12. Globální vlastnosti řešení diferenciálních rovnic

In: Jaroslav Kurzweil (author): Obyčejné diferenciální rovnice. (Czech). Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1978. pp. 218--230.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402090

12. Globální vlastnosti řešení diferenciálních rovnic

12.1. V této kapitole budeme stále předpokládat, že G je otevřená podmnožina v $R \times K^n$, že funkce $f\colon G \to K^n$ je spojitá a že rovnice (10.1.1) je jednoznačná, a budeme se zabývat vlastnostmi maximálních řešení. Nejdříve dokážeme, že maximální řešení existují.

12.1.1. Věta (o existenci a jednoznačnosti maximálního řešení): *Nechť je* $(t_0, \tilde{x}) \in G$. *Potom existuje interval* $\mathscr{J}$ *a funkce* $u\colon \mathscr{J} \to K^n$ *tak, že platí*

$$t_0 \in \mathscr{J}\,, \quad u(t_0) = \tilde{x}\,. \tag{1.1}$$

u je maximální řešení rovnice (10.1.1). (1.2)

Interval $\mathscr{J}$ *i funkce* u *jsou podmínkami* (1.1), (1.2) *určeny jednoznačně.*

Důkaz: Dokažme nejdříve jednoznačnost řešení u. Nechť $u^{[i]}\colon \mathscr{J}_i \to K^n$ $i = 1, 2$, jsou funkce splňující podmínky (1.1), (1.2). Položme $\mathscr{J}_3 = \mathscr{J}_1 \cup \mathscr{J}_2$. Z jednoznačnosti rovnice (10.1.1) plyne, že je $u^{[1]}(t) = u^{[2]}(t)$ pro $t \in \mathscr{J}_1 \cap \mathscr{J}_2$. Proto můžeme definovat funkci $u^{[3]}\colon \mathscr{J}_3 \to K^n$ rovnicemi $u^{[3]}(t) = u^{[1]}(t)$ pro $t \in \mathscr{J}_1$, $u^{[3]}(t) = u^{[2]}(t)$ pro $t \in \mathscr{J}_2$. Snadno se ukáže, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, u^{[3]}(t) = f(t, u^{[3]}(t))\,, \quad t \in \mathscr{J}_3\,, \tag{1.3}$$

tedy $u^{[3]}$ je řešení rovnice (10.1.1). Protože řešení $u^{[1]}$, $u^{[2]}$ jsou maximální, musí být

$$\mathscr{J}_1 = \mathscr{J} = \mathscr{J}_2\,, \quad u^{[1]}(t) = u^{[2]}(t) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{J}\,.$$

Dokážeme, že řešení u existuje. Nechť $\mathscr{V}$ je množina takových řešení $v\colon \mathscr{J}_v \to K^n$ ($\mathscr{J}_v$ je definiční interval řešení v), že platí $t_0 \in \mathscr{J}_v$, $v(t_0) = \tilde{x}$. Množina $\mathscr{V}$ není prázdná, neboť obsahuje řešení $w(t_0, \tilde{x})$, jehož existence byla dokázána ve Větě 10.1.1. Položme $\mathscr{J} = \bigcup_{v \in \mathscr{V}} \mathscr{J}_v$. Je-li $t \in \mathscr{J}_{v^{[1]}} \cap \mathscr{J}_{v^{[2]}}$, kde $v^{[i]} \in \mathscr{V}$ pro $i = 1, 2$, pak je $v^{[1]}(t) = v^{[2]}(t)$, protože rovnice (10.1.1) je jednoznačná. Proto můžeme definovat funkci $u\colon \mathscr{J} \to K^n$ rovnicí $u(t) = v(t)$, kde $v \in \mathscr{V}$ je takové, že $t \in \mathscr{J}_v$. Snadno se zjistí, že u je řešení rovnice (10.1.1) a zřejmě platí (1.1). Z definice intervalu $\mathscr{J}$ plyne, že u je maximální řešení. Věta 12.1.1 je dokázána.

12.1.2. Věta: *Nechť $u\colon \mathcal{J} \to K^n$ je maximální řešení rovnice* (10.1.1). *Potom $\mathcal{J}$ je otevřený interval.*

Důkaz: Nechť $t_0 \in \mathcal{J}$. Položme $\tilde{x} = u(t_0)$. Protože rovnice (10.1.1) je jednoznačná a protože u je maximální řešení, je rozšířením řešení

$$w_{(t_0,\tilde{x})}\colon \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle \to K^n$$

(viz Větu 10.1.1). Je $\langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle \subset \mathcal{J}$, $\delta_1 > 0$, tedy $\mathcal{J}$ je otevřený interval a Věta 12.1.2 je dokázána.

12.1.3. Definice: Interval $\mathcal{J}$ z Věty 12.1.1 budeme označovat $\mathcal{J}_{(t_0,\tilde{x})}$; vzhledem k Větě 12.1.2 budeme psát

$$\mathcal{J}_{(t_0,\tilde{x})} = (\alpha(t_0, \tilde{x}), \beta(t_0, \tilde{x}))\,,$$

kde $-\infty \leqq \alpha(t_0, \tilde{x}) < \beta(t_0, \tilde{x}) \leqq \infty$. Funkci u z Věty 12.1.1 budeme označovat $\varphi_{(t_0,\tilde{x})}$.

12.1.4. Věta (o vztahu maximálního řešení a kompaktní množiny): *Nechť množina $P \subset G \subset R \times K^n$ je kompaktní a nechť $u\colon (\alpha, \beta) \to K^n$ je maximální řešení rovnice* (10.1.1). *Potom existují čísla $\alpha_1, \beta_1, \alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$, tak, že platí $(t, u(t)) \notin P$ pro $t \in (\alpha, \alpha_1) \cup (\beta_1, \beta)$.*

