Kapitola IV

INTEGRACE NĚKTERÝCH SPECIÁLNÍCH TYPŮ FUNKCÍ, ZVLÁŠTĚ FUNKCÍ RACIONÁLNÍCH

§ 1. Rozklad mnohočlenu v součin kořenových činitelů. První dva paragrafy této kapitoly obsahují několik vět z algebry, jež budeme v následujícím potřebovat. Přitom je nutné, abychom v těchto dvou paragrafech připouštěli do svých úvah i tzv. čísla imaginární, tj. nereálná čísla komplexní; čtenář ostatně zná komplexní čísla z DI, kap. XV nebo z algebry (např. se o nich čtenář dočte v knize „Základy algebry" od akademika Vl. Kořínka). Poznamenávám však, že od § 3 této kapitoly až do konce kap. VIII budu mluvit opět jen o reálných číslech, pokud nebude výslovně uveden opak.

Budeme také mluvit o komplexních funkcích komplexní proměnné. Je-li M nějaká množina komplexních čísel a je-li každému číslu x množiny M přiřazeno jisté komplexní číslo $f(x)$, říkáme, že $f(x)$ je komplexní funkce jedné komplexní proměnné; množinu M nazýváme pak oborem funkce $f(x)$. Mezi nejjednodušší funkce komplexní proměnné patří tzv. mnohočleny neboli polynomy, o nichž si v tomto paragrafu zopakujeme některé věci známé z algebry.

Výraz tvaru

$$Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \tag{1}$$

kde n je celé nezáporné číslo, nazýváme *mnohočlenem* neboli *polynomem* (obor funkce $Q(x)$ je množina všech komplexních čísel). Přitom „koeficienty" neboli „součinitelé" $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mohou být libovolná komplexní čísla. Např. výrazy[1])

$$2x + 1,\quad (\sqrt{3} + i)\,x^2 - \pi x + 2,\quad x^2,\ x^3 - 1,\ x,\ 2,\ i,\ 0 \tag{2}$$

jsou mnohočleny. Je-li x^m nejvyšší mocnina x, která je v mnohočlenu $P(x)$ násobena koeficientem různým od nuly, říkáme, že $P(x)$ je mnohočlenem m-tého stupně. Jinak řečeno: mnohočlen $Q(x)$ ve vzorci (1) je stupně n-tého tehdy a jen tehdy, je-li $a_0 \neq 0$. Např. obecný tvar mnohočlenu 1. stupně je $ax + b$, kde $a \neq 0$; mnohočlen nultého stupně je konstanta různá od nuly. Tím je každému mnohočlenu přiřazeno určité celé nezáporné číslo jakožto jeho „stupeň" – s jedinou výjimkou: mnohočlenu 0 („nula") není podle této definice přiřazen žádný stupeň, neboť není

[1]) Členy s koeficienty nulovými obyčejně vynecháváme. Znak i bude v § 1 a 2 této kapitoly znamenat vždy imaginární jednotku.

zde žádný koeficient různý od nuly. Např. mnohočleny v (2) mají po řadě tyto stupně: 1, 2, 2, 3, 1, 0, 0; poslední z nich nemá žádný stupeň. Mnohočlenům prvního, druhého, třetího, čtvrtého stupně říkáme též lineární, kvadratické, kubické, bikvadratické mnohočleny. Je-li $Q(x)$ mnohočlen a je-li $Q(\alpha) = 0$, nazývá se číslo α (obecně komplexní) *kořenem* rovnice $Q(x) = 0$ nebo kořenem mnohočlenu $Q(x)$ nebo též nulovým bodem mnohočlenu $Q(x)$. Je-li $Q(x)$ mnohočlen n-tého stupně, nazývá se rovnice $Q(x) = 0$ algebraickou rovnicí n-tého stupně. Z algebry je pak známa tato tzv. „fundamentální věta algebry“: Každá algebraická rovnice kladného stupně má aspoň jeden kořen. Znalost této věty předpokládám, dokazovat ji zde nebudu.[2])

Budiž nyní α_1 nějaký kořen algebraické rovnice n-tého stupně $Q(x) = 0$, kde $Q(x)$ má tvar (1) ($a_0 \neq 0$). Potom je $Q(\alpha_1) = 0$ a tedy pro každé komplexní x platí

$$(3) \qquad Q(x) = Q(x) - Q(\alpha_1) = a_0(x^n - \alpha_1^n) + a_1(x^{n-1} - \alpha_1^{n-1}) + \\ + \ldots + a_{n-1}(x - \alpha_1).$$

Ježto pro každé celé $k > 1$ je $x^k - \alpha_1^k = (x - \alpha_1)(x^{k-1} + x^{k-2}\alpha_1 + x^{k-3}\alpha_1^2 + + \ldots + \alpha_1^{k-1})$, můžeme v rovnici (3) vpravo vytknout $x - \alpha_1$, načež v závorce zbude jistý mnohočlen $Q_1(x)$ stupně právě $n - 1$, přičemž koeficient u x^{n-1} je roven číslu a_0 (tj. je stejný jako koeficient při x^n v mnohočlenu $Q(x)$). Máme tedy tento výsledek: Je-li α_1 kořenem mnohočlenu n-tého stupně $Q(x)$, jest identicky[3])

$$Q(x) = (x - \alpha_1)\, Q_1(x),$$

kde $Q_1(x)$ je mnohočlen stupně $n - 1$, jenž má nejvyšší koeficient stejný jako $Q(x)$ (tj. jestliže $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, je $Q_1(x) = a_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots \ldots + b_{n-1}$). Je-li $n - 1 > 0$ (tj. je-li $n > 1$), má mnohočlen $Q_1(x)$ opět aspoň jeden kořen α_2 a podle předešlého výsledku platí opět identita $Q_1(x) = (x - \alpha_2)\, Q_2(x)$ a tedy

$$Q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\, Q_2(x),$$

kde $Q_2(x)$ je mnohočlen stupně $n - 2$, jehož nejvyšší koeficient (tj. koeficient u x^{n-2}) je opět a_0. Takto pokračujíce dostaneme po n krocích konečně identitu $Q(x) = = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)\, Q_n(x)$, kde $Q_n(x)$ je mnohočlen nultého stupně s nejvyšším koeficientem a_0, tj. $Q_n(x) = a_0$. Máme tedy tento výsledek: Každý mnohočlen $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ ($n > 0$, $a_0 \neq 0$) lze rozložit v součin

$$(4) \qquad Q(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n);$$

přitom jsou $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ konstanty (obecně komplexní) a rovnice (4) platí identicky pro všechna x.

---

[2]) Důkaz této věty najde čtenář budto v citované knize Kořínkově nebo v mé knize „Integrální počet II“, kap. VII, § 3, příkl. 8.

[3]) Říkáme, že rovnice mezi dvěma mnohočleny (tvaru $P(x) = Q(x)$) platí *identicky*, je-li splněna pro všechna komplexní x. Rovnici, jež platí identicky, říkáme též krátce *identita*.

Čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nemusí být navzájem různá, např. $x^2 - 2x + 1 = (x - 1) \,.\, (x - 1)$ nebo $x^2 = x \,.\, x$ (zde jest $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$). Součin v (4) je roven nule tehdy a jen tehdy, je-li x rovno některému α_j, takže tato čísla jsou právě kořeny rovnice $Q(x) = 0$; algebraická rovnice n-tého stupně má tedy nejvýše n různých kořenů.[4]) Odtud pak plynou tyto důsledky:

Věta A. Má-li mnohočlen $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ aspoň $n + 1$ různých kořenů, jsou všechny koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ rovny nule (a tedy rovnice $Q(x) = 0$ platí identicky). Neboť jinak by rovnice $Q(x) = 0$ byla algebraickou rovnicí jistého stupně $m \leqq n$ a tedy by měla nejvýše m (a tedy jistě méně než $n + 1$) různých kořenů. Z věty A plyne okamžitě

Věta B. Je-li nějaký mnohočlen $Q(x)$ roven nule pro nekonečně mnoho různých hodnot x, jsou všechny jeho koeficienty rovny nule (a tedy je identicky $Q(x) = 0$).

Věta C. Jsou-li $P(x)$, $Q(x)$ dva mnohočleny a je-li rovnice $P(x) = Q(x)$ platna pro nekonečně mnoho hodnot x, je každý koeficient mnohočlenu $P(x)$ roven „stejnolehlému" koeficientu mnohočlenu $Q(x)$ (tj. koeficientu při téže mocnině x) a tedy rovnice $P(x) = Q(x)$ platí identicky.[5]) Důkaz plyne okamžitě z B, píšeme-li rovnici $P(x) = Q(x)$ ve tvaru $P(x) - Q(x) = 0$.

Z věty C plyne snadno tento důsledek:

Věta D. *Rozklad mnohočlenu* $Q(x)$, *daný rovnicí* (4), *je jednoznačně určen v tomto smyslu: Je-li pro všechna* x

$$a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n) = b_0(x - \beta_1)(x - \beta_2)\ldots(x - \beta_m) \tag{5}$$

$$(a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0,\ n > 0,\ m > 0)\,,$$

je nutně $a_0 = b_0$, $n = m$, *a čísla*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \tag{6}$$

jsou až na pořadí totožná s čísly

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\,. \tag{7}$$

(Podrobně řečeno: konečná posloupnost (7) vzniká z (6) přerovnáním, tj. obě posloupnosti se skládají z týchž čísel a je-li např. právě k z čísel (6) rovno nějakému číslu α, je také právě k z čísel (7) rovno číslu α.)

[4]) To platí i pro $n = 0$; neboť rovnice nultého stupně, tj rovnice $a = 0$ (kde $a \neq 0$) není splněna pro žádné x, tj. nemá žádný kořen.

[5]) Jinými slovy: dva mnohočleny různého tvaru (různého stupně nebo stejného stupně, ale s různými koeficienty) nemohou si být rovny identicky, ba ani se nemohou sobě rovnat pro nekonečně mnoho hodnot x.

Důkaz. Rovnice (5) má po vynásobení tvar $a_0x^n + \ldots = b_0x^m + \ldots$, takže podle věty C jest $n = m$, $a_0 = b_0$. Zbývá tedy dokázat tento výrok:

(A) *Je-li identicky*

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)\ldots(x - \beta_n),$$

jsou čísla (7) *až na pořadí totožná s čísly* (6). Důkaz úplnou indukcí: Pro $n = 1$ plyne z rovnice $x - \alpha_1 = x - \beta_1$ zřejmě $\alpha_1 = \beta_1$. Budiž nyní $k > 1$ a výrok (A) budiž dokázán pro všechna $n < k$. Je-li identicky

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_k) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)\ldots(x - \beta_k), \tag{8}$$

vidíme především toto: levá strana v (8) je rovna nule pro $x = \alpha_1$, tedy i pravá strana; aspoň jedno z čísel $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ je rovno α_1; přerovnáním čísel β_j docílíme toho, že $\beta_1 = \alpha_1$. Dělím-li rovnici (8) číslem $x - \alpha_1 = x - \beta_1$, dostanu rovnici $(x - \alpha_2)\ldots$ $\ldots(x - \alpha_k) = (x - \beta_2)\ldots(x - \beta_k)$ platnou pro každé $x \neq \alpha_1$ a tedy (podle věty C) pro každé x vůbec. Podle tvrzení (A) s hodnotou $n = k - 1$ jsou tedy také čísla $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ až na pořadí totožná s čísly $\beta_2, \ldots, \beta_k$. Tím je důkaz indukcí proveden.

Jestliže v rovnici (4) je právě r čísel α_j rovno číslu α, říkáme, že číslo α je r-násobným kořenem rovnice $Q(x) = 0$.[6]) „Jednonásobným" kořenům říkáme obyčejně *jednoduché*, ostatním *mnohonásobné*. Počítáme-li každý kořen tolikráte, kolik činí jeho násobnost, je z (4) patrno, že každá algebraická rovnice n-tého stupně má *právě* n *kořenů*. Má-li mnohočlen n-tého stupně $Q(x)$ právě m různých kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_m$, z nichž první je r_1-násobný, druhý r_2-násobný atd., lze rovnici (4) psát též ve tvaru

$$Q(x) = a_0(x - \alpha_1)^{r_1}(x - \alpha_2)^{r_2}\ldots(x - \alpha_m)^{r_m}, \tag{9}$$

kde ovšem $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$. Mnohočleny $x - \alpha_1$, $x - \alpha_2, \ldots$ nazýváme *kořenovými činiteli* mnohočlenu $Q(x)$ ($x - \alpha_1$ je r_1-násobný kořenový činitel atd.).

