

# Life and work of Vojtěch Jarník

---

Vojtěch Jarník

Fascimile of "Neuer Beweis eines Khintchineschen Satzes"

In: Břetislav Novák (editor): Life and work of Vojtěch Jarník. (German). Praha: Society of Czech Mathematicians and Physicists, 1999. pp. 145--149.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402256>

## Terms of use:

© Society of Czech Mathematicians and Physicists

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## Neuer Beweis eines Khintchineschen Satzes.

Vojtěch Jarník, Praha.

(Eingegangen am 28. November 1936.)

Griechische Buchstaben bedeuten reelle Zahlen; kleine lateinische Buchstaben bedeuten ganze Zahlen, eventuell auch Restklassen modulo einer natürlichen Zahl. Ein geordnetes System von  $n$  (gleichen oder ungleichen) Restklassen  $a_1, \dots, a_n$  modulo  $q$  ( $n > 0, q > 0$ ) heiße ein  $(n, q)$ -System; Bezeichnung:  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Man setze noch

$$h\{a_1, \dots, a_n\} + k\{b_1, \dots, b_n\} = \{ha_1 + kb_1, \dots, ha_n + kb_n\}$$

und analog für mehrere Summanden.

**Hilfssatz 1.** Zu jedem  $\alpha > 0$  gibt es zwei ganze Zahlen  $\beta_1 = \beta_1(\alpha) > 0, \beta_2 = \beta_2(\alpha) > 0$  mit folgenden Eigenschaften: Ist  $q > 0$ , sind  $a_1, \dots, a_l$  paarweise inkongruent mod  $q$  und ist  $l \geq \alpha q$ , so gibt es ein  $b$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $0 < b \leq \beta_2$ ;
2. zu jedem  $r$  gibt es ein System von höchstens  $\beta_1$  Zahlen  $\varepsilon_i a_{k_i}$  mit  $\varepsilon_i = \pm 1, \sum \varepsilon_i = 0, 1 \leq k_i \leq l, \sum \varepsilon_i a_{k_i} \equiv br \pmod{q}$ .

**Beweis:** bekannt.<sup>1)</sup>

**Hilfssatz 2.** Zu jedem  $\alpha > 0, n > 0$  gibt es zwei natürliche Zahlen  $L_1 = L_1(\alpha, n), L_2 = L_2(\alpha, n)$  mit folgenden Eigenschaften: Ist  $q > 0, l \geq \alpha q^n$  und ist

$$\mathcal{A}: A_1, A_2, \dots, A_l \quad (A_i = \{a_{1i}, \dots, a_{ni}\})$$

eine Menge von  $l$  verschiedenen  $(n, q)$ -Systemen, so gibt es zu jedem  $(n, q)$ -System  $B$  eine Summe von höchstens  $L_1$   $(n, q)$ -Systemen  $\varepsilon_i A_{k_i}$  mit

<sup>1)</sup> Hilfssatz 1. ist mit dem Hilfssatz 2. der Note von P. Erdős u. V. Jarník, Eine Bemerkung über lineare Kongruenzen (Acta arithmetica 2 (1938), S. 214—220) identisch; nur wurde dort nicht betont, daß  $\sum \varepsilon_i = 0$  gefordert werden darf. Dies folgt aber daraus, daß der dortige Beweis nur mit den Differenzen  $a_q - a_h$  arbeitet.

$$\varepsilon_i = \pm 1, \sum_i \varepsilon_i = 0, 1 \leq k_i \leq l, \sum_i \varepsilon_i A_{k_i} = L_2 B.$$

**Beweis.** Für  $n = 1$  folgt Hfs. 2 aus Hfs. 1 mit  $L_2 = \beta_2!$ ,  $L_1 = \beta_1$ .  
 Es sei also  $n > 1$  und Hfs. 2 sei bis  $n - 1$  wahr. Für jedes  $a$  sei  $\mathfrak{M}_a$  die Menge aller  $A_i$  mit  $a_{ni} = a$ ;  $s_a$  sei die Anzahl der Elemente von  $\mathfrak{M}_a$ ;  $\mathfrak{P}$  sei die Menge aller  $a$  mit  $1 \leq a \leq q$ ,  $s_a > 0$ . Wegen  $0 \leq s_a \leq q^{n-1}$ ,  $s_1 + \dots + s_q = l \geq \alpha q^n$  gibt es erstens ein  $a'$  mit  $s_{a'} \geq \alpha q^{n-1}$  und zweitens ist die Anzahl der Elemente von  $\mathfrak{P}$  mindestens gleich  $\alpha q$ .