Důkaz: Kdyby Věta 12.1.4 neplatila, existovala by posloupnost $t_k \in (\alpha, \beta)$ tak, že by platilo $(t_k, u(t_k)) \in P$ pro $k = 1, 2, 3, \ldots$, $\lim_{k\to\infty} t_k = \alpha$ nebo $\lim_{k\to\infty} t_k = \beta$. Nechť platí pro určitost $\lim_{k\to\infty} t_k = \beta$. Protože množina P je kompaktní, je $\beta < \infty$ a lze vybrat posloupnost t_{k_i} tak, že posloupnost $(t_{k_i}, u(t_{k_i}))$ je konvergentní; tedy $\lim_{i\to\infty} u(t_{k_i}) = z$, $(\beta, z) \in P \subset G$. Nechť $\delta_1, \delta_2 > 0$ jsou taková čísla, že tvrzení Věty 10.1.1 platí pro $(t_0, \tilde{x}) = (\beta, z)$ a že $\alpha < \beta - \delta_1$. Existuje tedy takové přirozené číslo j, že $\beta - \delta_1 < t_j < \beta$, $\|u(t_j) - z\| < \delta_2$. Protože rovnice (10.1.1) je jednoznačná, je

$$w_{(t_j,u(t_j))}(t) = u(t) \quad \text{pro} \quad t \in (\beta - \delta_1, \beta)\,.$$

Můžeme tedy definovat funkci $v\colon (\alpha, \beta + \delta_1) \to K^n$ rovnicemi

$$v(t) = u(t) \quad \text{pro} \quad t \in (\alpha, \beta)\,,$$

$$v(t) = w_{(t_j,u(t_j))}(t) \quad \text{pro} \quad t \in (\beta - \delta_1, \beta + \delta_1)\,.$$

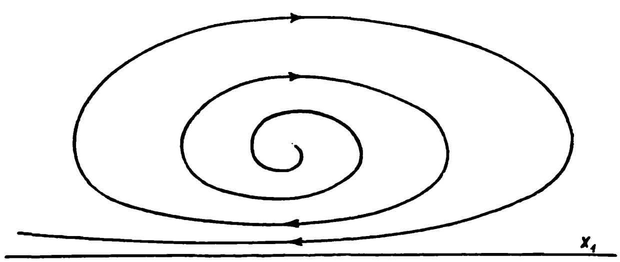
Funkce v je řešením rovnice (10.1.1) a je dokonce vlastním rozšířením řešení u. To však není možné, neboť u je maximální řešení, a proto Věta 12.1.4 platí.

12.1.5. Poznámka: Nechť je $G = R \times K^n$, $u\colon (\alpha, \beta) \to K^n$ maximální řešení rovnice (10.1.1), $\beta < \infty$. Položme $\gamma = \liminf_{t\to\beta-} \|u(t)\|$. Je-li $\gamma < \infty$, položme

$$P = \{(t, x) \in R \times K^n \mid \beta - 1 \leqq t \leqq \beta,\ \|x\| \leqq \gamma + 1\}\,.$$

Podle Věty 12.1.4 existuje takové číslo $\beta_1 < \beta$, že je $(t, u(t)) \notin P$ pro $t \in (\beta_1, \beta)$, tedy $\|u(t)\| > \gamma + 1$ pro $\max\{\beta_1, \beta - 1\} < t < \beta$ a to není možné vzhledem k definici čísla γ. Je tedy $\gamma = \infty$ a to znamená, že platí $\lim_{t \to \beta-} \|u(t)\| = \infty$.

12.1.6. Poznámka: Nechť množina $H \subset K^n$ je omezená a otevřená, $G = R \times H$, $u: (\alpha, \beta) \to K^n$ nechť je maximální řešení rovnice (10.1.1), $\beta < \infty$. Pro $x \in H$ nechť $\varrho(x)$ je vzdálenost bodu x od hranice množiny H. Protože pro každé $\delta > 0$ je $\{x \in H \mid \varrho(x) \geqq \delta\}$ kompaktní množina, lze dokázat obdobným způsobem jako v Poznámce 12.1.5, že platí $\lim_{t \to \beta-} \varrho(u(t)) = 0$, tj. bod $u(t)$ se pro $t \to \beta-$ blíží k hranici množiny H. Přitom předpoklad, že množina H je omezená, je podstatný. Je-li např. $H \subset R^2$ polorovina, může se bod $u(t)$ pro $t \to \beta$ pohybovat po spirále ve směru šipek, jak naznačeno na obr. 26, a neplatí ani $\lim_{t \to \beta-} \varrho(u(t)) = 0$, ani $\lim_{t \to \beta-} \|u(t)\| = \infty$; platí však $\lim_{t \to \beta-} [\|u(t)\| + 1/\varrho(u(t))] = \infty$ a není těžké dokázat, že tento vztah plat vždy, jakmile $\emptyset \neq H \neq K^n$, kde $H \subset K^n$ je otevřená množina.



Obr. 26

12.1.7. Definice: Řešení $u: \mathscr{J} \to K^n$ rovnice (10.1.1) se nazývá *úplné řešení*, je-li $\mathscr{J} = R$. *Rovnice* (10.1.1) se nazývá *úplná*, je-li každé její maximální řešení úplné.

Věty 11.3.1 a 12.1.4 umožňují najít postačující podmínku pro to, aby rovnice 10.1.1 byla úplná, a umožňují také odhadnout růst řešení.

12.1.8. Věta: *Nechť funkce* $\chi: R^2 \to R$ *je spojitá*, $G = R \times K^n$,

$$\chi(t, \|x\|) > \|f(t, x)\|, \chi(t, -\|x\|) > \|f(t, x)\| \quad pro \quad (t, x) \in G\,.$$

Nechť rovnice

$$\dot{\xi} = \chi(t, \xi) \tag{1.4}$$

je jednoznačná a úplná. Potom rovnice (10.1.1) *je úplná.*

Důkaz: Nechť $u: (\alpha, \beta) \to K^n$ je maximální řešení rovnice (10.1.1), $s \in (\alpha, \beta)$. Podle Věty 12.1.1 existuje maximální řešení ξ rovnice (1.4) takové, že je $\xi(s) = \|u(s)\| + 1$. Protože rovnice (1.4) je úplná, je řešení ξ definováno na R. Podle Věty 11.3.1 je $\|u(t)\| < \xi(t)$ pro $s \leqq t < \beta$.

Předpokládejme, že je $\beta < \infty$, a položme

$$P = \{(t, x) \in R \times K^n \mid s \leqq t \leqq \beta, \|x\| \leqq \max_{s \leqq t \leqq \beta} \xi(t)\}.$$

P je kompaktní množina a platí $(t, u(t)) \in P$ pro $s \leqq t < \beta$. To však odporuje Větě 12.1.4, a proto musí být $\beta = \infty$. Obdobně užitím Poznámky 11.3.2 lze dokázat, že je $\alpha = -\infty$. Tedy rovnice (10.1.1) je úplná a Věta 12.1.8 dokázána.