Až dosud platily naše výsledky, ať koeficienty $a_0, \ldots, a_n$ v (1) byla jakákoliv čísla komplexní. Jsou-li tyto koeficienty *reálné*, nazýváme také mnohočlen (1) reálným mnohočlenem;[7]) všimněme si nyní, jak se dají naše výsledky doplnit pro reálné mnohočleny. Všimněme si napřed reálných mnohočlenů 2. stupně

$$x^2 + px + q = (x + \tfrac{1}{2}p)^2 + q - \tfrac{1}{4}p^2 \quad (p, q \text{ reálná}).$$

Kořeny α_1, α_2 tohoto mnohočlenu vyhovují rovnici $(x + \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$: tyto kořeny jsou tedy reálné, je-li $\frac{1}{4}p^2 - q \geqq 0$ (jsou pak dány vzorcem $\alpha_{1,2} =$ $= -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$); je-li však $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$, jsou tyto kořeny nereálné[7a]) a jsou dány vzorcem $\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2}p \pm i\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}$, jsou tedy komplexně sdružené. (Připomínám: jsou-li γ, δ reálná, nazývám číslo $\gamma - \delta i$ komplexně sdruženým k číslu $\gamma + \delta i$;

[6]) Kořeny této rovnice i jejich násobnost jsou podle věty D mnohočlenem $Q(x)$ úplně určeny.
[7]) Takový mnohočlen nabývá ovšem pro reálná x pouze reálných hodnot.
[7a]) Číslům nereálným říkáme též imaginární.

číslo komplexně sdružené k α budeme značit $\bar{\alpha}$; číslo komplexně sdružené k $\bar{\alpha}$ je číslo α.) *Je-li tedy $\gamma + \delta i$ nereálné číslo (γ, δ reálná), existuje jeden a jen jeden reálný mnohočlen $x^2 + px + q$ mající kořen $\gamma + \delta i$,* neboť druhý kořen je pak nutně $\gamma - \delta i$, takže podle (4) jest $x^2 + px + q = (x - \gamma - \delta i) . (x - \gamma + \delta i)$, tedy jsou čísla p, q podle věty C určena rovnicemi $p = -2\gamma$, $q = \gamma^2 + \delta^2$.[8])

Budiž nyní (1) libovolný mnohočlen n-tého stupně; označme znakem $Q_1(x)$ mnohočlen $\bar{a}_0 x^n + \bar{a}_1 x^{n-1} + \ldots + \bar{a}_n$; pro reálné x je $Q_1(x)$ číslo komplexně sdružené s číslem $Q(x)$; platí-li tedy pro $Q(x)$ rozklad

$$(10) \qquad Q(x) = a_0(x - \alpha_1)^{r_1} (x - \alpha_2)^{r_2} \ldots (x - \alpha_m)^{r_m}$$

(s navzájem různými kořeny $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$), platí pro reálná x rovnice

$$(11) \qquad Q_1(x) = \bar{a}_0(x - \bar{\alpha}_1)^{r_1} (x - \bar{\alpha}_2)^{r_2} \ldots (x - \bar{\alpha}_m)^{r_m}.$$

(Sestrojil jsem vpravo i vlevo čísla komplexně sdružená k číslům v (10); přitom jsem vpravo užil toho, že číslo komplexně sdružené k součinu $\xi . \eta$ je číslo $\bar{\xi} . \bar{\eta}$ (viz **DI**, str. 374, v 4. vyd. str. 430, cvičení 3).) Podle věty C platí ovšem rovnice (11) i pro všechna komplexní x; čísla $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots$ jsou tedy kořeny mnohočlenu $Q_1(x)$, a to $\bar{\alpha}_1$ je r_1-násobný atd. Tedy: Má-li $Q(x)$ kořen (r-násobný) α, má $Q_1(x)$ kořen (rovněž r-násobný) $\bar{\alpha}$. Je-li však $Q(x)$ speciálně *reálný* mnohočlen, je $Q_1(x) = Q(x)$, tj. $\bar{\alpha}$ je r-násobným kořenem mnohočlenu $Q(x)$. Nereálné kořeny reálných mnohočlenů[9]) se tedy sdružují v páry komplexně sdružených kořenů podle této věty:

Věta E. *Má-li reálný mnohočlen r-násobný kořen α, má též r-násobný kořen $\bar{\alpha}$.*

Všimněme si nyní rozkladu (9); i když Q je reálné, mohou některá α_j být nereálná, ale současně s takovým číslem $\alpha_j = \gamma_j + i\delta_j$ (γ_j, δ_j reálná, $\delta_j \neq 0$) je také číslo $\gamma_j - i\delta_j$ kořenem, a to stejné násobnosti; součin příslušných kořenových činitelů je pak reálný kvadratický mnohočlen

$$(x - (\gamma_j + i\delta_j))(x - (\gamma_j - i\delta_j)) = (x - \gamma_j)^2 + \delta_j^2 = x^2 + p_j x + q_j$$

s nereálnými kořeny, tedy $\frac{1}{4}p_j^2 - q_j < 0$. Sloučíme-li v rozkladu (9) vždy po dvou kořenové činitele, příslušné ke komplexně sdruženým nereálným kořenům, dostáváme:

Věta F. *Budiž $Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ ($a_0 \neq 0$) reálný mnohočlen. Potom platí identicky rovnice tvaru*

$$(12) \qquad Q(x) = a_0(x - \alpha_1)^{r_1} \ldots (x - \alpha_k)^{r_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \ldots$$
$$\ldots (x^2 + p_l x + q_l)^{s_l},$$

[8]) Pro reálné kořeny není obdobná věta správná: oba různé mnohočleny $x^2 - x$, $x^2 - 1$ mají kořen 1; nebo oba různé mnohočleny $x^2 - 2$, $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ mají kořen $\sqrt{2}$.

[9]) Že i reálné mnohočleny mohou mít nereálné kořeny, je vidět z našeho výkladu o rovnicích 2. stupně.

kde $r_1, \dots, r_k, s_1, \dots, s_l$ jsou celá kladná čísla, mnohočleny

$$x - \alpha_1, \dots, x - \alpha_k,\ x^2 + p_1 x + q_1, \dots, x^2 + p_l x + q_l$$

jsou reálné a navzájem různé a pro $t = 1, 2, \dots, l$ je splněna podmínka $\frac{1}{4}p_t^2 - q_t <$ < 0.[10])

Poznámka 1. Činitelé v rozkladu (12) jsou až na pořádek opět jednoznačně stanoveni; neboť mnohočlen $x^2 + p_t x + q_t$ má nereálné kořeny (protože $\frac{1}{4}p_t^2 -$ $- q_t < 0$) a tyto kořeny jsou komplexně sdružené (ježto p_t, q_t jsou reálné). Rozložím-li tedy v (12) každý mnohočlen $x^2 + p_t x + q_t$ na součin

$$(x - (\gamma_t + i\delta_t))\,(x - (\gamma_t - i\delta_t)),$$

přejde rozklad (12) v rozklad (9), jenž je jednoznačně určen podle věty D; je pak patrno, že $x - \alpha_1, \dots, x - \alpha_k$ jsou právě reální kořenoví činitelé z (9), kdežto $x^2 +$ $+ p_1 x + q_1, \dots, x^2 + p_l x + q_l$ jsou součiny vždy dvou komplexně sdružených nereálných činitelů z (9), jsou tedy až na pořadí jednoznačně určeny.

Poznámka 2. Vzorec (12) dává rozklad reálného mnohočlenu $Q(x)$ v součin *reálných* mnohočlenů 1. a 2. stupně. Naproti tomu dával vzorec (9) rozklad sice jednodušší, totiž rozklad v součin mnohočlenů 1. stupně, zato však tyto mnohočleny nemusí být reálné (ani tehdy, když $Q(x)$ je reálný mnohočlen).

Poznámka 3. Z rozkladu (4) nebo (9) je patrno: Má-li polynom $Q(x)$ stupně n-tého kořen α, platí identicky rovnice $Q(x) = (x - \alpha)\, Q_1(x)$, kde $Q_1(x)$ je opět polynom, a to stupně $n - 1$. Z (12) je patrno: je-li polynom $Q(x)$ reálný a je-li α reálné, je též polynom $Q_1(x)$ reálný. Dále je z (12) patrno: Má-li reálný polynom $Q(x)$ stupně n-tého nereálný kořen $\gamma + \delta i$ (γ, δ reálná, $\delta \neq 0$), platí identicky rovnice $Q(x) = (x^2 + px + q)\, Q_2(x)$, kde $Q_2(x)$ je reálný polynom stupně $n - 2$, a $x^2 +$ $+ px + q$ je reálný polynom s kořeny $\gamma + \delta i$, $\gamma - \delta i$.

§ 2. Rozklad racionální funkce v součet částečných zlomků. Racionální funkcí $R(x)$ proměnné x nazýváme takovou funkci, kterou lze psát jako podíl dvou mnohočlenů $P(x)$, $Q(x)$:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{13}$$

přičemž předpokládáme, že $Q(x)$ není mnohočlen 0. Oborem funkce $R(x)$ jest ovšem množina oněch komplexních x, jež nejsou kořeny mnohočlenu $Q(x)$. Lze-li mnohočleny $P(x)$, $Q(x)$ volit tak, že jsou reálné, nazýváme funkci $R(x)$ reálnou racionální funkcí (její hodnoty pro reálná x jsou potom reálné). Mnohočlen jest ovšem také racionální funkcí, neboť lze psát $P(x) = P(x) : 1$ a jednička je mnohočlen (nultého

[10]) Může ovšem být $k = 0$ (tj. činitelé $x - \alpha_j$ mohou vůbec chybět) a podobně může být $l = 0$. Jest ovšem $r_1 + \dots + r_k + 2s_1 + \dots + 2s_l = n$.

stupně). Naším cílem v tomto paragrafu bude převést výraz $P(x) : Q(x)$ na součet několika jednodušších výrazů, jež bychom dovedli integrovat. Přitom mnohočlen je už funkce tak jednoduchá, že žádné další úpravy nepotřebuje; omezíme se proto hlavně na případ, že stupeň mnohočlenu Q v (13) je kladné číslo.

Ježto v (13) jde o dělení dvou mnohočlenů, zopakujeme si něco o tom.

Věta G. *Buďte* $P(x)$, $Q(x)$ *dva mnohočleny;* $Q(x)$ *nechť má stupeň* $n \geqq 0$ (tedy $Q(x)$ není nula). *Potom existuje jeden a jen jeden mnohočlen* $P_1(x)$ *tak, že mnohočlen*

$$P(x) - P_1(x)\,Q(x) = P_2(x) \tag{14}$$

je buďto nula nebo má stupeň nižší než n. *Přitom součinitele mnohočlenu* P_1 (a tedy též mnohočlenu P_2) *lze vypočíst ze součinitelů mnohočlenů* P, Q *„racionálními operacemi".*[11])

Důkaz. Budiž $Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$ $(b_0 \neq 0)$, $P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$, přičemž nechť $m \geqq n$ (toho lze vždy dosáhnout; není-li stupeň mnohočlenu P nejméně roven n, přidám na začátek několik členů s nulovými koeficienty). Mnohočlen P_1 nemůže pak mít stupeň vyšší než $m - n$; položme tedy

$$P_1(x) = c_0x^{m-n} + c_1x^{m-n-1} + \ldots + c_{m-n}\,;$$

součinitele $c_0, \ldots, c_{m-n}$ máme pak určit tak, aby v mnohočlenu $(a_0x^m + \ldots + a_m) - (c_0x^{m-n} + \ldots + c_{m-n})(b_0x^n + \ldots + b_n)$ vypadly mocniny $x^n, x^{n+1}, \ldots, x^m$. To bude splněno tehdy a jen tehdy, budou-li splněny rovnice

$$\begin{aligned} b_0c_0 &= a_0 \\ b_0c_1 + b_1c_0 &= a_1 \\ b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 &= a_2 \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots \\ b_0c_{m-n} + b_1c_{m-n-1} + \ldots + b_{m-n}c_0 &= a_{m-n} \end{aligned} \tag{15}$$

(přitom ony členy, v nichž vystupuje b_k s indexem $k > n$, jest třeba vynechat, tj. klademe $b_{n+1} = b_{n+2} = \ldots = 0$). Ježto $b_0 \neq 0$, lze rovnicím (15) vskutku vyhovět, a to jediným způsobem: z první vypočteme $c_0 = a_0 : b_0$, potom z druhé $c_1 = (a_1 - b_1c_0) : b_0$ atd.

