}$ (viz Větu 7.1.3). Tedy je

$$\dot{u}(t_1) > 0\,, \quad \dot{u}(t_2) < 0\,. \tag{2.11}$$

Do rovnice (2.5) dosadíme u za x, násobíme ji funkcí v a integrujeme od t_1 do t_2. Do rovnice (2.7) dosadíme v za x, násobíme ji funkcí u a integrujeme od t_1 do t_2.

Odečtením obou rovnic dostáváme

$$\int_{t_1}^{t_2} [(p\dot{u})^{\cdot}\, v - (p\dot{v})^{\cdot}\, u]\, \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} (q_1 - q_2)\, uv\, \mathrm{d}t = 0\,,$$

kde

$$(p\dot{u})^{\cdot} \quad \text{píšeme místo} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right].$$

Je $(p\dot{u}v - p\dot{v}u)^{\cdot} = (p\dot{u})^{\cdot}\, v - (p\dot{v})^{\cdot}\, u$, proto první z integrálů můžeme vypočítat. Vezmeme-li ještě v úvahu (2.6), dostáváme

$$p(t_2)\, \dot{u}(t_2)\, v(t_2) - p(t_1)\, \dot{u}(t_1)\, v(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} (q_1 - q_2)\, uv\, \mathrm{d}t = 0\,. \tag{2.12}$$

Z nerovností (2.4), (2.10) a (2.11) plyne

$$v(t_2) \geqq 0\,, \quad v(t_1) \geqq 0\,, \quad p(t_2)\, \dot{u}(t_2)\, v(t_2) \leqq 0\,, \quad -p(t_1)\, \dot{u}(t_1)\, v(t_1) \leqq 0\,,$$
$$\int_{t_1}^{t_2} (q_1 - q_2)\, uv\, \mathrm{d}t \leqq 0\,.$$

Proto rovnice (2.12) může být splněna jen tím způsobem, že je

$$p(t_2)\, \dot{u}(t_2)\, v(t_2) = 0 = p(t_1)\, \dot{u}(t_1)\, v(t_1)\,, \tag{2.13}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (q_2 - q_1)\, uv\, \mathrm{d}t = 0\,. \tag{2.14}$$

Ze (2.13), (2.11) a (1.5) plyne, že je

$$v(t_1) = v(t_2) = 0\,. \tag{2.15}$$

Ze (2.14), (2.10), (2.4) a (0.5.10) plyne

$$q_1(t) = q_2(t) \quad \text{pro} \quad t \in \langle t_1, t_2 \rangle\,. \tag{2.16}$$

Ze (2.10) a (2.15) plyne $\dot{v}(t_1) > 0$. Položme $\lambda = \dot{v}(t_1)/\dot{u}(t_1)$. Na intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ funkce v, u splňují tutéž diferenciální rovnici [tvaru (1.3)] a je $v(t_1) = \lambda\, u(t_1), \dot{v}(t_1) = \lambda\, \dot{u}(t_1)$. Užitím Věty 7.1.3 pro interval $\langle t_1, t_2 \rangle$ plyne $v(t) = \lambda\, u(t)$ pro $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$. Věta 7.2.1 je dokázána.

7.3. Věty 7.2.1 lze užít speciálně v tom případě, že $q_1 = q_2 = q$, tj. k vyšetřování rovnice (1.3).

Definiční interval $\mathcal{J}$ funkcí p, q zapišme v některém z tvarů (a, b), $(a, b\rangle$, $\langle a, b)$, $\langle a, b\rangle$ $[-\infty \leqq a < b \leqq \infty]$. Nechť u je netriviální maximální řešení rovnice (1.3) a nechť $\mathcal{N}(u)$ je množina nulových bodů řešení u. Přirozeně může být $\mathcal{N}(u) = \emptyset$. Je-li $\mathcal{N}(u) \neq \emptyset$, $s_0 \in \mathcal{N}(u)$ a má-li u nulové body větší než s_0, pak mezi nimi existuje nejmenší [to plyne ze (2.3)]; ten označíme s_1. Podobně, má-li u nulové body menší než s_0, je mezi nimi největší; ten označíme s_{-1}. Stejným způsobem postupujeme dál. Tak sestrojíme posloupnost

$$\ldots, s_{-1}, s_0, s_1, \ldots, \tag{3.1}$$

která ovšem může [a nemusí] být nekonečná jak zprava, tak zleva. *Body této posloupnosti se nazývají (navzájem) konjugované*; s_i, s_{i+1} se nazývají *sousední nulové body řešení u.*

Ze (2.3) plyne, že platí

Je-li posloupnost (3.1) nekonečná zprava, pak

$$\lim_{i \to \infty} s_i = b \quad \text{a} \quad b \notin \mathcal{J}\,. \tag{3.2}$$

Je-li posloupnost (3.1) nekonečná zleva, pak

$$\lim_{i \to -\infty} s_i = a \quad \text{a} \quad a \notin \mathcal{J}\,. \tag{3.3}$$

Užitím (3.2) a (3.3) lze snadno dokázat, že platí:

Posloupnost (3.1) obsahuje všechny body množiny $\mathcal{N}(u)$. (3.4)

Proto posloupnost (3.1) se nazývá *posloupnost nulových bodů řešení u.*

7.3.1. Věta: *Nechť u, v jsou lineárně nezávislá maximální řešení rovnice* (1.3). *Nechť t_1, t_2 jsou sousední nulové body řešení u [tj. $u(t_1) = 0 = u(t_2)$, $u(t) \neq 0$ pro $t_1 < t < t_2$]. Potom řešení v má v intervalu (t_1, t_2) právě jeden nulový bod.*

Větu 7.3.1 dokážeme ve dvou krocích. Dokážeme, že:

Řešení v má v intervalu (t_1, t_2) nulový bod. (3.5)

Řešení v má v intervalu (t_1, t_2) nejvýše jeden nulový bod. (3.6)

Důkaz: Obě řešení u, v jsou netriviální (v opačném případě by byla lineárně závislá). Ve Větě 7.2.1 položme $q_1 = q = q_2$; podle této Věty nastane jeden z případů (2.8), (2.9).

