Kapitola III

TEORIE NEURČITÉHO INTEGRÁLU NEBOLI PRIMITIVNÍ FUNKCE

V této kapitole budeme se zabývat teorií primitivních funkcí, jejichž důležitost jsme poznali v předešlé kapitole při větč 39 a 47. Opakuji, že slovem „derivace" rozumím v celé této knize *vlastní* derivaci.

§ 1. Definice primitivní funkce. Buďte $F(x)$, $f(x)$ dvě funkce definované v otevřeném intervalu (a, b) (omezeném nebo neomezeném). Platí-li pro všechna x intervalu (a, b) rovnice $F'(x) = f(x)$, říkáme, že funkce $F(x)$ je *primitivní funkcí* k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b).[1])

Např. funkce $\frac{1}{3}x^3$ je v intervalu $(-\infty, +\infty)$ primitivní funkcí k funkci x^2; funkce $\operatorname{tg} x$ je primitivní funkcí k funkci $1 : \cos^2 x$ v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a také v intervalech $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi)$ atd., nikoliv však např. v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ (zde vadí hodnota $x = \frac{1}{2}\pi$).

Je-li funkce $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b), je ovšem též každá funkce $F(x) + c$ (kde c je libovolná konstanta) primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b), neboť je $(F(x) + c)' = F'(x)$. Tím jsou však všechny primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b) vyčerpány, neboť platí tato věta:

Věta 48. *Jsou-li funkce* $F(x)$, $G(x)$ *dvě primitivní funkce k funkci* $f(x)$ *v intervalu* (a, b), *platí v celém intervalu* (a, b) *rovnice* $G(x) = F(x) + C$, *kde* C *je konstanta.* (Znám-li tedy k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b) jednu primitivní funkci $F(x)$, jsou *všechny* primitivní funkce dány výrazem $F(x) + C$, kde C je libovolná konstanta.)

Důkaz. Funkce $F(x)$, $G(x)$ mají v (a, b) touž derivaci $f(x)$; podle věty 8 platí tedy v celém intervalu (a, b) rovnice $G(x) - F(x) = C$, kde C je konstanta. (Že F, G jsou spojité v (a, b), plyne z existence jejich derivace; viz **DI**, věta 122, str. 213, v 4. vyd. str. 242.)

Zbývá ovšem otázka: existuje ke každé funkci funkce primitivní? Tuto otázku je nutno zodpovědět *záporně*. Definujme např. funkci $f(x)$ takto: $f(x) = 0$ pro $x \neq 0, f(0) = 1$. Kdyby k funkci $f(x)$ existovala v intervalu $(-\infty, +\infty)$ primitivní funkce $F(x)$, bylo by $F'(x) = 0$ pro $x < 0$, $F'(0) = 1$, $F'(x) = 0$ pro $x > 0$. Podle věty 7 by funkce $F(x)$ byla konstantní v intervalu $(-\infty, 0)$ i v intervalu $(0, +\infty)$, tj. bylo by $F(x) = a$ pro $x < 0$, $F(x) = b$ pro $x > 0$. Z existence derivace v bodě

[1]) Je možno definovat primitivní funkci též obecněji; na elementárním stupni této knihy je však snad nejvhodnější podaná definice.

$x = 0$ by plynula spojitost funkce $F(x)$ v bodě 0 (viz větu 122 v **DI**), tedy by bylo $\lim_{x \to 0-} F(x) = \lim_{x \to 0+} F(x) = F(0)$; ale zřejmě $\lim_{x \to 0-} F(x) = a$, $\lim_{x \to 0+} F(x) = b$, takže by bylo $a = b = F(0)$, takže by bylo $F(x) = a$ pro všechna x vůbec a tedy $F'(x) = 0$ pro každé x, tedy i pro $x = 0$, což je ve sporu s rovnicí $F'(0) = 1$. Tedy k funkci $f(x)$ neexistuje v intervalu $(-\infty, +\infty)$ primitivní funkce.

Ale alespoň ke každé funkci *spojité* existuje primitivní funkce, jak nás poučuje tato věta:

Věta 49. *Budiž $f(x)$ funkce spojitá v otevřeném* (omezeném nebo neomezeném) *intervalu (a, b); zvolme libovolné číslo c v intervalu (a, b). Potom integrál*

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b). (Tedy ke každé funkci spojité v intervalu (a, b) existuje v tomto intervalu primitivní funkce.)

Důkaz. Budiž x_0 libovolné číslo intervalu (a, b). Ježto žádné číslo intervalu (a, b) není jeho nejmenším ani největším číslem, lze zvolit dvě čísla α, β intervalu (a, b) tak, že je $\alpha < \operatorname{Min}(c, x_0) \leqq \operatorname{Max}(c, x_0) < \beta$. Ježto funkce $f(t)$ je spojitá v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a ježto c, x_0 jsou dva vnitřní body tohoto intervalu, existuje především $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ (věta 38), dále existuje integrál $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pro každé x intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a konečně platí, že derivace integrálu $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je rovna číslu $f(x)$ pro každé x intervalu (α, β) (věta 44), tedy speciálně pro $x = x_0$. Ježto x_0 bylo libovolné číslo intervalu (a, b), platí tedy: pro každé x intervalu (a, b) existuje $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a platí $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x)$, jak jsme měli dokázat.

Věta 49 ukazuje, že — aspoň pro funkce spojité — je velmi úzký vztah mezi určitým integrálem a primitivní funkcí.[2]) Není proto divu, že pro primitivní funkci bylo zavedeno ještě jiné pojmenování a označení, připomínající pojmenování a označení určitého integrálu. Primitivní funkci k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b) nazýváme také *neurčitým integrálem funkce* $f(x)$ v intervalu (a, b) a značíme ji znakem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Jinými slovy: neurčitým integrálem funkce $f(x)$ v intervalu (a, b) nazýváme každou funkci (definovanou v intervalu (a, b)), jež má pro každé x intervalu (a, b) derivaci rovnou číslu $f(x)$.

Poznámka 1. Určitý integrál dané funkce v daných mezích je určité *číslo*; např. $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 2$ (viz příkl. 2 u věty 39 v kap. II, § 9); naproti tomu neurčitý integrál funkce $f(x)$ je opět *funkce* proměnné x, a to ještě ne zcela určitá — je určena pouze až na „aditivní konstantu", kterou často nazýváme „integrační konstantou", např. je $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$, kde „integrační konstanta" c může být libovolné číslo.

[2]) U nespojitých funkcí jsou tyto vztahy složitější, viz § 1 v kap. VIII.

Podobně jako při určitém integrálu užívá se i při neurčitém integrálu pro „integrační proměnnou" (tak se nazývá proměnná stojící za symbolem d) vedle znaku x i jiných písmen; např.

$$\int 2x\,dx = x^2 + c\,, \qquad \int 2t\,dt = t^2 + c\,.$$

Poznámka 2. Dvojice označení „určitý integrál = Riemannův určitý integrál" a „neurčitý integrál = primitivní funkce" není příliš důsledná. Přidržuji se jí jen proto, že je tradiční v elementárních učebnicích. Viz o tom § 1 v kap. VIII.

§ 2. Nejjednodušší formule a věty pro výpočet neurčitých integrálů. Známé vzorce diferenciálního počtu dávají nám ihned tyto výsledky (c je integrační konstanta):

$$(1)\qquad \begin{cases} \int \sin x\,dx = -\cos x + c\,, & \int \cos x\,dx = \sin x + c\,, \\[4pt] \displaystyle\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + c\,,^{3)} & \int e^x\,dx = e^x + c\,; \end{cases}$$

zobecněním posledního vzorce je vzorec

$$(2)\qquad \int a^x\,dx = \frac{1}{\lg a}\,.\,a^x + c, \text{ platný pro } a > 0,\ a \neq 1\,.$$

Vzorce (1) a (2) platí v intervalu $(-\infty, +\infty)$ a plynou ihned ze vzorců $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\operatorname{arctg} x)' = 1 : (1 + x^2)$, $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = a^x \lg a$ pro $a > 0$; z posledního vzorce plyne totiž $\left(\dfrac{a^x}{\lg a}\right)' = a^x$ pro $a > 0$, pokud je $\lg a \neq 0$, tj. pokud je $a \neq 1$. Stejně se dokáží vzorce

$$(3)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + c \text{ (v intervalu } (-1,1))\,;$$

$$(4)\qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$$

(v každém otevřeném intervalu neobsahujícím žádný bod, pro nějž $\cos x = 0$);

$$(5)\qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + c$$

(v každém otevřeném intervalu neobsahujícím žádný bod, pro nějž $\sin x = 0$).