Es sei  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  ein  $(n, q)$ -System. Nach Hfs. 2 mit  $n = 1$  gibt es höchstens  $L_1(\alpha, 1)$  Zahlen  $\varepsilon_i c_i$  mit

$$\varepsilon_i = \pm 1, \sum_i \varepsilon_i = 0, c_i \in \mathfrak{P}, \sum_i \varepsilon_i c_i \equiv L_2(\alpha, 1) b_n \pmod{q}.$$

Für geeignete  $A_{q_i} \in \mathfrak{A}$  und geeignete  $d_1, \dots, d_{n-1}$  ist dann

$$\sum_i \varepsilon_i A_{q_i} = \{d_1, \dots, d_{n-1}, b_n \cdot L_2(\alpha, 1)\} = D.$$

Das  $n$ -te Element des  $(n, q)$ -Systems  $E = L_2(\alpha, 1) \cdot B - D$  ist also gleich Null. Nach Hfs. 2 mit  $n - 1$  statt  $n$  gibt es also höchstens  $L_1(\alpha, n - 1)$   $(n, q)$ -Systeme  $\eta_j A_{h_j}$  mit

$$\eta_j = \pm 1, \sum_j \eta_j = 0, A_{h_j} \in \mathfrak{M}_{a'}, \sum_j \eta_j A_{h_j} = L_2(\alpha, n - 1) \cdot E$$

(das letzte Element des  $(n, q)$ -Systems  $\sum_j \eta_j A_{h_j}$  ist nämlich gleich  $a' \sum_j \eta_j = 0$ ). Dann ist aber

$$L_2(\alpha, n - 1) \sum_i \varepsilon_i A_{q_i} + \sum_j \eta_j A_{h_j} = L_2(\alpha, n - 1) L_2(\alpha, 1) \cdot B,$$

w. z. b. w.

Herr Khintchine hat folgenden schönen Satz bewiesen<sup>3)</sup>:

**Hauptsatz.** Zu jedem  $n > 0$  und jedem  $\gamma > 0$  gibt es ein  $\Gamma = \Gamma(\gamma, n) > 0$  mit folgender Eigenschaft: Es seien  $\Theta_1, \dots, \Theta_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  gegeben; die Ungleichungen

$$|q\Theta_i - p_i| < \frac{1}{t'} \quad (i = 1, \dots, n), \quad 0 < q \leq \gamma t'^n \quad (1)$$

seien für kein  $t' > 1$  lösbar (in ganzen Zahlen  $q, p_1, \dots, p_n$ ); dann sind die Ungleichungen

$$|x\Theta_i - y_i - \alpha_i| < \frac{1}{t} \quad (i = 1, \dots, n), \quad 0 < x \leq \Gamma^n \quad (2)$$

für jedes  $t > 0$  lösbar (in ganzen Zahlen  $x, y_1, \dots, y_n$ ).<sup>4)</sup>

<sup>2)</sup> Lies:  $c_i$  ist ein Element der Menge  $\mathfrak{P}$ .

<sup>3)</sup> A. Khintchine, Ein Satz über lineare diophantische Approximationen, Math. Annalen **113** (1936), S. 398—415.

<sup>4)</sup> Die Umkehrung dieses Satzes ist auch richtig und leicht zu beweisen; vgl. l. e.<sup>3)</sup>, S. 399—401.

Ich will für diesen Satz im Falle  $n > 1^5)$  einen neuen, auf dem Hfs. 2 beruhenden Beweis geben (wobei aber mehrere Betrachtungen des Herrn Khintchine auch in meinem Beweis vorkommen).<sup>6)</sup>

**Beweis.** Man setze  $M_1 = L_1(2^{-n}\gamma, n-1)$ ,  $M_2 = L_2(2^{-n}\gamma, n-1)$ ,  $M_3 = M_2\gamma^{-\frac{n-1}{n}} + \frac{1}{2}M_1\gamma^{\frac{1}{n}}$ ,  $\Gamma = ((M_3 + 1)\gamma^{-\frac{1}{n}} + 2)^n$ , sodaß  $M_1, M_2$  natürliche Zahlen sind.

Es sei  $t > 0$ ; dann setze man  $t' = \left[ (M_3 + 1)\gamma^{-\frac{1}{n}}t \right] + 1$ . Mit  $q, p_1, \dots, p_n$  bezeichne man dasjenige System mit *möglichst kleinem*  $q > 0$ , für welches die Ungleichungen

$$|q\theta_i - p_i| < \frac{1}{t'} \quad (i = 1, \dots, n)$$

gelten; also ist  $(q, p_1, \dots, p_n) = 1$ ,  $\gamma t'^n < q \leq t'^n$ , also  $\gamma < 1$ ,

$1 \leq t < t' < \Gamma^{\frac{1}{n}}t$ . Man setze  $d_i = (q, p_i)$ ,  $q = d_i q'_i$ ,  $p_i = d_i p'_i$  und man bestimme noch  $b_i$  so, daß  $p'_i b_i \equiv 1 \pmod{q'_i}$ ,  $(b_i, d_i) = 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ). (Das geht: denn es sei  $d_i = d''_i d'''_i$ , wo in  $d''_i$  nur die Primzahlen  $p \mid q'_i$ , in  $d'''_i$  nur die Primzahlen  $p \nmid q'_i$  aufgehen; dann kann man  $b_i$  mit  $p'_i b_i \equiv 1 \pmod{q'_i}$ ,  $b_i \equiv 1 \pmod{d''_i}$  finden, und es ist  $(b_i, d'_i) = (b_i, d''_i) = 1$ .)