12.1.9. Poznámka: Nechť funkce $g: R \to R$, $\varphi: R \to R$ jsou spojité a nechť platí

$$g(\xi) = g(-\xi) > 0 \quad \text{pro} \quad \xi \in R, \quad \int_0^\infty \frac{d\xi}{g(\xi)} = \infty.$$

Podle odst. 2.8 je rovnice $\dot{\xi} = \varphi(t)\, g(\xi)$ úplná.

Je-li $G = R \times K^n$, $\|f(t, x)\| < \varphi(t)\, g(\|x\|)$, pak podle Věty 12.1.8 je rovnice (10.1.1) úplná. [Můžeme např. položit $\varphi(t) = 1$, $g(\xi) = (|\xi| + 1) \ln(|\xi| + 1) + 1$ pro $t, \xi \in R$, nemůžeme však položit $g(\xi) = (|\xi| + 1) [\ln(|\xi| + 1)]^{1+\varepsilon} + 1$ pro žádné $\varepsilon > 0$.]

12.1.10. Poznámka: Nechť funkce $\eta: \langle 0, \infty) \to R$ je spojitá. Nechť $u: \mathscr{J} \to R^2$, $u = \operatorname{col}(u_1, u_2)$ je řešení rovnice

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \eta(x_1^2 + x_2^2)\, x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\eta(x_1^2 + x_2^2)\, x_1. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Položme $\lambda(t) = u_1^2(t) + u_2^2(t)$ pro $t \in \mathscr{J}$. Je $\dot{\lambda}(t) = 2u_1(t)\, \dot{u}_1(t) + 2u_2(t)\, \dot{u}_2(t) = 0$ vzhledem k (1.5), tedy funkce $\lambda(t)$ je konstantní. Odtud se již snadno zjistí, že všechna maximální řešení rovnice (1.5) lze zapsat ve tvaru

$$v = \operatorname{col}(v_1, v_2), \quad v_1(t) = \varrho \sin[\eta(\varrho^2)\, t + \varphi],$$
$$v_2(t) = \varrho \cos[\eta(\varrho^2)\, t + \varphi],$$

$v: R \to R^2$, kde $\varrho \geqq 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Je tedy rovnice (1.5) úplná nezávisle na volbě funkce η. Roste-li funkce $|\eta(\sigma)|$ do nekonečna dosti rychle pro $\sigma \to \infty$ [např. je-li $\eta(\sigma) \geqq 1$ pro $\sigma \geqq 1$,

$$\int_1^\infty [\eta(\sigma)]^{-1}\, d\sigma < \infty],$$

pak úplnost rovnice (1.5) nelze dokázat pomocí Věty 12.1.8. Úplnost rovnice (1.5) však přímo plyne z Věty 12.1.11.

12.1.11. Věta: *Nechť funkce $\chi: R^2 \to R$ je spojitá, $\chi(t, \xi) = \chi(t, -\xi)$ pro $(t, \xi) \in R$, $G = R \times K^n$, a nechť platí*

$$\chi(t, \xi) > \sup\{|2 \operatorname{Re}(x, f(t, x))| \mid (x, x) = \xi\} \quad \textit{pro} \quad t \in R, \quad \xi \geqq 0. \tag{1.6}$$

Nechť rovnice (1.4) je jednoznačná a úplná. Potom rovnice (10.1.1) je úplná.

Důkaz: Nechť $u: (\alpha, \beta) \to K^n$ je maximální řešení rovnice (10.1.1), $s \in (\alpha, \beta)$. Vyšetřme nejdříve chování řešení u na intervalu $\langle s, \beta)$. Položme $\eta(t) = (u(t), u(t))$ pro $t \in \langle s, \beta)$ a nechť maximální řešení ξ rovnice (1.4) splňuje počáteční podmínku $\xi(s) = \eta(s) + 1$. Protože rovnice (1.4) je úplná, je $\xi: R \to R$. Položme $\mu(t) = 2 \operatorname{Re}(u(t), f(t, u(t)))$. Vzhledem k rovnici (10.1.1) je $\dot{\eta}(t) = \mu(t)$, tedy platí (11.2.3) a podle (1.6) platí (11.2.2). Podle tvrzení (i) Věty 11.2.1 je $(u(t), u(t)) < \xi(t)$ pro $t \in \langle s, \beta)$. Odtud dokážeme, že je $\beta = \infty$ obdobně jako v důkaze Věty 12.1.8. V případě intervalu $(\alpha, s\rangle$ položíme $\eta(t) = -(u(t), u(t))$ a ξ bude znamenat maximální řešení rovnice (1.4) splňující podmínku $\xi(s) = \eta(s) - 1$. Pomocí tvrzení (ii) Věty 11.2.1 ukážeme, že je $-(u(t), u(t)) > \xi(t)$ pro $t \in (\alpha, s\rangle$, a odtud obdobně jako dříve ukážeme, že je $\alpha = -\infty$. Věta 12.1.11 je dokázána.

12.1.12. Poznámka: V důkazu Věty 12.1.11 jsme vyšetřovali funkci η, která vznikne složením funkcí $\lambda: K^n \to R$, $\lambda(x) = (x, x)$, a řešení u. Funkci λ můžeme nahradit funkcí $V: K^n \to R$, jež splňuje tyto podmínky:

Funkce V je spojitá; existuje takové $\gamma \in R$, že diferenciál $DV(x)$ existuje a spojitě závisí na x pro $\|x\| > \gamma$. (1.7)

$V(x) \to \infty$ pro $\|x\| \to \infty$ [tj. ke každému $\alpha \in R$ existuje $\beta \in R$ tak, že je $V(x) \geqq \alpha$, jakmile je $\|x\| \geqq \beta$]. (1.8)

Podmínku (1.6) nahradíme touto podmínkou:

Je-li $\xi \in R$ tak veliké, že je $\|x\| > \gamma$, jakmile je $V(x) = \xi$, potom platí $\chi(t, \xi) > \sup\{|DV(x) f(t, x)| \mid V(x) = \xi\}$ pro $t \in R$. (1.9)

Jsou-li splněny ostatní podmínky Věty 12.1.11, je rovnice (10.1.1) úplná. Důkaz probíhá obdobně jako důkaz Věty 12.1.11. Speciálně můžeme položit $V(x) = (x, x)$ [a znovu tak odvodit Větu 12.1.11] nebo $V(x) = (x, x)^{1/2}$; je-li $V(x) = (x, x)^{1/2}$, nerovnost (1.9) má tvar

$$\chi(t, \xi) > \operatorname{Re}\left(f(t, x), \frac{x}{(x, x)^{1/2}}\right) \quad \text{pro} \quad x \neq 0\,, \ (x, x)^{1/2} = \xi\,, \ t \in R\,.$$

12.1.13. Poznámka: Věta 12.1.1 platí i bez předpokladu, že rovnice (10.1.1) je jednoznačná (srovnej Větu 3.4.1).

Ani v ostatních Větách a Poznámkách není předpoklad o jednoznačnosti [rovnic (10.1.1), (1.4)] podstatný. Byl učiněn jen pro jednoduchost a tvrzení těchto Vět a Poznámek platí i bez předpokladu o jednoznačnosti. V Dodatku 12.1 je důkaz Věty 12.1.4 pozměněn tak, že se nepoužívá předpokladu o jednoznačnosti rovnice (10.1.1).