Obraťme se nyní k mocnině. Jest $(x^{n+1})' = (n + 1)\,x^n$ a tedy

$$(6)\qquad \left(\frac{x^{n+1}}{n + 1}\right)' = x^n\,,$$

---

[3]) Píšeme $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + x^2}$ místo $\displaystyle\int \frac{1}{1 + x^2}\,dx$; obdobně často píšeme pro zkrácení $\displaystyle\int \frac{dx}{g(x)}$ místo $\displaystyle\int \frac{1}{g(x)}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{f(x)\,dx}{g(x)}$ místo $\displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$, $\int dx$ místo $\int 1\,dx$.

není-li $n + 1 = 0$, tj. není-li $n = -1$. Kdy platí vzorec (6)? Je-li n celé kladné, platí pro každé x; rovněž je-li $n = 0$ (ve tvaru $(x)' = 1$). Je-li n celé záporné (a $n \neq -1$), platí (6) pro každé $x \neq 0$; není-li n celé, platí vzorec (6) pro každé kladné x.[4]

Z formule (6) plyne speciálně pro $n = 0$

$$\int dx = \int 1 \, dx = x + c \tag{7}$$

(v intervalu $(-\infty, +\infty)$) a obecně pro každé $n \neq -1$

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \; ; \tag{8}$$

přitom vzorec (8) platí v intervalu $(-\infty, +\infty)$, je-li n celé kladné; platí v intervalu $(-\infty, 0)$ i v intervalu $(0, +\infty)$, je-li n celé záporné ($n \neq -1$); a platí konečně v intervalu $(0, +\infty)$, je-li n číslo necelé.

Zbývá vyšetřit případ $n = -1$, tj. $\int \frac{dx}{x}$. Je-li $x > 0$, je $(\lg x)' = 1 : x$, a tedy

$$\int \frac{dx}{x} = \lg x + c$$

v intervalu $(0, +\infty)$; je-li $x < 0$, je $-x > 0$ a tedy $(\lg(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ a tedy

$$\int \frac{dx}{x} = \lg(-x) + c$$

v intervalu $(-\infty, 0)$. Oba tyto vzorce lze shrnout ve vzorec

$$\int \frac{dx}{x} = \lg |x| + c \, , \tag{9}$$

platný jak v intervalu $(-\infty, 0)$, tak v intervalu $(0, +\infty)$.

Dovedeme tedy integrovat funkce x^n [pozor na rozdíl mezi případem $n \neq -1$ (vzorec (8)) a $n = -1$ (vzorec (9))], e^x, a^x ($a > 0$, $a \neq 1$), $\sin x$, $\cos x$, $1 : \sin^2 x$, $1 : \cos^2 x$, $1 : \sqrt{1 - x^2}$, $1 : (1 + x^2)$. Samozřejmě jest

$$\int 0 \, dx = c \tag{10}$$

v intervalu $(-\infty, +\infty)$, ježto derivace konstanty je nula. Vzorce (1) až (10), jichž budeme často užívat, je nutno si bezpečně zapamatovat.

---

[4]) Viz odvození v DI, kap. VIII, § 2, vzorce V, VII, XII, str. 213, 215, 220, v 4. vyd. str. 241, 244, 250. Připomeňme: při necelém $n > 0$ je funkce x^n též spojitá zprava v bodě 0, takže je spojitá v intervalu $\langle 0, +\infty)$. O této spojitosti viz DI, kap. V, § 4, příkl. 7, 10, str. 163, 166, v 4. vyd. str. 182, 185.

Poznámka 1. Třetí vzorec (1) jsme dostali ze vzorce $(\operatorname{arctg} x)' = 1 : (1 + x^2)$; použitím vzorce $(-\operatorname{arccotg} x)' = 1 : (1 + x^2)$ bychom dostali obdobně vzorec

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = -\operatorname{arccotg} x + c \tag{11}$$

(v intervalu $(-\infty, +\infty)$). Z tohoto vzorce a z třetího vzorce (1) plyne, že i funkce $\operatorname{arctg} x$ i funkce $-\operatorname{arccotg} x$ jsou v intervalu $(-\infty, +\infty)$ primitivními funkcemi k jedné a téže funkci $1 : (1 + x^2)$. Z věty 48 tedy plyne, že jejich rozdíl je konstantní, tj.

$$\operatorname{arctg} x - (-\operatorname{arccotg} x) = C\,.$$

Konstantu C určíme, dosadíme-li $x = 0$; dostaneme $C = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arccotg} 0 = 0 + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi$, takže $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{1}{2}\pi$, což je známý vztah (**DI**, str. 206, v 4. vyd. str. 234, příkl. 5). Nedává nám tedy vzorec (11) vlastně nic nového; z téhož důvodu jsem neuváděl zvláště vzorec

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\arccos x + c$$

(v intervalu $(-1, 1)$).

V tomto paragrafu – a též ve dvou následujících paragrafech – odvodíme několik vět, jež nám často dovolují převést výpočet integrálů složitějších na výpočet integrálů jednodušších.

Věta 50. *Existují-li v intervalu (a, b) neurčité integrály funkcí $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ a jsou-li $c_1, c_2, \ldots, c_n$ konstanty, existuje též neurčitý integrál funkce $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)$ v intervalu (a, b) a jest*

$$\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,\mathrm{d}x = c_1 \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int f_2(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + c_n \int f_n(x)\,\mathrm{d}x + C \tag{12}$$

v intervalu (a, b), kde C je konstanta.[5])

[5]) „Integrační konstantu" C mohu ovšem libovolně změnit, změním-li hodnotu integrační konstanty v integrálu na levé straně rovnice (12); mohu též docílit toho, že $C = 0$. My budeme obyčejně v takových rovnicích mezi neurčitými integrály tuto integrační konstantu vynechávat a psát např. místo rovnice (12) rovnici

$$\int (c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,\mathrm{d}x = c_1 \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + c_n \int f_n(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{12'}$$

Této rovnici je ovšem nutno rozumět takto: zvolím-li libovolně integrační konstanty v integrálech $\int f_1(x)\,\mathrm{d}x, \ldots, \int f_n(x)\,\mathrm{d}x$, mohu integrační konstantu v integrálu $\int (c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,.\,\mathrm{d}x$ zvolit tak, aby platila rovnice (12'); kdybych ovšem tuto konstantu zvolil jinak, nebyly by obě strany rovnice (12') sobě rovny, nýbrž lišily by se o konstantu. Obdobně je nutno rozumět i všem dalším rovnicím mezi neurčitými integrály, v nichž je integrační konstanta vynechána. Doufám, že čtenáři je věc dostatečně jasná, a nebudu již proto tuto poznámku později opakovat.

Důkaz. Položme (vše stále v intervalu (a, b)) $F_1(x) = \int f_1(x)\,dx, \ldots, F_n(x) = \int f_n(x)\,dx$, takže je $F_i'(x) = f_i(x)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Podle známé věty diferenciálního počtu (**DI** str. 215, v 4. vyd. str. 244, pozn. 3) je $(c_1 F_1(x) + \ldots + c_n F_n(x))' = c_1 F_1'(x) + \ldots + c_n F_n'(x) = c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x)$; tedy funkce

$$c_1 F_1(x) + \ldots + c_n F_n(x) = c_1 \int f_1(x)\,dx + \ldots + c_n \int f_n(x)\,dx$$

je primitivní funkcí k funkci $c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x)$ a liší se tedy od levé strany rovnice (12) pouze o jistou konstantu, jak jsme měli dokázat.

Poznámka 2. Všimněme si zvláštních případů rovnice (12):

$$\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx\,,$$
$$\int (f_1(x) - f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx - \int f_2(x)\,dx\,,$$
$$\int c f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$$

(kde c je konstanta). „Integrační konstantu" jsem vynechal. Přečtěte si poznámku[5]).

Příklad 1.

$$\int \left(3 \sin x - \sqrt{2}\,.\,x^3 + \frac{2}{1 + x^2}\right) dx =$$
$$= 3 \int \sin x\,dx - \sqrt{2} \int x^3\,dx + 2 \int \frac{dx}{1 + x^2} =$$
$$= -3 \cos x - \frac{\sqrt{2}}{4} x^4 + 2 \operatorname{arctg} x$$

(integrační konstantu budu od nynějška skoro vždy vynechávat).

§ 3. **Integrace per partes.** Věty předešlého paragrafu spočívaly na vzorcích pro počítání derivace. Také metody tohoto a následujícího paragrafu spočívají na vzorcích pro počítání derivace. Vzorec pro derivování součinu (**DI**, věta 124, str. 214, v 4. vyd. str. 243) dává nám tuto důležitou větu:

Věta 51. *Funkce $u(x)$, $v(x)$ nechť mají v intervalu (a, b) spojité derivace. Potom je*

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx \tag{13}$$

v intervalu (a, b).

Důkaz. Funkce $u(x)\,v(x)$ má v intervalu (a, b) derivaci $u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x)$, takže je

$$u(x)\,v(x) = \int (u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x))\,dx \tag{14}$$

v intervalu (a, b). Funkce $u(x)$, $v(x)$ jsou spojité v (a, b) (ježto tam mají derivaci; viz **DI**, věta 122, str. 213, v 4. vyd. str. 242); ježto také funkce $u'(x)$, $v'(x)$ jsou spojité v (a, b) podle předpokladu, jsou tam spojité též funkce $u(x)\,v'(x)$ a $u'(x)\,v(x)$. Podle věty 49 existují tedy v (a, b) integrály $\int u(x)\,v'(x)\,dx$, $\int u'(x)\,v(x)\,dx$. Podle věty 50 lze tedy rovnici (14) psát ve tvaru $u(x)\,v(x) = \int u(x)\,v'(x)\,dx + \int u'(x)\,v(x)\,dx$; převedeme-li v této rovnici druhý integrál na levou stranu rovnice, dostaneme rovnici (13).