Poznámka 1. Rovnici (14) lze psát ve tvaru

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}, \tag{16}$$

takže každou racionální funkci lze psát jako součet mnohočlenu a racionální funkce (s týmž jmenovatelem), jejíž čitatel je buďto nula nebo má stupeň nižší než jmenova-

[11]) Tj. sčítáním, odčítáním, násobením a dělením. Jsou-li tedy P, Q reálné mnohočleny, jsou též P_1, P_2 reálné mnohočleny.

tel.[12]) Jak se toto dělení mnohočlenů (P_1 je „podíl“, P_2 „zbytek“) v praxi provádí, víte ze školy; zopakujeme to na příkladě:

Příklad 1. $$\frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} = x + 3 + \frac{3x - 4}{x^2 - x + 1}.$$

Dělením totiž dostaneme

$$\begin{array}{rrrrl}
(x^3 & + 2x^2 & + x & - 1) : (x^2 - x + 1) = x + 3 + \dfrac{3x-4}{x^2-x+1} & \\
x^3 & - x^2 & + x & & \\
- & + & - & & \\ \hline
 & 3x^2 & & - 1 & \\
 & 3x^2 & - 3x & + 3 & \\
 & - & + & - & \\ \hline
 & & 3x & - 4 & \ldots \text{zbytek}.
\end{array}$$

Poznámka 2. Je-li v rovnici (14) $P_2(x) = 0$ (identicky), tj. existuje-li k mnohočlenům $P(x)$, $Q(x)$ (přičemž $Q(x)$ není polynom 0) mnohočlen $P_1(x)$ tak, že jest $P(x) = P_1(x)\, Q(x)$ (pro všechna x) neboli $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x)$ (pro všechna x, pro něž je $Q(x) \neq 0$), říkáme, že P je dělitelný mnohočlenem Q nebo že Q je dělitelem mnohočlenu P.[13]) Jsou-li P, Q reálné, je „podíl“ $P_1(x)$ podle věty G (viz poznámku [11])) též reálný mnohočlen.

Hlavním výsledkem tohoto paragrafu budou věty 57, 59; věty 56, 58 jsou přípravou k nim. Jak jsme již řekli, je naším cílem rozložit racionální funkci $P(x) : Q(x)$ na součet několika jednodušších výrazů. Nemá-li mnohočlen P nižší stupeň než Q, provedeme „dělení“ podle vzorce (16), načež mnohočlen P_2 — není-li to mnohočlen 0 — má již stupeň nižší než Q. Stačí tedy, omezíme-li svůj výklad na takové racionální funkce $P(x) : Q(x)$, v nichž čitatel má nižší stupeň než jmenovatel.

Věta 56. *Buďiž α komplexní číslo; buďiž r celé kladné číslo; buďiž $Q_1(x)$ mnohočlen, jenž nemá kořen α* (tj. $Q_1(\alpha) \neq 0$); *buďiž $P(x)$ mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň mnohočlenu $(x - \alpha)^r\, Q_1(x)$. Potom existuje číslo A s těmito vlastnostmi:*

1. *Pro všechna x, jež nejsou kořeny mnohočlenu $(x - \alpha)^r\, Q_1(x)$, platí rovnice*

$$\frac{P(x)}{(x - \alpha)^r\, Q_1(x)} = \frac{A}{(x - \alpha)^r} + \frac{P_1(x)}{(x - \alpha)^{r-1}\, Q_1(x)}, \tag{17}$$

kde $P_1(x)$ je buďto nula nebo mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň mnohočlenu $(x - \alpha)^{r-1}\, Q_1(x)$.

[12]) Ovšem: rovnice (14) platí pro všechna x, rovnice (16) pak jen pro ta x, pro něž je $Q(x) \neq 0$.

[13]) Nebo také, že P je násobkem mnohočlenu Q.

2. *Jsou-li mnohočleny P, Q_1 a číslo α reálné, jsou též číslo A a mnohočlen P_1 reálné.*

Poznámka 3. Všimněte si smyslu rovnice (17): zlomek na levé straně je rozložen na součet dvou zlomků: první z nich je zcela jednoduchý; druhý je podobný jako zlomek vlevo, ale je o něco jednodušší: schází v něm jeden činitel $x - \alpha$.

Důkaz. Slovy „přípustné hodnoty x" budu označovat všechny komplexní hodnoty x, jež nejsou kořeny mnohočlenu $(x - \alpha)^r Q_1(x)$. Je-li A libovolné komplexní číslo, platí pro všechna přípustná x rovnice

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^r Q_1(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^r} + \frac{P(x) - A\,Q_1(x)}{(x-\alpha)^r Q_1(x)}$$

(abyste nahlédli správnost tohoto vztahu, stačí, uvedete-li pravou stranu na společného jmenovatele). Zvolme A tak, aby bylo $P(\alpha) - A\,Q_1(\alpha) = 0$, tj. zvolme $A = P(\alpha) : Q_1(\alpha)$ (to lze, ježto $Q_1(\alpha) \neq 0$). Potom $P(x) - A\,Q_1(x)$ je buďto nula a důkaz je hotov; nebo je $P(x) - A\,Q_1(x)$ mnohočlen, který má kořen α a je stupně nižšího než je stupeň mnohočlenu $(x - \alpha)^r Q_1(x)$. Tedy[14]) platí identicky $P(x) - A\,Q_1(x) = (x - \alpha)\,P_1(x)$, kde $P_1(x)$ je mnohočlen stupně o jednotku nižšího nežli $P(x) - A\,Q_1(x)$, tedy stupně *nižšího* nežli $(x - \alpha)^{r-1} \cdot Q_1(x)$. Dosazením dostaneme vztah platný pro všechna přípustná x:

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^r Q_1(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^r} + \frac{(x-\alpha)\,P_1(x)}{(x-\alpha)^r Q_1(x)} .$$

Krátíme-li poslední zlomek výrazem $x - \alpha$ (což je pro všechna přípustná x dovoleno, ježto pro tyto hodnoty x je $x - \alpha \neq 0$), dostáváme rovnici (17), platnou pro všechna přípustná x, tj. pro všechna x, pro něž je $(x - \alpha)^r Q_1(x) \neq 0$.

Zároveň vidíte, že pro reálné P, Q_1, α vyjde reálné též číslo $A = P(\alpha) : Q_1(\alpha)$, pročež i mnohočlen $P(x) - A\,Q_1(x)$ a tedy i $P_1(x)$ je reálný (viz poznámku 3 v § 1).

Věta 57. *Budiž $Q(x)$ mnohočlen, pro nějž platí identicky rovnice*

(17a) $$Q(x) = a_0(x - \alpha)^r (x - \alpha')^{r'} \ldots ,$$

kde r, r', ... jsou celá kladná čísla, α, α', ... jsou čísla navzájem různá, $a_0 \neq 0$. Budiž dále $P(x)$ mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň mnohočlenu $Q(x)$. Potom existují čísla

(18) $$A_r,\ A_{r-1}, \ldots,\ A_1,\ A'_{r'},\ A'_{r'-1}, \ldots,\ A'_1, \ldots$$

s těmito vlastnostmi:

---

[14]) Viz poznámku 3 v § 1.

1. *Pro všechna x, jež nejsou kořeny mnohočlenu Q(x), platí rovnice*[15])

$$
\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} + \frac{A_{r-1}}{(x-\alpha)^{r-1}} + \ldots + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_1}{x-\alpha} + \\
&+ \frac{A'_{r'}}{(x-\alpha')^{r'}} + \frac{A'_{r'-1}}{(x-\alpha')^{r'-1}} + \ldots + \frac{A'_2}{(x-\alpha')^2} + \frac{A'_1}{x-\alpha'} + \ldots
\end{aligned}
\tag{19}
$$

2. *Jsou-li čísla $a_0, \alpha, \alpha', \ldots$ a mnohočlen $P(x)$ reálné, jsou i čísla (18) reálná.*

Poznámka 4. Rovnice (19) dává rozklad zlomku $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ v součet tzv. *částečných* (nebo *parciálních*) *zlomků.*

Důkaz. Slovy „přípustné hodnoty x" budu označovat ony hodnoty x, jež nejsou kořeny mnohočlenu $Q(x)$. Pišme $Q(x) = (x - \alpha)^r\, Q_1(x)$, kde $Q_1(x)$ je součin všech ostatních činitelů (kromě $(x - \alpha)^r$) na pravé straně rovnice (17a). Ježto $Q_1(\alpha) \neq 0$, existuje podle věty 56 číslo A_r tak, že pro všechna přípustná x je[16])

$$
\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha)^r\, Q_1(x)} = \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} + \frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{r-1}\, Q_1(x)},
$$

kde mnohočlen $P_1(x)$ je budto nula[17]) nebo má nižší stupeň než mnohočlen $(x - \alpha)^{r-1}\, Q_1(x)$.[18]) Je-li $r - 1 > 0$, postupujeme podobně dále a opětovným použitím věty 56 dostaneme rovnice

$$
\frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{r-1}\, Q_1(x)} = \frac{A_{r-1}}{(x-\alpha)^{r-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-\alpha)^{r-2}\, Q_1(x)};
$$

. . . .

$$
\frac{P_{r-2}(x)}{(x-\alpha)^2\, Q_1(x)} = \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{P_{r-1}(x)}{(x-\alpha)\, Q_1(x)};
$$

$$
\frac{P_{r-1}(x)}{(x-\alpha)\, Q_1(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{P_r(x)}{Q_1(x)};
$$

---

[15]) Prosím čtenáře, aby se nelekal zdánlivě složitých vzorců, které teď přijdou. Věc je v podstatě jednoduchá a až si čtenář přečte § 2 a propočítá příklady 2—5 k němu připojené, porozumí mu jistě bez nejmenších obtíží.

[16]) V dalším průběhu důkazu budu se stále omezovat jen na přípustná x, ale nebudu to stále výslovně podotýkat.

[17]) Je-li ovšem $P_1(x)$ nula, jsme s důkazem hotovi. Totéž platí o všech dalších krocích.

[18]) Přitom A_r, $P_1(x)$ jsou reálné, jsou-li $a_0, \alpha, \alpha', \ldots, P(x)$ reálné; podobně tomu je při dalších krocích, což již nebudu opakovat.

v každém zlomku na konci každého řádku je v čitateli buďto nula nebo mnohočlen, jenž má stupeň nižší nežli jmenovatel. Celkem tedy obdržíme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} + \frac{A_{r-1}}{(x-\alpha)^{r-1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{P_r(x)}{Q_1(x)};$$

poslední zlomek je podobného tvaru jako $P(x) : Q(x)$; čitatel je buďto nula nebo mnohočlen stupně nižšího než jmenovatel; jmenovatel $Q_1(x)$ je však již o něco jednodušší: vypadl z něho činitel $(x - \alpha)^r$. Použijeme-li nyní téhož postupu na kořenové činitele $(x - \alpha')^{r'}, \ldots$, přičemž vycházíme nyní od zlomku $P_r(x) : Q_1(x)$, dostaneme konečně

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} + \frac{A_{r-1}}{(x-\alpha)^{r-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_{r'}}{(x-\alpha')^{r'}} +$$

$$+ \frac{A'_{r'-1}}{(x-\alpha')^{r'-1}} + \ldots + \frac{A'_1}{x-\alpha'} + \ldots + \frac{U(x)}{V(x)}. \tag{20}$$

Přitom $V(x)$ vzniká z $Q(x)$ tím, že vynecháme již *všechny* činitele $(x - \alpha)^r$, $(x - \alpha')^{r'}, \ldots$, tj. $V(x) = a_0$; mnohočlen $U(x)$ je pak buďto nula nebo má stupeň nižší než je stupeň mnohočlenu $V(x)$; ale poslední případ nemůže nastat, ježto $V(x)$ je stupně nultého; tedy $U(x) = 0$, takže rovnice (20) jest již žádaná rovnice (19).

Příklad 2. $R(x) = \dfrac{x^7 + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3}$. Zde stupeň čitatele není nižší než stupeň jmenovatele; proto provedeme napřed dělení:

$$R(x) = 1 + \frac{-2x^5 - x^3 + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3}.$$

Rozložíme jmenovatele: $x^7 + 2x^5 + x^3 = x^3(x^4 + 2x^2 + 1) = x^3(x^2 + 1)^2 = x^3 \,.\, (x + i)^2 (x - i)^2$, takže rozklad podle věty 57 jest [18a])

$$\frac{-2x^5 - x^3 + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3} = \frac{a}{x^3} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x} + \frac{d}{(x+i)^2} + \frac{e}{x+i} +$$

$$+ \frac{f}{(x-i)^2} + \frac{g}{x-i};$$

přičteme-li k tomu ještě 1, dostáváme hledaný rozklad funkce $R(x)$ (platný pro všechna x, různá od 0, i, $-i$) – až na to, že jsme dosud nestanovili čísla $a, b, \ldots, g$; jak se tato čísla dají vypočíst, vyložím za chvíli.

[18a]) Písmeno e ani zde ani v příkl. 3 ovšem neznačí základ přirozených logaritmů.

