Life and work of Vojtěch Jarník

Vojtěch Jarník

Fascimile of "Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden"

In: Břetislav Novák (editor): Life and work of Vojtěch Jarník. (German). Praha: Society of Czech Mathematicians and Physicists, 1999. pp. 169--188.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402259

Terms of use:

© Society of Czech Mathematicians and Physicists

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden,

von

Vojtěch JARNIK, in Göttingen.

1. Einleitung.

Für ganzes $r \geqq 5$ sei

$$Q(u)=\sum_{\mu,\nu=1}^{r} a_{\mu\nu} u_{\mu} u_{\nu}$$

eine positiv definite quadratische Form; für $x>0$ sei $A_Q(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte im Ellipsoid $Q(u) \leqq x$, $I_Q(x)$ das Volumen dieses Ellipsoids; endlich sei $A_Q(x)=I_Q(x)+P_Q(x)$. Die Frage nach der Grössenordnung von $P_Q(x)$ wurde von den Herren Walfisz und Landau (1) für den Fall rationaler Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ durch den folgenden Satz erledigt:

Sind alle $a_{\mu\nu}$ rational (2), so ist

$$P_Q(x)=O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right), \quad P_Q(x)=\Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

Bei der allgemeinsten Form $Q(u)$ ist aber das Problem noch weit von einer definitiven Lösung entfernt. Bis vor kurzem waren nur folgende Abschätzungen bekannt (3):

$$P_Q(x)=O\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{r}{r+1}}\right), \quad P_Q(x)=\Omega\left(x^{\frac{r-1}{4}}\right).$$

In der Tat liegen die Verhältnisse bei den „irrationalen" Formen $Q(u)$ wesentlich anders als im „rationalen" Fall, wie zuerst kürzlich vom Herrn Walfisz (4) gezeigt wurde. Er betrachtet nämlich

(1) A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeits. 19 (1924), S. 300-307; E. Landau, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeits. 21 (1924), S. 126-132, und (zweite Abhandlung) Math. Zeits. 24 (1925), S. 299-310.

(2) Weil es offenbar nur auf die Verhältnisse der $a_{\mu\nu}$ ankommt, so gelten diese Formeln auch, sobald die $a_{\mu\nu}$ ganzzahlige Vielfache einer und derselben Zahl sind.

(3) Z. B. E. Landau, Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen, Berliner Akademieberichte, (1915), S. 458-476; E. Landau, Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, vierte Abhandlung, Göttinger Nachrichten (1924), S. 126-132.

(4) A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, dritte Abhandlung, Math. Zeits. 27 (1927), S. 245-268.

Formen von der speziellen Gestalt

$$Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{r-1} b_{\mu\nu} u_\mu u_\nu + \alpha u_r^2 \ (b_{\mu\nu} \text{ rational, } \alpha > 0 \text{ irrational, } r \geqq 10)$$

und beweist für diese Formen:

o 1) $P_Q(x) = \cancel{O}\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$.

2) Diese Abschätzung lässt sich — auch bei fest gewählten $b_{\mu\nu}$ — nicht verschärfen, solange wir α nicht weiter einschränken.

3) Wenn man aber von gewissen Ausnahmewerten von α absieht, lässt sich die unter 1) angegebene Abschätzung noch weiter verschärfen: für fast alle (1) positiven Werte von α ist

$$P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{6}{5}} \log^{\frac{1}{4}} x\right).$$

In zwei Abhandlungen (2) habe ich mit einer anderen Methode die Formen

$$Q(u) = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \ldots + \alpha_r u_r^2 \quad (\alpha_j > 0)$$

systematisch untersucht und u. a. folgende Resultate erhalten:

1) Wenn bei $r \geqq 6$ mindestens eine von den $r-1$ Zahlen $\frac{\alpha_j}{\alpha_1}$ $(2 \leqq j \leqq r)$ irrational ist, so ist

$$P_Q(x) = o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right);$$

auch diese Abschätzung lässt sich nicht verschärfen, solange man die α_j keiner weiteren Einschränkung unterwirft (3).

2) Für fast alle positiven Wertsysteme der α_j ist sogar

$$P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{4}+\varepsilon}\right)$$

bei jedem $\varepsilon > 0$ (4).

Damit ist das Problem noch lange nicht gelöst. Zu jeder Form $Q(u)$ gehört nämlich eine reelle Zahl $\mu = \mu(Q)$, so dass

$$P_Q(x) = O(x^{\mu+\varepsilon}), \quad P_Q(x) = \Omega(x^{\mu-\varepsilon})$$

bei jedem $\varepsilon > 0$; die Bestimmung dieses „wahren Exponenten" μ ist nun das erste Ziel derartiger Untersuchungen. In dieser Richtung

(1) D. h. alle bis auf eine Menge von Lebesgueschen Mass Null.

(2) V. Jarnik, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, erste und zweite Abhandlung, Math. Annalen (im Druck).

(3) L. c. (2), zweite Abhandlung.

(4) L. c. (2), erste Abhandlung.

habe ich folgendes bewiesen([1]):

Es sei $\sigma \geqq 2$ ganz, $r_j \geqq 4$ ganz $(j=1,2,\ldots,\sigma)$, $r=r_1+r_2+\ldots+r_\sigma$. Wir betrachten die Formen von der speziellen Gestalt

$$Q(u)=\beta_1(u_{1,1}^2+u_{2,1}^2+\ldots+u_{r_1,1}^2)+\beta_2(u_{1,2}^2+\ldots+u_{r_2,2}^2)+\ldots$$
$$+\beta_\sigma(u_{1,\sigma}^2+\ldots+u_{r_\sigma,\sigma}^2) \quad (\beta_j>0).$$

Dann ist (bei gegebenen σ, r_j) für fast alle positiven Wertsysteme der β_j

$$\mu(Q)=\frac{r}{2}-\sigma.$$

Man möchte aber noch wissen, wie sich diejenigen Formen verhalten, die der nicht beachteten Nullmenge entsprechen und ob $\mu(Q)$ mit den einfachen arithmetischen Eigenschaften der β_j in einem Zusammenhang steht. Diese Frage soll in der vorliegenden Arbeit für den einfachsten Fall $\sigma=2$ beantwortet werden und zwar durch den folgenden Hauptsatz, dem ich noch eine Definition voranschicke.

Definition. Es sei $\alpha>0$. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{M}_a$ aller reellen Zahlen a, welche folgende Eigenschaft haben: es gibt zu a eine Folge von Paaren ganzer Zahlen $p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3; \ldots$, so dass

$$p_n \to +\infty, \quad q_n \to +\infty, \quad \frac{p_n}{q_n}-\alpha=O\left(\frac{1}{q_n^{2+a}}\right).$$

Die obere Grenze von $\mathfrak{M}_a$ werde mit $\beta(\alpha)$ bezeichnet und möge „der wahre Exponent der Zahl α" heissen.

Bemerkungen. Es ist immer $0 \leqq \beta(\alpha) \leqq \infty$; für rationale α ist $\beta(\alpha)=\infty$. Wenn die Zahl α irrational ist und wenn mit $q_1', q_2', \ldots$ die Nenner der Näherungsbrüche des regelmässigen Kettenbruches von α bezeichnet werden, so ist nach bekannten Sätzen $\beta(\alpha)$ gleich der unteren Grenze aller reellen Zahlen b, für welche $q'_{n+1}=O(q_n'^{1+b})$.

Wir wollen in dieser Note folgenden Satz beweisen:

Hauptsatz. Voraussetzungen: Es sei $r_1 \geqq 4$ ganz, $r_2 \geqq 4$ ganz, $r_1+r_2=r$; $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$; $\beta=\beta\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$ sei der wahre Exponent der Zahl $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$; es sei

$$Q(u)=\alpha_1(u_1^2+u_2^2+\ldots+u_{r_1}^2)+\alpha_2(u_{r_1+1}^2+u_{r_1+2}^2+\ldots+u_r^2).$$

Für $x>0$ werde

([1]) L. c. (2) S. 355, erste Abhandlung.

$$A_Q(x) = \sum_{Q(m)\leqq x} 1 = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} + P_Q(x)$$

gesetzt.

Behauptungen: Für jedes $\varepsilon > 0$ ist

(1) $$P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{\beta+1}+\varepsilon}\right),$$

(2) $$P_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{\beta+1}-\varepsilon}\right).$$

Bemerkungen. Für $\beta = +\infty$ soll $\frac{1}{\beta+1} = 0$ sein. Die Unsymmetrie der Voraussetzungen ist nur scheinbar, da offenbar $\beta\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \beta\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)$.