Vzorec (13) dává nám důležitou metodu k výpočtu neurčitých integrálů, tzv. *metodu integrace per partes* nebo *metodu částečné integrace*. Jak se jí používá, objasním na příkladech.

Příklad 1. Vypočtěte $\int xe^x\,dx$ (v intervalu $(-\infty, +\infty)$). Položme $u(x) = x$; tedy musíme položit $v'(x) = e^x$. Potom je $u'(x) = 1$; za $v(x)$ musíme vzít nějakou primitivní funkci k funkci $v'(x) = e^x$, zvolme tedy třeba $v(x) = e^x$ (mohli bychom ovšem též volit třeba $v(x) = e^x + 3$ nebo vůbec $v(x) = e^x + c$, kde c je libovolná konstanta, ale to by vedlo jen ke komplikaci výpočtu). Podle vzorce (13) je

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int 1\,.\,e^x\,dx = xe^x - e^x = e^x(x-1)\,.$$

Příklad 2. $\int x^2 \sin x\,dx$ (v intervalu $(-\infty, +\infty)$). Položme $u = x^2$, $v' = \sin x$, tedy $u' = 2x$, $v = -\cos x$; dostaneme

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\,dx\,;$$

zbývá vypočíst integrál napravo; položme $u = x$, $v' = \cos x$, $u' = 1$, $v = \sin x$, takže

$$\int x \cos x\,dx = x \sin x - \int \sin x\,dx = x \sin x + \cos x\,;$$

tedy celkem

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x\,.$$

(Chceme-li se přesvědčit, že jsme se při výpočtech nezmýlili, stačí zjistit, že je vskutku $(-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x)' = x^2 \sin x$.)

Příklad 3. $\int \lg x\,dx$ (v intervalu $(0, +\infty)$). Položme $u = \lg x$, tedy $v' = 1$ ($u = 1$, $v' = \lg x$ by nevedlo k cíli, ježto bychom neuměli vypočíst $v = \int \lg x\,dx$); tedy $u' = 1 : x$, $v = x$,

$$\int \lg x\,dx = x \lg x - \int 1\,.\,dx = x \lg x - x\,.$$

Příklad 4. $\int x^n e^x\,dx$ (n celé, $n \geqq 0$; interval $(-\infty, +\infty)$). Položme pro zkrácení $\int x^n e^x\,dx = I_n$; známe tedy $I_0 = \int e^x\,dx = e^x$. Položme (je-li $n > 0$) $u = x^n$, $v' = e^x$, $u' = nx^{n-1}$, $v = e^x$, takže $\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\,dx$, tj.

$$I_n = x^n e^x - nI_{n-1} \tag{15}$$

(n celé, $n > 0$). Vzorec (15) nám dovoluje „rekurentně" určit I_n: rovnice (15) nám dovoluje vyjádřit I_n pomocí I_{n-1}, potom (dosadíme-li do ní $n-1$ místo n) I_{n-1}

pomocí I_{n-2} atd., až nakonec I_1 pomocí I_0; a integrál I_0 známe. Např.: $I_3 = x^3e^x - 3I_2$, $I_2 = x^2e^x - 2I_1$, $I_1 = xe^x - 1 \cdot e^x$. Tedy celkem $I_3 = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x$.

Příklad 5. (Interval $(-\infty, +\infty)$.) Položme

$$K_n = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^n}$$

(n celé, $n > 0$). Známe $K_1 = \operatorname{arctg} x$ a hledáme tedy obdobnou rekurentní formuli, jako byla formule (15). Položíme

$$u = \frac{1}{(1 + x^2)^n}, \quad v' = 1, \quad u' = -\frac{2nx}{(1 + x^2)^{n+1}}, \quad v = x$$

a obdržíme:

$$K_n = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^n} = \frac{x}{(1 + x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1 + x^2)^{n+1}} dx =$$

$$= \frac{x}{(1 + x^2)^n} + 2n \int \frac{(1 + x^2) - 1}{(1 + x^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(1 + x^2)^n} +$$

$$+ 2n(K_n - K_{n+1});$$

tedy $K_n = x : (1 + x^2)^n + 2n(K_n - K_{n+1})$ a odtud řešením hledaný rekurentní vzorec

$$K_{n+1} = \frac{x}{2n(1 + x^2)^n} + \frac{2n - 1}{2n} K_n \tag{16}$$

(n celé kladné).

Příklad 6. $\int \frac{\lg x}{x} dx$ (interval $(0, +\infty)$). Položme $u = \lg x$, $v' = 1 : x$, $u' = 1 : x$, $v = \lg x$; dostáváme

$$\int \frac{\lg x}{x} dx = (\lg x)^2 - \int \frac{\lg x}{x} dx . \tag{17}$$

Zdánlivě jsme nepokročili: integrál vpravo není jednodušší než integrál vlevo. Ale ve skutečnosti je příklad již vyřešen; neboť z rovnice (17) je možno hledaný integrál vypočíst:

$$2 \int \frac{\lg x}{x} dx = (\lg x)^2, \qquad \int \frac{\lg x}{x} dx = \tfrac{1}{2}(\lg x)^2$$

Příklad 7. $\int e^x \sin x \, dx$ (interval $(-\infty, +\infty)$). Zde vede k cíli podobná myšlenka jako v příkl. 6, ale integrace per partes se musí provést dvakráte. Položme jednou $u = e^x$, $v' = \sin x$, $u' = e^x$, $v = -\cos x$; dostaneme

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \, .$$

Po druhé položme $u = \sin x$, $v' = e^x$, $u' = \cos x$, $v = e^x$; dostaneme

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \, .$$[6]

Sečtením a odečtením těchto dvou rovnic dostaneme hledaný integrál a k tomu ještě $\int e^x \cos x \, dx$:

$$\int e^x \sin x \, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \, ,$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \, .$$

Z těchto příkladů je snad aspoň částečně vidět, jak se metody integrace per partes užívá. Obyčejně se snažíme daný integrál upravit na tvar $\int uv' \, dx$ tak, aby integrál $\int u'v \, dx$ byl jednodušší než integrál daný; dovedeme-li $\int u'v \, dx$ vypočíst, jsme hotovi (příkl. 1, 3). Někdy musíme této metody použít několikráte (příkl. 2), přičemž leckdy dospějeme k užitečným rekurentním vzorcům (příkl. 4, 5). Při takovém rekurentním vzorci není neštěstí, vyjádříme-li naopak jednodušší integrál složitějším; např. v příkladě 5 jsme integrál K_n vyjádřili integrály K_n, K_{n+1}; pomohli jsme si potom tím, že jsme z oné rovnice vyjádřili integrál K_{n+1} integrálem K_n. Někdy dojdeme k cíli tím, že dostaneme ve formuli (13) tentýž integrál vpravo jako vlevo (příkl. 6); potom nám vzorec (13) dává rovnici, z níž lze hledaný integrál vypočíst (v příkl. 7 jsme obdobně našli dvě rovnice pro dva neznámé integrály). Máme-li touto metodou počítat $\int f(x) \, dx$, záleží úspěch na tom, podaří-li se nám vhodným způsobem uvést funkci $f(x)$ na tvar $f(x) = u(x) \, v'(x)$; jak se to v jednotlivých případech dělá, tomu lze se naučit hlavně z praxe; je proto vhodno vypočíst hodně příkladů toho druhu.

§ 4. Metoda substituční. Věty o derivování „složených funkcí" (viz věty 9, 10, 11 v kap. I) vedou k důležité větě pro výpočet neurčitých integrálů:

Věta 52. *Funkce $f(x)$ budiž spojitá v intervalu (a, b); funkce $\varphi(t)$ nechť má v intervalu (α, β) derivaci $\varphi'(t)$; pro každé t intervalu (α, β) nechť hodnota $\varphi(t)$ leží v intervalu (a, b). Potom platí v intervalu (α, β) rovnice*

$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt \, , \tag{18}$$

dosadíme-li do primitivní funkce, kterou nám představuje integrál na levé straně, $\varphi(t)$ za x.

[6]) Tím jsme tedy dostali dvě rovnice pro dva neznámé integrály

$$\int e^x \sin x \, dx \, , \quad \int e^x \cos x \, dx \, .$$

Důkaz. V intervalu (a, b) položme $F(x) = \int f(x)\,dx$.[7]) Naše věta nyní tvrdí, že v intervalu (α, β) je funkce $F(\varphi(t))$ primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$. To plyne však okamžitě z věty 10. Neboť funkce $\varphi(t)$ má derivaci v intervalu (α, β) a funkce $F(x)$ má derivaci $F'(x) = f(x)$ v intervalu (a, b); pro každé t intervalu (α, β) leží hodnota funkce $\varphi(t)$ v intervalu (a, b). Tedy podle citované věty 10 má funkce $F(\varphi(t))$ v intervalu (α, β) derivaci, jejíž hodnota je $F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$; tedy je vskutku funkce $F(\varphi(t))$ v intervalu (α, β) primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$.