12.2. V odst. 12.1 jsme si všímali vlastností pevného maximálního řešení; můžeme říci, že jsme vyšetřovali funkci $\varphi_{(t_0, \tilde{x})}$ při pevných $t_0, \tilde{x}$. V tomto odstavci se budeme zabývat všemi maximálními řešeními současně, tj. budeme vyšetřovat funkci $\varphi_{(t_0, \tilde{x})}(t)$ jako funkci všech tří proměnných.

12.2.1. Definice: Nechť je

$$\hat{G} = \{(t, t_0, \tilde{x}) \in R^2 \times K^n \mid \alpha(t_0, \tilde{x}) < t < \beta(t_0, \tilde{x})\},$$
$$\Phi\colon \hat{G} \to K^n, \quad \Phi(t, t_0, \tilde{x}) = \varphi_{(t_0,\tilde{x})}(t).$$

12.2.2. Věta: *Je-li* $(t_0, \tilde{x}) \in G$, *je* $(t_0, t_0, \tilde{x}) \in \hat{G}$ *a*

$$\Phi(t_0, t_0, \tilde{x}) = \tilde{x}. \tag{2.1}$$

Je-li $(t_1, t_0, \tilde{x}) \in \hat{G}$, *je i* $(t_0, t_1, \Phi(t_1, t_0, \tilde{x})) \in \hat{G}$ *a platí*

$$\Phi(t_0, t_1, \Phi(t_1, t_0, \tilde{x})) = \tilde{x}. \tag{2.2}$$

Je-li $(t_1, t_0, \tilde{x}) \in \hat{G}$, $(t_2, t_1, \Phi(t_1, t_0, \tilde{x})) \in \hat{G}$, *je i* $(t_2, t_0, \tilde{x}) \in \hat{G}$ *a platí*

$$\Phi(t_2, t_1, \Phi(t_1, t_0, \tilde{x})) = \Phi(t_2, t_0, \tilde{x}). \tag{2.3}$$

12.2.3. Poznámka: Věta 12.2.2 má jednoduchou interpretaci: Vyjdeme-li v okamžiku t_0 po řešení rovnice (10.1.1) z bodu $\tilde{x}$, dostaneme se v okamžiku t_1 do bodu $\Phi(t_1, t_0, \tilde{x})$; vyjdeme-li v okamžiku t_1 z bodu $\Phi(t_1, t_0, \tilde{x})$, dostaneme se v okamžiku t_2 do bodu $\Phi(t_2, t_1, \Phi(t_1, t_0, \tilde{x}))$ a (2.3) říká, že do téhož bodu se dostaneme v okamžiku t_2, vyjdeme-li v okamžiku t_0 z bodu $\tilde{x}$. Podle (2.2) se v okamžiku t_0 vrátíme do bodu $\tilde{x}$, vyjdeme-li po řešení v okamžiku t_1 z bodu $\Phi(t_1, t_0, \tilde{x})$. Obě rovnice popisují skládání pohybů.

Důkaz Věty 12.2.2: Je-li $(t_0, \tilde{x}) \in G$, je $\varphi_{(t_0,\tilde{x})}(t_0) = \tilde{x}$, tedy je $(t_0, t_0, \tilde{x}) \in \hat{G}$ a (1.1) platí. Je-li $(t_1, t_0, \tilde{x}) \in \hat{G}$, je podle Definic 12.1.3 a 12.2.1 $(t_1, \Phi(t_1, t_0, \tilde{x})) \in G$ a $\Phi(t_1, t_1, \Phi(t_1, t_0, \tilde{x})) = \Phi(t_1, t_0, \tilde{x})$.

Při pevných t_1, t_0, x obě funkce $\Phi(t, t_1, \Phi(t_1, t_0, \tilde{x}))$ a $\Phi(t, t_0, \tilde{x})$ jsou maximální řešení rovnice (10.1.1) a rovnají se navzájem pro $t = t_1$. Proto mají obě týž definiční interval $\mathscr{J} = \mathscr{J}_{(t_1,\Phi)(t_1,t_0,\tilde{x})}$.

Je speciálně $t_0 \in \mathscr{J}$, tedy $(t_0, t_1, \Phi(t_1, t_0, \tilde{x})) \in \hat{G}$ a (2.2) platí. Dále $t_2 \in \mathscr{J}$ nastane právě tehdy, je-li $(t_2, t_1, \Phi(t_1, t_0, \tilde{x})) \in \hat{G}$ a (2.3) platí pro $t \in \mathscr{J}$. Věta 12.2.2 je dokázána.