Von den Behauptungen des Hauptsatzes ist bereits folgendes bekannt: für alle $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ ist

$$P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right), \quad P_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-2}\right) \text{ (}^1\text{)}.$$

Es genügt also, die Behauptung (1) für $\beta < \infty$, die Behauptung (2) für $\beta > 0$ zu beweisen. Also genügt es, folgende zwei Behauptungen zu beweisen:

Behauptung 1. Die Voraussetzungen des Hauptsatzes seien erfüllt. Es sei $\beta < \infty$, $\beta < \gamma < \infty$. Dann ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{\gamma+1}+\varepsilon}\right).$$

Behauptung 2. Die Voraussetzungen des Hauptsatzes seien erfüllt. Es sei $\beta > 0$, $0 < \delta < \beta$. Dann ist

$$P_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{\delta+1}}\right).$$

Die ganze Schwierigkeit liegt im Beweis der Behauptung 1. Dem Beweis dieser Behauptung schicke ich zwei Hilfssätze voraus, von welchen der erste in einer etwas anderen (und sogar etwas schärferen) Form bereits vom Herrn H. Behnke [2] bewiesen worden ist.

2. Hilfssätze.

Im Folgenden machen wir von der Bezeichnung Gebrauch: wenn a reell, so sei $R(a)$ durch die Beziehungen

[1] L. c. (2), S. 355 erste Abhandlung, Satz 5 und der Hauptsatz der zweiten Abhandlung.

[2] H. Behnke, Zur Theorie der diophantischen Approximationen, Abhandlungen a. d. math. Seminar i. Hamburg 3 (1924), S. 261-318, Satz 5.

$$a=a'+R(a),\ a' \text{ ganz},\ 0\leqq R(a)<1$$

erklärt. Offenbar ist $R(a+b)=R(a)+R(b)$, wenn $R(a)+R(b)<1$; sonst
$$R(a+b)=R(a)+R(b)-1.$$
Endlich ist $R(-a)=1-R(a)$, wenn a nicht ganz ist.

Hilfssatz 1. Es sei $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$; $\beta=\beta\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)<\infty$ $\left(\text{also } \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \text{ irrational}\right)$, $L>0$, $M>0$; es sei noch $\beta<\gamma<\infty$. Dann ist die Anzahl ν der ganzen Zahlen z, für welche

$$0<z\leqq M,\quad R\left(z\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)<L \tag{3}$$

gilt, höchstens gleich

$$6LM+cL^{\frac{1}{2+\gamma}}M^{\frac{1+\gamma}{2+\gamma}}\ (^1).$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $L<\frac{1}{3}$, $\nu>0$. Wir setzen noch $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\alpha$. Es seien $z_1<z_2<z_3<\ldots<z_\nu$ diejenigen ganzen Zahlen, für welche (3) gilt. Es sind folgende zwei Fälle möglich:

1. Fall. Es ist $R(z_1\alpha)<R(z_2\alpha)<\ldots<R(z_\nu\alpha)$ (der Fall $\nu=1$ werde auch zu diesem Fall gezählt). Dann behaupte ich: alle Zahlen z_ρ $(\rho=1,2,\ldots,\nu)$ sind ganzzahlige Vielfache von z_1. Denn es sei schon bewiesen, dass $z_\rho=w_\rho z_1$ (w_ρ ganz) für $\rho=1,2,\ldots,\sigma$ $(1\leqq\sigma<\nu$; für $\nu=1$ ist nichts zu beweisen). Dann ist

$$R((z_{\sigma+1}-z_\sigma)\alpha)<R(z_{\sigma+1}\alpha)<L,\quad 0<z_{\sigma+1}-z_\sigma<z_{\sigma+1},$$

also $z_{\sigma+1}-z_\sigma=z_\tau$, wo $1\leqq\tau\leqq\sigma$; daher $z_{\sigma+1}=(w_\sigma+w_\tau)z_1$, wie behauptet.

Weiter behaupte ich: $R(z_\nu\alpha)=\frac{z_\nu}{z_1}R(z_1\alpha)$; denn sonst gäbe es unter den Zahlen

$$R(z_1\alpha),\quad 2R(z_1\alpha),\quad 3R(z_1\alpha),\ldots,\quad \frac{z_\nu}{z_1}R(z_1\alpha)$$

eine, $\eta R(z_1\alpha)$, für welche *zuerst* $\eta R(z_1\alpha)>1$. Dann wäre also $\eta>1$, $\eta R(z_1\alpha)<1+R(z_1\alpha)$, also $R(\eta z_1\alpha)<R(z_1\alpha)$, was wegen $0<\eta z_1\leqq z_\nu\leqq M$ der Voraussetzung widerspricht.

Wegen $\gamma>\beta$ ist $R(z_1\alpha)>\frac{c}{z_1^{1+\gamma}}$; weiter ist offenbar $\frac{z_\nu}{z_1}\geqq\nu$ und $z_\nu\leqq M$. Also

---

(1) Mit c bezeichnen wir unterschiedslos positive Zahlen, die nur von $\alpha_1,\alpha_2,r_1,r_2,\gamma$ abhängen; mit $c(\varepsilon)$ positive Zahlen, die nur von $\alpha_1,\alpha_2,r_1,r_2,\gamma,\varepsilon$ abhängen.

$$L > R(z_\nu \alpha) = \frac{z_\nu}{z_1} R(z_1 \alpha) \geqq \frac{c z_\nu}{z_1^{2+\gamma}} \geqq c \frac{\nu^{2+\gamma}}{M^{1+\gamma}};$$

woraus $\nu \leqq c L^{\frac{1}{2+\gamma}} M^{\frac{1+\gamma}{2+\gamma}}$, wie behauptet.

2. Fall. Der 1. Fall liegt nicht vor; es gibt also unter den Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ zwei Zahlen f, g so, dass $0 < f < g \leqq M$, $R(g\alpha) < R(f\alpha) < L$. Dann ist $0 < g - f < M$, $1 - L < 1 - R(f\alpha) < R((g-f)\alpha)$. Wir wählen nun eine Folge $v_1, v_2, v_3, \ldots$ von ganzen positiven Zahlen so, dass:

1) $0 < v_{n+1} - v_n < M$,

2) für jedes n ist mindestens eine von den beiden Zahlen $R(v_n\alpha)$, $1 - R(v_n\alpha)$ kleiner als L.

Das geschieht auf folgende Weise: wir setzen $v_1 = g - f$; wenn v_n bereits definiert ist, definieren wir v_{n+1} folgendermassen: wenn $R(v_n\alpha) < L$, so sei $v_{n+1} = v_n + g - f$; wenn aber $R(v_n\alpha) > 1 - L$, so sei $v_{n+1} = v_n + f$. Aus der Folge $v_1, v_2, \ldots$ greifen wir nun eine Teilfolge $v_1', v_2', \ldots$ heraus, so dass $2nM < v_n' \leqq (2n+1)M$ und endlich bilden wir die Folge

$$(4) \qquad v_1'', v_2'', v_3'', \ldots \equiv v_1' + z_1,\ v_1' + z_2,\ \ldots,\ v_1' + z_\nu,$$
$$v_2' + z_1,\ v_2' + z_2,\ \ldots,\ v_2' + z_\nu,\ \ldots$$

(also $v''_{m\nu+k} = v'_{m+1} + z_k$, wenn m, k ganz, $1 \leqq k \leqq \nu$). Dies ist eine wachsende Folge von ganzen Zahlen, und für jedes n ist entweder $R(v_n''\alpha) > 1 - L$ oder $R(v_n''\alpha) < 2L$.

Es sei (für $N > 0$) $S(N)$ die Anzahl derjenigen Glieder der Folge (4), die kleiner als N sind. Nach einem bekannten Satz des Herrn H. Weyl (1) über die Gleichverteilung der Folge $1 \cdot \alpha, 2 \cdot \alpha, 3 \cdot \alpha, \ldots, n \cdot \alpha, \ldots$ ist

$$S(N) \leqq 3LN + o(N);$$

andererseits ist aber offenber

$$S(N) = \frac{\nu}{2M} N + o(N);$$

also ist $\nu \leqq 6ML$, wie behauptet.

Bemerkung. Der Hilfssatz 1. bleibt offenbar richtig, wenn in ihm die Bedingung $R(z\alpha) < L$ durch $R(z\alpha) > 1 - L$ ersetzt wird; denn es sei G ganz, $G > \alpha$; dann ist $\beta(G - \alpha) = \beta(\alpha)$ und bei ganzem $z > 0$ ist $R(z\alpha) = 1 - R(z(G - \alpha))$. Die Anwendung des Hilfssatzes 1 auf die

(1) H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Annalen 77 (1916), S. 313-352.