Ukážeme, že (2.9) platit nemůže. Kdyby totiž platilo (2.9), platilo by $v(t) = \lambda\, u(t)$ pro $t \in (t_1, t_2)$ při vhodném $\lambda \in R$. V libovolném bodě $t_3 \in (t_1, t_2)$ by bylo $v(t_3) = \lambda\, u(t_3)$, $\dot{v}(t_3) = \lambda\, \dot{u}(t_3)$ a tak by bylo $v(t) = \lambda\, u(t)$ pro $t \in \mathcal{J}$, tedy řešení u, v by byla lineárně závislá. (2.9) neplatí, a proto platí (2.8). Dokázali jsme, že platí (3.5). Dokážeme, že platí (3.6).

Kdyby neplatilo (3.6), mělo by řešení v v intervalu (t_1, t_2) alespoň dva nulové body a podle (3.5) by řešení u mělo mezi dvěma sousedními nulovými body $\tau_1, \tau_2 \in (t_1, t_2)$ řešení v nulový bod a to není možné, tedy platí i (3.6) a Věta 7.3.1 je dokázána.

7.3.2. Poznámka: Nechť u, v jsou lineárně nezávislá maximální řešení. Nechť (3.1) je posloupnost nulových bodů řešení u a nechť

$$\ldots < r_{-2} < r_{-1} < r_0 < r_1 < r_2 < \ldots \tag{3.7}$$

je posloupnost nulových bodů řešení v. Podle Věty 7.3.1 k bodům s_i, s_{i+1} z posloupnosti (3.1) existuje právě jeden bod r_j z posloupnosti (3.7) tak, že $s_i < r_j < s_{i+1}$, a k bodům r_k, r_{k+1} z posloupnosti (3.7) existuje bod s_l z posloupnosti (3.1), $r_k < s_l < r_{k+1}$, a jak jsme ukázali, posloupnosti (3.1) a (3.7) nemají žádný bod společný. Říkáme, že nulové body lineárně nezávislých řešení rovnice (1.3) se navzájem oddělují.

7.3.3. Definice: Netriviální maximální *řešení u* rovnice (1.3) se nazývá *oscilatorické pro $t \to b$*, jestliže má v intervalu (τ, b) nulový bod pro každé $\tau \in (a, b)$. V opačném případě se nazývá *neoscilatorické pro $t \to b$.*

Rovnice (1.3) se nazývá *oscilatorická pro $t \to b$*, jestliže každé její netriviální maximální řešení je oscilatorické pro $t \to b$. V opačném případě se *rovnice* (1.3) nazývá *neoscilatorická pro $t \to b$.*

7.3.4. Poznámka: Obdobně se definuje význam výroků „řešení u je oscilatorické (neoscilatorické) pro $t \to a$" a „rovnice (1.3) je oscilatorická (neoscilatorická) pro $t \to a$".

7.3.5. Poznámka: Netriviální maximální řešení u rovnice (1.3) je oscilatorické pro $t \to b$ právě tehdy, je-li posloupnost (3.1) jeho nulových bodů zprava nekonečná, u je neoscilatorické řešení pro $t \to b$ právě tehdy, je-li posloupnost (3.1) zprava konečná.

7.3.6. Poznámka: Podle Definice 7.3.3 rovnice (1.3) je neoscilatorická pro $t \to b$, jestliže má alespoň jedno řešení neoscilatorické pro $t \to b$.

Podle Poznámek 7.3.5 a 7.3.2 není možné, aby rovnice (1.3) měla zároveň řešení u oscilatorické pro $t \to b$ i řešení v neoscilatorické pro $t \to b$. Je tedy rovnice (1.3) neoscilatorická pro $t \to b$ právě tehdy, jsou-li všechna *její maximální*, netriviální řešení neoscilatorická pro $t \to b$.

7.4. Věta 7.2.1 lze užít k tomu, abychom zjistili, zda daná rovnice (1.3) je oscilatorická nebo neoscilatorická pro $t \to b$ $(t \to a)$.

7.4.1. Věta: *Nechť* $\mathscr{I} = (a, b)$, *nechť* $p, q_1, q_2 \colon \mathscr{I} \to R$ *jsou spojité funkce a nechť existuje* $T_1 \in \mathscr{I}$ *tak, že je* $q_2(t) \geqq q_1(t)$ *pro* $t \in \mathscr{I}$, $t \geqq T_1$.

Potom platí tato tvrzení:

Je-li rovnice (2.5) oscilatorická pro $t \to b$, *je i rovnice (2.7) oscilatorická pro* $t \to b$. (4.1)

Je-li rovnice (2.7) neoscilatorická pro $t \to b$, *je i rovnice (2.5) neoscilatorická pro* $t \to b$. (4.2)

Důkaz: Předpokládejme, že rovnice (2.5) je oscilatorická pro $t \to b$ a že rovnice (2.7) je neoscilatorická pro $t \to b$. Nechť u je netriviální maximální řešení rovnice (2.5) a nechť v je netriviální maximální řešení rovnice (2.7). Potom existuje $T_2 \in \langle T_1, b)$ takové, že je $v(t) \neq 0$ pro $t \in \langle T_2, b)$, a existují $t_1, t_2 \in \langle T_2, b)$, $t_1 < t_2$, tak, že je $u(t_1) = u(t_2) = 0$, $u(t) \neq 0$ pro $t_1 < t < t_2$. Podle Věty 7.2.1 by však pro nějaké $s \in \langle t_1, t_2 \rangle$ bylo $v(s) = 0$ a to není možné. Tedy platí (4.1). Tvrzení (4.2) plyne z (4.1). Věta 7.4.1 je dokázána.

7.4.2. Poznámka: Existuje-li $T_2 \in \mathscr{I}$ tak, že je $q_2(t) \geqq q_1(t)$ pro $t \in \mathscr{I}$, $t \leqq T_2$, pak platí tvrzení (4.1) a (4.2) s touto změnou: Místo $t \to b$ píšeme $t \to a$.