„Částečné zlomky“ (tj. sčítanci ve vzorci (19) vpravo) nemusí být *reálné* racionální funkce, i když mnohočleny P, Q jsou reálné, neboť reálný mnohočlen Q může mít nereálné kořeny (viz např. příklad 2). Abychom v případě reálných mnohočlenů P, Q dostali rozklad funkce $P(x) : Q(x)$ na součet *reálných* racionálních funkcí jednodušších, vyjdeme z rozkladu daného větou F (a nikoliv z rozkladu (9), jak jsme učinili ve větě 57); naším cílem je věta 59, pomůckou k jejímu důkazu je pak tato pomocná věta:

Věta 58. *Budiž $x^2 + px + q$ reálný mnohočlen a nechť je $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$. Mnohočlen $x^2 + px + q$ nemá tedy reálných kořenů; označme jeho kořeny $\gamma + \delta i$, $\gamma - \delta i$ ($\delta \neq 0$; γ, δ reálná). Budiž s celé kladné číslo; budiž $Q_1(x)$ reálný mnohočlen, jenž nemá kořen $\gamma + \delta i$ (a tedy ani $\gamma - \delta i$) a budiž $P(x)$ reálný mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň mnohočlenu $(x^2 + px + q)^s Q_1(x)$. Potom existují reálná čísla M, N tak, že pro všechna x, jež nejsou kořeny mnohočlenu $(x^2 + px + q)^s Q_1(x)$, platí vztah*

$$(21) \qquad \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^s Q_1(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{s-1} Q_1(x)},$$

kde $P_1(x)$ je budto nula nebo reálný mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň mnohočlenu $(x^2 + px + q)^{s-1} Q_1(x)$.[19])

Důkaz je obdobný jako u věty 56, jen poněkud složitější. Slovy „přípustné hodnoty x“ označíme zde všechny komplexní hodnoty x, jež nejsou kořeny mnohočlenu $(x^2 + px + q)^s Q_1(x)$. Jsou-li M, N libovolná reálná čísla, platí pro všechna přípustná x rovnice

$$(22) \qquad \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^s Q_1(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{P(x) - (Mx + N)\, Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^s Q_1(x)}$$

(správnost tohoto vztahu opět okamžitě nahlédnete, uvedete-li pravou stranu na společného jmenovatele). Snažme se zvolit reálná čísla M, N tak, aby čitatel posledního zlomku se rovnal nule pro $x = \gamma + \delta i$; tj. tak, aby bylo

$$(23) \qquad P(\gamma + \delta i) - (M\gamma + M\delta i + N)\, Q_1(\gamma + \delta i) = 0\,.$$

Ježto $Q_1(\gamma + \delta i) \neq 0$, můžeme rovnici (23) tímto číslem dělit; píšeme-li tedy $P(\gamma + \delta i) : Q_1(\gamma + \delta i) = A + Bi$ (A, B reálná), lze rovnici (23) psát ve tvaru $M\gamma + M\delta i + N = A + Bi$. Zvolme nyní reálná čísla M, N takto: $M = B : \delta$, $N = A - M\gamma = A - B\gamma : \delta$ (to lze, ježto $\delta \neq 0$); potom rovnice (23) je splněna. Tedy je buďto $P(x) - (Mx + N)\, Q_1(x)$ nula a důkaz je hotov; nebo je $P(x) - (Mx + N)\, Q_1(x)$ reálný mnohočlen, jenž má stupeň nižší než mnohočlen $(x^2 + px + q)^s Q_1(x)$.[20])

[19]) Smysl této věty je obdobný jako smysl věty 56: ve jmenovateli druhého zlomku vpravo schází jeden činitel $x^2 + px + q$.

Podle rovnice (23) má reálný mnohočlen $P(x) - (Mx + N)\, Q_1(x)$ kořen $\gamma + \delta i$ a tedy též kořen $\gamma - \delta i$; podle poznámky 3 v § 1 je tedy identicky

$$P(x) - (Mx + N)\, Q_1(x) = (x^2 + px + q)\, P_1(x)\,,$$

kde $P_1(x)$ je reálný mnohočlen stupně o 2 nižšího než $P(x) - (Mx + N)\, Q_1(x)$, tedy stupně *nižšího* než $(x^2 + px + q)^{s-1}\, Q_1(x)$. Dosazením do (22) dostaneme vztah, platný pro všechna přípustná x:

$$\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^s\, Q_1(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{(x^2 + px + q)\, P_1(x)}{(x^2 + px + q)^s\, Q_1(x)}\,.$$

Pro všechna přípustná x je však $x^2 + px + q \neq 0$, takže můžeme poslední zlomek tímto výrazem krátit; tím dostáváme vztah (21), platný pro všechna přípustná x, tj. pro všechna x, pro něž je $(x^2 + px + q)^s\, Q_1(x) \neq 0$.

Věta 59. *Budiž $Q(x)$ reálný mnohočlen, pro nějž platí identicky rovnice*

$$Q(x) = a_0(x - \alpha)^r\,(x - \alpha')^{r'} \ldots (x^2 + px + q)^s\,(x^2 + p'x + q')^{s'} \ldots\,; \tag{24}$$

přitom $a_0, \alpha, \alpha', \ldots, p, q, p', q', \ldots$ jsou reálná čísla, $a_0 \neq 0$; dále je $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$, $\frac{1}{4}p'^2 - q' < 0, \ldots$; čísla $r, r', \ldots, s, s', \ldots$ jsou celá kladná. Konečně nechť žádné dva z mnohočlenů $x - \alpha$, $x - \alpha', \ldots, x^2 + px + q$, $x^2 + p'x + q', \ldots$ nemají společných kořenů.[21]*) Budiž dále $P(x)$ reálný mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň mnohočlenu $Q(x)$. Potom existují reálná čísla $A_r, A_{r-1}, \ldots, A_2, A_1, A'_{r'}$, $A'_{r'-1}, \ldots, A'_2, A'_1, \ldots, M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, \ldots, M_2, N_2, M_1, N_1, M'_{s'}, N'_{s'}, M'_{s'-1}$, $N'_{s'-1}, \ldots, M'_2, N'_2, M'_1, N'_1, \ldots$ tak, že pro všechna x, jež nejsou kořeny mnohočlenu $Q(x)$, platí rovnice*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_r}{(x - \alpha)^r} + \frac{A_{r-1}}{(x - \alpha)^{r-1}} + \ldots + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \frac{A_1}{x - \alpha} + \tag{25}$$

$$+ \frac{A'_{r'}}{(x - \alpha')^{r'}} + \frac{A'_{r'-1}}{(x - \alpha')^{r'-1}} + \ldots + \frac{A'_2}{(x - \alpha')^2} + \frac{A'_1}{x - \alpha'} +$$

$$+ \ldots + \frac{M_s x + N_s}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{M_{s-1} x + N_{s-1}}{(x^2 + px + q)^{s-1}} +$$

[20]) Všimněte si, že mnohočlen $Q_1(x)$ má stupeň aspoň o 2 nižší než mnohočlen $(x^2 + px + q)^s$. $Q_1(x)$.

[21]) Rovnice (24) je tedy prostě rozklad mnohočlenu $Q(x)$ podle vzorce (12); jenom jsme pro pohodlí trochu změnili označení: reálné kořeny mnohočlenu $Q(x)$ jsou α (r-násobný), α' (r'-násobný), ..., nereálné kořeny mnohočlenu $Q(x)$ jsou dva kořeny mnohočlenu $x^2 + px + q$ (s-násobné), dva kořeny mnohočlenu $x^2 + p'x + q'$ (s'-násobné) atd. Činitelé $x - \alpha$, $x - \alpha', \ldots$ ovšem mohou scházet (nemá-li $Q(x)$ reálných kořenů); rovněž činitelé $x^2 + px + q$, $x^2 + p'x + q', \ldots$ mohou scházet (jsou-li všechny kořeny reálné).

$$+ \ldots + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} +$$

$$+ \frac{M'_{s'} x + N'_{s'}}{(x^2 + p'x + q')^{s'}} + \frac{M'_{s'-1} x + N'_{s'-1}}{(x^2 + p'x + q')^{s'-1}} +$$

$$+ \ldots + \frac{M'_2 x + N'_2}{(x^2 + p'x + q')^2} + \frac{M'_1 x + N'_1}{x^2 + p'x + q'} + \ldots$$

Poznámka 5. Také o rovnici (25) říkáme, že dává rozklad zlomku $P(x) : Q(x)$ v součet *částečných* (nebo *parciálních*) *zlomků*. Rovnice (25) je složitější než rovnice (19); má však tu výhodu, že (na rozdíl od rovnice (19)) dává vždy rozklad reálné racionální funkce na *reálné* částečné zlomky.

Důkaz. Scházejí-li všichni činitelé $x^2 + px + q$, $x^2 + p'x + q'$, tj. jsou-li všechny kořeny mnohočlenu $Q(x)$ reálné, je věta 59 již dokázána, neboť je obsažena ve větě 57. Nechť tedy $Q(x)$ má nereálné kořeny (aspoň jeden pár). Pišme

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^s \, Q_1(x),$$

takže

$$Q_1(x) = a_0(x^2 + p'x + q')^{s'} \ldots (x - \alpha)^r (x - \alpha')^{r'} \ldots ;$$

prostě $Q_1(x)$ vzniká z $Q(x)$ vynecháním činitele $(x^2 + px + q)^s$. Opětovným použitím věty 58 dostáváme rovnice

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^s \, Q_1(x)} =$$

$$= \frac{M_s x + N_s}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{s-1} \, Q_1(x)},$$ [17])

$$\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{s-1} \, Q_1(x)} =$$

$$= \frac{M_{s-1} x + N_{s-1}}{(x^2 + px + q)^{s-1}} + \frac{P_2(x)}{(x^2 + px + q)^{s-2} \, Q_1(x)},$$

. . . .

$$\frac{P_{s-1}(x)}{(x^2 + px + q) \, Q_1(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{P_s(x)}{Q_1(x)};$$

přitom $M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, \ldots, M_1, N_1$ jsou reálná čísla; v posledním zlomku v každé rovnici je v čitateli buď nula nebo reálný mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň jmenovatele. Podobně pokračujeme dále, až vyčerpáme všechny činitele

$x^2 + px + q$, $x^2 + p'x + q'$, ...; tím dostaneme vzorec (s reálnými čísly M_s, N_s, ..., M_1, N_1, $M'_{s'}$, $N'_{s'}$, ..., M'_1, N'_1, ...)

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{M_s x + N_s}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{M_{s-1}x + N_{s-1}}{(x^2 + px + q)^{s-1}} + \ldots + \\ &+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \\ &+ \frac{M'_{s'}x + N'_{s'}}{(x^2 + p'x + q')^{s'}} + \frac{M'_{s'-1}x + N'_{s'-1}}{(x^2 + p'x + q')^{s'-1}} + \ldots + \\ &+ \frac{M'_1 x + N'_1}{x^2 + p'x + q'} + \ldots + \frac{U(x)}{V(x)}\,. \end{aligned} \right.$$

Zde je $V(x)$ mnohočlen, jenž vznikne z $Q(x)$ vynecháním všech kvadratických činitelů $x^2 + px + q$, $x^2 + p'x + q'$, ...; $U(x)$ pak je budto nula nebo reálný mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň mnonočlenu $V(x)$. Nemá-li $Q(x)$ reálných kořenů, je prostě $V(x) = a_0$, tedy $U(x) = 0$ a vzorec (26) dává již žádaný rozklad; má-li však $Q(x)$ reálné kořeny, jest podle (24) $V(x) = a_0(x - \alpha)^r (x - \alpha')^{r'} \ldots$; rozložíme-li nyní $U(x) : V(x)$ podle věty 57 (přičemž čísla A_r, A_{r-1}, ... vyjdou reálná), obdržíme z (26) hledaný vzorec (25).

Příklad 3.

$$R(x) = \frac{x^{10} + 2x^9 + 3x^7 + 4x^6 + x^4 + 2x^3 + 7x - 1}{x^9 + 2x^6 + x^3}\,.$$

Zde stupeň čitatele není nižší než stupeň jmenovatele; musíme tedy nejdříve provést dělení a dostaneme

$$R(x) = x + 2 + \frac{x^7 + 7x - 1}{x^9 + 2x^6 + x^3}\,;$$

zde již čitatel má nižší stupeň než jmenovatel. Jest $x^9 + 2x^6 + x^3 = x^3(x^6 + 2x^3 + 1) = x^3(x^3 + 1)^2$; ale $x^3 + 1 = (x + 1) . (x^2 - x + 1)$, kde poslední činitel vyhovuje podmínce $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$. Rozklad (24) vypadá tedy takto: $x^9 + 2x^6 + x^3 = x^3(x + 1)^2(x^2 - x + 1)^2$; podle věty 59 existují tedy reálná čísla $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ tak, že pro všechna x (vyjma pro kořeny rovnice $x^9 + 2x^6 + x^3 = 0$) je

$$\begin{aligned} \frac{x^7 + 7x - 1}{x^9 + 2x^6 + x^3} &= \frac{a}{x^3} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x} + \frac{d}{(x + 1)^2} + \frac{e}{(x + 1)} + \\ &+ \frac{fx + g}{(x^2 - x + 1)^2} + \frac{hx + k}{x^2 - x + 1}\,; \end{aligned}$$

přičteme-li ještě mnohočlen $x + 2$, dostáváme hledaný rozklad funkce $R(x)$ – až na to, že jsme dosud neurčili čísla $a, b, \ldots, k$.