Zahl $G-\alpha$ statt α ergibt also die Behauptung.

Hilfssatz 2. Es sei $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$; $\beta=\beta\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)<\infty$; es sei $\beta<\gamma<\infty$. Weiter sei $D>0$, $x>1$; l, m_1, m_2, n_2 seien ganze nichtnegative Zahlen, $2^{m_1}\leqq\sqrt{x}$, $2^{m_2}\leqq\sqrt{x}$. Endlich sei $\varepsilon>0$. Dann ist die Anzahl der Systeme h_1, k_1, h_2, k_2 von ganzen Zahlen, welche den Ungleichungen

$$\left|\frac{h_1}{k_1}\frac{1}{\alpha_1}-\frac{h_2}{k_2}\frac{1}{\alpha_2}\right|<\frac{D}{2^{n_2}k_2\sqrt{x}},\quad 2^l\leqq h_1<2^{l+1}, \tag{5}$$
$$2^{m_1}\leqq k_1<2^{m_1+1},\quad 2^{m_2}\leqq k_2<2^{m_2+1}$$

genügen, höchstens gleich [1]

$$d(\varepsilon)\,2^{(l+m_2)\varepsilon}\left(2^{l+m_2+m_1-n_2}x^{-\frac{1}{2}}+2^{(l+m_2)\frac{\gamma+1}{\gamma+2}+(m_1-n_2)\frac{1}{\gamma+2}}x^{-\frac{1}{2(\gamma+2)}}\right).$$

Beweis. Aus den Ungleichungen (5) folgt

$$\left|h_1k_2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-h_2k_1\right|<d\,\frac{2^{m_1}}{2^{n_2}\sqrt{x}}; \tag{6}$$

es ist also entweder $R\left(h_1k_2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)<d\,\frac{2^{m_1}}{2^{n_2}\sqrt{x}}$ oder $R\left(h_1k_2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)>1-d\frac{2^{m_1}}{2^{n_2}\sqrt{x}}$. Nach dem Hilfssatz 1 und der dabei gemachten Bemerkung kommen also—wegen $h_1k_2<4\cdot 2^{l+m_2}$—für das Produkt h_1k_2 höchstens

$$d\;2^{l+m_2+m_1-n_2}x^{-\frac{1}{2}}+d\cdot 2^{(l+m_2)\frac{\gamma+1}{\gamma+2}+\frac{m_1-n_2}{\gamma+2}}x^{-\frac{1}{2(\gamma+2)}}$$

Werte in Betracht. Wegen (6) und wegen $d\,\frac{2^{m_1}}{2^{n_2}\sqrt{x}}<d$ (denn $2^{m_1}\leqq\sqrt{x}$) entsprechen jedem Wert von h_1k_2 höchstens d Werte von h_2k_1, und es ist auch $h_2k_1<d2^{l+m_2}$. Wenn endlich h_1k_2 und h_2k_1 gegeben sind, so bestehen höchstens $d(\varepsilon)\,2^{(l+m_2)\varepsilon}$ Möglichkeiten für die Wahl von h_1, h_2, k_1, k_2, da die Anzahl der Teiler einer ganzen Zahl X gleich $O\left(X^{\frac{\varepsilon}{2}}\right)$ ist. Damit ist aber der Hilfssatz bewiesen.

3. Beweis der Behauptung 1.

$r_1, r_2, r, \alpha_1, \alpha_2, \beta, Q(u), A_Q(x)$ mögen die im Hauptsatz erklärte Bedeutung haben. Es sei $\beta<\infty$, $\beta<\gamma<\infty$. Wir setzen

$$\theta(s)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{-m^2s}\quad\text{für}\quad\Re(s)>0;$$

die Dirichletsche Reihe

[1] Mit d bezeichne ich unterschiedslos positive Zahlen, die nur von $\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2, \gamma, D$ abhängen; mit $d(\varepsilon)$ positive Zahlen, die nur von $\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2, \gamma, D, \varepsilon$ abhängen.

$$\theta^{r_1}(\alpha_1 s)\,\theta^{r_2}(\alpha_2 s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}\ (0=\lambda_1<\lambda_2<\ldots.)$$

ist für $\Re(s)>0$ absolut konvergent und für $x>0$ ist $\sum\limits_{\lambda_n\leqq x} a_n=A_Q(x)$; daraus folgt

$$\int_0^x A_Q(y)\,dy=\sum_{\lambda_n\leqq x}(x-\lambda_n)\,a_n.$$

Nach der bekannten Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{Ts}}{s^2}\,ds=\operatorname{Max}(0,\ T)\quad (a>0,\ T\text{ reell})$$

ist also für $x>0$

$$\int_0^x A_Q(y)\,dy=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}\,e^{xs}\frac{ds}{s^2}\quad (a>0),$$

da der Integrand offenbar gliedweise integriert werden darf. Für $x>1$ ist also

$$\int_x^{x\pm\frac{1}{x}} A_Q(y)\,dy=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty}\theta^{r_1}(\alpha_1 s)\,\theta^{r_2}(\alpha_2 s)\,e^{xs}\left(e^{\pm\frac{s}{x}}-1\right)\frac{ds}{s^2}.$$

Wir werden beweisen: für jedes $\varepsilon>0$ ist

$$(7)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty}\theta^{r_1}(\alpha_1 s)\,\theta^{r_2}(\alpha_2 s)\,e^{xs}\left(e^{\pm\frac{s}{x}}-1\right)\frac{ds}{s^2}$$

$$=\pm\frac{\pi^{\frac{r}{2}}x^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{\alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}+O\left(x^{\frac{r}{2}-2-\frac{1}{\gamma+1}+\varepsilon}\right).$$

Damit wird die Behauptung 1. bewiesen sein; denn—da $A_Q(x)$ eine nicht abnehmende Funktion von x ist—wird daraus folgen

$$(8)\quad A_Q(x)\leqq x\int_x^{x+\frac{1}{x}} A_Q(y)\,dy=\frac{\pi^{\frac{r}{2}}x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}+O\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{\gamma+1}+\varepsilon}\right),$$

$$(9)\quad A_Q(x)\geqq x\int_{x-\frac{1}{x}}^{x} A_Q(y)\,dy=\frac{\pi^{\frac{r}{2}}x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}+O\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{\gamma+1}+\varepsilon}\right);$$

(8) und (9) geben aber genau die Behauptung 1.

Beweis von (7). Wir setzen nun dauernd $A=\operatorname{Max}\left(\frac{2\pi}{\alpha_1},\ \frac{2\pi}{\alpha_2}\right)$

und berechnen zunächst

$$J_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{x}-i\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\frac{A}{\sqrt{x}}} \theta^{r_1}(\alpha_1 s)\,\theta^{r_2}(\alpha_2 s)\,e^{xs}\left(e^{\pm\frac{s}{x}}-1\right)\frac{ds}{s^2}.$$

Nach einer bekannten Transformationsformel ist (¹)

$$\theta(\alpha_j s) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_j s}}(1+\psi_j(s)), \text{ wo } \psi_j(s) = 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2\frac{\pi^2}{\alpha_j s}} \quad (j=1,2);$$

wir setzen $s = \frac{1}{x}+ti$; dann ist

$$\Re\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{x}{1+x^2t^2} > c \text{ für } x > c, \quad |t| \leqq \frac{A}{\sqrt{x}}. \quad \text{Also}$$

$$|\psi_j(s)| \leqq 2e^{-\frac{\pi^2 x}{\alpha_j(1+x^2t^2)}}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 c}{\alpha_j}(m^2-1)} < ce^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}.$$

Demnach ist (²) für $x > c$

$$J_1(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}}}\int_{-\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{A}{\sqrt{x}}} \frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+2}}\left(e^{\pm\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+it\right)}-1\right)\left(1+\mu c e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}\right)dt.$$

Es ist für $x > c$ erstens

$$\text{(10)} \qquad \begin{aligned} \left|e^{\pm\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+it\right)}-1\right| &= \left|e^{\pm\frac{1}{x^2}}\left(\cos\frac{t}{x} \pm i\sin\frac{t}{x}\right)-1\right| \\ &= \left|\left(1+\frac{\mu c}{x^2}\right)\left(1+\mu c\frac{t}{x}\right)-1\right| = \frac{\mu c}{x^2}+\mu c\frac{t}{x}, \end{aligned}$$

zweitens

$$\text{(11)} \qquad \left|e^{\pm\left(\frac{1}{x}+it\right)}-1\right| = \mu c.$$

Nun ist

$$\int_{-\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{A}{\sqrt{x}}} \left|\frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+2}}\right|\left(\frac{\mu c}{x^2}+\mu c\frac{|t|}{x}\right)dt$$

$$= Ox^{\frac{r}{2}-1}\int_0^{A\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{cx}{1+t^2}}}{(1+t^2)^{\frac{r}{4}+1}}dt + Ox^{\frac{r}{2}-1}\int_0^{A\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{cx}{1+t^2}}}{(1+t^2)^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}}dt.$$

(¹) Alle Quadratwurzeln sind mit positivem Realteil zu nehmen.