Všimněme si některých příkladů v případě $p(t) = 1$ pro $t \in (a, b)$. Rovnice

$$\ddot{x} + \varrho x = 0\,, \tag{4.3}$$

kde $\varrho \in R$, $\varrho > 0$, má řešení $u(t) = \sin(t\sqrt{\varrho})$ pro $t \in R$, a je tedy oscilatorická pro $t \to \infty$ i pro $t \to -\infty$. Nechť funkce $q_3 \colon R \to R$ je spojitá. Z Věty 7.4.1 a z Poznámky 7.4.2 plyne, že rovnice

$$\ddot{x} + q_3(t)\, x = 0 \tag{4.4}$$

je oscilatorická pro $t \to \infty$, resp. $t \to -\infty$, jestliže

$$\liminf_{t \to \infty} q_3(t) > 0\,, \quad \text{resp.} \quad \liminf_{t \to -\infty} q_3(t) > 0\,.$$

Nechť platí

$$\lim_{t \to \infty} q_3(t) = c > 0\,. \tag{4.5}$$

Jak již víme, rovnice (4.4) je oscilatorická pro $t \to \infty$. Nechť w je netriviální maximální řešení rovnice (4.4) a nechť

$$\ldots < s_{-1} < s_0 < s_1 < s_2 < \ldots \tag{4.6}$$

je posloupnost nulových bodů řešení w. Jak již víme, posloupnost (4.6) je zprava nekonečná a platí $\lim_{i\to\infty} s_i = \infty$ (viz odst. 7.3). Zvolme ϱ, $0 < \varrho < c$. Existuje T tak, že je $q_3(t) > \varrho$ pro $t \geqq T$, a k T existuje l tak, že je $s_i \geqq T$ pro $i \geqq l$. Zvolme $i \geqq l$ a srovnejme řešení w rovnice (4.4) a řešení $u(t) = \sin[(\sqrt{\varrho})(t - s_i)]$ rovnice (4.3) na intervalu $\langle s_i, s_i + \pi/\sqrt{\varrho}\rangle$. Podle Věty 7.2.1 má řešení w nulový bod v otevřeném intervalu $(s_i, s_i + \pi/\sqrt{\varrho})$. Tedy platí $s_{i+1} - s_i < \pi/\sqrt{\varrho}$, a protože $\varrho \in (0, c)$ bylo libovolné, dostáváme $\limsup_{i\to\infty}(s_{i+1} - s_i) \leqq \pi/\sqrt{c}$. Obdobně porovnáním rovnice (4.4) s rovnicí (4.3), kde $\varrho > c$, odvodíme, že platí $\liminf_{i\to\infty}(s_{i+1} - s_i) \geqq \pi/\sqrt{c}$. Ze (4.5) tedy plyne, že platí $\lim_{i\to\infty}(s_{i+1} - s_i) = \pi/\sqrt{c}$.

Pro $\varrho = 0$ je rovnice (4.3) neoscilatorická pro $t \to \infty$ a podle Věty 7.4.1 rovnice (4.4) je neoscilatorická, jakmile platí $\limsup_{t\to\infty} q_3(t) < 0$ [nebo jakmile existuje T tak, že $q_3(t) \leqq 0$ pro $t \geqq T$].

Rovnice

$$\ddot{x} + \gamma t^{-2} x = 0\,, \quad 0 < t < \infty\,, \tag{4.7}$$

kde $\gamma \in R$, je Eulerova rovnice (viz odst. 5.5). Její charakteristická rovnice je $\lambda(\lambda - 1) + \gamma = 0$, a vlastní čísla

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} - \gamma)}\,.$$

Pro $\gamma > \frac{1}{4}$ má rovnice (4.7) řešení

$$w(t) = t^{1/2} \cos\left(\frac{(4\gamma - 1)^{1/2}}{2} \ln t\right),$$

a je tedy oscilatorická pro $t \to \infty$ i pro $t \to 0$. Pro $\gamma \leqq \frac{1}{4}$ je rovnice (4.7) neoscilatorická pro $t \to \infty$ i pro $t \to 0$. Opět porovnáním rovnice (4.4), kde $q_3\colon (0, \infty) \to R$ je spojitá funkce, s rovnicí (4.7) lze odvodit podmínky postačující k tomu, aby rovnice (4.4) byla oscilatorická (neoscilatorická) pro $t \to \infty$ ($t \to 0$).

Rovnice

$$\ddot{x} + \frac{1}{4t^2}\left[1 + \frac{1}{(\ln t)^2}\right] x = 0\,, \quad t \in (0, 1)\,, \tag{4.8}$$

má řešení $u(t) = (-t \ln t)^{1/2}$ a je neoscilatorická pro $t \to 1$ i pro $t \to 0$.

V Besselově rovnici

$$\ddot{x} + \left[\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{4} - n^2\right) + 1\right] x = 0\,, \quad t \in (0, \infty)\,, \quad n \geqq 0\,, \tag{4.9}$$

položme

$$f_n(t) = \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{4} - n^2\right) + 1 .$$

Rovnice (4.9) je oscilatorická pro $t \to \infty$, neboť $\lim_{t\to\infty} f_n(t) = 1$. Je-li $n > 0$, je $f_n(t) \leqq \leqq 1/(4t^2)$ pro dostatečně malá t a porovnáním s rovnicí (4.7) dostáváme užitím Poznámky 7.4.2, že rovnice (4.9) je neoscilatorická pro $t \to 0$. V případě $n = 0$ nestačí porovnávat rovnici (4.9) s rovnicí (4.7). Platí však

$$f_0(t) \leqq \frac{1}{4t^2}\left[1 + \frac{1}{(\ln t)^2}\right]$$

pro dosti malá t a tak užitím Poznámky 7.4.2 a porovnáním rovnice (4.9) s rovnicí (4.8) dostáváme, že rovnice (4.9) v případě $n = 0$ je neoscilatorická pro $t \to 0$.