Poznámka 1. Vzorec (18) se pamatuje velmi snadno: abychom z integrálu $\int f(x)\,dx$, který stojí vlevo, dostali integrál vpravo, dosazujeme především do integrované funkce $f(x)$ za x podle rovnice

$$x = \varphi(t)\,; \tag{19}$$

za druhé dosazujeme formálně za symbol dx podle rovnice

$$dx = \varphi'(t)\,dt\,; \tag{20}$$

všimněme si, že je to právě rovnice, kterou dostaneme diferencováním rovnice (19). (Viz **DI**, kap. VIII, § 4.) Výsledek je rovnice (18), kde vlevo je funkce proměnné x, vpravo funkce proměnné t; tato rovnice je (jsou-li splněny předpoklady věty 52) správná, dosadíme-li do levé strany za x podle rovnice (19). Celý postup se tedy formálně redukuje na mechanické dosazování (čili „substituci“) podle rovnice (19)[8]) a proto se metodě, obsažené ve větě 52, říká „metoda substituční“.

Vzorce (18) můžeme užít dvojím způsobem:

1. způsob. Máme vypočíst $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$. Jsou-li splněny předpoklady věty 52, můžeme výpočet převést na výpočet integrálu $\int f(x)\,dx$. Dovedeme-li vypočíst tento integrál, tj. dovedeme-li nalézt funkci $F(x)$, jež je primitivní funkcí k funkci $f(x)$, je předložený integrál vypočten; postup výpočtu lze naznačit stručně takto:

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx = F(x) = F(\varphi(t))\,.$$

Příklad 1. $\int \sin^3 t \cos t\,dt$[9]) (interval $(-\infty, +\infty)$). Na první pohled je patrno, že $\cos t\,dt$ je diferenciál funkce $\sin t$. Zavedeme proto substituci $x = \sin t$ a máme (předpoklady věty 52 jsou zřejmě splněny):

$$\int \sin^3 t \cos t\,dt = \int x^3\,dx = \tfrac{1}{4}x^4 = \tfrac{1}{4}\sin^4 t\,.$$

Příklad 2. $\int (1 + x^2)^n\,x\,dx$[10]) (interval $(-\infty, +\infty)$). Vidíme: $x\,dx$ je (až na scházející činitel 2) diferenciálem funkce $1 + x^2$; položme proto $1 + x^2 = u$, načež je $2x\,dx = du$, a počítejme (uvažme, že je zde stále $u > 0$):

[7]) Tento integrál existuje, ježto $f(x)$ je spojitá v (a, b); viz větu 49.

[8]) Ale nikdy nezapomeňte dosadit také za dx podle rovnice (20).

[9]) Užívám obvyklého označení $\sin^n x$, $\cos^n x$, $\lg^n x$ místo $(\sin x)^n$, $(\cos x)^n$, $(\lg x)^n$ apod.

[10]) Integrační proměnnou značím zde x a nikoliv t; volím úmyslně různá označení pro integrační proměnnou, aby si čtenář na to zvykl.

a) pro $n \neq -1$ jest $\int (1 + x^2)^n x \,dx = \frac{1}{2}\int (1 + x^2)^n \cdot 2x \,dx = \frac{1}{2}\int u^n \,du =$
$= \dfrac{u^{n+1}}{2(n+1)} = \dfrac{(1+x^2)^{n+1}}{2(n+1)}$;

b) pro $n = -1$ jest $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\lg|u| = \frac{1}{2}\lg u = \lg\sqrt{u} =$
$= \lg\sqrt{1+x^2}$.

Příklad 3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$. Zde se musíme omezit na nějaký interval, v němž $\sin x$ se nikdy nerovná nule; proveďme výpočet pro jednoduchost v intervalu $(0, \pi)$.[11]) Je $\sin x = 2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x$; zavedeme-li tedy $\frac{1}{2}x = t$, je $\frac{1}{2}\,dx = dt$ (tedy $0 < t < \frac{1}{2}\pi$), a máme

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x} = \int \frac{dt}{\sin t \cos t} = \int \frac{1}{\operatorname{tg} t}\,\frac{dt}{\cos^2 t}.$$

Ale $dt : \cos^2 t$ je diferenciál funkce $\operatorname{tg} t$; zaveďme tedy dále $\operatorname{tg} t = u$ (tedy $u > 0$), $dt : \cos^2 t = du$; dostaneme

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg} t}\,\frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{du}{u} = \lg|u| = \lg u = \lg \operatorname{tg} t = \lg \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x.$$

2. **způsob.** Máme vypočíst $\int f(x)\,dx$; snažíme se převést tento integrál substitucí $x = \varphi(t)$ na integrál $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$, který může být jednodušší než integrál $\int f(x)\,dx$. Abych věc učinil přehlednější, vyslovím výsledek jako zvláštní větu, ač v podstatě jde opět jen o větu 52.

Napřed však musíme předeslat jednu poznámku. Budiž $\varphi(t)$ funkce definovaná v intervalu (α, β); nechť tato funkce φ zobrazuje interval (α, β) na jistý interval (a, b).[12]) Potom tedy každé hodnotě x intervalu (a, b) odpovídá *aspoň* jedna hodnota t intervalu (α, β) tak, že platí rovnice

$$\varphi(t) = x, \quad t \in (\alpha, \beta). \tag{21}$$

Vyberme pro každé x intervalu (a, b) jednu hodnotu t intervalu (α, β) tak, aby platila rovnice (21);[13]) potom toto t bude funkcí proměnné x definovanou v intervalu

[11]) Doporučuji čtenáři, aby jako cvičení ukázal, že v každém intervalu $(k\pi, k\pi + \pi)$, kde k je libovolné celé číslo, jest $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \lg|\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x| = \lg((-1)^k \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x)$.

[12]) Tento výrok znamená (viz začátek § 1 v DI, kap. VII), že interval (a, b) je právě množinou všech hodnot $\varphi(t)$ pro všechna $t \in (\alpha, \beta)$.

[13]) Existuje-li ovšem *jen* jedna taková hodnota t, odpadá výběr.

(a, b); označme je znakem $\psi(x)$; hodnoty funkce $\psi(x)$ leží ovšem v intervalu (α, β). Pro každé x intervalu (a, b) bude pak splněna rovnice (21), dosadíme-li do ní za t hodnotu $\psi(x)$; tj. pro každé x intervalu (a, b) je $\varphi(\psi(x)) = x$.

Zvláště jednoduchý případ je ten, že funkce $\varphi(t)$ (zobrazující interval (α, β) na interval (a, b)) je spojitá a buďto rostoucí nebo klesající v intervalu (α, β). Potom totiž funkce $\varphi(t)$ nemůže nabývat jedné a téže hodnoty pro dvě různé hodnoty proměnné t z intervalu (α, β); tedy ke každé hodnotě x intervalu (a, b) existuje jedna a *jen* jedna hodnota t intervalu (α, β), pro kterou platí rovnice $\varphi(t) = x$. Tato hodnota t je tedy funkcí proměnné x,

$$t = \psi(x)\,, \tag{22}$$

definovanou v intervalu (a, b), a tuto funkci $\psi(x)$ nazýváme, jak víte, funkcí *inverzní* k funkci φ.[14]) Rovnice $\varphi(t) = x$ spolu s podmínkou, že t leží v intervalu (α, β), je potom splněna tehdy a jen tehdy, leží-li x v intervalu (a, b) a platí-li rovnice (22).

Nyní můžeme již vyslovit ohlášenou větu:

Věta 53. *Funkce $\varphi(t)$ nechť má derivaci v intervalu (α, β); nechť funkce φ zobrazuje interval (α, β) na interval (a, b). Definujme funkci $\psi(x)$ v intervalu (a, b) tak, aby pro každé x tohoto intervalu platila rovnice* (21), *když do ní za t dosadíme $\psi(x)$.*[15]) *Funkce $f(x)$ budiž spojitá v intervalu (a, b). Potom je v intervalu (a, b)*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

položíme-li v primitivní funkci, kterou nám představuje integrál vpravo, $t = \psi(x)$.

Poznámka 2. V praxi se zvláště často vyskytuje ten případ, že funkce $\varphi(t)$ je buď rostoucí nebo klesající v intervalu (α, β); potom ovšem funkce ψ je prostě funkcí inverzní k funkci φ.

Důkaz. Budiž $G(x)$ nějaká primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b), tj. nechť platí $G'(x) = f(x)$ v intervalu (a, b) (existence funkce $G(x)$ plyne ze spojitosti funkce $f(x)$, viz větu 49). V intervalu (α, β) je (protože hodnoty funkce $\varphi(t)$ leží v (a, b), viz větu 10)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(G(\varphi(t))) = G'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,;$$

funkce $G(\varphi(t))$ je tedy primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ v intervalu (α, β). Budiž $H(t)$ libovolná primitivní funkce k funkci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ v intervalu (α, β) (existenci takové primitivní funkce jsme právě dokázali, neboť $G(\varphi(t))$ je taková primitivní funkce); tj. budiž

$$H(t) = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

(v intervalu (α, β)).

[14]) O pojmu inverzní funkce viz DI, kap. VII, § 1.

[15]) Viz to, co jsme řekli před větou 53.

Máme dokázat, že funkce $H(\psi(x))$ je v intervalu (a, b) funkcí primitivní k funkci $f(x)$.