(²) Mit μ bezeichnen wir unterschiedslos Funktionen von irgendwelchen Veränderlichen, für welche $|\mu| \leqq 1$.

Das Maximum des Integranden im ersten Integral rechts für $t>0$ liegt für $x>c$ bei $t^2+1=\frac{cx}{\frac{r}{4}+1}$ und ist gleich $O\left(\frac{1}{x^{\frac{r}{4}+1}}\right)$; daher ist das erste Glied rechts $O\left(x^{\frac{r}{4}-\frac{3}{2}}\right)$; ebenso findet man, dass das zweite Glied rechts gleich $O\left(x^{\frac{r}{4}-1}\right)$ ist.

Weiter ist

$$\left|\int_{-\infty}^{-\frac{A}{\sqrt{x}}} \frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+2}}\left(e^{\pm\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+it\right)}-1\right)dt\right| = \left|\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty}\cdots\right|$$

$$=O\,\frac{1}{x}\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty}\frac{dt}{t^{\frac{r}{2}+1}}=O\left(x^{\frac{r}{4}-1}\right).$$

Endlich ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+2}}\left(e^{\pm\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+it\right)}-1\right)dt$$

$$=\frac{1}{i}\int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty}\frac{e^{\left(x\pm\frac{1}{x}\right)s}}{s^{\frac{r}{2}+2}}\,ds-\frac{1}{i}\int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty}\frac{e^{xs}}{s^{\frac{r}{2}+2}}\,ds$$

$$=\frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+2\right)}\left(\left(x\pm\frac{1}{x}\right)^{\frac{r}{2}+1}-x^{\frac{r}{2}+1}\right)=\pm\frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}x^{\frac{r}{2}-1}+O\left(x^{\frac{r}{2}-3}\right).$$

Also ist

$$J_1(x)=\pm\frac{\pi^{\frac{r}{2}}x^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{\alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}+O\left(x^{\frac{r}{2}-3}\right).$$

Um (7) zu beweisen, genügt es also—da der Integrand für konjugiert komplexe Werte von s konjugiert komplexe Werte annimmt—zu zeigen: für jedes $\varepsilon>0$ ist

$$\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty}\left|\theta^{r_1}(\alpha_1 s)\,\theta^{r_2}(\alpha_2 s)\right|\,\mathrm{Min}\left(1,\ \frac{t}{x}\right)\frac{dt}{t^2} \tag{12}$$

$$=O\left(x^{\frac{r}{2}-2-\frac{1}{\gamma+1}+\varepsilon}\right)\qquad\left(s=\frac{1}{x}+ti\right)$$

$\Big($man beachte, dass nach (10), (11) gilt $\left|e^{\pm\frac{1}{x}s}-1\right|<c\ \mathrm{Min}\left(1,\ \frac{t}{x}\right)$ für unsere $t\Big)$.

Beweis von (12). Wir legen nun, bei gegebenem $x>1$, auf das Intervall $-\infty<t<\infty$ alle Fareybrüche $\frac{h}{k}$ mit $h\gtreqless 0$, $0<k\leqq\sqrt{x}$, $(h,k)=1$ und konstruieren noch ihre Medianten, d. h. alle Zahlen $\frac{h+\bar{h}}{k+\bar{k}}$, wo $\frac{h}{k}$, $\frac{\bar{h}}{\bar{k}}$ zwei benachbarte von unseren Fareybrüchen sind.

Es sei $\mathfrak{B}_{h,k}$ das linksseitig abgeschlossene, rechtsseitig offene Intervall, dessen Endpunkte zwei benachbarte Medianten sind und welches den Punkt $\frac{h}{k}$ enthält. Bekanntlich ist

$$\mathfrak{B}_{h,k}=\left\langle\frac{h}{k}-\frac{\mu}{k\sqrt{x}},\ \frac{h}{k}+\frac{\mu}{k\sqrt{x}}\right). \tag{13}$$

Es gilt nun bekanntlich folgendes [1]: wenn $\binom{l\ m}{n\ p}$ eine Modulsubstitution ist mit $n>0$, $\frac{p}{n}=\frac{2h}{k}\left(\text{also } n=k \text{ oder } n=\frac{k}{2}\right)$, so ist

$$\theta(\alpha_j s)=\frac{\mu c}{\sqrt{k\left(\alpha_j s-2\pi i\frac{h}{k}\right)}}\bar{\theta}\left(-\pi i\frac{l\alpha_j s-m\pi i}{n\alpha_j s-p\pi i}\right)\ (j=1,2), \tag{14}$$

wo entweder $\bar{\theta}(s)=\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}e^{-m^2 s}$ oder $\bar{\theta}(s)=\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m e^{-m^2 s}$ oder $\bar{\theta}(s)=\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 s}$. Wenn nun $s=\frac{1}{x}+ti$ und wenn t im Intervall [2] $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ liegt, so ist

$$\Re\left(-\pi i\frac{l\alpha_j s-m\pi i}{n\alpha_j s-p\pi i}\right)=\frac{\pi^2\alpha_j}{xn^2\left(\frac{\alpha_j^2}{x^2}+\left(\alpha_j t-\frac{2\pi h}{k}\right)^2\right)}>c;$$

denn es ist $\left|\alpha_j t-2\pi\frac{h}{k}\right|<\frac{c}{k\sqrt{x}}$, $n\leqq k$. Daher ist für $s=\frac{1}{x}+ti$, t in $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ nach (14)

$$|\theta(\alpha_j s)|<\frac{c}{\sqrt{k}\sqrt[4]{\frac{1}{x^2}+\left(t-\frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right)^2}},$$

---

(1) A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen, B. G. Teubner, Leipzig 1903; S. 183-185.

(2) Wenn $I=\langle a_1, a_2)$ ein Intervall ist und $a_3>0$, so bedeute $a_3 I$ das Intervall $\langle a_1 a_3, a_2 a_3)$.

also

$$(15) \qquad |\theta(\alpha_j s)| < \frac{c}{\sqrt{k}} \operatorname{Min}\left(\sqrt{x}, \frac{1}{\sqrt{\left|t-\frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right|}}\right) \left(\operatorname{Min}\left(a, \frac{1}{0}\right)=a\right).$$

Zu jedem t unseres Integrationsintervalls $\left\langle \frac{A}{\sqrt{x}}, \infty\right)$ gibt es nun eindeutig vier ganze Zahlen h_1, k_1, h_2, k_2, so dass t im Durchschnitt der beiden Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_1}\mathfrak{B}_{h_1, k_1}, \frac{2\pi}{\alpha_2}\mathfrak{B}_{h_2, k_2}$ liegt. Weil $\mathfrak{B}_{0, 1}$ im Intervall $\left\langle -\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ liegt und $A=\operatorname{Max}\left(\frac{2\pi}{\alpha_1}, \frac{2\pi}{\alpha_2}\right)$ ist, so ist notwendig $h_1>0, h_2>0$. Wenn nun t im Durchschnitt der beiden Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_1}\mathfrak{B}_{h_1, k_1}, \frac{2\pi}{\alpha_2}\mathfrak{B}_{h_2, k_2}$ liegt, so gibt es wegen (13) genau ein Paar von ganzen nichtnegativen Zahlen n_1, n_2, so dass

$$(16) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2^{n_1+1}k_1\sqrt{x}} &< \left|\frac{\alpha_1}{2\pi}t-\frac{h_1}{k_1}\right| \leqq \frac{1}{2^{n_1}k_1\sqrt{x}}, \\ \frac{1}{2^{n_2+1}k_2\sqrt{x}} &< \left|\frac{\alpha_2}{2\pi}t-\frac{h_2}{k_2}\right| \leqq \frac{1}{2^{n_2}k_2\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

ausser wenn $t=\frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1}$ oder $t=\frac{2\pi}{\alpha_2}\frac{h_2}{k_2}$.