7.4.3. Poznámka: V rovnici

$$\ddot{x} + q(t)\, x = 0 , \tag{4.10}$$

kde $q: \mathscr{J} \to R$ je spojitá funkce, proveďme transformaci

$$t = \varphi(s), \quad x(t) = \zeta(s)\, y(s) . \tag{4.11}$$

Přitom předpokládáme, že funkce φ zobrazuje interval $\mathscr{J}$ na interval $\mathscr{J}$, má spojité derivace do třetího řádu, první derivace je různá od nuly v každém bodě $s \in \mathscr{J}$ a že funkce $\zeta: \mathscr{J} \to R$ má spojité derivace do druhého řádu, $\zeta(s) > 0$ pro $s \in \mathscr{J}$. Má-li funkce $x: \mathscr{J} \to R$ spojité derivace do druhého řádu, je rovnicemi (4.11) určena funkce y a má též spojité derivace do druhého řádu. Pro stručnost zápisu budeme označovat tečkou derivaci podle t a čárkou derivaci podle s.

Nechť ψ je inverzní funkce k funkci φ. Funkce ψ má spojitou derivaci do třetího řádu a platí

$$\frac{d\psi}{dt}(\varphi(s))\,\frac{d\varphi}{ds}(s) = 1 , \quad \text{tj.} \quad \varphi' = \frac{1}{\dot{\psi}} , \tag{4.12}$$

a dále

$$\varphi'' = -\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}^2}\,\varphi' = -\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}^3} , \quad \varphi''' = -\frac{\dddot{\psi}}{\dot{\psi}^4} + 3\,\frac{\ddot{\psi}^2}{\dot{\psi}^5} . \tag{4.13}$$

Z rovnic (4.11) vypočteme

$$\dot{x} = (\zeta' y + \zeta y')\,\frac{1}{\varphi'} ,$$

$$\ddot{x} + q(t)\, x = \frac{1}{\varphi'^3}\left[\varphi'\zeta y'' + (2\varphi'\zeta' - \varphi''\zeta)\, y' + \right.$$

$$\left. + (\varphi'\zeta'' - \varphi''\zeta' + \varphi'^3\, q(\varphi(s))\, \zeta)\, y\right] .$$

Splňuje-li funkce x rovnici (4.10), splňuje funkce y rovnici

$$y'' + (\varphi'\zeta)^{-1}(2\varphi'\zeta' - \varphi''\zeta)\,y' + \\ + (\varphi'\zeta)^{-1}\left[\varphi'\zeta'' - \varphi''\zeta' + \varphi'^3\zeta\, q(\varphi(s))\right] y = 0\,. \tag{4.14}$$

Rovnici (4.14) můžeme zapsat ve tvaru

$$y'' + Q(s)\,y = 0 \tag{4.15}$$

právě tehdy, je-li

$$2\varphi'\zeta' - \varphi''\zeta = 0\,; \tag{4.16}$$

přitom $Q(s) = (\varphi'\zeta)^{-1}\left[\varphi'\zeta'' - \varphi''\zeta' + \varphi'^3\zeta\, q(\varphi(s))\right]$.
Ze (4.16) plyne

$$\zeta = c\sqrt{|\varphi'|} \tag{4.17}$$

a odtud

$$Q(s) = \frac{1}{2}\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3}{4}\frac{\varphi''^2}{\varphi'^2} + \varphi'^2\, q(\varphi(s))\,. \tag{4.18}$$

Pomocí rovnic (4.12), (4.13) lze (4.18) upravit na tvar

$$Q(s) = -\frac{1}{2}\frac{\dddot{\psi}}{\dot{\psi}^3} + \frac{3}{4}\frac{\ddot{\psi}^2}{\dot{\psi}^4} + \frac{1}{\dot{\psi}^2}\, q(t) \tag{4.19}$$

[kde ovšem $t = \varphi(s)$].

Je-li x řešení rovnice (4.10), platí-li (4.17) a je-li y určeno pomocí (4.11), pak y je řešení rovnice (4.15), kde Q je dáno vzorcem (4.18) [nebo ekvivalentním vzorcem (4.19)]. Naopak, je-li y řešení rovnice (4.15) [a platí-li (4.18), (4.17) a (4.11)], pak x je řešení rovnice (4.10). Říkáme, že rovnice (4.10) přechází transformací (4.11) v rovnici (4.15).

Položme $\alpha_1 = 0$, $\alpha_{i+1} = e^{\alpha_i}$ pro $i = 1, 2, \ldots$ (tj. $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = e$, $\alpha_4 = e^e, \ldots$), $\ln_{[0]}t = t$ pro $t \in R$, $\ln_{[i+1]}t = \ln \ln_{[i]}t$ pro $t \geqq \alpha_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $L_0(t) = t$ pro $t \in R$, $L_{i+1}(t) = \ln_{[i+1]}t\, L_i(t)$ pro $t \geqq \alpha_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $S_i(t) = \sum_{j=0}^{i}[L_j(t)]^{-2}$ pro $t \geqq \alpha_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $\exp_{[0]}s = s$, $\exp_{[i+1]}s = \exp \exp_{[i]}s$ pro $s \in R$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Funkce $\ln_{[i]}t$ a $\exp_{[i]}s$ jsou navzájem inverzní.

Nechť funkce $q\colon R \to R$ je spojitá a nechť i je přirozené číslo. V (4.11) položíme $\varphi(s) = \ln_{[i]}s$, $\psi(t) = \exp_{[i]}t$. Pomocí vzorce (4.19) lze spočítat (viz [63]), že

$$Q(s) = [L_i(t)]^2\left[q(t) - \tfrac{1}{4}S_i(t)\right], \tag{4.22}$$

kde

$$t = \ln_{[i]}s\,, \quad s \in (\alpha_i, \infty)\,.$$

Jestliže pro nějaké $T \in R$ a přirozené i platí

$$q(t) \leqq \tfrac{1}{4}S_i(t) \quad \text{pro} \quad t \geqq T, \tag{4.23}$$

potom je $Q(s) \leqq 0$ pro $s \geqq S' = \exp_{[i]}T$ a rovnice (4.15) je neoscilatorická pro $s \to \infty$ podle Věty 7.4.1, a tedy také rovnice (4.10) je neoscilatorická pro $t \to \infty$.