**Behauptung I.** *Betrachtet man alle Zahlensysteme  $u_1, \dots, u_n$  mit*

$$u_i = j_i q'_i + z_i, \quad 0 \leq j_i < d_i, \quad 0 \leq z_i \leq \frac{1}{2} \gamma^{\frac{1}{n}} \frac{q}{d_i} \quad (i = 1, \dots, n)^7), \quad (3)$$

so sind die  $(n-1, q)$ -Systeme

$$\{u_1 b_1 - u_2 b_2, \dots, u_1 b_1 - u_n b_n\} \quad (4)$$

paarweise verschieden (ihre Anzahl ist größer als  $2^{-n}\gamma q^{n-1}$ ).

**Beweis:** Sonst könnte man durch Subtraktion zweier Systeme (3) ein System  $v_1, \dots, v_n$  mit  $v_1^2 + \dots + v_n^2 > 0$  und mit

$$v_1 b_1 - v_i b_i \equiv 0 \pmod{q}, \quad v_i = k_i q'_i + y_i, \quad |k_i| < d_i, \quad |y_i| \leq \frac{1}{2} \gamma^{\frac{1}{n}} \frac{q}{d_i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

<sup>5)</sup> Der Fall  $n = 1$  ist leicht und längst bekannt.

<sup>6)</sup> (20. XII. 1936.) Herr L. J. Mordell hat zwar einen noch kürzeren Beweis dieses Satzes gefunden, welcher den Minkowskischen Linearformensatz benutzt. Ich publiziere trotzdem meinen Beweis, da er auf einer ganz anderen Grundlage beruht.

<sup>7)</sup> Es ist  $\frac{1}{2} \gamma^{\frac{1}{n}} \frac{q}{d_i} < q d_i^{-1} = q'_i$ ; also sind die betrachteten Systeme  $u_1, \dots, u_n$  paarweise verschieden.

finden. Es gäbe also ein  $g$  mit

$$|g| \leq \frac{1}{2}q < q, \quad v_i b_i \equiv g \pmod{q} \quad (i = 1, \dots, n),$$

also wäre (mit geeigneten  $m_i$ )

$$gp'_i \equiv b_i p'_i (k_i q'_i + y_i) \equiv y_i \pmod{q'_i}, \quad gp'_i - m_i q'_i = y_i,$$

$$\left| g \frac{p_i}{q} - m_i \right| = \frac{d_i}{q} |gp'_i - m_i q'_i| \leq \frac{1}{2} \gamma^n q^{-\frac{1}{n}} < \frac{1}{2t'},$$

$$|g\Theta_i - m_i| \leq |g| \left| \Theta_i - \frac{p_i}{q} \right| + \left| g \frac{p_i}{q} - m_i \right| < \frac{|g|}{qt'} + \frac{1}{2t'} \leq \frac{1}{t'},$$

also  $g = 0$  (nach der Definition von  $q$ ), also  $v_i b_i \equiv 0 \pmod{q}$ ,  $y_i b_i \equiv 0 \pmod{q'_i}$ ,  $y_i \equiv 0 \pmod{q'_i}$ , aber  $|y_i| < q'_i$  (vgl. die Fußnote<sup>7)</sup>), also  $y_i = 0$ , also  $b_i k_i q'_i \equiv 0 \pmod{q}$ ,  $b_i k_i \equiv 0 \pmod{d_i}$ ,  $k_i \equiv 0 \pmod{d_i}$ , aber  $|k_i| < d_i$ , also  $k_i = 0$ , also  $v_i = 0$  — Widerspruch.