Wir definieren nun abzählbar viele Punktmengen $\mathfrak{M}(h_1, h_2; k_1, k_2; n_1, n_2)=\mathfrak{M}(h; k; n)$ folgendermassen: wenn $h_1, h_2, k_1, k_2, n_1, n_2$ ganze Zahlen sind mit $h_j>0$, $0<k_j\leqq\sqrt{x}$, $(h_j, k_j)=1$, $n_j\geqq 0$ $(j=1, 2)$, so sei $\mathfrak{M}(h; k; n)$ die Menge derjenigen t, die im Durchschnitt der Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_1}\mathfrak{B}_{h_1, k_1}, \frac{2\pi}{\alpha_2}\mathfrak{B}_{h_2, k_2}, \left\langle\frac{A}{\sqrt{x}}, \infty\right)$ liegen und die Ungleichungen (16) erfüllen. Die Punktmengen $\mathfrak{M}(h; k; n)$ sind paarweise punktfremd und überdecken das ganze Intervall $\left\langle\frac{A}{\sqrt{x}}, \infty\right)$ mit Ausnahme von abzählbar vielen Punkten $t=\frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1}$ und $t=\frac{2\pi}{\alpha_2}\frac{h_2}{k_2}$.

Um die Gleichung (12) zu beweisen, genügt es also zu zeigen: für jedes $\varepsilon>0$ ist

$$(17) \qquad \sum_{\substack{h_1, k_1, n_1, \\ h_2, k_2, n_2}} \int_{\mathfrak{M}(h; k; n)} |\theta^{r_1}(\alpha_1 s)\,\theta^{r_2}(\alpha_2 s)| \operatorname{Min}\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{x}\right)\frac{dt}{t}$$
$$= O\left(x^{\frac{r}{2}-2-\frac{1}{\gamma+1}+\varepsilon}\right) \quad \left(s=\frac{1}{x}+ti\right).$$

Aus Symmetriegründen dürfen und wollen wir uns dabei auf die $\mathfrak{M}(h; k; n)$ mit $2^{n_1}k_1\geqq 2^{n_2}k_2$ beschränken. Wir führen nun eine Klasseneinteilung von diesen Mengen $\mathfrak{M}(h; k; n)$ ein. Es seien l, m_1, m_2, n_1, n_2 ganze nichtnegative Zahlen. Wir wollen sagen, dass die Menge $\mathfrak{M}(h_1, h_2; k_1, k_2; n_1, n_2) = \mathfrak{M}(h; k; n)$ zur Klasse $[l; m_1, m_2; n_1, n_2] = [l; m; n]$ gehört, wenn $2^l \leqq h_1 < 2^{l+1}$, $2^{m_1} \leqq k_1 < 2^{m_1+1}$, $2^{m_2} \leqq k_2 < 2^{m_2+1}$.

Jede Menge $\mathfrak{M}(h; k; n)$ gehört genau einer Klasse $[l; m; n]$ an. Dabei dürfen wir uns noch auf die $[l; m; n]$ mit $2^{m_1} \leqq \sqrt{x}$, $2^{m_2} \leqq \sqrt{x}$ beschränken. Wenn eine Menge $\mathfrak{M}(h; k; n)$ der Klasse $[l; m; n]$ nicht leer sein soll, muss nach (16) (wegen $2^{n_1}k_1 \geqq 2^{n_2}k_2$) sein

$$\left| \frac{h_1}{k_1} \frac{1}{\alpha_1} - \frac{h_2}{k_2} \frac{1}{\alpha_2} \right| < \frac{c}{2^{n_2} k_2 \sqrt{x}}. \tag{18}$$

Nach dem Hilfssatz 2 ist also die Anzahl der nicht leeren Mengen $\mathfrak{M}(h; k; n)$ der Klasse $[l; m; n]$ für jedes $\varepsilon > 0$ höchstens gleich

$$c(\varepsilon)\, 2^{(l+m_2)\varepsilon} \left(2^{l+m_2+m_1-n_2} x^{-\frac{1}{2}} + 2^{(l+m_2)\frac{\gamma+1}{\gamma+2} + \frac{m_1-n_2}{\gamma+2}} x^{-\frac{1}{2(\gamma+2)}} \right). \tag{19}$$

Weiter folgt aus (18)

$$\left| \frac{h_2 k_1}{h_1 k_2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right| < \frac{c k_1}{2^{n_2} k_2 h_1 \sqrt{x}} < \frac{c}{2^{n_2+m_2+l-m_1} \sqrt{x}}.$$

Nach der Definition von β ist wegen $\gamma > \beta$

$$2^{n_2+m_2+l-m_1} \sqrt{x} < c\,(h_1 k_2)^{2+\gamma} < c 2^{l(2+\gamma)} 2^{m_2(2+\gamma)},$$

oder

$$2^l > c 2^{-m_2} 2^{\frac{n_2-m_1}{1+\gamma}} x^{\frac{1}{2(1+\gamma)}};$$

wenn diese Ungleichung nicht erfüllt ist, enthält also die Klasse $[l; m; n]$ keine nichtleere Punktmenge $\mathfrak{M}(h; k; n)$.

Wir vereinigen noch die Klassen $[l; m; n]$ in drei Oberklassen $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ folgendermassen: wenn $2^{m_1+n_1} < \sqrt{x}$, so gehöre die Klasse $[l; m; n]$ zur Oberklasse $\{0\}$; wenn $2^{m_1+n_1} \geqq \sqrt{x} > 2^{m_2+n_2}$, so gehöre die Klasse $[l; m; n]$ zur Oberklasse $\{1\}$; wenn $2^{m_2+n_2} \geqq \sqrt{x}$, so gehöre die Klasse $[l; m; n]$ zur Oberklasse $\{2\}$. Um (17) zu beweisen, genügt es also, zu zeigen: für $\tau = 0, 1, 2$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$\sum_{\{\tau\}} \int_{\mathfrak{M}(h;\,k;\,n)} |\theta^{r_1}(\alpha_1 s)\, \theta^{r_2}(\alpha_2 s)| \operatorname{Min}\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{x}\right) \frac{dt}{t} \tag{20}$$
$$= O\left(x^{\frac{r}{2} - 2 - \frac{1}{\gamma+1} + \varepsilon}\right) \quad \left(s = \frac{1}{x} + ti\right);$$

dabei soll die Summation über alle nichtleeren $\mathfrak{M}(h; k; n)$ mit $2^{n_1}k_1 \geqq 2^{n_2}k_2$ der Oberklasse $\{\tau\}$ erstreckt werden.

Wir bemerken noch: Es sei $\mathfrak{M}(h; k; n)$ eine nichtleere Punktmenge der Klasse $[l;\, m;\, n]$. Dann ist erstens ihr Mass nach (16) kleiner als $\frac{c}{2^{m_1+n_1}\sqrt{x}}$. Zweitens ist, wenn t in $\mathfrak{M}(h;\, k;\, n)$ liegt, nach (15)

$$|\theta(\alpha_j s)| < \frac{c}{\sqrt{2^{m_j}}} \operatorname{Min}\left(\sqrt{x},\ \sqrt{2^{m_j+n_j}}\sqrt[4]{x}\right) \quad (j=1,\, 2);$$

drittens ist, wenn t in $\mathfrak{M}(h;\, k;\, n)$ liegt, $\left|\frac{\alpha_1}{2\pi}t - \frac{h_1}{k_1}\right| \leqq \frac{1}{k_1\sqrt{x}}$, also $c2^{l-m_1} < t < c2^{l-m_1}$ für $x > c$. Die Anzahl der nichtleeren $\mathfrak{M}(h;\, k;\, n)$ der Klasse $[l;\, m;\, n]$ haben wir endlich durch (19) nach oben abgeschätzt. Diese vier Ergebnisse werden wir bei der Abschätzung der linken Seite in (20) reichlich benutzen.

Es sei nun ein $\varepsilon > 0$ gegeben; ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varepsilon < \operatorname{Min}\left(\frac{1}{\gamma+2},\ \frac{\gamma}{\gamma+1}\right)$. Wir betrachten den Ausdruck in (20) für jede der drei Oberklassen gesondert.