Je-li $\delta_1, \delta_2 > 0$, $(\tau, z) \in G$, položme

$$\hat{Q} = \hat{Q}(\tau, z, \delta_1, \delta_2) = \{(t, s, y) \in R \times R \times K^n \mid$$
$$|t - \tau| \leqq \delta_1, |s - \tau| \leqq \delta_1, \|y - z\| \leqq \delta_2\}. \tag{2.4}$$

Nechť je $(t_0, \tilde{x}) \in G$. Čísla δ_1, δ_2 najděme podle Věty 10.1.1. Řešení $w_{(s,y)}\colon \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle \to K^n$ zavedené ve Větě 10.1.1 je vzhledem k jednoznačnosti rovnice (10.1.1) určeno jednoznačně. Proto můžeme definovat funkci

$$W\colon \hat{Q}(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2) \to K^n$$

rovnicí

$$W(t, s, y) = w_{(s,y)}(t). \tag{2.5}$$

12.2.4. Věta: *Funkce* W *definovaná rovnicí* (2.5) *je spojitá.*

Důkaz: Nechť je $(\tau, q) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2)$. Podle Věty 10.1.1 je

$$\|w_{(\tau,q)}(t) - \tilde{x}\| \leqq 2\delta_2 \quad \text{pro} \quad t \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle .$$

Je

$$w_{(\tau,q)}(t_2) - w_{(\tau,q)}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, w_{(\tau,q)}(t))\,\mathrm{d}t ,$$

a tedy

$$\|W(t_2, \tau, q) - W(t_1, \tau, q)\| \leqq L|t_2 - t_1| \tag{2.6}$$

pro $(t_2, \tau, q), (t_1, \tau, q) \in \hat{Q}(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2)$; přitom

$$L = \max\{\|f(t, x)\| \mid (t, x) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, 2\delta_2)\} .$$

Nechť je $(t, s, y), (t_i, s_i, y^{[i]}) \in \hat{Q}(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2)$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots$, $t_i \to t$, $s_i \to s$, $y^{[i]} \to y$ pro $i \to \infty$. Položme $u^{[i]} = w_{(s_i, y^{[i]})}$, $u = w_{(s,y)}$. Je $u^{[i]}(s_i) = y^{[i]}$, $u(s) = y$, tedy platí (11.2.8) a také ostatní předpoklady Pomocné věty 11.2.4 jsou splněny. Proto platí $u^{[i]}(t) \to u(t)$, tj. $W(t, s_i, y^{[i]}) \to W(t, s, y)$ pro $i \to \infty$. Protože platí (2.6) a $\lim_{i\to\infty} t_i = t$, je $\lim_{i\to\infty} W(t_i, s_i, y^{[i]}) = W(t, s, y)$, tedy funkce W je spojitá v každém bodě $(t, s, y) \in \hat{Q}(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2)$ a Věta 12.2.4 je dokázána.

Je-li $U \subset \hat{G}$, znamená $\Phi|_U$ restrikci funkce Φ na množinu U.

12.2.5. Pomocná věta: *Ke každému bodu $(t_0, \tilde{x}) \in G$ existují čísla $\delta_1, \delta_2 > 0$ tak, že funkce $\Phi|_{\hat{Q}}$ je spojitá; množina $\hat{Q} = \hat{Q}(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2)$ je definována v* (2.4).

Důkaz: K bodu $(t_0, \tilde{x})$ najděme čísla δ_1, δ_2 podle Věty 10.1.1. Nechť W je funkce zavedená v (2.5). Je $\Phi|_{\hat{Q}} = W$, a tedy funkce $\Phi|_{\hat{Q}}$ je spojitá podle Věty 12.2.4. Pomocná věta 12.2.5 je dokázána.

12.2.6. Věta (o spojité závislosti řešení na počáteční podmínce): *Množina $\hat{G} \subset R^2 \times K^n$ je otevřená, funkce Φ je spojitá.*

Důkaz: Nechť $\mathcal{U}$ je množina takových otevřených množin $U \subset R^2 \times K^n$, že je $U \subset \hat{G}$ a že funkce $\Phi|_U$ je spojitá. Položme $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.

Nechť je $(t_0, \tilde{x}) \in G$. Podle Pomocné věty 12.2.5 existují čísla $\delta_1, \delta_2 > 0$ tak, že funkce $\Phi|_{\hat{Q}}$ je spojitá. Proto je $(t_0, t_0, \tilde{x}) \in V$, jakmile je $(t_0, \tilde{x}) \in G$.

Množina $V \subset R^2 \times K^n$ je otevřená, je $V \subset \hat{G}$ a funkce $\Phi|_V$ je spojitá. Naším cílem je dokázat, že $V = \hat{G}$. Nechť tedy existuje bod

$$(t_1, t_0, \tilde{x}) \in \hat{G} - V . \tag{2.7}$$

Nechť je pro určitost $t_1 < t_0$. Položme $t_2 = \sup\{s \in R \mid s < t_0, (s, t_0, \tilde{x}) \notin V\}$. Je $t_1 \leqq t_2 < t_0$ a $(t, t_0, \tilde{x}) \in V$ pro $t \in (t_2, t_0)$. Protože množina V je otevřená, je

$$(t_2, t_0, \tilde{x}) \notin V . \tag{2.8}$$

Protože je $t_1 \leqq t_2 < t_0$, je $(t_2, t_0, \tilde{x}) \in \hat{G}$. Je tedy $(t_2, \Phi(t_2, t_0, \tilde{x})) \in G$. Podle Pomocné věty 12.2.5 existují čísla $\eta_1, \eta_2 > 0$ tak, že funkce $\Phi \big|_{Q(t_2, \Phi(t_2, t_0, \tilde{x}), \eta_1, \eta_2)}$ je spojitá.

Zvolme číslo t_3, $t_2 < t_3 < t_2 + \eta_1$, $t_3 < t_0$. Protože je $(t_3, t_0, \tilde{x}) \in V$, existují čísla $\delta_1, \delta_2 > 0$ tak, že funkce $\Phi(t_3, .,.)$ je spojitá na množině

$$Z = \{(\tau, z) \in R \times K^n \big| \, |\tau - t_0| \leqq \delta_1, \|z - \tilde{x}\| \leqq \delta_2\}$$

a že $\|\Phi(t_3, \tau, z) - \Phi(t_3, t_0, \tilde{x})\| \leqq \eta_2$ pro $(\tau, z) \in Z$. Podle (2.2) je

$$\Phi(t, \tau, z) = \Phi(t, t_3, \Phi(t_3, \tau, z)), \tag{2.9}$$

je-li $(t, \tau, z) \in S$, kde

$$S = \{(t, \tau, z) \in R \times R \times K^n \big| \, |t - t_2| < \eta_1, |\tau - t_0| < \delta_1, \|z - \tilde{x}\| < \delta_2\} .$$

Funkce proměnných t, τ, z, která stojí na pravé straně v (2.9), vznikla složením funkcí $\Phi(., t_3, .)$ a $\Phi(t_3, ., .)$, o nichž jsme již dokázali, že jsou spojité, a proto i funkce Φ je spojitá na množině S. Je $S \in \mathscr{U}$, $(t_2, t_0, \tilde{x}) \in S$, tedy $(t_2, t_0, \tilde{x}) \in V$ a to odporuje vztahu (2.8). Proto nemůže pro žádný bod $(t_1, t_0, \tilde{x})$ platit (2.7). Je tedy $V = \hat{G}$ a Věta 12.2.6 je dokázána.