Ježto funkce $G(\varphi(t))$ je – stejně jako funkce $H(t)$ – primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ v (α, β), jest (podle věty 48)

$$G(\varphi(t)) = H(t) + c \tag{23}$$

v intervalu (α, β), kde c je konstanta. Budiž x libovolné číslo intervalu (a, b) a položme $t = \psi(x)$, takže je $x = \varphi(t)$ a t leží v intervalu (α, β); z rovnice (23) plyne pak

$$G(x) = H(\psi(x)) + c\,;$$

tato rovnice platí v celém intervalu (a, b). Ježto funkce $G(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v (a, b), platí ovšem totéž o funkci $H(\psi(x)) = G(x) - c$, jak jsme měli dokázat.

Použití této věty se opět snadno pamatuje. Chci vypočíst $\int f(x)\,dx$; substitucí $x = \varphi(t)$ dostanu $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$; předpokládejme, že tento integrál dovedeme vypočíst – tento integrál je tedy jistou funkcí $H(t)$; zavedeme-li do této funkce $H(t)$ opět x podle rovnice $t = \psi(x)$, dostaneme hledaný integrál $\int f(x)\,dx = H(\psi(x))$ (jsou-li ovšem všechny podmínky věty 53 splněny). Stručně lze znázornit postup počtu tímto schématem:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = H(t) = H(\psi(x))\,.$$

Příklad 4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 4}$ (interval $(-\infty, +\infty)$). Zavedu $x = 2t$ (tedy $t = \frac{1}{2}x$), $dx = 2\,dt$; $x^2 + 4 = 4(t^2 + 1)$, takže

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4} = \int \frac{2\,dt}{4(t^2 + 1)} = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} t = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\tfrac{1}{2}x\,.$$

Příklad 5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ (interval $(-\infty, +\infty)$). Položme $x = \operatorname{cotg} t$ $(0 < t < \pi)$. Probíhá-li t interval $(0, \pi)$, probíhá $\operatorname{cotg} t$ vskutku, a to klesajíc, právě interval $(-\infty, +\infty)$. Jest pak (ježto $\sin t > 0$)

$$\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t}} = \left|\frac{1}{\sin t}\right| = \frac{1}{\sin t}\,,$$

$dx = -\dfrac{dt}{\sin^2 t}$; tedy (viz příkl. 3)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = -\int \frac{dt}{\sin t} = -\lg \operatorname{tg}\frac{t}{2} = \lg \operatorname{cotg}\frac{t}{2}\,; \tag{24}$$

do posledního výrazu musíme za t dosadit příslušnou inverzní funkci, tj. $t = \operatorname{arccotg} x$ (viz **DI** str. 206, v 4. vyd. str. 234), takže

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \lg \operatorname{cotg} \left(\tfrac{1}{2} \operatorname{arccotg} x\right) \tag{25}$$

(v intervalu $(-\infty, +\infty)$).

Ale výsledek lze psát v jednodušším tvaru. Podle rovnice (24) je naší úlohou vyjádřit funkci $\lg \operatorname{cotg} \frac{1}{2}t$ pomocí x; je však $x = \operatorname{cotg} t$, takže v podstatě jde o to, vyjádřit $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t$ pomocí $\operatorname{cotg} t$. Jak je známo z trigonometrie, je

$$x = \operatorname{cotg} t = \frac{\operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2}t - 1}{2 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}t},$$

odtud pak $(\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t)^2 - 2x \operatorname{cotg} \frac{1}{2}t - 1 = 0$, což je kvadratická rovnice pro $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t$; řešením dostaneme $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$. Které znamení platí? Jest $x^2 + 1 > > x^2 \geqq 0$ a tedy $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x|$; je tedy $|x| < \sqrt{x^2 + 1}$, a tedy $x - - \sqrt{x^2 + 1} < 0 < x + \sqrt{x^2 + 1}$. Ježto je $0 < \frac{1}{2}t < \frac{1}{2}\pi$, je $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t > 0$; nemůže tedy být $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t = x - \sqrt{x^2 + 1}$ a tedy je $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Podle (24) je tedy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lg \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

(v intervalu $(-\infty, +\infty)$), což je hledaný výsledek. Srovnáním s rovnicí (25) plyne, že je $\lg \operatorname{cotg} (\frac{1}{2} \operatorname{arccotg} x) = \lg (x + \sqrt{x^2 + 1}) + c$, kde c je konstanta; dosadíme-li $x = 0$, dostaneme, že $c = 0$. Odlogaritmováním dostáváme pak rovnici $\operatorname{cotg} (\frac{1}{2} \operatorname{arccotg} x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, kterou bychom ovšem mohli jednodušeji odvodit přímo.[16])

Následuje několik příkladů na metodu substituční v jednom nebo druhém tvaru.

Příklad 6. $\displaystyle\int \frac{dx}{ax + b} \left(a \neq 0, \text{ intervaly} \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right) \text{ a } \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)\right)$. Položme $ax + b = t$, tedy $a\,dx = dt$,

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a} \lg |t| = \frac{1}{a} \lg |ax + b|.$$

Příklad 7. Předešlý příklad je speciálním případem integrálu $\int f(ax + b)\,dx$ $(a \neq 0)$. Substitucí $ax + b = t$, $a\,dx = dt$ dostaneme $\int f(ax + b)\,dx = a^{-1} \int f(t)\,dt$. Známe-li $\int f(x)\,dx = F(x)$, bude tedy

$$\int f(ax + b)\,dx = \frac{1}{a} \int f(t)\,dt = \frac{1}{a} F(t) = \frac{1}{a} F(ax + b).$$

[16]) Vlastně jsme toto přímé odvození již před chvílí provedli. Najde to čtenář?

Tedy: z integrálu $\int f(x)\,dx$ dostaneme ihned $\int f(ax + b)\,dx$, píšeme-li ve funkci $F(x) = \int f(x)\,dx$ výraz $ax + b$ místo x a dělíme-li číslem a. Tohoto obratu se velmi často užívá a nebudu jej proto příště podrobně uvádět. Např.

$$\int e^{2x+3}\,dx = \tfrac{1}{2}e^{2x+3}\,, \qquad \int \cos 3x\,dx = \tfrac{1}{3}\sin 3x\,,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}} = \tfrac{1}{2}\arcsin 2x\,,$$

$$\int (-x + 2)^7\,dx = -\tfrac{1}{8}(-x + 2)^8$$

atd. Čtenář nechť si v tomto a v následujícím příkladě sám rozváží, v kterých intervalech uvedené výsledky platí.

Příklad 8. Často se užívá tohoto obratu: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ počítáme substitucí $f(x) = t$, $f'(x)\,dx = dt$, $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \lg|t| = \lg|f(x)|$. Derivováním snadno zjistíme, že tento vzorec platí v každém otevřeném intervalu, v němž $f'(x)$ existuje a v němž je stále $f(x) \neq 0$. Např.:

$$\int \frac{x^2dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{x^3 + 1} = \tfrac{1}{3}\lg|x^3 + 1|\,;$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\lg|\cos x|\,;$$

$$\int \operatorname{cotg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \lg|\sin x|\,.$$

Příklad 9. $\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n}\,dx$; přitom nechť je n celé kladné a rovnice $x^2 + px + q = 0$ nechť nemá reálných kořenů, takže jmenovatel $(x^2 + px + q)^n$ je různý od nuly pro všechna reálná x. To nastane – jak je vám známo ze školy – tehdy a jen tehdy, je-li $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$; ostatně si tento výsledek odvodíme v kap. IV, § 1. Integrál budeme hledat v intervalu $(-\infty, +\infty)$. Derivace výrazu $x^2 + px + q$ je $2x + p$; upravme tedy daný integrál takto:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n}\,dx = \tfrac{1}{2}A\int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n}\,dx + \tag{26}$$
$$+ (B - \tfrac{1}{2}Ap)\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}$$

(to je pravda, neboť $Ax + B = \frac{1}{2}A(2x + p) + B - \frac{1}{2}Ap$).

V prvním integrálu vpravo proveďme substituci $x^2 + px + q = t$, $(2x + p)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, takže je

$$\int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n}\,;$$

tento integrál dovedeme vypočíst.

Druhý integrál snažíme se převést na $\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + 1)^n}$, který též umíme vypočíst (viz § 3, příkl. 5). To provedeme takto: první dva členy trojčlenu $x^2 + px + q$ doplníme na čtverec dvojčlenu prvního stupně, tj. píšeme $x^2 + px + q = (x + \frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2 = (x + \frac{1}{2}p)^2 + r$, kde klademe $r = q - \frac{1}{4}p^2$; je ovšem $r > 0$. Výraz $(x + \frac{1}{2}p)^2 + r$ se snažíme uvést na tvar $rt^2 + r = r(t^2 + 1)$; toho dosáhneme substitucí $x + \frac{1}{2}p = \sqrt{r}\,.\,t$ (čili $x = \sqrt{r}\,.\,t - \frac{1}{2}p$), $\mathrm{d}x = \sqrt{r}\,.\,\mathrm{d}t$ (odmocnina nám nevadí, ježto je $r > 0$). Dostáváme tedy $x^2 + px + q = rt^2 + r = r(t^2 + 1)$ a tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + px + q)^n} = \int \frac{\sqrt{r}\,\mathrm{d}t}{r^n(t^2 + 1)^n} = \frac{1}{r^{n-\frac{1}{2}}}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + 1)^n}\,;$$

tím je tedy též druhý integrál z rovnice (26) převeden na integrál známý.