Nechť naopak existuje přirozené i, $\varepsilon > 0$ a $T \in R$ tak, že platí

$$q(t) \geqq \tfrac{1}{4}S_i(t) + \varepsilon[L_i(t)]^{-2}, \quad t \geqq T. \tag{4.24}$$

Podle (4.22) je $Q(s) \geqq \varepsilon$ pro $s \geqq S = \exp_{[i]}T$ a rovnice (4.15) je oscilatorická pro $s \to \infty$ podle Věty 7.4.1. Proto také rovnice (4.10) je oscilatorická pro $t \to \infty$.

Otázka, za jakých podmínek je rovnice (1.3), resp. rovnice (4.10) oscilatorická pro $t \to \infty$, byla podrobně vyšetřována řadou autorů; byly odvozeny podmínky postačující i podmínky nutné a postačující (viz přehledný článek [64] nebo [21], [9]). Pojem řešení oscilatorické pro $t \to b$ i rovnice oscilatorická pro $t \to b$ lze zobecnit i pro případ lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů i pro případ některých typů nelineárních diferenciálních rovnic; těmto tématům je věnován velký počet prací v matematických časopisech.

7.5. Zabývejme se případem, kdy pro libovolné netriviální maximální řešení u rovnice (1.3) posloupnost (3.1) je buď jednobodová, nebo prázdná, tj. kdy interval $\mathscr{I}$ neobsahuje žádnou dvojici konjugovaných bodů.

7.5.1. Definice: *Rovnice* (1.3) *se nazývá diskonjugovaná v intervalu* $\mathscr{J} \subset \mathscr{I}$, jestliže každé řešení rovnice (1.3) má nejvýše jeden nulový bod v $\mathscr{J}$.

7.5.2. Věta: *Nechť $\mathscr{J}$ je interval, $\mathscr{J} \subset \mathscr{I}$, a nechť je splněna podmínka* (1.5). *Potom tato tvrzení jsou ekvivalentní:*

Rovnice (1.3) *je diskonjugovaná v* $\mathscr{J}$. (5.1)

Pro libovolná $t_1, t_2 \in \mathscr{J}$, $t_1 < t_2$, a $d_1, d_2 \in R$ existuje maximální řešení w rovnice (1.3) *takové, že je $w(t_1) = d_1$, $w(t_2) = d_2$.* (5.2)

Pro libovolná lineárně nezávislá maximální řešení u, v rovnice (1.3) *a pro libovolná $t_1, t_2 \in \mathscr{J}$, $t_1 < t_2$, je*

$$\det \begin{pmatrix} u(t_1), & v(t_1) \\ u(t_2), & v(t_2) \end{pmatrix} \neq 0. \tag{5.3}$$

Důkaz: Nechť u, v jsou lineárně nezávislá maximální řešení rovnice (1.3), $t_1, t_2 \in \mathscr{J}$, $t_1 < t_2$, $d_1, d_2 \in R$. Protože (u, v) je fundamentální soustava rovnice (1.3) [viz (4.8.4)], napíšeme řešení w, které má splňovat podmínky $w(t_1) = d_1$, $w(t_2) = d_2$, ve tvaru $w = c_1 u + c_2 v$, kde c_1, c_2 jsou vhodná čísla. Pro čísla c_1, c_2 dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} c_1\, u(t_1) + c_2\, v(t_1) &= d_1, \\ c_1\, u(t_2) + c_2\, v(t_2) &= d_2. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Soustava (5.4) má řešení pro každou dvojici čísel d_1, d_2 právě tehdy, je-li

$$\det\begin{pmatrix} u(t_1), & v(t_1) \\ u(t_2), & v(t_2) \end{pmatrix} \neq 0$$

a tak tvrzení (5.2) a (5.3) jsou ekvivalentní.

Platí-li (5.3), pak žádné řešení z rovnice (1.3) nemůže mít dva nulové body $\tau_1 \neq \tau_2$ v $\mathscr{J}$ [v opačném případě by totiž bylo

$$\det\begin{pmatrix} z(\tau_1), & y(\tau_1) \\ z(\tau_2), & y(\tau_2) \end{pmatrix} = 0$$

pro libovolné maximální řešení y rovnice (1.3)]; tedy platí i (5.1). Naopak, neplatí-li (5.3), pak existují lineárně nezávislá maximální řešení u, v rovnice (1.3) a čísla $t_1, t_2 \in \mathscr{J}$ tak, že je

$$\det\begin{pmatrix} u(t_1), & v(t_1) \\ u(t_2), & v(t_2) \end{pmatrix} = 0\,,$$

tedy pro vhodná $c_1, c_2 \in R$, $|c_1| + |c_2| \neq 0$, řešení $w = c_1u + c_2v$ splňuje podmínku $w(t_1) = 0 = w(t_2)$; tedy neplatí ani (5.1). Tvrzení (5.1) a (5.3) jsou ekvivalentní a Věta 7.5.2 je dokázána.

7.5.3. Věta: *Nechť rovnice* (1.3) *je diskonjugovaná na otevřeném intervalu* $(\alpha, \beta) \subset \mathscr{J}$, *kde* $\alpha \in \mathscr{J}$ *nebo* $\beta \in \mathscr{J}$. *Pak existuje maximální řešení* w *rovnice* (1.3) *takové, že je*

$$w(t) \neq 0 \quad pro \quad t \in (\alpha, \beta)\,. \tag{5.5}$$

Důkaz: Nechť je např. $\alpha \in \mathscr{J}$. Nechť w je maximální řešení rovnice (1.3) splňující podmínky $w(\alpha) = 0$, $\dot{w}(\alpha) = 1$. Dokážeme, že platí (5.5). V opačném případě existuje $\gamma \in (\alpha, \beta)$ takové, že je $w(\gamma) = 0$. Zřejmě je $w(t) \neq 0$ pro $\alpha < t < \gamma$ i pro $\gamma < t < \beta$, neboť rovnice (1.3) je diskonjugovaná na intervalu (α, β). Zvolme $\delta \in (\gamma, \beta)$ a nechť řešení u rovnice (1.3) splňuje podmínku $u(\delta) = 0$, $\dot{u}(\delta) = -1$. Řešení w a u jsou lineárně nezávislá a podle Poznámky 7.3.2 má řešení u právě jeden nulový bod ϑ mezi nulovými body α, γ řešení w. Tedy řešení u má dva nulové body v intervalu (α, β) a to odporuje předpokladu, že rovnice (1.3) je diskonjugovaná v intervalu (α, β). Proto platí (5.5) a Věta 7.5.3 je dokázána.