Vyložím nyní, jak je možno stanovit čísla

$$A_r,\ A_{r-1},\ \ldots,\ A_1,\ A'_{r'},\ A'_{r'-1},\ \ldots,\ A'_1,\ \ldots \tag{27}$$

v rovnici (19), popř. reálná čísla

$$A_r,\ A_{r-1},\ \ldots,\ A_1,\ A'_{r'},\ A'_{r'-1},\ \ldots,\ A'_1,\ \ldots,$$
$$M_s,\ N_s,\ M_{s-1},\ N_{s-1},\ \ldots,\ M_1,\ N_1,\ M'_{s'},\ N'_{s'},\ M'_{s'-1},\ N'_{s'-1},\ \ldots,\ M'_1,\ N'_1,\ \ldots \tag{28}$$

v rovnici (25). Provedu to na rovnici (25); rovnice (19) je o to jednodušší, že v ní nevystupují čísla $M_s, N_s, \ldots$; čísla (27), která nám v rovnici (19) vyjdou, nemusí ovšem být reálná. Vynásobíme rovnici (25) výrazem $Q(x) : a_0$; dostaneme tuto rovnici:

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{a_0} &= A_r(x-\alpha')^{r'}\ldots(x^2+px+q)^s(x^2+p'x+q')^{s'}\ldots + \\
&+ A_{r-1}(x-\alpha)(x-\alpha')^{r'}\ldots(x^2+px+q)^s(x^2+p'x+q')^{s'}\ldots + \\
&+ \ldots + \\
&+ A_1(x-\alpha)^{r-1}(x-\alpha')^{r'}\ldots(x^2+px+q)^s(x^2+p'x+q')^{s'}\ldots + \\
&+ \ldots + \\
&+ (M_sx+N_s)(x-\alpha)^r(x-\alpha')^{r'}\ldots(x^2+p'x+q')^{s'}\ldots + \\
&+ (M_{s-1}x+N_{s-1})(x-\alpha)^r(x-\alpha')^{r'}\ldots(x^2+px+q)(x^2+p'x+q')^{s'}\ldots + \\
&+ \ldots + \\
&+ (M_1x+N_1)(x-\alpha)^r(x-\alpha')^{r'}\ldots(x^2+px+q)^{s-1}(x^2+p'x+q')^{s'}\ldots + \\
&+ \ldots
\end{aligned} \tag{29}$$

(a_0 jsme nechali ve jmenovateli, abychom jím nemusili násobit všechny členy vpravo; v každém členu vpravo ovšem stojí (kromě a_0) všichni činitelé z rozkladu (24), kromě toho, který stál v příslušném členu ve vzorci (25) ve jmenovateli). Obě strany rovnice (29) jsou mnohočleny; rovnice (29) vzniká z rovnice (25) tím, že násobíme mnohočlenem $Q(x) : a_0$; rovnice (25) vzniká z rovnice (29) naopak tím, že mnohočlenem $Q(x) : a_0$ dělíme. Jsou-li čísla (28) volena tak, že rovnice (25) platí pro všechna x, pro něž je $Q(x) \neq 0$ (podle věty 59 víme, že taková čísla (28) existují), potom rovnice (29) platí rovněž pro všechna x, pro něž je $Q(x) \neq 0$, tedy pro nekonečně mnoho x; ježto (29) je rovnice mezi dvěma mnohočleny, je potom podle věty C v § 1 každý koeficient vlevo v rovnici (29) roven stejnolehlému koeficientu vpravo a tedy rovnice (29) platí *pro všechna x vůbec* (i pro ta x, pro něž je $Q(x) = 0$). Naopak, jsou-li čísla (28) volena tak, že rovnice (29) platí pro všechna x vůbec (čili — což je totéž podle věty C — je-li každý koeficient v rovnici (29) vlevo roven stejnolehlému koeficientu vpravo), platí rovnice (25) pro všechna x, pro něž je $Q(x) \neq 0$. Můžeme tedy svoji úlohu vyslovit dvojím ekvivalentním způsobem:

I. Nalézt reálná čísla (28) tak, aby v rovnici (29) byl každý koeficient vlevo roven příslušnému koeficientu vpravo (víme, že taková čísla (28) existují).

II. Nalézt reálná čísla (28), tak aby rovnice (29) platila identicky, tj. pro každé komplexní x (víme, že taková čísla (28) existují).

Formulace I vede k tomuto řešení naší úlohy (tzv. *metoda neurčitých součinitelů* nebo *neurčitých koeficientů*): Vynásobíme-li vpravo v rovnici (29), vidíme, že koeficient každé mocniny x vpravo je lineární formou[22]) v číslech (28); položíme-li každý takový koeficient roven stejnolehlému koeficientu vlevo, dostaneme pro čísla (28) soustavu lineárních rovnic, jež jistě má reálné řešení (neboť víme, že čísla (28), mající žádané vlastnosti, existují).[23])

Příklad 4. Stanovení koeficientů $a, b, \ldots, g$ v poslední rovnici z příkl. 2. Násobíme tuto rovnici mnohočlenem $x^7 + 2x^5 + x^3 = x^3(x^4 + 2x^2 + 1) = x^3(x^2 + 1)^2 = x^3(x + i)^2 (x - i)^2$; dostaneme

$$\begin{aligned} -2x^5 - x^3 + 1 = {} & a(x^4 + 2x^2 + 1) + b(x^5 + 2x^3 + x) + \\ & + c(x^6 + 2x^4 + x^2) + dx^3(x^2 - 2ix - 1) + \\ & + ex^3(x^3 - ix^2 + x - i) + \\ & + fx^3(x^2 + 2ix - 1) + gx^3(x^3 + ix^2 + x + i)\,. \end{aligned}$$

V této rovnici se vyskytují mocniny od x^6 až do x^0; položíme-li koeficient každé mocniny x vpravo roven koeficientu téže mocniny vlevo, dostaneme těchto sedm rovnic:

$$\begin{gathered} c + e + g = 0\,, \qquad b + d - ie + f + ig = -2\,, \\ a + 2c - 2id + e + 2if + g = 0\,, \qquad 2b - d - ie - f + ig = -1\,, \\ 2a + c = 0\,, \qquad b = 0\,, \qquad a = 1\,. \end{gathered}$$

Z těchto rovnic dostaneme řešením (doporučuji, abyste si je provedli) $a = 1$, $b = 0$, $c = -2$, $d = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$, $e = 1 - \frac{3}{4}i$, $f = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$, $g = 1 + \frac{3}{4}i$.

[22]) Lineární forma je — zhruba řečeno — výraz „prvního stupně" v několika proměnných (nebo i v jedné proměnné) bez prostého členu. Např. $3x + \pi y - iz$ je lineární forma v x, y, z. Viz Kořínek, Základy algebry, str. 197 (v 2. vydání str. 202—203).

[23]) Jak se řeší soustavy lineárních rovnic, najdete v citované knize Kořínkově, str. 234—239 a str. 294—301. (V 2. vyd. str. 243—248 a 303—310.) Výrok o realitě řešení se týká ovšem jen rovnice (29); v rovnici (19) nemusí být řešení reálné, nejsou-li $a_0, \alpha, \alpha', \ldots, P(x)$ reálné. Tak v příkl. 2 (jejž nyní v příkl. 4 dopočítáme) vyjde nereálné řešení.

Příklad 5. Stanovení koeficientů $a, b, \ldots, k$ v poslední rovnici v příkl. 3. Násobíme tuto rovnici mnohočlenem $x^9 + 2x^6 + x^3 = x^3(x+1)^2(x^2-x+1)^2$; dostaneme

$$\begin{aligned} x^7 + 7x - 1 = {} & a(x+1)^2(x^2-x+1)^2 + \\ & + bx(x+1)^2(x^2-x+1)^2 + \\ & + cx^2(x+1)^2(x^2-x+1)^2 + dx^3(x^2-x+1)^2 + \\ & + ex^3(x+1)(x^2-x+1)^2 + \\ & + (fx+g)\,x^3(x+1)^2 + \\ & + (hx+k)\,x^3(x+1)^2(x^2-x+1), \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} x^7 + 7x - 1 = {} & a(x^6+2x^3+1) + b(x^7+2x^4+x) + \\ & + c(x^8+2x^5+x^2) + \\ & + d(x^7-2x^6+3x^5-2x^4+x^3) + \\ & + e(x^8-x^7+x^6+x^5-x^4+x^3) + \\ & + (fx+g)(x^5+2x^4+x^3) + \\ & + (hx+k)(x^7+x^6+x^4+x^3). \end{aligned}$$

V této rovnici se vyskytují mocniny od x^8 až do x^0; položíme-li koeficient každé mocniny x vpravo roven koeficientu téže mocniny vlevo, dostaneme těchto devět rovnic:

$c + e + h = 0,$	$2c + 3d + e + 2f + g + h = 0,$	$c = 0,$
$b + d - e + h + k = 1,$	$2b - 2d - e + f + 2g + h + k = 0,$	$b = 7,$
$a - 2d + e + f + k = 0,$	$2a + d + e + g + k = 0,$	$a = -1.$

Z těchto rovnic dostanete řešením (doporučuji, abyste si je provedli) $a = -1$, $b = 7, c = 0, d = 1, e = \frac{31}{9}, f = -\frac{1}{3}, g = -\frac{7}{3}, h = -\frac{31}{9}, k = -\frac{1}{9}$.

Řešení metodou neurčitých součinitelů sice dovedeme vždy provést, ale ve složitějších případech bývá často zdlouhavé. Proto vyložíme v kap. XI, § 1 ještě jiné metody. Výklad bude tak elementární, že si jej může přečíst i začátečník.

§ 3. Integrace racionálních funkcí. Máme-li vypočíst $\int \frac{S(x)}{Q(x)}\,dx$, kde $S(x)$, $Q(x)$ jsou reálné mnohočleny,[24]) postupujeme podle § 2; není-li stupeň mnohočlenu $S(x)$ nižší než stupeň mnohočlenu $Q(x)$, provedeme dělení a dostaneme

$$\frac{S(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P(x)}{Q(x)},$$

[24]) Zdůrazňuji ještě jednou, že od tohoto okamžiku až do konce kapitoly VIII počítáme opět jen s *reálnými* funkcemi *reálných* proměnných. Proto nebude vadit, budu-li někde užívat písmena i v jiném významu než jako imaginární jednotky.

kde $P_1(x)$, $P(x)$ jsou reálné mnohočleny a $P(x)$ je buďto nula nebo mnohočlen nižšího stupně než $Q(x)$. Mnohočlen $P_1(x)$ dovedeme integrovat; zlomek $\frac{P(x)}{Q(x)}$ rozložíme pak (není-li $P(x)$ nula) podle věty 59 na částečné zlomky. Stačí tedy vypočíst ještě integrály jednotlivých sčítanců v rovnici (25) (věta 59), tj. integrály tvaru

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^n} \, dx \ (n \text{ celé kladné}),$$

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} \, dx \ (n \text{ celé kladné}),$$

kde $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$. První integrál se rovná $-\frac{A}{n-1} \frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}}$ pro $n > 1$ a rovná se $A \lg |x - \alpha|$ pro $n = 1$ (výsledek platí v každém intervalu neobsahujícím bod α); druhý integrál dovedeme též vypočíst (viz příklad 9 v kap. III, § 4), a to v intervalu $(-\infty, +\infty)$. Dovedeme tedy též vypočíst integrál libovolné reálné racionální funkce $\int \frac{S(x)}{Q(x)} \, dx$, ovšem jen tehdy, dovedeme-li rozložit mnohočlen $Q(x)$ podle vzorce (24) (věta 59), tj. dovedeme-li řešit rovnici $Q(x) = 0$. Výsledek platí potom v každém otevřeném intervalu neobsahujícím žádný kořen rovnice $Q(x) = 0$.

Příklad 1.

$$\int \frac{x^{10} + 2x^9 + 3x^7 + 4x^6 + x^4 + 2x^3 + 7x - 1}{x^9 + 2x^6 + x^3} \, dx.$$

V § 2, příkl. 3 a 5 jsme již provedli rozklad integrované funkce; hledaný integrál se tedy rovná

$$\int \left(x + 2 - \frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{31}{9(x+1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{x + 7}{3(x^2 - x + 1)^2} - \frac{31x + 1}{9(x^2 - x + 1)} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{2x^2} - \frac{7}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{31}{9} \lg |x + 1| -$$

$$- \frac{1}{3} \int \frac{x + 7}{(x^2 - x + 1)^2} \, dx - \frac{1}{9} \int \frac{31x + 1}{x^2 - x + 1} \, dx.$$

Poslední dva integrály počítáme podle vzoru př. 9 v kap. III, § 4:

$$I_2 = \int \frac{x + 7}{(x^2 - x + 1)^2} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 1}{(x^2 - x + 1)^2} \, dx +$$

$$+ \frac{15}{2} \int \frac{dx}{(x^2 - x + 1)^2},$$

$$I_1 = \int \frac{31x + 1}{x^2 - x + 1} \, dx = \frac{31}{2} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} \, dx +$$

$$+ \frac{33}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} \, .$$

Substitucí $x^2 - x + 1 = t$, $(2x - 1) \, dx = dt$ dostaneme

$$\int \frac{2x - 1}{(x^2 - x + 1)^2} \, dx = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2 - x + 1} \, ,$$

$$\int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} \, dx = \int \frac{dt}{t} = \lg |t| = \lg (x^2 - x + 1)$$

(neboť je stále $x^2 - x + 1 > 0$). Jest $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$; položíme-li $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}t$, $dx = \frac{1}{2}\sqrt{3} \, dt$, máme dále $x^2 - x + 1 = \frac{3}{4}(t^2 + 1)$,

$$\int \frac{dx}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \, . \, \frac{16}{9} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} \, ,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \, . \, \frac{4}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 1} \, ;$$

podle kap. III, § 3, příkl. 5 je (do (16) jest třeba dosadit $n = 1$ a psát t místo x)

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} = \frac{t}{2(1 + t^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} \, ;$$

ale

$$t = \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \, , \quad t^2 + 1 = \frac{4}{3}(x^2 - x + 1) \, ,$$

takže

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} t = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \, ,$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \left(\frac{t}{2(1 + t^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \, .$$

Tím jsou vypočteny integrály I_1, I_2 a tedy též hledaný integrál (doporučuji čtenáři, aby si provedl ještě dosazení); výsledek platí v každém otevřeném intervalu neobsahujícím ani bod 0 ani bod -1.