1. Die Oberklasse {0}. Der Ausdruck links in (20) ist höchstens gleich (für $x > c$)

$$c(\varepsilon) \sum_{\substack{l,\, m_1,\, m_2,\\ n_1,\, n_2}} \frac{1}{2^{m_1+n_1}\sqrt{x}} \cdot \frac{2^{m_1}}{2^l} \operatorname{Min}\left(\frac{2^{m_1}}{2^l},\ \frac{1}{x}\right) \cdot 2^{n_1\frac{r_1}{2}+n_2\frac{r_2}{2}} x^{\frac{r}{4}} \cdot 2^{(l+m_2)\varepsilon}$$
$$\times \left(2^{l+m_2+m_1-n_2} x^{-\frac{1}{2}} + 2^{(l+m_2)\frac{\gamma+1}{\gamma+2}+\frac{m_1-n_2}{\gamma+2}} x^{-\frac{1}{2(\gamma+2)}}\right).$$

Dabei ist über die nichtnegativen ganzen Zahlen $l,\, m_1,\, m_2,\, n_1,\, n_2$ mit $2^{m_1+n_1} < \sqrt{x}$, $2^{m_2+n_2} < \sqrt{x}$, $2^l > c2^{-m_2+\frac{n_2-m_1}{\gamma+1}} x^{\frac{1}{2(\gamma+1)}}$ zu summieren. Wir behandeln die beiden Summanden in der Klammer gesondert.

Es ist erstens

$$x^{\frac{r}{4}-1} \sum_{\substack{l,\, m_1,\, m_2,\\ n_1,\, n_2}} 2^{l\varepsilon+m_1+n_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+m_2(1+\varepsilon)+n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)} \operatorname{Min}\left(\frac{2^{m_1}}{2^l},\ \frac{1}{x}\right)$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{4}-2+\varepsilon} \sum_{\substack{m_1,\, m_2,\\ n_1,\, n_2}} 2^{m_1(1+\varepsilon)+n_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+m_2(1+\varepsilon)+n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{4}-2+\varepsilon} \sum_{m_1,\, m_2} 2^{m_1(1+\varepsilon)} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{m_1}}\right)^{\frac{r_1}{2}-1} 2^{m_2(1+\varepsilon)} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{m_2}}\right)^{\frac{r_2}{2}-1}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-3+2\varepsilon} \leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-2-\frac{1}{\gamma+1}+\varepsilon}.$$

Zweitens ist $\left(\text{ich schreibe einfach } \frac{1}{x} \text{ statt } \operatorname{Min}\left(\frac{2^{m_1}}{2^l},\ \frac{1}{x}\right)\right)$

$$x^{\frac{r}{4}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2(\gamma+2)}} \sum_{\substack{l,\, n_1,\, m_2\\ m_1,\, n_2}} 2^{l\left(\varepsilon-\frac{1}{\gamma+2}\right)+\frac{m_1}{\gamma+2}+n_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+m_2\left(\varepsilon+\frac{\gamma+1}{\gamma+2}\right)+n_2\left(\frac{r_2}{2}-\frac{1}{\gamma+2}\right)}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{4}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2(\gamma+2)}+\frac{1}{2(\gamma+1)}\left(\varepsilon-\frac{1}{\gamma+2}\right)}$$

$$\times \sum_{\substack{m_1,\, m_2\\ n_1,\, n_2}} 2^{m_1\left(\frac{1}{\gamma+2}+\frac{1}{\gamma+1}\left(\frac{1}{\gamma+2}-\varepsilon\right)\right)+n_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+m_2\left(\varepsilon+\frac{\gamma+1}{\gamma+2}+\frac{1}{\gamma+2}-\varepsilon\right)+n_2\left(\frac{r_2}{2}-\frac{1}{\gamma+2}+\frac{1}{\gamma+1}\left(\varepsilon-\frac{}{\gamma+2}\right)\right)}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{4}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2(\gamma+1)}+\frac{\varepsilon}{2(\gamma+1)}} \sum_{m_1,\, m_2} 2^{m_1\frac{1-\varepsilon}{\gamma+1}} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{m_1}}\right)^{\frac{r_1}{2}-1} 2^{m_2} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{m_2}}\right)^{\frac{r_2}{2}-\frac{1-\varepsilon}{\gamma+1}}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-2-\frac{1}{\gamma+1}+\varepsilon}.$$

2. Die Oberklasse $\{1\}$. Der Ausdruck links in (20) ist höchstens gleich (für $x>c$)

$$c(\varepsilon) \sum_{\substack{l,\, m_1,\, m_2\\ n_1,\, n_2}} \frac{1}{2^{m_1+n_1}\sqrt{x}} \cdot \frac{2^{m_1}}{2^l} \operatorname{Min}\left(\frac{2^{m_1}}{2^l},\ \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^{\frac{r_1}{2}}}{2^{m_1\frac{r_1}{2}}}\, x^{\frac{r_2}{4}}\, 2^{n_2\frac{r_2}{2}} \cdot 2^{(l+m_2)\varepsilon}$$

$$\times \left(2^{l+m_2+m_1-n_2} x^{-\frac{1}{2}} + 2^{(l+m_2)\frac{\gamma+1}{\gamma+2}+\frac{m_1-n_2}{\gamma+2}}\, x^{-\frac{1}{2(\gamma+2)}}\right).$$

Dabei ist über die ganzen nichtnegativen Zahlen l, m_1, m_2, n_1, n_2 mit $2^{m_1+n_1}\geqq\sqrt{x}$, $2^{m_1}\leqq\sqrt{x}$, $2^{m_2+n_2}<\sqrt{x}$, $2^l>c2^{-m_2+\frac{n_2-m_1}{\gamma+1}}x^{\frac{1}{2(\gamma+1)}}$ zu summieren. Wir behandeln die beiden Summanden in der Klammer gesondert.

Es ist erstens

$$x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-1} \sum_{\substack{l,\, m_1,\, m_2,\\ n_1,\, n_2}} 2^{l\varepsilon-m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)-n_1+m_2(1+\varepsilon)+n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)} \operatorname{Min}\left(\frac{2^{m_1}}{2^l},\ \frac{1}{x}\right)$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-2+\varepsilon} \sum_{\substack{m_1,\, m_2,\\ n_1,\, n_2}} 2^{-m_1\left(\frac{r_1}{2}-1-\varepsilon\right)-n_1+m_2(1+\varepsilon)+n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-2+\varepsilon} \sum_{m_1,\, m_2} 2^{-m_1\left(\frac{r_1}{2}-1-\varepsilon\right)} \frac{2^{m_1}}{\sqrt{x}}\, 2^{m_2(1+\varepsilon)} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{m_2}}\right)^{\frac{r_2}{2}-1}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-3+2\varepsilon} \leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-2-\frac{1}{\gamma+1}+\varepsilon}.$$

Zweitens ist $\left(\text{ich schreibe einfach } \frac{1}{x} \text{ statt } \operatorname{Min}\left(\frac{2^{m_1}}{2^l},\ \frac{1}{x}\right)\right)$

$$x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2(\gamma+2)}} \sum_{\substack{l,\, m_1,\, m_2,\\ n_1,\, n_2}} 2^{l\left(\varepsilon-\frac{1}{\gamma+2}\right)-m_1\left(\frac{r_1}{2}-\frac{1}{\gamma+}\right)-n_1+m_2\left(\varepsilon+\frac{\gamma+1}{\gamma+2}\right)+n_2\left(\frac{r_2}{2}-\frac{1}{\gamma+2}\right)}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2(\gamma+2)}+\frac{1}{2(\gamma+1)}\left(\varepsilon-\frac{1}{\gamma+2}\right)}$$

$$\times \sum_{\substack{m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} 2^{-m_1\left(\frac{r_1}{2}-\frac{1}{\gamma+2}+\frac{1}{\gamma+1}\left(\varepsilon-\frac{1}{\gamma+2}\right)\right)-n_1+m_2\left(\varepsilon+\frac{\gamma+1}{\gamma+2}+\frac{1}{\gamma+2}-\varepsilon\right)+n_2\left(\frac{r_2}{2}-\frac{1}{\gamma+2}+\frac{1}{\gamma+1}\left(\varepsilon-\frac{1}{\gamma+2}\right)\right)}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r_1}{4}+\frac{r_2}{4}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2(\gamma+1)}+\frac{\varepsilon}{2(\gamma+1)}} \sum_{m_1, m_2} 2^{-m_1\left(\frac{r_1}{2}-\frac{1-\varepsilon}{\gamma+1}\right)} \frac{2^{m_1}}{\sqrt{x}}\, 2^{m_2} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{m_2}}\right)^{\frac{r_2}{2}-\frac{1-\varepsilon}{\gamma+1}}$$

$$\leqq c(x)\, x^{\frac{r}{2}-2-\frac{1}{\gamma+1}+\varepsilon}.$$

3. Die Oberklasse $\{2\}$. Der Ausdruck links in (20) ist höchstens gleich (für $x>c$)

$$c(\varepsilon) \sum_{\substack{l, m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} \frac{1}{2^{m_1+n_1}\sqrt{x}} \cdot \frac{2^{m_1}}{2^l} \operatorname{Min}\left(\frac{2^{m_1}}{2^l}, \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^{\frac{r}{2}}}{2^{m_1\frac{r_1}{2}+m_2\frac{r_2}{2}}} \cdot 2^{(l+m_2)\varepsilon}$$

$$\times \left(2^{l+m_2+m_1-n_2} x^{-\frac{1}{2}} + 2^{(l+m_2)\frac{\gamma+1}{\gamma+2}+\frac{m_1-n_2}{\gamma+2}} x^{-\frac{1}{2(\gamma+2)}}\right).$$