**Behauptung II.**  $d_i \leq \gamma^{-\frac{n-1}{n}} q^{-\frac{n-1}{n}}$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

**Beweis<sup>8)</sup>:** Sonst wäre

$$t'^{n-1} < \gamma^{-\frac{n-1}{n}} q^{-\frac{n-1}{n}} < d_i \tag{5}$$

für ein  $i$ ; man wähle (Schubfachschluß) ein  $k$  und  $n - 1$  Zahlen  $m$  ( $j \neq i, 1 \leq j \leq n$ ) mit

$$1 \leq k \leq t'^{n-1}, \quad |kq'_i \Theta_j - m_j| < \frac{1}{t'} \tag{6}$$

(für  $j \neq i$ ); nach (5) wäre aber mit  $m_i = kp'_i$ ,

$$|kq'_i \Theta_i - m_i| = k |q'_i \Theta_i - p'_i| < \frac{k}{d_i t'} \leq \frac{t'^{n-2}}{d_i} < \frac{1}{t'},$$

also wäre (6) auch für  $j = i$  wahr, was wegen  $0 < kq'_i \leq t'^{n-1} q'_i < < d_i q'_i = q$  der Definition von  $q$  widerspricht.

**Schluss des Beweises** (für  $n > 1$ ). Man bestimme nacheinander  $s_i, r_i, h_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), sodaß

$$|q'_i \alpha_i - M_2 s_i| < M_2, \quad p'_i r_i \equiv s_i \pmod{q'_i}, \quad M_2(r_i - r_1) = h_i$$

(also  $h_1 = 0$ ). Wendet man nun Hfs. 2 (mit  $n - 1$  statt  $n$  und mit  $\alpha = 2^{-n}\gamma$ ) an, wobei man für  $\mathfrak{Q}$  die Menge der Systeme (4) nimmt, so ergibt sich die Existenz von  $2n$  ganzen Zahlen  $X_i, Y_i$  mit

$$X_1 b_1 - X_i b_i \equiv h_i \pmod{q}, \quad X_i = j_i q'_i + Y_i, \quad |Y_i| \leq \frac{1}{2} M_1 \gamma^n q^{-\frac{1}{n}} d_i^{-1} \tag{7}$$

( $i = 1, \dots, n$ ).

Es gibt also ein  $x$  mit ( $i = 1, \dots, n$ )

<sup>8)</sup> Fast wörtlich nach Khintchine, l. c.<sup>3)</sup>, Hilfssatz 5.

$0 < x \leq q$ ,  $x \equiv X_i b_i + M_2 r_i \pmod{q}$ ,  
 $x p'_i \equiv p'_i (X_i b_i + M_2 r_i) \equiv X_i + M_2 s_i \equiv Y_i + M_2 s_i \pmod{q'_i}$ , also  
 $|x p'_i - y_i q'_i - M_2 s_i| = |Y_i|$  mit geeigneten  $y_i$ , also (Behauptung II)

$$\begin{aligned} |x p_i - y_i q - \alpha_i q| &= d_i |x p'_i - y_i q'_i - \alpha_i q'_i| < \\ &< d_i \left(\frac{1}{2} M_1 \gamma^n q^{\frac{n-1}{n}} d_i^{-1} + M_2\right) \leq M_3 q^{\frac{n-1}{n}} < M_3 q \gamma^{-\frac{1}{n}} t'^{-1}, \end{aligned}$$

also wegen  $0 < x \leq q$ )

$$\begin{aligned} |x \Theta_i - y_i - \alpha_i| &\leq x \left| \Theta_i - \frac{p_i}{q} \right| + \frac{1}{q} |x p_i - y_i q - \alpha_i q| < \\ &< \frac{q}{q t'} + M_3 \frac{1}{\gamma^n t'} < (M_3 + 1) \gamma^{-\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{t'} < \frac{1}{t}, \\ 0 < x \leq q &\leq t^n < \Gamma t^n. \text{ *)} \end{aligned}$$

\*

### Nový důkaz jedné Chinčiny věty.

(Obsah předešlého článku.)

Jde o důkaz této věty: ke každému  $\gamma > 0$  a každému celému  $n > 0$  existuje číslo  $\Gamma = \Gamma(\gamma, n) > 0$  s touto vlastností: Buďte  $\Theta_1, \dots, \Theta_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  reálná čísla; nerovnosti

$$|q \Theta_i - p_i| < \frac{1}{t'} \quad (i = 1, \dots, n), \quad 0 < q \leq \gamma t'^n$$

necht' nemají pro žádná celá  $t' > 1$  řešení (v celých číslech  $q, p_1, \dots, p_n$ ). Potom nerovnosti

$$|x \Theta_i - y_i - \alpha_i| < \frac{1}{t} \quad (i = 1, \dots, n), \quad 0 < x \leq \Gamma t^n$$

mají pro každé celé  $t > 0$  řešení (v celých číslech  $x, y_1, \dots, y_n$ ).

\*) Anmerkung bei der Korrektur: Der unter \*) erwähnte Beweis von Mordell ist inzwischen erschienen; vgl. L. J. Mordell, A theorem of Khintchine on linear diophantine approximation, Journ. London Math. Soc. 12 (1937), 166—167.