7.5.4. Věta: *Nechť funkce* $p, q_1, q_2 : \mathscr{J} \to R$ *jsou spojité a nechť je* $p(t) > 0$ *pro* $t \in \mathscr{J}$, $q_2(t) \geqq q_1(t)$ *pro* $t \in (\alpha, \beta)$, *kde* $(\alpha, \beta) \subset \mathscr{J}$ *a* $\alpha \in \mathscr{J}$ *nebo* $\beta \in \mathscr{J}$. *Nechť rovnice* (2.7) *je diskonjugovaná na intervalu* (α, β). *Potom rovnice* (2.5) *je diskonjugovaná na intervalu* (α, β).

Důkaz: Podle Věty 7.5.3 existuje řešení w rovnice (2.7) tak, že $w(t) \neq 0$ pro $t \in (\alpha, \beta)$. Užitím Věty 7.2.1 v intervalu (α, β) místo v intervalu $\mathscr{J}$ plyne, že žádné netriviální řešení u rovnice (2.5) nemůže mít dva nulové body v (α, β). Věta je dokázána.

7.5.5. Poznámka: Nechť je $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$. Snadno se zjistí, že rovnice

$$\ddot{x} + \left(\frac{\pi}{\beta - \alpha}\right)^2 x = 0 \tag{5.6}$$

je diskonjugovaná na intervalu (α, β).

Je-li $q: R \to R$ spojitá funkce, pak z Věty 7.5.4 plyne, že rovnice

$$\ddot{x} + q(t)\, x = 0 \tag{5.7}$$

je diskonjugovaná na intervalu (α, β), jestliže $q(t) \leqq [\pi/(\beta - \alpha)]^2$ pro $t \in (\alpha, \beta)$.

7.5.6. Poznámka: Věta 7.5.3 platí i v případě $(\alpha, \beta) = \mathscr{I}$ (tj. nepředpokládáme-li, že je buď $\alpha \in \mathscr{I}$, nebo $\beta \in \mathscr{I}$). Naznačíme důkaz tohoto tvrzení: Zvolme číslo $\gamma \in \mathscr{I}$ a posloupnost čísel $\delta_j \in (\alpha, \gamma)$ tak, aby platilo $\delta_j \to \alpha$ pro $j \to \infty$. Podle (5.2) existují maximální řešení w_j rovnice (1.3) taková, že je $w_j(\delta_j) = 0$, $w_j(t) > 0$ pro $t \in (\delta_j, \beta)$. Bez ztráty na obecnosti můžeme předpokládat, že je $w_j(\gamma) = 1$ pro $j = 1, 2, \ldots$. Lze dokázat, že posloupnost $\dot{w}_j(\gamma)$ je omezená, tedy lze vybrat konvergentní posloupnost $\dot{w}_{j_k}(\gamma)$.

Odtud plyne, že posloupnost funkcí w_{j_k} konverguje stejnoměrně na každém kompaktním intervalu $\mathscr{K} \subset \mathscr{I}$. Lze dokázat, že funkce $w: \mathscr{I} \to R$, pro niž platí $w(t) = \lim\limits_{k \to \infty} w_{j_k}(t)$, $t \in \mathscr{I}$, je hledané řešení.

Protože Věta 7.5.3 platí i v případě $(\alpha, \beta) = \mathscr{I}$, platí i Věta 7.5.4 v případě $(\alpha, \beta) = \mathscr{I}$.

7.5.7. Poznámka: Poznámka 7.5.5 obsahuje jednoduchou podmínku postačující k tomu, aby rovnice (5.7) byla diskonjugovaná na intervalu (α, β). Tak např. A. Ljapunov dokázal, že rovnice (5.7) je diskonjugovaná na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, jestliže

$$\int_\alpha^\beta \max\{0, q(t)\}\, \mathrm{d}t \leqq 2/(\beta - \alpha)\,; \tag{5.8}$$

toto tvrzení by bylo nesprávné, kdybychom konstantu na pravé straně v (5.8) zvětšili (viz např. [21], kde Ljapunovův výsledek je odvozen jako speciální případ obecnější věty). Byla nalezena řada postačujících podmínek i nutných a postačujících podmínek pro diskonjugovanost rovnice (5.7) a pojem diskonjugovanosti byl přenesen na lineární diferenciální rovnice vyšších řádů a na jisté soustavy lineárních diferenciálních rovnic (viz [21], [9]).

7.6. Vyšetřujme rovnici (1.3). Zvolme $t_0 \in \mathscr{I}$, položme

$$\psi_1(t) = \int_{t_0}^t \frac{\mathrm{d}\vartheta}{p(\vartheta)}\,.$$

Nechť φ_1 je funkce inverzní k ψ_1. Proveďme transformaci $t = \varphi_1(\sigma)$, $x(t) = w(\sigma)$. Snadno se přesvědčíme, že rovnice (1.3) přejde v rovnici $\mathrm{d}^2w/\mathrm{d}\sigma^2 + \Theta(\sigma)\, w = 0$, kde $\Theta(\sigma) = p(\varphi_1(\sigma))\, q(\varphi_1(\sigma))$ a to je rovnice tvaru (4.10). Také rovnice $\ddot{x} + a_1(t)\,\dot{x} + a_2(t)\, x = 0$, kde funkce a_2 je spojitá a funkce a_1 má spojitou derivaci prvního řádu, přechází transformací $x(t) = \exp\left(-A_1(t)/2\right) y(t)$ v rovnici

$$\ddot{y} + \left[a_2(t) - \tfrac{1}{2}\dot{a}_1(t) - \tfrac{1}{4}a_1^2(t)\right] y = 0\,;$$

přitom A_1 je funkce primitivní k a_1. V tomto odstavci se budeme zabývat otázkou, jak lze rovnici (4.10) zjednodušit pomocí transformace (4.11).