Dabei ist über die ganzen nichtnegativen Zahlen l, m_1, m_2, n_1, n_2 mit $2^{m_1+n_1} \geqq \sqrt{x}$, $2^{m_1} \leqq \sqrt{x}$, $2^{m_2+n_2} \geqq \sqrt{x}$, $2^{m_2} \leqq \sqrt{x}$, $2^l > c 2^{-m_2+\frac{n_2-m_1}{\gamma+1}} x^{\frac{1}{2(\gamma+1)}}$ zu summieren. Wir behandeln die beiden Summanden in der Klammer gesondert.

Es ist erstens

$$x^{\frac{r}{2}-1} \sum_{\substack{l, m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} 2^{l\varepsilon-m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)-n_1-m_2\left(\frac{r_2}{2}-1-\varepsilon\right)-n_2} \operatorname{Min}\left(\frac{2^{m_1}}{2^l}, \frac{1}{x}\right)$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{\substack{m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} 2^{-m_1\left(\frac{r_1}{2}-1-\varepsilon\right)-n_1-m_2\left(\frac{r_2}{2}-1-\varepsilon\right)-n_2}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{m_1, m_2} 2^{-m_1\left(\frac{r_1}{2}-1-\varepsilon\right)} \frac{2^{m_1}}{\sqrt{x}}\, 2^{-m_2\left(\frac{r_2}{2}-1-\varepsilon\right)} \frac{2^{m_2}}{\sqrt{x}}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-3+2\varepsilon} \leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-2-\frac{1}{\gamma+1}+\varepsilon}.$$

Zweitens ist $\left(\text{ich schreibe einfach } \frac{1}{x} \text{ statt } \operatorname{Min}\left(\frac{2^{m_1}}{2^l}, \frac{1}{x}\right)\right)$

$$x^{\frac{r}{2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2(\gamma+2)}} \sum_{\substack{l, m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} 2^{l\left(\varepsilon-\frac{1}{\gamma+2}\right)-m_1\left(\frac{r_1}{2}-\frac{1}{\gamma+2}\right)-n_1-m_2\left(\frac{r_2}{2}-\frac{\gamma+1}{\gamma+2}-\varepsilon\right)-\frac{n_2}{\gamma+2}}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2(\gamma+2)}+\frac{1}{2(\gamma+1)}\left(\varepsilon-\frac{1}{\gamma+2}\right)}$$

$$\times \sum_{\substack{m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} 2^{-m_1\left(\frac{r_1}{2}-\frac{1}{\gamma+2}+\frac{1}{\gamma+1}\left(\varepsilon-\frac{1}{\gamma+2}\right)\right)-n_1-m_2\left(\frac{r_2}{2}-\frac{\gamma+1}{\gamma+2}-\varepsilon+\varepsilon-\frac{1}{\gamma+2}\right)-n_2\left(\frac{1}{\gamma+2}-\frac{1}{\gamma+1}\left(\varepsilon-\frac{1}{\gamma+2}\right)\right)}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2(\gamma+1)}+\frac{\varepsilon}{2(\gamma+1)}} \sum_{m_1, m_2} 2^{-m_1\left(\frac{r_1}{2}-\frac{1-\varepsilon}{\gamma+1}\right)} \frac{2^{m_1}}{\sqrt{x}}\, 2^{-m_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)} \left(\frac{2^{m_2}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{\gamma+1}}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-2-\frac{1}{\gamma+1}+\varepsilon}.$$

Damit ist aber für alle drei Oberklassen die Gleichung (20)—also auch die Behauptung 1.—bewiesen.

4. Beweis der Behauptung 2.

$r_1, r_2, r, \alpha_1, \alpha_2, \beta, Q(u), A_Q(x), P_Q(x)$ mögen die im Hauptsatz erklärte Bedeutung haben. Es sei $\beta>0, 0<\delta<\beta$. Wir wählen eine Zahl δ' mit $\delta<\delta'<\beta$. Es gibt also eine Folge von Paaren ganzer positiver Zahlen $p_1 q_1; p_2, q_2; \ldots; p_n, q_n; \ldots$ mit

$$p_n \to +\infty, \quad q_n \to +\infty, \quad \left|\frac{p_n}{q_n}-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right| < \frac{1}{q_n^{2+\delta'}}.$$

Wir setzen

$$Q_n(u) = \alpha_1(u_1^2+u_2^2+\ldots+u_{r_1}^2) + \alpha_1 \frac{p_n}{q_n}(u_{r_1+1}^2+u_{r_1+2}^2+\ldots+u_r^2).$$

Für jedes ganzzahlige System von $u_1, u_2, \ldots, u_r$, d. h. in jedem Gitterpunkt nimmt diese Form einen Wert $\alpha_1 \frac{m}{q_n}$ an, wo m ganz ist. Weiter ist [1]

$$|Q_n(u)-Q(u)| \leqq \frac{\alpha_1}{q_n^{2+\delta'}}(u_{r_1+1}^2+\ldots+u_{r_2}^2) \leqq \frac{\bar{c}\, Q(u)}{q_n^{2+\delta'}}.$$

Wir definieren nun zu jedem $n=1, 2, \ldots$ eine ganze Zahl M_n durch die Ungleichungen $M_n \leqq q_n^{2+\delta} < M_n+1$; wenn

$$\alpha_1 \frac{M_n+\frac{1}{3}}{q_n} \leqq Q(u) \leqq \alpha_1 \frac{M_n+\frac{2}{3}}{q_n},$$

so ist

$$\alpha_1 \frac{M_n+\frac{1}{3}}{q_n}\left(1-\frac{\bar{c}}{q_n^{2+\delta'}}\right) \leqq Q_n(u) < \alpha_1 \frac{M_n+\frac{2}{3}}{q_n}\left(1+\frac{\bar{c}}{q_n^{2+\delta'}}\right),$$

also

$$\alpha_1 \frac{M_n}{q_n} < Q_n(u) < \alpha_1 \frac{M_n+1}{q_n}$$

---

(1) Mit $\bar{c}$ bezeichne ich unterschiedslos positive Zahlen, die nur von $\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2, \delta, \delta'$ und von der Folge $p_1, q_1; p_2, q_2; \ldots$ abhängen.

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2(\gamma+2)}+\frac{1}{2(\gamma+1)}\left(\varepsilon-\frac{1}{\gamma+2}\right)}$$

$$\times \sum_{\substack{m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} 2^{-m_1\left(\frac{r_1}{2}-\frac{1}{\gamma+2}+\frac{1}{\gamma+1}\left(\varepsilon-\frac{1}{\gamma+2}\right)\right)-n_1+m_2\left(\varepsilon+\frac{\gamma+1}{\gamma+2}+\frac{1}{\gamma+2}-\varepsilon\right)+n_2\left(\frac{r_2}{2}-\frac{1}{\gamma+2}+\frac{1}{\gamma+1}\left(\varepsilon-\frac{1}{\gamma+2}\right)\right)}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r_1}{4}+\frac{r_2}{4}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2(\gamma+1)}+\frac{\varepsilon}{2(\gamma+1)}} \sum_{m_1, m_2} 2^{-m_1\left(\frac{r_1}{2}-\frac{1-\varepsilon}{\gamma+1}\right)} \frac{2^{m_1}}{\sqrt{x}} 2^{m_2} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{m_2}}\right)^{\frac{r_2}{2}-\frac{1-\varepsilon}{\gamma+1}}$$

$$\leqq c(x)\, x^{\frac{r}{2}-2-\frac{1}{\gamma+1}+\varepsilon}.$$

3. Die Oberklasse {2}. Der Ausdruck links in (20) ist höchstens gleich (für $x>c$)

$$c(\varepsilon) \sum_{\substack{l, m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} \frac{1}{2^{m_1+n_1}\sqrt{x}} \cdot \frac{2^{m_1}}{2^l} \operatorname{Min}\left(\frac{2^{m_1}}{2^l}, \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^{\frac{r}{2}}}{2^{m_1 \frac{r_1}{2}+m_2 \frac{r_2}{2}}} \cdot 2^{(l+m_2)\varepsilon}$$

$$\times \left(2^{l+m_2+m_1-n_2} x^{-\frac{1}{2}} + 2^{(l+m_2)\frac{\gamma+1}{\gamma+2}+\frac{m_1-n_2}{\gamma+2}} x^{-\frac{1}{2(\gamma+2)}}\right).$$