§ 5. **Integrace per partes a metoda substituční pro určité integrály.** Metody integrace per partes a metody substituční můžeme užít také přímo pro integrály určité. Odvodím dvě příslušné věty:

Věta 54. *Funkce $u(x)$, $v(x)$ nechť mají v $\langle a, b\rangle$ derivace $u'(x)$, $v'(x)$,[17]) jež jsou spojité v $\langle a, b\rangle$. Potom jest*

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{27}$$

Poznámka 1. Rozdíl $f(b) - f(a)$, který se zde i v dalším často vyskytuje, značíme pro zkrácení též $[f(x)]_{x=a}^{x=b}$ nebo ještě kratčeji $[f(x)]_a^b$; tedy např. $[\sin x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \sin\frac{1}{2}\pi - \sin 0 = 1$, $[x^2]_1^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, $[u(x)\,v(x)]_a^b = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a)$.

Důkaz. Z existence derivací plyne spojitost funkcí $u(x)$, $v(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ (viz pozn.[17])); tedy existují integrály $\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$ (viz větu 38), a podle věty 24 je

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x))\,\mathrm{d}x\,. \tag{28}$$

[17]) Znakem $u'(x)$ a slovem „derivace" rozumím zde pro $x = a$ derivaci zprava $u'_+(a)$, pro $x = b$ derivaci zleva $u'_-(b)$, pro $a < x < b$ pak vskutku derivaci $u'(x)$. Podobně pro funkci $v'(x)$.

Poznamenejme: ježto funkce $u(x)$ má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) a mimoto derivaci zprava v bodě a a derivaci zleva v bodě b, je podle věty 122 v DI, str. 213, v 4. vyd. str. 242 funkce $u(x)$ spojitá v intervalu (a, b) a mimoto spojitá zprava v bodě a a zleva v bodě b, tj. $u(x)$ je funkce spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$. Podobně funkce $v(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Funkce $u(x)\,v(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ a má v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) derivaci $u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x)$. Podle věty 39 je tedy

$$\int_a^b (u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x))\,\mathrm{d}x = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a)\,. \tag{29}$$

Ze vzorců (28), (29) plyne však okamžitě hledaný vzorec (27).

Poznámka 2. Vzorec (27) platí – za obdobných předpokladů – též tehdy, je-li $a > b$. Neboť vyměním-li v tomto vzorci a a b, změní obě strany pouze své znamení.

Příklad 1. $\int_0^\pi x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$; položme $u = x^2$, $v' = \sin x$, $u' = 2x$, $v = -\cos x$; dostaneme $\int_0^\pi x^2 \sin x\,\mathrm{d}x = [-x^2 \cos x]_0^\pi + 2\int_0^\pi x \cos x\,\mathrm{d}x = \pi^2 + 2\int_0^\pi x \cos x\,\mathrm{d}x$. Položme nyní $u = x$, $v' = \cos x$, $u' = 1$, $v = \sin x$; dostaneme $\int_0^\pi x \cos x\,\mathrm{d}x = [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 0 + [\cos x]_0^\pi = -2$. Tedy celkem $\int_0^\pi x^2 \sin x\,\mathrm{d}x = \pi^2 - 4$.

Příklad 2. Položme $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x$ (n celé, $n \geqq 0$). Pro $n > 1$ položme $u = \sin^{n-1} x$, $v' = \sin x$, $u' = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x$, $v = -\cos x$, takže je

$$I_n = -[\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\frac{1}{2}\pi} + (n-1)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,\mathrm{d}x =$$
$$= (n-1)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-2} x\,(1 - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x = (n-1)\,I_{n-2} - (n-1)\,I_n\,,$$

tedy

$$nI_n = (n-1)\,I_{n-2}\,, \quad I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}\,.$$

Z této rekurentní formule plyne ihned pro sudé $n > 1$ ($n = 2m$, m celé kladné)

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\cdots\frac{1}{2}\,I_0 \tag{30}$$

a pro liché $n > 1$ ($n = 2m + 1$, m celé kladné)

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}\cdots\frac{2}{3}\,I_1\,. \tag{31}$$

Tyto dva vzorce nám okamžitě dávají I_n pro každé celé $n > 0$, neboť I_0 a I_1 dovedeme vypočíst:

$$I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{d}x = [x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \tfrac{1}{2}\pi\,, \quad I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = -[\cos x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 1\,.$$

Poznámka 3. Příklad 2 nás vede k zajímavému vyjádření čísla π. Ježto v intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ jest $0 \leqq \sin x \leqq 1$, jest $\sin^n x \geqq \sin^{n+1} x$ a věta 28 dává pro celé $m \geqq 1$ nerovnosti $I_{2m} \geqq I_{2m+1} \geqq I_{2m+2}$, tj. podle (30), (31)

$$\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2m-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2m)}\cdot\frac{\pi}{2} \geqq \frac{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2m)}{3\,.\,5\,.\,7\ldots(2m+1)} \geqq$$
$$\geqq \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2m-1)(2m+1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2m)(2m+2)}\cdot\frac{\pi}{2}\,.$$

Odtud ihned

$$\frac{\pi}{2} \geqq \left(\frac{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots (2m)}{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2m-1)}\right)^2 . \frac{1}{2m+1} \geqq \frac{2m+1}{2m+2} . \frac{\pi}{2} .$$

Ježto obě křídla mají zde pro $m \to \infty$ limitu $\frac{1}{2}\pi$, platí též (viz **DI**, věta 61, str. 86, v 4. vyd. str. 91)

$$\frac{1}{2}\pi = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots (2m)}{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2m-1)}\right)^2 . \frac{1}{2m+1} =$$

(32)

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{2 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 6 \ldots\ 2m \,.\, 2m}{1 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots (2m-1) \,.\, (2m+1)} .$$

Násobím-li zlomek vpravo výrazem $(2m + 2) : (2m + 1)$, jenž má limitu 1, obdržím

$$(33) \qquad \frac{1}{2}\pi = \lim_{m\to\infty} \frac{2 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 6 \ldots\ 2m \,.\, 2m \quad .\, (2m+2)}{1 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots (2m-1) \,.\, (2m+1) \,.\, (2m+1)} .$$

Oba tyto vzorce (32), (33) — jež tvoří tzv. *Wallisovu formuli* — si lze snadno pamatovat takto (chceme-li): napišme formálně zlomek

$$\frac{2 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 8 \ldots}{1 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 9 \ldots} ;$$

ponechám-li zde v čitateli i ve jmenovateli n činitelů, dostanu zlomek, jenž pro $n \to \infty$ má limitu $\frac{1}{2}\pi$ (pro sudé n viz (32), pro liché n viz (33)).

Ze vzorce (31) plyne dále

$$(34) \qquad \sqrt{2m+1}\, I_{2m+1} = \frac{2 \,.\, 4 \ldots (2m-2) \,.\, 2m}{1 \,.\, 3 \ldots (2m-3)(2m-1)} . \frac{1}{\sqrt{2m+1}} .$$

Ale čtverec pravé strany má limitu $\frac{1}{2}\pi$ podle (32); tedy má pravá strana v (34) limitu $\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$,[18]) tj.

$$(35) \qquad \lim_{m\to\infty} \sqrt{2m+1}\, I_{2m+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi} .$$

Pro sudé $n = 2m$ užijme nerovností

$$\sqrt{2m}\, I_{2m-1} \geqq \sqrt{2m}\, I_{2m} \geqq \sqrt{2m}\, I_{2m+1} .$$

Zde má levé i pravé křídlo limitu $\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ $\Big($neboť např. $\sqrt{2m} I_{2m-1} = \sqrt{\dfrac{2m}{2m-1}} .$

[18]) Je-li $a_m > 0$, $\lim a_m = \alpha$, je $\lim \sqrt{a_m} = \sqrt{\alpha}$; viz třeba cvič. 3 v **DI**, kap. II, § 2, str. 88, v 4. vyd. str. 93.

$\cdot \sqrt{2m-1}\, I_{2m-1}$, a první činitel vpravo má limitu 1, druhý $\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ podle (35)) a tedy $\lim \sqrt{2m}\, I_{2m} = \sqrt{\frac{1}{2}\pi}$. Odtud a z (35) plyne tedy celkem

(36) $$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n}\, I_n = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}\,.$$

Pro $n \to \infty$ konverguje tedy I_n k nule, a to asi tak rychle jako $n^{-\frac{1}{2}}$.

O substituční metodě pro určité integrály jedná tato věta:

Věta 55. *Funkce $\varphi(t)$ nechť má v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojitou derivaci $\varphi'(t)$ (přičemž slovo „derivace" a znak $\varphi'(t)$ nechť pro $t = \alpha$ znamená derivaci zprava a pro $t = \beta$ derivaci zleva).*[19]) *Funkce $f(x)$ nechť je spojitá v intervalu $\langle A, B \rangle$ a pro každé t intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ budiž $A \leqq \varphi(t) \leqq B$. Položíme-li $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, jest*

(37) $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt\,.$$

Poznámka 4. Zde jsme mluvili o intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, takže jsme předpokládali $\alpha < \beta$; ale také pro $\alpha > \beta$ platí vzorec (37) za příslušných předpokladů: neboť ve vzorci (37) vlevo i vpravo můžeme vyměnit dolní integrační mez za horní a naopak (násobíme prostě obě strany činitelem -1).