Nechť u, v jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (4.10), $u, v\colon \mathcal{I} \to R$. Je

$$\det \begin{pmatrix} u(t), & v(t) \\ \dot{u}(t), & \dot{v}(t) \end{pmatrix} = c \neq 0\,, \quad c \in R\,, \tag{6.1}$$

tedy funkce $u(t)/v(t)$ je ryze monotónní ve všech intervalech, kde je $v(t) \neq 0$. Odtud lze ukázat, že existuje spojitá funkce $\psi\colon \mathcal{I} \to R$ taková, že je

$$\operatorname{tg} \psi(t) = u(t)/v(t) \quad \text{pro} \quad t \in \mathcal{I}\,, \quad v(t) \neq 0\,. \tag{6.2}$$

Ze (6.1), (6.2) a z rovnice $\operatorname{cotg} \psi(t) = v(t)/u(t)$ plyne, že je

$$\dot{\psi}(t) = \frac{-c}{u^2(t) + v^2(t)} \quad \text{pro} \quad t \in \mathcal{I}\,. \tag{6.3}$$

Pravá strana rovnice (6.3) má spojitou derivaci druhého řádu, tedy funkce ψ má spojitou derivaci třetího řádu. Zřejmě je $\dot{\psi}(t) \neq 0$ pro $t \in \mathcal{I}$, funkce ψ je ryze monotónní a zobrazuje interval $\mathcal{I}$ na interval $\mathcal{J}$. Označme φ funkci inverzní k ψ. Je $\varphi'(s) \neq 0$ pro $s \in \mathcal{J}$ a funkce φ má spojitou derivaci třetího řádu. V rovnici (4.10) proveďme transformaci (4.11), kde $\xi(s) = \left[u^2(\varphi(s)) + v^2(\varphi(s))\right]^{1/2}$. Zřejmě je $\xi(s) \neq 0$ pro $s \in \mathcal{J}$ [viz (2.2)] a funkce ξ má spojité derivace druhého řádu. Všimněme si geometrického významu transformace (4.11). Podle odst. 4.9 rovnice (4.10) je jednoznačně určena svými lineárně nezávislými řešeními u, v. Dvojice funkcí u, v je jednoznačně popsána množinou $\mathcal{T} = \{(u(t), v(t), t) \mid t \in \mathcal{I}\}$. Množinu $\mathcal{T}$ můžeme interpretovat jako křivku v R^3 nebo jako tzv. parametrizovanou křivku v R^2 [tj. k bodu $(u(t), v(t)) \in R^2$ je připsána hodnota parametru t pro každé $t \in \mathcal{I}$]. $s = \psi(t)$ je úhel v rovině x, y, který svírá s kladným směrem osy x polopřímka vycházející z počátku a procházející bodem $(u(t), v(t))$. Nahradíme-li v parametrizované křivce $\mathcal{T}$ parametr t parametrem s, dostaneme parametrizovanou křivku $\{(u(\varphi(s)), v(\varphi(s)), s) \mid s \in \mathcal{J}\}$. Transformace $(u(\varphi(s)), v(\varphi(s))) \to (u(\varphi(s))/\xi(s), v(\varphi(s))/\xi(s))$ promítá bod $(u(\varphi(s)), v(\varphi(s)))$ na jednotkovou kružnici a vzhledem k významu parametru s je $u(\varphi(s))/\xi(s), v(\varphi(s))/\xi(s)) = (\cos s, \sin s)$. Transformace (4.11) tedy převádí parametrizovanou křivku $\mathcal{T}$ v parametrizovanou křivku $\mathcal{S} = \{(\cos s, \sin s, s) \mid s \in \mathcal{J}\}$. Jediná diferenciální rovnice druhého řádu (s koeficientem 1 u nejvyšší derivace), jejímiž řešeními jsou funkce $\cos s$, $\sin s$, je rovnice $y'' + y = 0$. Můžeme tedy očekávat, že transformace (4.11) převádí rovnici (4.10) v rovnici $y'' + y = 0$, $s \in \mathcal{J}$. Tyto úvahy ověříme výpočtem.

Rovnice (4.10) přechází v rovnici (4.14) a rovnice (4.14) má řešení

$$\tilde{u}(s) = u(\varphi(s))\,[u^2(\varphi(s)) + v^2(\varphi(s))]^{-1/2}\,,$$
$$\tilde{v}(s) = v(\varphi(s))\,[u^2(\varphi(s)) + v^2(\varphi(s))]^{-1/2}\,. \tag{6.4}$$

Přitom je tg $\psi(t) = u(t)/v(t)$, $t = \varphi(s)$, tedy

$$\operatorname{tg} s = \operatorname{tg} \psi(t) = u(\varphi(s))/v(\varphi(s)) = \tilde{u}(s)/\tilde{v}(s)\,. \tag{6.5}$$

Ze (6.4) plyne $\tilde{u}^2(s) + \tilde{v}^2(s) = 1$; odtud a ze (6.5) plyne

$$\tilde{u}(s) = \cos s\,, \quad \tilde{v}(s) = \sin s \quad \text{pro} \quad s \in \mathscr{J}\,. \tag{6.6}$$

Má-li rovnice (4.14) řešení (6.6), musí nutně platit (viz odst. 4.9)

$$2\varphi'\xi' - \varphi''\xi = 0\,, \tag{6.7}$$

$$(\varphi'\xi)^{-1}\,[\varphi'\xi'' - \varphi''\xi' + \varphi'^3\xi\, q(\varphi(s))] = 1\,. \tag{6.8}$$

Rovnice (6.7) je však totožná s rovnicí (4.16), a proto levou stranu v (6.8) lze psát [viz (4.18), kde $Q(s) = 1$] jako

$$\{\varphi, s\} + (\varphi')^2\, q(\varphi(s)) = 1\,, \tag{6.9}$$

kde

$$\{\varphi, s\} = \frac{1}{2}\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3}{4}\frac{\varphi''^2}{\varphi'^2}$$

je tzv. *schwarzovská derivace funkce* φ.