Dabei ist über die ganzen nichtnegativen Zahlen l, m_1, m_2, n_1, n_2 mit $2^{m_1+n_1} \geqq \sqrt{x}$, $2^{m_1} \leqq \sqrt{x}$, $2^{m_2+n_2} \geqq \sqrt{x}$, $2^{m_2} \leqq \sqrt{x}$, $2^l > c 2^{-m_2+\frac{n_2-m_1}{\gamma+1}} x^{\frac{1}{2(\gamma+1)}}$ zu summieren. Wir behandeln die beiden Summanden in der Klammer gesondert.

Es ist erstens

$$x^{\frac{r}{2}-1} \sum_{\substack{l, m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} 2^{l\varepsilon-m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)-n_1-m_2\left(\frac{r_2}{2}-1-\varepsilon\right)-n_2} \operatorname{Min}\left(\frac{2^{m_1}}{2^l}, \frac{1}{x}\right)$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{\substack{m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} 2^{-m_1\left(\frac{r_1}{2}-1-\varepsilon\right)-n_1-m_2\left(\frac{r_2}{2}-1-\varepsilon\right)-n_2}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{m_1, m_2} 2^{-m_1\left(\frac{r_1}{2}-1-\varepsilon\right)} \frac{2^{m_1}}{\sqrt{x}} 2^{-m_2\left(\frac{r_2}{2}-1-\varepsilon\right)} \frac{2^{m_2}}{\sqrt{x}}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-3+2\varepsilon} \leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-2-\frac{1}{\gamma+1}+\varepsilon}.$$

Zweitens ist $\left(\text{ich schreibe einfach } \frac{1}{x} \text{ statt } \operatorname{Min}\left(\frac{2^{m_1}}{2^l}, \frac{1}{x}\right)\right)$

$$x^{\frac{r}{2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2(\gamma+2)}} \sum_{\substack{l, m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} 2^{l\left(\varepsilon-\frac{1}{\gamma+2}\right)-m_1\left(\frac{r_1}{2}-\frac{1}{\gamma+2}\right)-n_1-m_2\left(\frac{r_2}{2}-\frac{\gamma+1}{\gamma+2}-\varepsilon\right)-\frac{n_2}{\gamma+2}}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2(\gamma+2)}+\frac{1}{2(\gamma+1)}\left(\varepsilon-\frac{1}{\gamma+2}\right)}$$

$$\times \sum_{\substack{m_1, m_2,\\ n_1, n_2}} 2^{-m_1\left(\frac{r_1}{2}-\frac{1}{\gamma+2}+\frac{1}{\gamma+1}\left(\varepsilon-\frac{1}{\gamma+2}\right)\right)-n_1-m_2\left(\frac{r_2}{2}-\frac{\gamma+1}{\gamma+2}-\varepsilon+\varepsilon-\frac{1}{\gamma+2}\right)-n_2\left(\frac{1}{\gamma+2}-\frac{1}{\gamma+1}\left(\varepsilon-\frac{1}{\gamma+2}\right)\right)}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2(\gamma+1)}+\frac{\varepsilon}{2(\gamma+1)}} \sum_{m_1, m_2} 2^{-m_1\left(\frac{r_1}{2}-\frac{1-\varepsilon}{\gamma+1}\right)} \frac{2^{m_1}}{\sqrt{x}} 2^{-m_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)} \left(\frac{2^{m_2}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{\gamma+1}}$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{\frac{r}{2}-2-\frac{1}{\gamma+1}+\varepsilon}.$$

Damit ist aber für alle drei Oberklassen die Gleichung (20)— also auch die Behauptung 1 —bewiesen.

4. Beweis der Behauptung 2.

$r_1, r_2, r, \alpha_1, \alpha_2, \beta, Q(u), A_Q(x), P_Q(x)$ mögen die im Hauptsatz erklärte Bedeutung haben. Es sei $\beta > 0, 0 < \delta < \beta$. Wir wählen eine Zahl δ' mit $\delta < \delta' < \beta$. Es gibt also eine Folge von Paaren ganzer positiver Zahlen $p_1 q_1; p_2, q_2; \ldots; p_n, q_n; \ldots$ mit

$$p_n \to +\infty, \quad q_n \to +\infty, \quad \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right| < \frac{1}{q_n^{2+\delta'}}.$$

Wir setzen

$$Q_n(u) = \alpha_1 (u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_1 \frac{p_n}{q_n} (u_{r_1+1}^2 + u_{r_1+2}^2 + \ldots + u_r^2).$$

Für jedes ganzzahlige System von $u_1, u_2, \ldots, u_r$, d. h. in jedem Gitterpunkt nimmt diese Form einen Wert $\alpha_1 \frac{m}{q_n}$ an, wo m ganz ist. Weiter ist [1]

$$|Q_n(u) - Q(u)| \leqq \frac{\alpha_1}{q_n^{2+\delta'}} (u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_{r_2}^2) \leqq \frac{\bar{c}\, Q(u)}{q_n^{2+\delta'}}.$$

Wir definieren nun zu jedem $n = 1, 2, \ldots$ eine ganze Zahl M_n durch die Ungleichungen $M_n \leqq q_n^{2+\delta} < M_n + 1$; wenn

$$\alpha_1 \frac{M_n + \frac{1}{3}}{q_n} \leqq Q(u) \leqq \alpha_1 \frac{M_n + \frac{2}{3}}{q_n},$$

so ist

$$\alpha_1 \frac{M_n + \frac{1}{3}}{q_n} \left(1 - \frac{\bar{c}}{q_n^{2+\delta'}}\right) \leqq Q_n(u) < \alpha_1 \frac{M_n + \frac{2}{3}}{q_n} \left(1 + \frac{\bar{c}}{q_n^{2+\delta'}}\right),$$

also

$$\alpha_1 \frac{M_n}{q_n} < Q_n(u) < \alpha_1 \frac{M_n + 1}{q_n}$$

[1] Mit $\bar{c}$ bezeichne ich unterschiedslos positive Zahlen, die nur von $\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2, \delta, \delta'$ und von der Folge $p_1, q_1; p_2, q_2; \ldots$ abhängen.

für $n > \mathfrak{c}$. Daher liegen für $n > \mathfrak{c}$ im Gebiet

$$\alpha_1 \frac{M_n + \frac{1}{3}}{q_n} \leqq Q(u) \leqq \alpha_1 \frac{M_n + \frac{2}{3}}{q_n}$$

keine Gitterpunkte; also ist

$$A_Q\left(\alpha_1 \frac{M_n + \frac{1}{3}}{q_n}\right) = A_Q\left(\alpha_1 \frac{M_n + \frac{2}{3}}{q_n}\right).$$

Andererseits ist aber

$$\frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}\left(\left(\alpha_1 \frac{M_n + \frac{2}{3}}{q_n}\right)^{\frac{r}{2}} - \left(\alpha_1 \frac{M_n + \frac{1}{3}}{q_n}\right)^{\frac{r}{2}}\right)$$

$$> \bar{c}\,\frac{M_n^{\frac{r}{2}-1}}{q_n^{\frac{r}{2}}} > \mathfrak{c}\left(\frac{M_n}{q_u}\right)^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{1+\delta}};$$

daher ist mindestens eine der beiden Zahlen

$$\left|P_Q\left(\alpha_1 \frac{M_n + \frac{1}{3}}{q_n}\right)\right|, \quad \left|P_Q\left(\alpha_1 \frac{M_n + \frac{2}{3}}{q_n}\right)\right|$$

grösser al $\bar{c}\left(\frac{M_n}{q_n}\right)^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{1+\delta}}$, womit wegen $\frac{M_n}{q_n} \to +\infty$ die Behauptung 2 bewiesen ist.