12.2.7. Poznámka: Protože množina G je otevřená, je funkce β: $G \to R$ (viz Definice 12.1.4 a 12.2.1) polospojitá zdola [tj. k bodu $(t_0, \tilde{x}) \in G$ a číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že platí $\beta(t, x) > \beta(t_0, \tilde{x}) - \varepsilon$, jakmile je $|t - t_0| < \delta$, $\|x - \tilde{x}\| < \delta$] a obdobně je funkce α: $G \to R$ polospojitá shora.

12.3. Budeme se zabývat autonomní diferenciální rovnicí (viz odst. 1.6). Nechť je $H \subset K^n$, $g: H \to K^n$. Autonomní diferenciální rovnice

$$\dot{x} = g(x) \tag{3.1}$$

je speciálním případem rovnice (10.1.1), jestliže položíme

$$G = R \times H, \quad f(t, x) = g(x) \quad \text{pro} \quad (t, x) \in G. \tag{3.2}$$

Pro autonomní diferenciální rovnice je charakteristická Věta 12.3.1; ve Větě 12.3.1 není nutné předpokládat, že množina H je otevřená, funkce g spojitá ani že rovnice (3.1) je jednoznačná.

12.3.1. Věta: *Nechť funkce $u: \mathscr{J} \to K^n$ je řešením rovnice* (3.1), $\tau \in R$. *Položme $\mathscr{J}_\tau = \{t \in R | \, t - \tau \in \mathscr{J})\}$ a definujme funkci $v_\tau: \mathscr{J}_\tau \to K^n$ rovnicí $v_\tau(t) = u(t - \tau)$. Potom v_τ je řešení rovnice* (3.1).

Důkaz: Funkce v_τ má spojitou derivaci $\dot{v}_\tau$ a platí

$$\dot{v}_\tau(t) = \dot{u}(t - \tau) = g(u(t - \tau)) = g(v_\tau(t)) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{J}$$

a tím je Věta 12.3.1 dokázána.

12.3.2. Poznámka: Snadno se dokáže, že řešení u z Věty 12.3.1 je maximální právě tehdy, je-li řešení v_τ maximální. Říká se též, že řešení v_τ vznikne z řešení u posunutím v času (viz odst. 1.11).

Dále budeme v této kapitole předpokládat, že množina $H \subset K^n$ je otevřená, funkce g spojitá a že rovnice (3.1) je jednoznačná. Vzhledem k (3.2) je množina $G \subset R \times K^n$ otevřená, funkce f spojitá a rovnice (10.1.1) jednoznačná. Je tedy definována funkce Φ: $\hat{G} \to K^n$ a podle Věty 12.2.6 je množina $\hat{G} \subset R^2 \times K^n$ otevřená a funkce Φ spojitá.

12.3.3. Věta: *Nechť je $y \in H$, $s, \tau \in R$. Pak je*

$$\Phi(\tau, s, y) = \Phi(\tau - s, 0, y), \tag{3.3}$$

jakmile je definován výraz na levé nebo na pravé straně.

Důkaz: Funkce $\Phi(t - s, 0, y)$ proměnné t je maximální řešení rovnice (3.1) takové, že $\Phi(s - s, 0, y) = y$, a stejný význam má i funkce $\Phi(t, s, y)$ proměnné t. Podle Věty 12.1.1 platí (3.3) a Věta 12.3.3 je dokázána.

12.3.4. Definice: Nechť $\hat{H}$ je množina takových $(t, y) \in R \times H$, že je definováno $\varphi_{(0,y)}(t)$, a nechť funkce Ψ: $\hat{H} \to H$ je definována rovnicí $\Psi(t, y) = \varphi_{(0,y)}(t)$ [$\varphi_{(0,y)}$ je maximální řešení rovnice (3.1) splňující podmínku $\varphi_{(0,y)}(0) = y$].

12.3.5. Věta: *Je*

$$\hat{H} = \{(t, y) \in R \times K^n \mid (t, 0, y) \in \hat{G}\}, \quad \Psi = \Phi\,|_{\hat{H}}. \tag{3.4}$$

Množina $\hat{H} \subset R \times K^n$ je otevřená, funkce Ψ je spojitá. Pro $y \in H$ je $(0, y) \in \hat{H}$ a

$$\Psi(0, y) = y. \tag{3.5}$$

Důkaz: (3.4) plyne z Definic 12.3.4, 12.2.1; je-li $y \in H$, je $(0, y) \in G$ a podle Věty 12.2.2 je $(0, 0, y) \in \hat{G}$, tj. $(0, y) \in \hat{H}$, a podle Definice 12.3.4 platí (3.5). Ostatní tvrzení plynou z (3.4) a z Věty 12.2.6. Věta 12.3.5 je dokázána.

12.3.6. Věta: *Je-li $(s, y) \in \hat{H}$, je i $(-s, \Psi(s, y)) \in \hat{H}$ a platí*

$$\Psi(-s, \Psi(s, y)) = y. \tag{3.6}$$

Je-li $(s, y) \in \hat{H}$, $(t, \Psi(s, y)) \in \hat{H}$, je i $(t + s, y) \in \hat{H}$ a platí

$$\Psi(t, \Psi(s, y)) = \Psi(t + s, y). \tag{3.7}$$

Důkaz: Je-li $(s, y) \in \hat{H}$, je $(s, 0, y) \in \hat{G}$, $\Psi(s, y) = \Phi(s, 0, y)$. Podle Vět 12.2.2 a 12.3.3 je

$$(0, s, \Phi(s, 0, y)) \in \hat{G}, \quad y = \Phi(0, s, \Phi(s, 0, y)) = \Phi(-s, 0, \Phi(s, 0, y)) =$$
$$= \Psi(-s, \Psi(s, y))$$

a (3.6) platí.

Je-li $(s, y) \in \hat{H}$, $(t, \Psi(s, y)) \in \hat{H}$, je definováno $\Psi(t, \Psi(s, y))$ a podle Vět 12.2.2 a 12.3.3 je

$$\Psi(t, \Psi(s, y)) = \Phi(t, 0, \Phi(s, 0, y)) = \Phi(t + s, s, \Phi(s, 0, y)) = \\ = \Phi(t + s, 0, y) = \Psi(t + s, y)$$

a Věta 12.3.6 je dokázána.