Poznámka 5. Vzorce (37) můžeme použít buď k výpočtu integrálu vlevo, známe-li integrál vpravo nebo k výpočtu integrálu vpravo, známe-li integrál vlevo. Mechanismus je stejný jako u neurčitých integrálů, jen musíme dát pozor na to, že se také *meze* mění podle substituce $x = \varphi(t)$, totiž $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Zde musíme dát vždy pozor na to, jsou-li podmínky věty splněny: u neurčitých integrálů můžeme se po výpočtu dodatečně derivováním přesvědčit, zda jsme správně počítali; u *určitých* integrálů tuto možnost zkoušky nemáme.

Důkaz věty 55. Ježto funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $\langle A, B \rangle$, existuje podle věty 38 integrál $\int_A^B f(u)\, du$. Položme

(38) $$F(x) = \int_A^x f(u)\, du\,;$$

podle věty 36 (a podle poznámky[38]) pod čarou k větě 36) je funkce $F(x)$ definována v intervalu $\langle A, B \rangle$ a má v tomto uzavřeném intervalu derivaci $F'(x) = f(x)$ (přičemž ovšem znak $F'(A)$ značí derivaci zprava v bodě A a znak $F'(B)$ značí derivaci zleva v bodě B). Ježto funkce $\varphi(t)$ má derivaci v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$[20]) a ježto hodnoty funkce $\varphi(t)$ leží v intervalu $\langle A, B \rangle$, má funkce $F(\varphi(t))$ podle věty 11 v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ derivaci $F'(\varphi(t))\, \varphi'(t) = f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$ (v bodě $t = \alpha$ rozumím slovem „derivace" opět derivaci zprava, v bodě $t = \beta$ derivaci zleva). Funkce $F(\varphi(t))$ je tedy spojitá

[19]) Funkce $\varphi(t)$ je tedy spojitá v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$; viz obdobnou úvahu o funkci $u(x)$ v pozn. [17]) pod čarou.

[20]) V bodě α zprava, v bodě β zleva.

v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$[21]) a má v každém bodě otevřeného intervalu (α, β) derivaci $f(\varphi(t))\,.\,\varphi'(t)$. Funkce $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ je spojitá v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$[22]) a tedy existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ (podle věty 38). Podle věty 39 je tedy

$$(39) \qquad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

(neboť $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$). Ale podle (38) je (ježto hodnoty $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ leží v intervalu $\langle A, B\rangle$)

$$F(b) - F(a) = \int_A^b f(u)\,\mathrm{d}u - \int_A^a f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u\,;$$

dosadíme-li z této rovnice do pravé strany rovnice (39), dostáváme rovnici (37), neboť $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Příklad 3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 3x + 1}}$; zkusme substituci $\sqrt{x^2 + 3x + 1} = x + t$, tedy

$$(40) \qquad x^2 + 3x + 1 = x^2 + 2xt + t^2\,, \quad x = \frac{t^2 - 1}{3 - 2t}\,,$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-2t^2 + 6t - 2}{(3 - 2t)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Z rovnice $t = \sqrt{x^2 + 3x + 1} - x$ plyne: pro $x = 0$ je $t = 1$, pro $x = 1$ je $t = \sqrt{5} - 1$. Zkusme, jsou-li splněny všechny předpoklady: máme zde $\varphi(t) = \dfrac{t^2 - 1}{3 - 2t}$; to je v intervalu $\langle 1, \sqrt{5} - 1\rangle$ funkce rostoucí (neboť čitatel $t^2 - 1$ je nezáporný a roste, jmenovatel $3 - 2t$ je kladný a klesá), mající v tomto intervalu spojitou derivaci. Pro $t = 1$ je $\varphi(t) = 0$, pro $t = \sqrt{5} - 1$ je $\varphi(t) = \dfrac{5 - 2\sqrt{5} + 1 - 1}{3 - 2\sqrt{5} + 2} = 1$, takže pro každé t intervalu $\langle 1, \sqrt{5} - 1\rangle$ je $0 \leqq \varphi(t) \leqq 1$. Funkce $f(x) = 1 : \sqrt{x^2 + 3x + 1}$ je pak v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ spojitá. Můžeme tedy použít věty 55.[23]) Musíme ještě do $\sqrt{x^2 + 3x + 1}$ zavést proměnnou t; $\sqrt{x^2 + 3x + 1} = x + t = \dfrac{t^2 - 1}{3 - 2t} + t = \dfrac{-t^2 + 3t - 1}{3 - 2t}$. Tedy

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 3x + 1}} = \int_1^{\sqrt{5}-1} \frac{3 - 2t}{-t^2 + 3t - 1} \cdot \frac{-2t^2 + 6t - 2}{(3 - 2t)^2}\,\mathrm{d}t =$$

---

[21]) Viz obdobnou úvahu o funkci $u(x)$ v poznámce [17]) pod čarou.

[22]) Neboť $\varphi(t)$ je spojitá v $\langle\alpha, \beta\rangle$ a nabývá jen hodnot intervalu $\langle A, B\rangle$ a funkce $f(x)$ je spojitá v $\langle A, B\rangle$; tedy funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v $\langle\alpha, \beta\rangle$ podle věty 5 a funkce $\varphi'(t)$ je spojitá v $\langle\alpha, \beta\rangle$ podle předpokladu.

[23]) Připomeňme, že pro naše hodnoty t, x plyne z druhé rovnice (40) první rovnice (40) a z této rovnice odmocněním rovnice $\sqrt{x^2 + 3x + 1} = x + t$ (znamení je totiž správně voleno, ježto obě strany jsou kladné); můžeme tedy této rovnice — z níž jsme vlastně vyšli — skutečně použít při provádění substituce.

$$= 2\int_1^{\sqrt{5}-1} \frac{dt}{3-2t} = \frac{2}{-2}\left[\lg|3-2t|\right]_1^{\sqrt{5}-1} = -\lg|3-2\sqrt{5}+2| =$$

$$= -\lg\sqrt{5}(\sqrt{5}-2) = \lg\frac{1}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)} = \lg\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}} = \lg\left(1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

Příklad 4.[24]) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+x+1}$; podle vzoru příkl. 9, § 4 píšeme $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ a klademe $x+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}t$, $dx = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,dt$, takže $x^2+x+1 = \frac{3}{4}(t^2+1)$. Je $t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ a tedy platí: roste-li x od -1 do $+1$, roste t od $-1:\sqrt{3}$ do $\sqrt{3}$. Tedy

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+x+1} = \int_{-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg} t\right]_{-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Příklad 5. $\int_1^2\frac{x\,dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$; substituce $x^2+1=t$; roste-li x od 1 do 2, roste též t, a to od 2 do 5; dále je $2x\,dx = dt$ a tedy

$$\int_1^2\frac{x\,dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int_2^5\frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = -\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]_2^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Cvičení[25])

1. $\int x^n\lg x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\lg x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ (pro $n \neq -1$; případ $n = -1$ byl vyřešen v § 3, příkl. 6).

2. $\int\operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\lg(1+x^2)$.

3. $\int\arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

4. Z výsledku § 3, příkl. 4 odvoďte pro celé $n > 0$

$$\int x^n e^x\,dx = n!\,e^x\left(\frac{x^n}{n!}-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x}{1!}+(-1)^n\right).$$

5. Položme $I_n = \int x^n\cos x\,dx$, $K_n = \int x^n\sin x\,dx$; potom je

$$I_n = x^n\sin x - nK_{n-1},\quad K_n = -x^n\cos x + nI_{n-1}.$$

Vypočtěte z těchto vzorců třeba I_3.

[24]) V příkladě 4 a 5 přenechávám podrobné vyšetření podmínek čtenáři.

[25]) Při neurčitých integrálech nechť čtenář sám uváží, ve kterých intervalech uvedené výsledky platí.

6. Pro $n \geqq 0$ položme $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} x^n \cos x \, dx$, $K_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} x^n \sin x \, dx$; z výsledku předcházejícího cvičení odvoďte vzorce (pro $n \geqq 2$)

$$I_n = (\tfrac{1}{2}\pi)^n - n(n-1) I_{n-2}, \quad K_n = n(\tfrac{1}{2}\pi)^{n-1} - n(n-1) K_{n-2}.$$

Odtud např. pro sudé $n > 0$

$$I_n = (\tfrac{1}{2}\pi)^n - n(n-1)(\tfrac{1}{2}\pi)^{n-2} +$$
$$+ n(n-1)(n-2)(n-3)(\tfrac{1}{2}\pi)^{n-4} - \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}n} \cdot n!(\tfrac{1}{2}\pi)^0.$$

Odvoďte obdobný vzorec pro liché $n > 0$ a též pro K_n (přechod ke K_n je snadný, neboť pro $n \geqq 1$ je $K_n = nI_{n-1}$).