Rovnice (4.10) přechází transformací

$$x(t) = c\,[\sqrt{|\varphi'(s)|}]\; y(s)\,, \quad t = \varphi(s)\,, \tag{6.10}$$

kde φ je inverzní funkce k ψ a spojitá funkce ψ je definována v (6.2), v rovnici

$$y'' + y = 0 \quad \text{pro} \quad s \in \mathscr{J}\,. \tag{6.11}$$

(6.9) je nelineární diferenciální rovnice třetího řádu, kterou splňuje funkce φ. Inverzní funkce ψ splňuje rovnici [viz (4.19), kde $Q(s) = 1$]

$$\{\psi, t\} + \dot{\psi}^2 = q(t)\,. \tag{6.12}$$

Ze vzorců (6.6) a (6.10) se pro řešení u a v odvodí vzorce

$$u(t) = c\,\frac{1}{\sqrt{|\dot{\psi}(t)|}}\cos\psi(t)\,,$$

$$v(t) = c\,\frac{1}{\sqrt{|\dot{\psi}(t)|}}\sin\psi(t) \tag{6.13}$$

[viz (4.12)].

Je $\dot{\psi}(t) \neq 0$ pro $t \in \mathscr{I}$ a tak ze (6.13) plyne, že rovnice (4.10) je oscilatorická pro $t \to b$ právě tehdy, je-li $\psi(t) \operatorname{sgn} \dot{\psi}(t) \to \infty$ pro $t \to b$, a že rovnice (4.10) je oscilatorická pro $t \to a$ právě tehdy, je-li $\psi(t) \operatorname{sgn} \dot{\psi}(t) \to -\infty$ pro $t \to a$. Tedy rovnice (4.10) je oscilatorická pro $t \to b$ i pro $t \to a$ právě tehdy, je-li $\psi(\mathscr{I}) = \mathscr{J} = R$.

Nechť rovnice (4.10) je oscilatorická pro $t \to b$ i pro $t \to a$ a nechť je dána ještě rovnice

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + q_2(\tau)\, z = 0\,, \tag{6.14}$$

kde funkce $q_2(\tau)$: $\mathscr{I}_2 \to R$ je spojitá. Nechť rovnice (6.14) je také oscilatorická pro $t \to b_2$ i pro $t \to a_2$. Podle toho, co jsme dokázali, existuje funkce ψ_2: $\mathscr{I}_2 \to R$ tak, že platí:

(i) ψ_2 má spojitou derivaci třetího řádu, zobrazuje interval $\mathscr{I}_2$ na R,

$$\frac{d\psi_2}{d\tau}(\tau) \neq 0 \quad \text{pro} \quad \tau \in \mathscr{I}_2\,.$$

(ii) Inverzní funkce φ_2 zobrazuje R na $\mathscr{I}_2$, má spojitou derivaci třetího řádu, $\varphi_2'(s) \neq 0$ pro $s \in R$.

(iii) Rovnice (6.14) přechází transformací

$$z(\tau) = c_2\, [\sqrt{|\varphi_2'(s)|}]\, y(s) \quad \text{pro} \quad \tau = \varphi_2(s)\,, \tag{6.15}$$

v rovnici (6.11) (kde $\mathscr{J} = R$).

Inverzní transformace k (6.15), kterou zapíšeme

$$y(s) = c_2^{-1}\, [\sqrt{|\dot{\psi}_2(\tau)|}]\, z(\tau) \quad \text{pro} \quad s = \psi_2(\tau) \tag{6.16}$$

(kde $\dot{\psi}_2$ znamená derivaci funkce ψ_2), převádí rovnici (6.11) v rovnici (6.14). Složená transformace, která vznikne užitím transformací (6.10) a (6.16), převádí rovnici (4.10) v rovnici (6.14). Tuto transformaci zapíšeme

$$x(t) = c_2^{-1}\, c\, [\sqrt{|\varphi'(\psi_2(\tau))|}]\, [\sqrt{|\dot{\psi}_2(\tau)|}]\, z(\tau) \quad \text{pro} \quad t = \varphi(\psi_2(\tau))\,. \tag{6.17}$$

Podle pravidla o derivování složené funkce je

$$\left|\frac{d}{d\tau}\, \varphi(\psi_2(\tau))\right|^{1/2} = [\sqrt{|\varphi'(\psi_2(\tau))|}]\, \sqrt{|\dot{\psi}_2(\tau)|}\,.$$

Funkce $\tilde{\varphi}(\tau) = \varphi(\psi_2(\tau))$ zobrazuje interval $\mathscr{I}_2$ na interval $\mathscr{I}$, má spojitou derivaci třetího řádu a první derivace funkce $\tilde{\varphi}$ je různá od nuly v každém bodě $\tau \in \mathscr{I}_2$.

Podle (4.18) funkce $\tilde{\varphi}$ splňuje nelineární diferenciální rovnici třetího řádu

$$\{\tilde{\varphi}, \tau\} + \left(\frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau}\right)^2 q(\tilde{\varphi}(\tau)) = q_2(\tau)\,. \tag{6.18}$$

Inverzní funkce $\tilde{\psi}$ k funkci $\tilde{\varphi}$ je definována rovnicí $\tilde{\psi}(t) = \varphi_2(\psi(t))$, má obdobné vlastnosti a splňuje nelineární diferenciální rovnici třetího řádu

$$\{\tilde{\psi}, t\} + \left(\frac{d\tilde{\psi}}{dt}\right)^2 q_2(\tilde{\psi}(t)) = q(t) \tag{6.19}$$

[viz (4.19)].

Základy moderní teorie transformací lineárních diferenciálních rovnic byly položeny v [4]; tím byla zahájena intenzívní práce v této teorii. Bibliografie i ucelená teorie transformací lineárních diferenciálních rovnic je obsažena v [5]. V této teorii se např. dokazuje: Každé maximální řešení $\tilde{\varphi}$ rovnice (6.18) je definováno na $\mathscr{I}_2$, zobrazuje $\mathscr{I}_2$ na $\mathscr{I}$ a lze ho užít ve vzorci (4.11) k transformaci rovnice (4.10) v rovnici (6.14) – splňují-li ovšem obě rovnice učiněné předpoklady o oscilatoričnosti.

Z prací, které jsou věnovány transformaci lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů, uveďme práce [23], [24], [70] a práci [56] založenou na geometrickém přístupu.