12.3.7. Věta (o třech typech řešení autonomní rovnice): *Nechť* $u: \mathscr{J} \to H$ *je maximální řešení rovnice* (3.1). *Pak nastane právě jeden z tří případů*:

(i) $\mathscr{J} = R$, $u(t) = u(0)$ *pro* $t \in R$.

(ii) $\mathscr{J} = R$ *a existuje takové* $T > 0$, *že je* $u(t) = u(s)$ *právě tehdy, je-li* $t - s = lT$, *kde* l *je celé číslo.*

(iii) $u(t) \neq u(s)$ *pro* $s, t \in \mathscr{J}$, $s \neq t$.

12.3.8. Pomocná věta: *Nechť neprázdná uzavřená množina* $S \subset R$ *má tyto vlastnosti*:

$$\{0\} \neq S \neq R. \tag{3.8}$$

$$\text{Je-li } t, s \in S, \text{ pak je } -t \in S,\ t + s \in S. \tag{3.9}$$

Potom existuje číslo $T > 0$ *tak, že je*

$$S = \{lT \mid l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots\}.$$

Důkaz: Položme $T = \inf\{s \in S \mid s > 0\}$. Protože platí (3.8), existuje takové $s_1 \in S$, že je $s_1 \neq 0$ a vzhledem k (3.9) můžeme bez ztráty na obecnosti předpokládat, že je $s_1 > 0$. Je tedy $0 \leqq T \leqq s_1$. Protože množina S je uzavřená, je $T \in S$.

Dokážeme, že je $T > 0$. Nechť je naopak $T = 0$. Potom ke každému $k = 1, 2, 3, \ldots$ existuje $t_k \in S$, $0 < t_k < k^{-1}$. Nechť je $\tau \in R$. Ke každému k existuje celé číslo $j(k)$ tak, že je $j(k)\, t_k \leqq \tau < [j(k) + 1]\, t_k$. Podle (3.9) je $j(k)\, t_k \in S$, dále je $j(k)\, t_k \to \tau$ pro $k \to \infty$ a S je uzavřená množina. Odtud plyne $\tau \in S$, a tedy $S = R$ a to není možné. Proto musí být $T > 0$.

Položme $Z = \{lT \mid l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$. Protože je $T \in S$, je vzhledem k (3.9) $Z \subset S$. Nechť je $\sigma \in S - Z$. Existuje takové celé číslo m, že je $mT < \sigma < (m + 1)\, T$. Odtud plyne, že je $0 < \sigma - mT < T$, $(\sigma - mT) \in S$ a to odporuje definici čísla T. Proto je $S - Z = \emptyset$, tedy $S = Z$ a Pomocná věta 12.3.8 je dokázána.

12.3.9. Poznámka: Podmínku (3.9) lze slovy vyjádřit takto: S je aditivní grupa reálných čísel.

Důkaz Věty 12.3.7: Případy (i), (ii), (iii) se zřejmě vylučují. Tedy stačí, dokážeme-li: Nenastane-li žádný z případů (i), (iii), pak nastane případ (ii). Nechť tedy nenastane žádný z případů (i), (iii). Potom existují navzájem různá čísla t_1, t_2, $t_3 \in \mathscr{J}$ tak, že je $u(t_1) = u(t_2) \neq u(t_3)$. Podle Věty 12.3.1 je funkce $\Psi(t - t_1, u(t_1))$ proměnné t maximální řešení rovnice (3.1) a jeho hodnota pro $t = t_1$ je $u(t_1)$. Podle

Věty 12.1.1 je $\mathcal{J}$ definiční interval funkce $\Psi(t - t_1, u(t_1))$ proměnné t a je $\Psi(t - t_1, u(t_1)) = u(t)$ pro $t \in \mathcal{J}$. Nechť S je množina takových $s \in R$, že je $\Psi(s, u(t_1)) = u(t_1)$. Je $t_2 - t_1 \in S$, tedy $\{0\} \neq S$ a současně je $S \neq R$, neboť v opačném případě by nastalo (i). Je-li $s \in S$, je podle (3.6) $-s \in S$, je-li $t, s \in S$, je podle (3.7) $t + s \in S$. Jsou splněny předpoklady Pomocné věty 12.3.8, a tedy existuje číslo $T > 0$ tak, že je

$$S = \{lT | \, l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots\} .$$

Je ovšem $S \subset \mathcal{J}$ a $\mathcal{J}$ je interval, tedy $\mathcal{J} = R$. Je [viz (3.7)]

$$u(t + lT) = \Psi(t - t_1 + lT, u(t_1)) = \Psi(t - t_1, \Psi(lT, u(t_1)) =$$
$$= \Psi(t - t_1, u(t_1)) = u(t) .$$

Naopak, je-li $u(t) = u(s)$, tedy $\Psi(t - t_1, u(t_1)) = \Psi(s - t_1, u(t_1))$, je [viz (3.7), (3.6)] $\Psi(-s + t_1, \Psi(t - t_1, u(t_1))) = \Psi(-s + t_1, \Psi(s - t_1, u(t_1)))$, $\Psi(t - s, u(t_1)) = = u(t_1)$, a tedy je $t - s \in S$, tj. $t - s = lT$, kde l je celé číslo. Tedy nastane případ (ii) a Věta 12.3.7 je dokázána.

12.4. Nechť rovnice (3.1) je úplná. Z Vět 12.3.5 a 12.3.6 plyne, že funkce Ψ má tyto vlastnosti:

$$\Psi: R \times H \to H . \tag{4.1}$$

Ψ je spojitá funkce. (4.2)

$$\Psi(0, x) = x \quad \text{pro} \quad x \in H . \tag{4.3}$$

$$\Psi(t, \Psi(s, x)) = \Psi(t + s, x) \quad \text{pro} \quad x \in H \quad \text{pro} \quad t, s \in R . \tag{4.4}$$

Tyto čtyři vlastnosti charakterizují jistou třídu funkcí, tzv. dynamických systémů. *Dynamický systém* se nazývá funkce Θ, která má vlastnosti (4.1) až (4.4); přitom nemusí být $H \subset K^n$, ale H může být metrický nebo topologický prostor.