7. Z § 3, příkl. 7 znáte vzorce

$$\int e^x \sin x \, dx = \tfrac{1}{2}e^x (\sin x - \cos x), \quad \int e^x \cos x \, dx = \tfrac{1}{2}e^x (\sin x + \cos x).$$

Položíme-li

$$I_n = \int x^n e^x \sin x \, dx, \quad K_n = \int x^n e^x \cos x \, dx,$$

platí

$$I_n = \tfrac{1}{2}x^n e^x (\sin x - \cos x) - \tfrac{1}{2}n(I_{n-1} - K_{n-1}),$$
$$K_n = \tfrac{1}{2}x^n e^x (\sin x + \cos x) - \tfrac{1}{2}n(I_{n-1} + K_{n-1}).$$

Ježto I_0, K_0 známe, dovedeme vypočíst I_n, K_n pro každé celé $n > 0$ (proveďte to pro některá n).

8. Položme $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx$; odvodíme vzorce, kterými je možno vypočíst $I_{m,n}$ pro všechna celá m, n. Položíme-li $(m+1)\sin^m x \cos x = u'$, $\cos^{n-1} x = v$, máme ihned

$$(\alpha) \qquad (m+1) I_{m,n} = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1) I_{m+2,n-2}.$$

Užijeme-li vztahu $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, máme $I_{m+2,n-2} = I_{m,n-2} - I_{m,n}$ a tedy

$$(\beta) \qquad (m+n) I_{m,n} = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1) I_{m,n-2}.$$

Píšeme-li v (α) m, n místo $m + 2$, $n - 2$, máme

$$(\gamma) \qquad (m-1) I_{m-2,n+2} = \sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (n+1) I_{m,n}$$

a odtud podobně jako předtím

$$(\delta) \qquad (m+n) I_{m,n} = -\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (m-1) I_{m-2,n}.$$

Ze vzorců (β), (δ) plyne: je-li $m + n \neq 0$, lze $I_{m,n}$ vyjádřit integrálem $I_{m,n-2}$ nebo $I_{m-2,n}$; čteme-li tyto vzorce pozpátku, vidíme: je-li $n + 1 \neq 0$ resp. $m + 1 \neq 0$, lze integrál $I_{m,n}$ vyjádřit integrálem $I_{m,n+2}$ resp. $I_{m+2,n}$. Tedy lze každý integrál $I_{m,n}$ vyjádřit oněmi integrály $I_{m,n}$, kde m a n jsou rovny některému z čísel 0, 1, -1. Těchto 9 integrálů však dovedeme vypočíst, viz následující cvičení.

9. $I_{0,0}$, $I_{0,1}$, $I_{1,0}$ známe; $I_{1,1} = \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x$;

$$I_{-1,-1} = \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \lg |\operatorname{tg} x|;$$

$$I_{-1,0} = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x} = \lg |\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x|;$$

$$I_{0,-1} = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(\frac{1}{2}\pi - x)} = \lg |\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi)|;$$

$$I_{1,-1} = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\lg|\cos x|\,; \quad I_{-1,1} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \lg|\sin x|\,.$$

10. Ze vzorců cvičení 8 a 9 odvoďte

$$\int \frac{\sin^6 x}{\cos^3 x}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^7 x}{\cos^2 x} + \sin^5 x + \tfrac{5}{3}\sin^3 x + 5\sin x - 5\lg\left|\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi\right)\right|\right);$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4 x \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{32}\pi\,; \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx = \tfrac{1}{3}\,; \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{dx}{\cos^4 x} = \tfrac{4}{3}\,.$$

11. Ze vzorce $\operatorname{tg}^n x = \operatorname{tg}^{n-2} x \,.\, \dfrac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^{n-2} x$ plyne pro $n \neq 1$

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx\,.$$

Tento vzorec je obsažen jako speciální případ v jednom ze vzorců (α), (β), (γ), (δ) (cvič. 8); v kterém?

12. Integrál $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x\,dx$ z cvičení 8 lze ještě jinak počítat, je-li aspoň jedno z čísel m, n liché. Budiž např. $n = 2k + 1$ liché. Substituce $\sin x = t$, $\cos^2 x = 1 - t^2$ dává

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x\,dx = \int t^m (1 - t^2)^k\,dt\,.$$

Tím je výpočet převeden na výpočet integrálu racionální funkce (je-li ovšem m, k celé); integrály racionálních funkcí naučíme se obecně počítat v kap. IV. Zvláště jednoduchý je případ $k \geqq 0$. Proveďte obdobnou úvahu pro m liché.

13. Podle metody cvičení 12 vypočtěte

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}\,dx = -\frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{1}{3\sin^3 x}\,,$$

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x}\,dx = \frac{1}{6\cos^6 x} - \frac{1}{2\cos^4 x} + \frac{1}{2\cos^2 x}\,,$$

$$\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx = \tfrac{1}{5}\sin^5 x - \tfrac{1}{7}\sin^7 x\,.$$

14. $\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x)\,.$
Návod: integrujte per partes; v integrálu vpravo pište

$$\frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = -\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,.$$

15. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = -\arcsin\left|\frac{1}{x}\right| \left(\text{substituce } x = \frac{1}{t}\right).$$

(Při výpočtu dávejte pozor na to, že je $\sqrt{a^2} = |a|$; v kterých intervalech platí odvozený vzorec?)

16. $$\int_{-1/4}^{5/4} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2} + x - x^2}} = \tfrac{2}{3}\pi \text{ (substituce } x - \tfrac{1}{2} = t \text{ a potom } t = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}u)\,.$$

17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\text{substituce } \frac{2-x}{2+x} = t\right).$

18. Substitucí $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2 = t$ obdržíme

$$\int \frac{(x^2+1)^3}{(x^2-1)^3\,(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{32}\int \frac{(1+t)^3}{t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 + 3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + 6\lg\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right).$$

19. Integrály tvaru

$$\int x^n e^{\alpha x}\cos(\beta_1 x + \lambda_1)\ldots\cos(\beta_k x + \lambda_k)\sin(\gamma_1 x + \mu_1)\ldots\sin(\gamma_l x + \mu_l)\,dx$$

(n, k, l celá nezáporná, $k + l > 0$) můžeme počítat takto: použijeme-li vzorce $\cos y \cos z = \frac{1}{2}(\cos(y+z) + \cos(y-z))$ a obdobných vzorců pro $\sin y \sin z$, $\sin y \cos z$, můžeme počet trigonometrických činitelů (který je roven $k + l$) snižovat tak dlouho, dokud se nerovná jedné. Tím je předložený integrál převeden na integrály tvaru

$$\int x^n e^{\alpha x}\cos(Ax + B)\,dx\,, \quad \int x^n e^{\alpha x}\sin(Ax + B)\,dx\,.$$

Je-li $\alpha \neq 0$, $A \neq 0$, vypočteme tyto integrály metodou, jež byla ve speciálním případě $\alpha = A = 1$, $B = 0$ vyložena ve cvič. 7; je-li $\alpha = 0$ nebo $A = 0$, je ovšem výpočet ještě jednodušší (podle vzoru cvič. 4 nebo příkl. 7, § 3). Vypočtěte touto metodou

$$\int xe^{3x}\cos(2x + \lambda)\sin^2(x + \mu)\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{4}e^{3x}\left(\frac{-7-75x}{625}\cos(4x + \lambda + 2\mu) + \right.$$

$$+ \frac{24-100x}{625}\sin(4x + \lambda + 2\mu) + \frac{1-3x}{9}\cos(\lambda - 2\mu) +$$

$$\left. + \frac{-10+78x}{169}\cos(2x + \lambda) + \frac{-24+52x}{169}\sin(2x + \lambda)\right).$$

20. Větu 51 jsme dokázali za předpokladu, že derivace $u'(x)$, $v'(x)$ jsou spojité v intervalu (a, b). Dokažte, že větu 51 lze takto zobecnit: v intervalu (a, b) nechť existují derivace $u'(x)$, $v'(x)$ funkcí $u(x)$, $v(x)$; dále nechť existuje v intervalu (a, b) integrál $\int u'(x)\,v(x)\,dx$; potom existuje v intervalu (a, b) též integrál $\int u(x)\,v'(x)\,dx$ a platí vzorec (13) (v intervalu (a, b)). (Předpoklad o spojitosti funkcí $u'(x)$, $v'(x)$ je tedy nahrazen obecnějším předpokladem o existenci integrálu $\int u'(x)\,v(x)\,dx$.)

21. Z následujících dvou rovnic je první správná, druhá nesprávná (substituce $x = \sin t$):

$$\int_0^{7\pi/6}\frac{\cos t\,dt}{2 + 3\sin t} = \int_0^{-1/2}\frac{dx}{2+3x}\,; \qquad \int_0^{11\pi/6}\frac{\cos t\,dt}{2 + 3\sin t} = \int_0^{-1/2}\frac{dx}{2+3x}\,.$$

(Viz větu 55; sledujte, kterých hodnot nabývá $\sin t$ v intervalu $\langle 0, \frac{7}{6}\pi\rangle$ a kterých v $\langle 0, \frac{11}{6}\pi\rangle$.)

22. Rozvažte, proč je nesprávný tento postup: Budiž $f(x)$ spojitá v intervalu $\langle -3, 3\rangle$; substituce $x^2 = t$ dává

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\int_9^9 f(\sqrt{t})\,t^{-\frac{1}{2}}\,dt = 0\,.$$