Příklad 2. $\int_0^1 \frac{dx}{x^4+1}$. Především musíme rozložit $x^4 + 1$ podle vzorce (24); rovnice $x^4 + 1 = 0$ nemá reálných kořenů, proto rozklad vypadá takto: $x^4 + 1 = (x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q')$ (přičemž dosud není vyloučeno, že by oba mnohočleny 2. stupně byly identické[25])). Z této (identicky platné) rovnice plyne podle věty C, str. 83:

$$p + p' = 0\,, \quad q + q' + pp' = 0\,, \quad pq' + p'q = 0\,, \quad qq' = 1\,.$$

Podle první rovnice můžeme tyto rovnice psát též takto: $p' = -p$, $q + q' = p^2$, $p(q' - q) = 0$, $qq' = 1$. Podle poslední rovnice mají q, q' totéž znamení a jsou různá od nuly; podle druhé rovnice je $q + q' = p^2$, takže q, q' jsou kladná a $p \neq 0$; z rovnice $p(q' - q) = 0$ potom plyne $q = q'$, tedy $qq' = q^2 = 1$ a tedy $q = q' = +1$ (ježto $q > 0$); tedy $p^2 = q + q' = 2$, $p = \pm\sqrt{2}$, $p' = -p$. Vezměme $p = \sqrt{2}$, tedy $p' = -\sqrt{2}$ (kdybychom vzali $p = -\sqrt{2}$, bylo by $p' = \sqrt{2}$ a oba činitelé by se pouze vyměnili); tedy máme rozklad $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1) \,.\, (x^2 - \sqrt{2}x + 1)$; vidíme, že kořeny rovnice $x^4 + 1$ jsou jednoduché, ježto kořeny $\gamma \pm \delta i$ $(\delta \neq 0)$ rovnice $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$ *nejsou* kořeny rovnice $x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$ (neboť podle str. 85 existuje jen jeden reálný polynom tvaru $x^2 + Ax + B$, jenž má kořen $\gamma + \delta i$ nebo $\gamma - \delta i$); tedy

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,.$$

Snadným výpočtem (nechť si jej čtenář provede) obdržíme

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right).$$

Jest pak (znamení $\pm$ si odpovídají)

$$\int_0^1 \frac{x \pm \sqrt{2}}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x \pm \sqrt{2}}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1}\,dx \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1}\,.$$

Zde je

$$\int_0^1 \frac{2x \pm \sqrt{2}}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1}\,dx = \left[\lg\left|x^2 \pm \sqrt{2}x + 1\right|\right]_0^1 = \lg(2 \pm \sqrt{2})$$

[25]) Čtenář, znalý počátků algebry, zjistí ovšem ihned, že rovnice $x^4 + 1 = 0$ má čtyři různé kořeny jednoduché a nikoliv dva dvojnásobné — ale raději tento výsledek odvodíme.

(viz kap. III, § 4, příkl. 8). Dále je $x^2 \pm \sqrt{2}x + 1 = (x \pm \frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t^2 + 1)$, položíme-li $x \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}t$, a tedy $dx = \frac{1}{\sqrt{2}}dt$, $t = \sqrt{2}x \pm 1$; máme tedy (pozor na meze!)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\int_{\pm 1}^{\sqrt{2}\pm 1} \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$= \sqrt{2}\,(\operatorname{arctg}(\sqrt{2} \pm 1) - \operatorname{arctg}(\pm 1)).$$

Je $\operatorname{arctg}(\pm 1) = \pm \frac{1}{4}\pi$, $\operatorname{arctg}(\sqrt{2} + 1) = \frac{3}{8}\pi$, $\operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{8}\pi$.[26]) Tedy celkem[27])

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\tfrac{1}{2}\lg(2 + \sqrt{2}) - \tfrac{1}{2}\lg(2 - \sqrt{2}) +$$

$$+ \operatorname{arctg}(\sqrt{2} + 1) - \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1) - \operatorname{arctg}(-1)) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lg(2 + \sqrt{2}) - \tfrac{1}{2}\lg 2 + \tfrac{3}{8}\pi - \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{1}{4}\pi) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\lg(1 + \sqrt{2}) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\pi.$$

§ 4. Integrály tvaru $\int R\left(x, \left(\frac{ax + b}{cx + f}\right)^{1/s}\right) dx$. Mnohočlenem ve dvou proměnných x, y nazýváme součet konečného počtu členů tvaru $cx^m y^n$, kde c je konstanta, m a n jsou celá nezáporná čísla. Podíl dvou mnohočlenů $P(x, y) : Q(x, y)$ se nazývá racionální funkcí proměnných x, y; taková funkce je definována ve všech bodech, v nichž je $Q(x, y) \neq 0$. V tomto paragrafu se budeme zabývat integrály tvaru

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax + b}{cx + f}\right)^{1/s}\right) dx \qquad (af - bc \neq 0), \tag{30}$$

---

26) Vypočtěme to: je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}$ a tedy speciálně pro $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ je $1 = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{1}{8}\pi}$, $\operatorname{tg}^2\frac{1}{8}\pi + 2\operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi - 1 = 0$, $\operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi = -1 \pm \sqrt{2}$; ale $\operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi > 0$, tedy $\operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi = \sqrt{2} - 1$; jest $(\sqrt{2} - 1)\cdot(\sqrt{2} + 1) = 2 - 1 = 1$ a tedy $\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi = \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{8}\pi) = 1 : \operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi = 1 : (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} + 1$; tedy: $\frac{1}{8}\pi = \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1)$, $\frac{3}{8}\pi = \operatorname{arctg}(\sqrt{2} + 1)$.

27) Užíváme dále vztahu $(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 2$, takže $-\lg(2 - \sqrt{2}) = \lg(2 + \sqrt{2}) - \lg 2$.

kde s je *celé* číslo větší než 1 a kde $R(x, y)$ je racionální funkce proměnných x, y.[28]) Integrál tvaru (30) (a ovšem také *určitý* integrál tohoto tvaru) se dá převést na integrál racionální funkce substitucí

$$\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{1/s} = t\,.$$

Vskutku, z této substituce plyne (v případě $af - bc \neq 0$)

$$\frac{ax+b}{cx+f} = t^s, \quad x = \frac{b - ft^s}{ct^s - a}, \quad \mathrm{d}x = \frac{af - bc}{(ct^s - a)^2}\, st^{s-1}\, \mathrm{d}t\,;$$

provedeme-li tuto substituci, vidíme, že výrazy $x, \left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{1/s}$ jsou nahrazeny *racionálními* funkcemi proměnné t a rovněž $\mathrm{d}x$ je nahrazeno výrazem $r(t)\,.\,\mathrm{d}t$, kde $r(t)$ je *racionální* funkcí proměnné t. Tedy vskutku integrál (30) přejde touto substitucí v integrál racionální funkce proměnné t.

Poznámka 1. Integrál $\int R(x, (ax+b)^{1/s})\,\mathrm{d}x$ patří ovšem též mezi integrály tvaru (30); je to prostě speciální případ $c = 0, f = 1$.

Poznámka 2. V tomto paragrafu i ve zbytku této kapitoly přenechávám čtenáři, aby si rozvážil — buď v obecném případě nebo v jednotlivých příkladech — zda a v kterých intervalech uvedené úvahy platí.

Příklad 1. $\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2x+3} + x}{\sqrt{2x+3} - x}\,\mathrm{d}x$; substituce $\sqrt{2x+3} = t > 0$, $2x + 3 = t^2$, $x = \frac{1}{2}(t^2 - 3)$, $\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2x+3} + x}{\sqrt{2x+3} - x}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\sqrt{5}} \frac{2t + t^2 - 3}{2t - t^2 + 3}\, t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{1}^{\sqrt{5}} \left(-t - 4 - \frac{9}{t-3} + \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \left[-\tfrac{1}{2}t^2 - 4t - 9\lg|t-3| + \lg|t+1|\right]_1^{\sqrt{5}} =$$
$$= -\tfrac{5}{2} - 4\sqrt{5} - 9\lg(3 - \sqrt{5}) + \lg(\sqrt{5} + 1) + \tfrac{1}{2} + 4 +$$
$$+ 9\lg 2 - \lg 2 = 2 - 4\sqrt{5} - 9\lg(3 - \sqrt{5}) + \lg(\sqrt{5} + 1) +$$
$$+ 8\lg 2.$$

[28]) Funkci $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{1/s}\right)$ dostaneme tedy tak, že do racionální funkce $R(x, y)$ za y dosadíme $\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{1/s}$. Kdyby bylo $s = 1$, byla by funkce $R\left(x, \frac{ax+b}{cx+f}\right)$ ovšem racionální funkcí proměnné x a integrovali bychom podle metody § 3. Také v případě $af - bc = 0$ — jak čtenář snadno nahlédne — je předložený integrál — pokud vůbec má význam — integrálem racionální funkce.

Příklad 2. $\int \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}} \cdot \frac{dx}{x^2}$. Substituce

$$\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}} = t, \quad \frac{2x+1}{x+1} = t^3; \quad x = \frac{t^3-1}{2-t^3}, \quad dx = \frac{3t^2\,dt}{(2-t^3)^2};$$

$$\int \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}} \frac{dx}{x^2} = \int \frac{3t^3\,dt}{(t^3-1)^2} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{3(t-1)^2} + \frac{1}{3(t-1)} + \frac{t+1}{(t^2+t+1)^2} - \frac{t+3}{3(t^2+t+1)} \right) dt =$$

$$= -\frac{t}{t^3-1} + \tfrac{1}{3} \lg |t-1| - \tfrac{1}{6} \lg (t^2+t+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}};$$

do tohoto výsledku jest nutno ještě místo t zavést x podle rovnice

$$t = \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}}.$$

Doporučuji čtenáři, aby si všechny jednotlivosti tohoto příkladu propočetl.

Poznámka 3. Vyskytuje-li se v integrované funkci několik *různých* odmocnin

$$\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{1/s'}, \quad \left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{1/s''}, \ldots \text{ téhož výrazu } \frac{ax+b}{cx+f},$$

položme číslo s rovno nejmenšímu společnému násobku čísel $s', s'', \ldots$; je zřejmo, že všechny uvedené odmocniny jsou mocninami výrazu $\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{1/s}$, takže máme opět tvar vyšetřovaný v tomto paragrafu. Např. budiž

$$I = \int \frac{x^2 + x\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{2/3}}{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{7/4} + \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{11/6}}\,dx;$$

nejmenší společný násobek čísel 3, 4, 6 je 12, takže lze psát

$$I = \int \frac{x^2 + x\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{8/12}}{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{21/12} + \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{22/12}}\,dx;$$

substituce $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{1/12} = t$ převádí integrál I na integrál funkce racionální

§ 5. Integrály tvaru $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$, kde $R(x, y)$ je racionální funkce. Především můžeme vyloučit případ $a = 0$, který byl řešen již v předešlém paragrafu (případ $a = b = 0$ vede dokonce přímo k integrálu racionální funkce). Nechť tedy je $a \neq 0$. Za druhé je možno vyloučit případ, že mnohočlen $ax^2 + bx + c$ má *dvojnásobný* kořen, neboť potom je $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$; je-li $a < 0$, je $ax^2 + bx + c < 0$ pro všechna reálná $x \neq \alpha$ a tedy $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ nemá pro nás smyslu pro $x \neq \alpha$ (ježto připouštíme jen reálné hodnoty); je-li však $a > 0$, je $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\,|x - \alpha|$ a dostáváme přímo integrál racionální funkce. Nechť tedy $a \neq 0$ a nechť $ax^2 + bx + c$ má dva různé kořeny α_1, α_2.