Vlastnosti (4.1) až (4.4) jsou abstrakcí představy, že je dán „systém", který se vyvíjí v závislosti na čase, a je uzavřený v tom smyslu, že na něj nepůsobí vnější vlivy. Možné stavy systému jsou charakterizovány prvky x množiny H. Je-li přitom systém v okamžiku $t = 0$ ve stavu x, bude v okamžiku $t > 0$ ve stavu $\Psi(t, x)$ [byl v okamžiku $t < 0$ ve stavu $\Psi(t, x)$]. Vlastnost (4.2) říká, že malá nepřesnost našich informací o t a x se projeví jen málo na hodnotě $\Psi(t, x)$. Vlastnosti (4.4) interpretujme takto: Nechť systém je v okamžiku 0 ve stavu x, v okamžiku s ve stavu $y = \Psi(s, x)$ a v okamžiku $t + s$ ve stavu $z = \Psi(t + s, x)$. Podle (4.4) je $\Psi(t, y) = z$, to znamená, je-li systém v okamžiku 0 ve stavu y, je v okamžiku t ve stavu z. Tedy systém přejde po uplynutí času t ze stavu y do stavu z a přitom nezáleží na tom, zda ve stavu y byl v okamžiku 0 nebo v okamžiku s. Vlastnost (4.4) je matematické vyjádření toho, že na systém nepůsobí vnější vlivy.

Vycházíme-li z diferenciální rovnice (3.1) (o níž předpokládáme, že je úplná a jednoznačná), pak funkce Ψ má parciální derivaci $\partial\Psi/\partial t$ v každém bodě (t, x) a je

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t, x) = g(\Psi(t, x)),$$

tedy funkce $\partial\Psi/\partial t$: $R \times H \to K^n$ je spojitá. Nechť je $H \subset K^n$ a nechť Θ je dynamický systém. Za jakých podmínek existuje funkce g: $H \to K^n$ tak, aby bylo $\Theta = \Psi$, kde Ψ je funkce zavedená v Definici 12.3.4? Není těžké dokázat, že nutné a postačující podmínky jsou: V každém bodě $(0, x) \in R \times H$ existuje derivace $\partial\Theta/\partial t$ a spojitě závisí na x; je

$$g(x) = \frac{\partial\Theta}{\partial t}(0, x)$$

a rovnice (3.1) je jednoznačná.

Odvoďme ještě některé důsledky vlastností (4.1) až (4.4). Pro $t \in R$ pišme Ψ_t místo $\Psi(t, .)$ [tedy Ψ_t: $H \to H$, $\Psi_t(x) = \Psi(t, x)$]. Podle (4.2) funkce Ψ_t je spojitá, podle (4.3) je $\Psi_0(x) = x$ pro $x \in H$, tedy $\Psi_0 = \mathrm{id}$, kde id znamená identické zobrazení množiny H na sebe, podle (4.4) je $\Psi_t \circ \Psi_s = \Psi_{t+s}$, kde tzv. složené zobrazení $\Psi_t \circ \Psi_s$ vznikne postupným provedením zobrazení Ψ_s a Ψ_t. Speciálně pro $-t = s$ je

$$\Psi_t \circ \Psi_{-t} = \Psi_0 = \mathrm{id} \tag{4.5}$$

a obdobně

$$\Psi_{-t} \circ \Psi_t = \mathrm{id}\,. \tag{4.6}$$

Z (4.6) plyne, že zobrazení Ψ_t je prosté: Je-li totiž $\Psi_t(y) = \Psi_t(z)$, aplikujeme na obě strany rovnosti zobrazení Ψ_{-t} a dostaneme $y = z$. Z (4.5) plyne, že Ψ_t zobrazuje množinu H na sebe: Pro $x \in H$ položme $y = \Psi_{-t}(x)$ a dostáváme $x = \Psi_t(y)$. Podle (4.5) a (4.6) zobrazení Ψ_t a Ψ_{-t} jsou navzájem inverzní. Spojitá zobrazení, k nimž existují inverzní zobrazení a jsou spojitá, mají v matematice významné postavení [nazývají se *homeomorfní zobrazení*]. Ukázali jsme, jak taková zobrazení jsou přirozeným způsobem spjata s pojmem dynamického systému.

Abychom mohli naznačit, jak se vyšetřují dynamické systémy, zaveďme tyto pojmy: Nechť je $x \in H$; bod $y \in H$ se nazývá *ω-limitní bod bodu x (vzhledem k dynamickému systému Θ: $R \times H \to H$)*, existuje-li taková posloupnost $t_1, t_2, t_3 \ldots, t_i \in R$, že je $\lim_{i\to\infty} t_i = \infty$, $\lim_{i\to\infty} \Theta(t_i, x) = y$. Nechť $\Omega(x)$ je množina ω-limitních bodů bodu x.

Množina $Q \subset H$ se nazývá *invariantní (vzhledem k dynamickému systému Θ)*, je-li $\Theta(t, q) \in Q$, jakmile je $t \in R$, $q \in Q$.

12.4.1. Věta: *Množina $\Omega(x)$ je invariantní pro $x \in H$.*

Důkaz: Nechť je $y \in \Omega(x)$, $\tau \in R$, $z = \Theta(\tau, y)$. Potom existuje posloupnost $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_i \in R$, tak, že platí $\lim_{i\to\infty} t_i = \infty$, $\lim_{i\to\infty} \Theta(t_i, x) = y$. Položme $\sigma_i = t_i + \tau$

pro $i = 1, 2, \ldots$. Zřejmě je $\lim\limits_{i\to\infty} \sigma_i = \infty$, dále $\Theta(\sigma_i, x) = \Theta(\tau, \Theta(t_i, x))$. Ze vztahu $\lim\limits_{i\to\infty} \Theta(t_i, x) = y$ a ze spojitosti funkce Θ plyne

$$\lim_{i\to\infty} \Theta(\sigma_i, x) = \lim_{i\to\infty} \Theta(\tau, \Theta(t_i, x)) = \Theta(\tau, y) = z\,,$$

tedy $z \in \Omega(x)$ a Věta 12.4.1 je dokázána.

Z definice množiny $\Omega(x)$ plyne, že platí

$$\Omega(x) = \bigcap_{j=1,2,3,\ldots} \mathscr{C}\ell\{\Theta(t, x) |\, t \geqq j\}$$

(kde $\mathscr{C}\ell A$ znamená uzávěr množiny A), a tedy množina $\Omega(x)$ je uzavřená. Může se ovšem stát, že je $\Omega(x) = \emptyset$; to nastane pro každé x, je-li např. $H = R$, $\Theta(t, x) = t + x$.