I. $a > 0$; v tomto případě zaveďme substituci $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\,.\,x + t$ (tj. $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a}\,.\,x$). Umocněním dostaneme $ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{a}\,.\,xt + t^2$, tj. $bx + c = 2\sqrt{a}\,.\,xt + t^2$,

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t} + t =$$

$$= \frac{-\sqrt{a}t^2 + bt - \sqrt{a}c}{b - 2\sqrt{a}t}, \quad dx = 2\frac{-\sqrt{a}t^2 + bt - \sqrt{a}c}{(b - 2\sqrt{a}t)^2}\,dt\,.$$

Tedy x i $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ jsou racionální funkce proměnné t a také dx má tvar $r(t)\,dt$, kde $r(t)$ je racionální funkce proměnné t.[29]) Tím je tedy předložený integrál převeden na integrál racionální funkce.

Příklad 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x - 1}}$; substituce $\sqrt{x^2 + x - 1} = x + t$,

$$x - 1 = 2xt + t^2, \quad x = \frac{t^2 + 1}{1 - 2t}, \quad dx = \frac{-2(t^2 - t - 1)}{(1 - 2t)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{x^2 + x - 1} = \frac{t^2 + 1}{1 - 2t} + t = \frac{-(t^2 - t - 1)}{1 - 2t}.$$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x - 1}} = -2\int \frac{(t^2 - t - 1)\,dt}{(t^2 + 1 - t^2 + t + 1)(1 - 2t)} =$$

$$= \int \frac{(t^2 - t - 1)\,dt}{(t + 2)\left(t - \frac{1}{2}\right)} = \int \left(1 - \frac{2}{t + 2} - \frac{1}{2\left(t - \frac{1}{2}\right)}\right) dt =$$

$$= t - 2\lg|t + 2| - \tfrac{1}{2}\lg|t - \tfrac{1}{2}| =$$

$$= \sqrt{x^2 + x - 1} - x - 2\lg|\sqrt{x^2 + x - 1} - x + 2| -$$

$$- \tfrac{1}{2}\lg|\sqrt{x^2 + x - 1} - x - \tfrac{1}{2}|\,.$$

[29]) Všimněme si podobnosti výrazů pro $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ a pro dx; bývá leckdy užitečná.

II. $a < 0$. Zde má pro nás význam jen ten případ, že kořeny α_1, α_2 jsou reálné[30]) (a ovšem různé, viz počátek tohoto paragrafu); nechť je označení tak voleno, že $\alpha_1 < \alpha_2$. Jest $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1) . (x - \alpha_2)$; je-li $x > \alpha_2$, je též $x > \alpha_1$ a tedy $a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) < 0$ (ježto $a < 0$); rovněž pro $x < \alpha_1$ je též $x < \alpha_2$ a tedy $a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) < 0$. Hodnoty $x < \alpha_1$ a $x > \alpha_2$ nepřicházejí tedy pro nás v úvahu. Zbývají tedy hodnoty x intervalu $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$. Omezme se tedy na interval (α_1, α_2) (hodnoty $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$, pokud by se vyskytly jako meze určitého integrálu, by vyžadovaly zvláštní úvahy). Je-li $\alpha_1 < x < \alpha_2$, je

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = (-a)(x - \alpha_1)(\alpha_2 - x),$$

kde všichni tři činitelé jsou kladná čísla. Tedy

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-a(x - \alpha_1)(\alpha_2 - x)} = \sqrt{-a(x - \alpha_1)^2 \frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}} =$$

$$= \sqrt{-a}(x - \alpha_1) \sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}};$$

náš integrál má tedy tvar

$$\int R\left(x, \sqrt{-a}(x - \alpha_1) \sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}}\right) dx,$$

což je tvar vyšetřovaný v § 4 $\left(\text{substituce } \sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}} = t\right)$.

Příklad 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{5x + 2 + 3\sqrt{-x^2 + x + 2}}$. V intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je

$$\sqrt{-x^2 + x + 2} = \sqrt{-(x + 1)(x - 2)} = \sqrt{(x + 1)(2 - x)} =$$

$$= (x + 1) \sqrt{\frac{2 - x}{x + 1}}.$$

$$\sqrt{\frac{2 - x}{x + 1}} = t, \quad \frac{2 - x}{x + 1} = t^2, \quad x = \frac{2 - t^2}{t^2 + 1}, \quad x + 1 = \frac{3}{t^2 + 1},$$

$$dx = -\frac{6t\,dt}{(t^2 + 1)^2};$$

[30]) Kdyby totiž mnohočlen $ax^2 + bx + c$ neměl reálných kořenů, měl by pro všechna (reálná) x totéž znamení; ježto pak pro dostatečně velká (reálná) x je $ax^2 + bx + c = ax^2\left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2}\right) < 0$, bylo by $ax^2 + bx + c < 0$ pro všechna reálná x a tedy by neexistovala reálná odmocnina $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{5x + 2 + 3\sqrt{-x^2 + x + 2}} = \int_0^1 \frac{dx}{5x + 2 + 3(x + 1)\sqrt{\dfrac{2 - x}{x + 1}}} =$$

$$= -\int_{\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{6t\,dt}{(12 - 3t^2 + 9t)(1 + t^2)} = \int_{\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{2t\,dt}{(t^2 - 3t - 4)(1 + t^2)} =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{5(t + 1)} + \frac{8}{85(t - 4)} - \frac{5t + 3}{17(t^2 + 1)} \right) dt =$$

$$= \frac{8}{85} \lg \frac{4\sqrt{2} - 1}{4 - \sqrt{2}} - \frac{3}{34}\pi + \frac{6}{17} \operatorname{arctg} \sqrt{2}\,.^{31})$$

§ 6. **Integrály tvaru $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$, kde $R(u, v)$ je racionální funkce.** Zde vede k cíli substituce $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = t$; odtud $\cos^2 \frac{1}{2}x = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x} = \dfrac{1}{1 + t^2}$; $\cos x = \cos^2 \frac{1}{2}x - \sin^2 \frac{1}{2}x = 2\cos^2 \frac{1}{2}x - 1 = \dfrac{2}{1 + t^2} - 1 = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$; $\sin x = 2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}x \,.\, \cos^2 \frac{1}{2}x = 2t \dfrac{1}{1 + t^2}$. Konečně $\dfrac{\frac{1}{2}dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} = dt$, $dx = 2\cos^2 \frac{1}{2}x\,dt = \dfrac{2\,dt}{1 + t^2}$. Tedy máme dohromady vzorce $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$, $dx = \dfrac{2\,dt}{1 + t^2}$; předložený integrál přejde touto substitucí zřejmě v integrál racionální funkce.

Příklad 1.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}\,dx = \int_0^1 \frac{1 + t^2 - 2t}{1 + t^2 + 1 - t^2}\,\frac{2\,dt}{1 + t^2} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1 + t^2 - 2t}{1 + t^2}\,dt = [t - \lg(t^2 + 1)]_0^1 = 1 - \lg 2\,.$$

§ 7. **Integrály tvaru $\int R(e^{\alpha x})\,dx$, kde $R(u)$ je racionální funkce proměnné u.** O konstantě α předpokládejme, že je různá od nuly (jinak by bylo ihned $\int R(e^0)\,dx = \int R(1)\,dx = R(1)\,.\,x$). Zaveďme $e^{\alpha x} = t$, $x = \dfrac{1}{\alpha} \lg t$, $dx = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{dt}{t}$; vidíme, že daný integrál je převeden na $\dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\int R(t)\,\dfrac{dt}{t}$, což je integrál racionální funkce.

---

[31]) Doporučuji, aby si čtenář podrobně vše vypočítal; užívám toho, že $\operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

Příklad 1.

$$I = \int \frac{e^{\pi x/2} - e^{\pi x/3}}{e^{\pi x/3} + 1}\, dx;$$

integrovaná funkce je racionální funkcí výrazu $e^{\pi x/6} = t$, neboť $e^{\pi x/3} = t^2$, $e^{\pi x/2} = t^3$; $\frac{\pi}{6} e^{\pi x/6}\, dx = dt$, takže

$$I = \frac{6}{\pi}\int \frac{t^3 - t^2}{t^2 + 1}\frac{dt}{t} = \frac{6}{\pi}\int \frac{t^2 - t}{t^2 + 1}\, dt = \frac{6}{\pi}\int\left(1 - \frac{t + 1}{t^2 + 1}\right) dt =$$

$$= \frac{6}{\pi}\left(t - \tfrac{1}{2}\lg(t^2 + 1) - \operatorname{arctg} t\right) =$$

$$= \frac{6}{\pi}\left(e^{\pi x/6} - \tfrac{1}{2}\lg\left(e^{\pi x/3} + 1\right) - \operatorname{arctg} e^{\pi x/6}\right).$$

Poznámka 1. Např. $\int \frac{dx}{e^{\alpha\sqrt{2}x} + e^{\alpha x}}$ $(\alpha \neq 0)$ *nelze* takto počítat, ježto, položíte-li $e^{\beta x} = t$, bude $e^{\alpha x} = t^{\alpha/\beta}$, $e^{\alpha\sqrt{2}x} = t^{\alpha\sqrt{2}/\beta}$, a není možno volit β tak, aby oba mocnitelé $\frac{\alpha}{\beta}$ i $\frac{\alpha\sqrt{2}}{\beta}$ byla celá čísla (ježto jejich podíl je iracionální číslo $\sqrt{2}$).

§ 8. Integrály tvaru $\int R(\lg x)\frac{dx}{x}$, kde $R(u)$ je racionální funkce proměnné u. Substituce $\lg x = t$, $\frac{dx}{x} = dt$ převádí předložený integrál ihned na $\int R(t)\, dt$, což je integrál funkce racionální.

Příklad 1. $I = \int \frac{1}{\lg^2 x - 1}\frac{dx}{x}$. Substituce $\lg x = t$ dává

$$I = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1}\right) dt = \frac{1}{2}\lg\left|\frac{t - 1}{t + 1}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\lg\left|\frac{\lg x - 1}{\lg x + 1}\right|.$$

Poznámka 1. Jednotlivé paragrafy této kapitoly by se daly ještě různým způsobem doplnit; odkazuji čtenáře ke kap. X, § 1 a kap. XI. Přitom § 1 v kap. X a § 1 v kap. XI jsou tak elementární, že je lze doporučit i začátečníkovi.

Cvičení[32])

A) K § 3.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4}$.

2. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x^2 + 2x - 2)^2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12\sqrt{3}} \lg (2 + \sqrt{3})$.

3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^3} = -\frac{2x-1}{2(x-1)^2}$ (výhodnější než metoda § 3 je zde substituce $x - 1 = t$).

4. V § 3, příkl. 2 jsme vypočetli $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^4+1}$. Vypočtěte

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 ,$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \lg \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}} (\operatorname{arctg} (\sqrt{2}x - 1) + \operatorname{arctg} (\sqrt{2}x + 1)) ,$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{x^4+1} = \frac{1}{4} \lg (x^4 + 1) .$$

První a třetí integrál nebudete ovšem počítat metodou § 3, nýbrž jednodušeji vhodnou substitucí.

5. Počítáte-li první integrál předešlého cvičení metodou § 3, dostanete

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+1} = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} (\sqrt{2}x - 1) - \operatorname{arctg} (\sqrt{2}x + 1)) ;$$

tedy je v intervalu $(-\infty, +\infty)$

$$\operatorname{arctg} x^2 = \operatorname{arctg} (\sqrt{2}x - 1) - \operatorname{arctg} (\sqrt{2}x + 1) + C ; \tag{31}$$

dosazením $x = 0$ dostanete $C = \frac{1}{2}\pi$. Dokažte vzorec (31) (s hodnotou $C = \frac{1}{2}\pi$) přímo z definice funkce $\operatorname{arctg} x$.[33])

[32]) Při neurčitých integrálech nechť čtenář sám uváží, ve kterých intervalech uvedené výsledky platí.

[33]) Při této úloze a podobných úlohách postupujeme asi takto: buďte a, b dvě reálná čísla; položme $\alpha = \operatorname{arctg} a$, $\beta = \operatorname{arctg} b$; tedy $a = \operatorname{tg} \alpha$, $b = \operatorname{tg} \beta$; tedy $\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \dfrac{a+b}{1-ab}$ (není-li $ab = 1$); odtud pak plyne, že $\alpha + \beta = \operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \dfrac{a+b}{1-ab} + k\pi$, kde k je celé číslo.

6. Pro výraz, který se vyskytuje v druhém integrálu cvičení 4, odvoďte obdobně rovnici

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{1 - x^2} + C,$$

platnou v každém z intervalů $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$. Přitom C je v každém z těchto intervalů konstanta, ale v každém z nich jiná (její hodnoty dostanete tím, že položíte předně $x = 0$ a že za druhé necháte x vzrůstat do $+\infty$ a klesat do $-\infty$).

7. $$\int \frac{x^2 + x - 1}{(x^2 - 1)(x + 2)(x^2 - 5)}\,dx = -\frac{1}{24}\lg|x - 1| - \frac{1}{8}\lg|x + 1| - \frac{1}{3}\lg|x + 2| +$$
$$+ \frac{1}{40}(10 - 3\sqrt{5})\lg|x - \sqrt{5}| + \frac{1}{40}(10 + 3\sqrt{5})\lg|x + \sqrt{5}|.$$

8. $$\int \frac{x^4\,dx}{(x^4 - 1)^2} = -\frac{1}{8}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{16}\lg\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| - \frac{x}{4(x^4 - 1)}.$$

9. $$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + x + 2)(x + 1)} = \frac{1}{4}\lg 2 + \frac{1}{2\sqrt{7}}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{7}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{7}}\right);$$

dokažte, že poslední závorka má hodnotu $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{5}$.

10. $$\int_{-1}^{+1} \frac{(1 - 2x^2)\,dx}{x^6 + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\lg(2 + \sqrt{3}).$$

Návod: je $x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$; metodou neurčitých součinitelů nebo přímo řešením rovnice $x^4 - x^2 + 1 = 0$ najdete rozklad $x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + \sqrt{3}x + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{3}x + 1)$.

B) K § 4.

11. $$\int \frac{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}\,dx = \lg(1 - \sqrt{1 - x^2}) + \sqrt{1 - x^2}$$ (čitatel a jmenovatel dělíme $\sqrt{1 - x}$).

12. $$\int_1^2 \sqrt{\frac{x - 1}{x + 2}}\,x\,dx = -\frac{3}{2} + \frac{15}{8}\lg 3.$$

13. $$\int_0^3 \frac{x^2\sqrt{x + 1}}{x + \sqrt{x + 1}}\,dx = \frac{59}{10} + \frac{7 - 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\lg\frac{5 + \sqrt{5}}{2} - \frac{7 + 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\lg\frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

14. Položíme-li $\sqrt[n]{\dfrac{x - 1}{x + 1}} = t$, je

$$\int \sqrt[n]{\frac{x - 1}{x + 1}}\,dx = \int \frac{2nt^n\,dt}{(1 - t^n)^2}$$

(pro $n = 4$ jsme poslední integrál vypočetli v cvičení 8).

C) K § 5.

15. Je-li $a > 0$, je

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg |2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| .$$

16. Budiž $a < 0$; rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nechť má reálné kořeny $\alpha_1, \alpha_2 (\alpha_1 < \alpha_2)$; tedy

$$\alpha_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \alpha_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{neboť } a < 0) .$$

Potom je v intervalu (α_1, α_2)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}} .$$

17. Nechť platí předpoklady cvičení 16; potom lze předložený integrál počítat též jinak. Je totiž

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = -a\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right) ;$$

zavedeme-li substituci

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a} t ,$$

dostaneme v intervalu (α_1, α_2)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} .$$

18. Podle cvičení 16 a 17 je v intervalu (α_1, α_2)

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}} = \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C ,$$

kde C je konstanta. Položíme-li $\dfrac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} = \lambda$ a použijeme-li výrazů pro α_1, α_2, přejde tato rovnice v rovnici

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}} = \arcsin \lambda + C .$$

Dokažte tento vzorec (pro $-1 < \lambda < 1$) přímo z definice funkcí $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, přičemž zjistíte, že $C = \frac{1}{2}\pi$.

19. $$\int_0^1 \frac{x(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{1 + x} dx = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} - \lg 2 - \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) \lg (\sqrt{2} - 1) .$$

20. $$\int_0^1 \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x + 2} dx = \pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 1 .$$

21. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x}} = \sqrt{6} - \sqrt{2} - 1 + \frac{1}{2} \lg \frac{5 + 2\sqrt{6}}{3 + 2\sqrt{2}}$.

22. V případě $a > 0$ jsme užili substituce $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t$ (tj. $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a}x$); se stejným úspěchem je možno též užít substituce $\sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{a}x + t$, tj. $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}x$. Vyjde

$$x = \frac{t^2 - c}{b + 2\sqrt{a}t}, \quad dx = 2\frac{\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c}{(b + 2\sqrt{a}t)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c}{b + 2\sqrt{a}t}.$$

Vzorce jsou tedy zcela obdobné jako při dřívější substituci; snad jsou o něco příjemnější tím, že se v nich méně často vyskytuje znamení minus. Vypočtěte tímto způsobem znova cvičení 15 a 19.

23. Metody, které jsme užili v případě $a < 0$, lze užít i pro $a > 0$, jsou-li kořeny mnohočlenu $ax^2 + bx + c$ reálné a různé. Budiž tedy $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$, kde $a > 0$, $\alpha_1 < \alpha_2$. Zajímají nás pouze ty intervaly, kde $ax^2 + bx + c > 0$. Omezme se tedy na intervaly $(-\infty, \alpha_1)$, $(\alpha_2, +\infty)$. Potom bude

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\,.\,|x - \alpha_1| \sqrt{\frac{x - \alpha_2}{x - \alpha_1}};$$

tím dostáváme z integrálu $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$ integrál typu, vyšetřovaného v § 4 — provedeme tedy substituci $\sqrt{\dfrac{x - \alpha_2}{x - \alpha_1}} = t$. Ale je nutno dát pozor na to, že v intervalu $(\alpha_2, +\infty)$ je $|x - \alpha_1| = x - \alpha_1$, v intervalu $(-\infty, \alpha_1)$ však $|x - \alpha_1| = \alpha_1 - x$.

24. Způsobem uvedeným v cvičení 23 vypočtěte ještě jednou integrál z cvičení 21.

25. Způsobem uvedeným v cvičení 23 vypočtěte

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}} = \sqrt{x^2 + 3x + 2} \mp 3 \lg\left(\sqrt{|x + 1|} + \sqrt{|x + 2|}\right);$$

přitom horní znamení platí v intervalu $(-1, +\infty)$, dolní v intervalu $(-\infty, -2)$. (Při výpočtu je stále nutno pečlivě dbát znamének; pro $x > -1$ je $|x + 1| = x + 1$, $|x + 2| = x + 2$, kdežto pro $x < -2$ je $|x + 1| = -x - 1$, $|x + 2| = -x - 2$.)

D) K § 6.

26. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1 + 2\sin x}{\sin x + 3\cos x + 3}\,dx = \frac{1}{5}\lg 6 + \frac{1}{10}$.

27. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}\,dx = 1 + \lg 2$.

28. Integrál z cvičení 27 vypočtete rychleji, užijete-li vzorců $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{1}{2}x$, $\sin x = 2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x$.

29. Budiž aspoň jedno ze tří čísel a, b, c různé od nuly. Potom dostáváme pro integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a\cos x + b\sin x + c}$$

tyto výsledky, je-li $c \neq a$:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}} \lg \left| \frac{(c-a)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x + b - \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{(c-a)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x + b + \sqrt{a^2+b^2-c^2}} \right|,$$

je-li $a^2 + b^2 > c^2$;

$$\frac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{(c-a)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x + b}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}},$$

je-li $a^2 + b^2 < c^2$;

$$-\frac{2}{(c-a)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x + b},$$

je-li $a^2 + b^2 = c^2$.

Je-li však $c = a$, dostáváme

$$\frac{1}{b} \lg |a + b\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x| \quad \text{pro} \quad b \neq 0\,; \qquad \frac{1}{a}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x \quad \text{pro} \quad b = 0\,.$$

30. V některých případech lze integrály tvaru $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ počítat jednodušeji než substitucí $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x = t$; některé důležité případy toho druhu jsme probrali v kap. III, cvičení 8–13. Všimněme si ještě jednoho případu. Buďte $P(u, v)$, $Q(u, v)$ dva mnohočleny, jejichž členy jsou buď všechny lichého nebo všechny sudého stupně;[34] položme $R(u, v) = P(u, v) : Q(u, v)$. Příklady:

$$R(u, v) = \frac{1 + 2u^2 + uv - v^4}{v^2 + uv}$$

nebo

$$R(u, v) = \frac{u + v^3 + uv^2}{v^5 + u^2 v}.$^{35})$$

V tomto případě vede při výpočtu integrálu $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ k cíli substituce $\mathrm{tg}\,x = t$. Neboť je potom $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}$, $\sin x = \dfrac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}$ [36]) $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, takže

$$\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}, \quad \frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}\right)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{P\left(\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}, \dfrac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}\right)}{Q\left(\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}, \dfrac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}\right)} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2};$$

[34]) Stupněm členu $au^m v^n$ nazýváme číslo $m + n$.

[35]) Pamatujte, že konstanta různá od nuly je člen sudého (nultého) stupně, takže např. funkce $1 : (u + v)$ nebo $u : (1 + u + v)$ *nemají* žádaný tvar.

[36]) Buďto platí v obou vzorcích znamení $+$, nebo v obou znamení $-$; neboť $\sin x : \cos x = t$.

z předpokladů o mnohočlenech P, Q pak plyne, že se odmocnina $\pm\sqrt{1+t^2}$ (po eventuálním krácení) vyskytne pouze se sudým mocnitelem; tj. znamení $\sqrt{\ }$ vypadne a předložený integrál je tím převeden na integrál racionální funkce. Následující cvičení 31–35 se řeší touto substitucí $\operatorname{tg} x = t$.

31. Položíme-li $\operatorname{tg} x = t$, je

$$\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x} = \int \frac{dt}{at^2 + bt + c}.$$

32. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x} = \operatorname{arctg} 2 - \tfrac{1}{4}\pi.$

33. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x} = \lg \tfrac{4}{3}.$

34. $\displaystyle\int \frac{\sin x + 2\cos x}{\cos x + 2\sin x}\,dx = \tfrac{4}{5}x + \tfrac{3}{5}\lg|1 + 2\operatorname{tg} x| - \tfrac{3}{10}\lg(1 + \operatorname{tg}^2 x).$

35. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x} = \tfrac{1}{2}\pi.$

Zde je nutno dát dobrý pozor! Dosadíte-li bezmyšlenkovitě $\operatorname{tg} x = t$, máte pro $x = 0$ i pro $x = \pi$ hodnotu $t = 0$, takže byste dostali $\displaystyle\int_0^0 \frac{dt}{4 + t^2} = 0$. Postup byl ovšem nesprávný, ježto substituce $\operatorname{tg} x = t$ nesmíme použít v žádném intervalu obsahujícím bod $x = \frac{1}{2}\pi$. Vypočteme tedy např. napřed $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$ pro $0 < b < \frac{1}{2}\pi$; ježto určitý integrál je spojitou funkcí své horní meze, dostanete potom $\int_0^{\pi/2} = \lim\limits_{b\to\pi/2-} \int_0^b$; podobně byste mohli vypočíst $\int_{\pi/2}^{\pi}$; ale raději užijeme vztahu

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x} = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x},$$

který dostaneme, použijeme-li na levé straně substituce $\pi - x = t$.

E) K § 7.

36. Pro $\alpha \neq 0$ je

$$\int \frac{dx}{e^{2\alpha x} + e^{\alpha x} + 1} = x - \frac{1}{2\alpha}\lg(e^{2\alpha x} + e^{\alpha x} + 1) - \frac{1}{\alpha\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2e^{\alpha x} + 1}{\sqrt{3}}.$$

37. Budiž $R(u, v)$ racionální funkce; budiž $\alpha \neq 0$, $n > 1$ (n celé). Potom lze integrály

$$\int R\left(e^{\alpha x}, \left(\frac{ae^{\alpha x} + b}{ce^{\alpha x} + f}\right)^{1/n}\right) dx,$$

$$\int R(e^{\alpha x}, \sqrt{ae^{2\alpha x} + be^{\alpha x} + c})\,dx$$

převést na integrály funkcí racionálních. Substitucí $e^{\alpha x} = t$ se převádějí tyto integrály na integrály

$$\frac{1}{\alpha}\int R\left(t, \left(\frac{at+b}{ct+f}\right)^{1/n}\right)\frac{dt}{t}, \quad \frac{1}{\alpha}\int R(t, \sqrt{at^2+bt+c})\,\frac{dt}{t},$$

jež patří k typům vyšetřovaným v § 4 a 5.

38. $$\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}} = \lg\frac{2e+1+2\sqrt{e^2+e+1}}{3+2\sqrt{3}}.$$

39. $\int\sqrt{e^x+1}\,dx = 2\sqrt{e^x+1} + 2\lg(\sqrt{e^x+1}-1) - x$.

F) K § 8.

40. $$\int \frac{1}{\lg^2 x + \lg x - 2}\,\frac{dx}{x} = \tfrac{1}{3}\lg\left|\frac{\lg x - 1}{\lg x + 2}\right|.$$

41. Obdobně jako ve cvičení 37 dají se počítat integrály ($n > 1$, celé)

$$\int R\left(\lg x, \left(\frac{a\lg x + b}{c\lg x + f}\right)^{1/n}\right)\frac{dx}{x}, \quad \int R(\lg x, \sqrt{a\lg^2 x + b\lg x + c})\,\frac{dx}{x},$$

kde $R(u, v)$ je racionální funkce.

42. $$\int \frac{1}{\lg x + \sqrt{\lg x + 1}}\,\frac{dx}{x} = \lg|\lg x + \sqrt{\lg x + 1}| + \frac{1}{\sqrt{5}}\lg\left|\frac{2\sqrt{\lg x + 1} + 1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{\lg x + 1} + 1 - \sqrt{5}}\right|.$$