8.2 PRAVDĚPODOBNOST V DÍLE OTOMARA PANKRAZE

8.2.1 Úvod

Již v části 8.1 jsme viděli, že hlavním předmětem Pankrazova odborného zájmu byla pravděpodobnost a statistika. Za studií působil jako pojistný matematik ve Všeobecném penzijním ústavu, v roce 1935 se habilitoval pro obor *pojistná matematika a matematická statistika.* S pravděpodobností a statistikou také souvisí většina jeho publikací. V habilitační práci *Zur Grundgleichung für den zeitlichen Zerfall der statistischen Kollektivs* [P8], vydané v roce 1933, studoval časový vývoj statistických kolektivů; v návaznosti na práce [305], [341] a [370], které ve dvacátých a na počátku třicátých let publikovali René Risser, Emil Schoenbaum a Renato Taucer, se zde zabýval následujícím problémem: Nechť je dána konečná množina (kolektiv) jedinců, z nichž každému je přiřazeno n znaků. V určitém okamžiku může každý jedinec ztratit či znovu získat jen jeden znak. Ztráta znaku má za následek vystoupení jedince z kolektivu, jeho opětovné získání návrat zpět. Pankraz zkoumá závislost počtu členů kolektivu l na čase t, kde $0 \leq t \leq 1$, a to jednak pro tzv. *uzavřený kolektiv*, do něhož v čase $t > 0$ nemůže vstoupit žádný nový jedinec, a pro *kolektiv otevřený*, do něhož mohou noví jedinci vstupovat kdykoli. V obou případech předpokládá, že je znám počet členů v čase $t = 0$ a že o tom, zda daný jedinec v daném okamžiku z kolektivu vystoupí či do něj vstoupí, lze rozhodnout jen s určitou známou pravděpodobností. Pro každého jedince pak ještě uvažuje celkový čas τ, který tento jedinec v časovém intervalu $[0, t]$ stráví mimo kolektiv. Základní úloha potom spočívá v *určení počtu $l(t, \tau)$ jedinců, kteří se v okamžiku t nacházejí v daném kolektivu a předtím mimo něj strávili čas τ* ([P8], str. 3–4). Jestliže počet l nezávisí na τ, tj. $l = l(t)$, pak se jedná o tzv. *jednodimenzionální problém*, jinak se problém nazývá *dvoudimenzionální*.

V prvním případě Pankraz odvozuje základní integrodiferenciální rovnici pro popis rozpadu kolektivu; díky využití Stieltjesovy integrace přitom vychází z obecnějších předpokladů, než tomu bylo u dřívějších řešení. V případě dvoudimenzionálního problému pak jako první podává úplné řešení parciální integrodiferenciální rovnice, k níž tento problém vede. Dodejme, že v posudku habilitační komise, který podepsali Emil Schoenbaum, Vojtěch Jarník a Miloš Kössler, je Pankrazova práce označena za *obohacení dosavadní teorie rozpadu kolektivu ve dvou směrech: Jednak zavedením Stieltjesova integrálu, který odpovídá lépe po-*

vaze funkcí v praxi se vyskytujících, a v druhé části práce podrobným řešením příslušné parcielní integrodiferenciální rovnice, které doposud bylo pouze naznačeno a nebylo provedeno. Habilitační práce svědčí o úplném autorově ovládání analytických prostředků pro řešení komplikovaných integrodiferenciálních rovnic.[24]

Časovým vývojem kolektivů se Pankraz zabýval i v řadě dalších prací. Různé části habilitačního spisu byly ve stejném roce vydány také v italštině (*Sui gruppi statistici* [P9]) a češtině (*O rozpadu statistických souborů* [P10] a *Základní rovnice pro časový rozpad statistických kolektivů* [P11]). Další výsledky potom přináší pojednání *Belastete Integralgleichung für die Aktiven-Ordnung in der Invalidenversicherung* [P15], v němž Pankraz vylučuje možnost opětovného návratu do kolektivu a podrobně zkoumá případy, kdy ke změnám ve složení kolektivu dochází buď spojitě, anebo v konečném počtu předem daných okamžiků. Témuž druhu rozpadu je věnován také článek *Integrální rovnice pro řád aktivních osob v invalidním pojištění* [P14] a jeho italská verze *Sulla tavola degli attivi nell' assicurazione contro l'invalidità* [P16]. S uvedeným tématem souvisí i řada prací z oblasti matematické analýzy, v nichž se Pankraz zabývá integrálními a integrodiferenciálními rovnicemi (viz [P3], [P6], [P12], [P13], [P23] a [P25]) či Stieltjesovou integrací a jejím využitím v pojistné matematice ([P17], [P18]), stejně jako práce věnované aplikacím matematické analýzy v ekonomii (například [P21], [P24], [P26] a [P29]). Konečně zde upozorněme na další práce týkající se ekonomie a pojišťovnictví: [P19], [P20], [P22] a [P34].

Definice a interpretace pravděpodobnosti

Z hlediska tématu této knihy jsou nejzajímavější články *O axiomech pravděpodobnosti* [P28] a *O pojmu pravděpodobnosti* [P31] (s dodatkem [P32]), v nichž Pankraz zformuloval axiomatickou definici pravděpodobnosti jako funkce dvou argumentů. V části 1.3.2 jsme viděli, že byl motivován logickou interpretací pravděpodobnosti (viz str. 58). V pojednání [P28] citoval mj. Waismannův článek *Logische Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffs* [383] z roku 1930 (viz str. 63), otištěný v prvním čísle časopisu Erkenntnis, jež bylo zároveň sborníkem z konference *Erste Tagung für Erkenntnislehre der exakten Wissenschaften*, konané ve dnech 15. až 17. září 1929 v Praze (viz též část 2.2.5, str. 118).[25] Pankrazův blízký vztah k logické interpretaci pravděpodobnosti dokládá také rozsáhlé pojednání *Soudobý stav logického empirismu* [P33], vydané v roce 1941 v ČPMF.

Jako pojistný matematik se zájmem o praktické aplikace však Pankraz uznával rovněž interpretaci četnostní. Na rozdíl od Misese, jehož knize *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik* [243] věnoval recenzi v ČPMF[26] (viz část 1.3.4, str. 75), ji však považoval skutečně jen za jednu z interpretací, nikoli za vlastní základ teorie pravděpodobnosti.

[24] Archiv UK, fond Přírodovědecká fakulta, kart. 15, inv. č. 107, Osobní složka O. Pankraze.

[25] Podle zprávy o této akci bylo mezi posluchači mnoho českých matematiků (viz ČPMF 59 (1930), str. 60); je tedy možné, že se Pankraz s konferenčními příspěvky seznámil nejen prostřednictvím zmíněného časopisu, ale i osobně. Dodejme, že druhý sjezd se konal v roce 1930 v Königsbergu a v ČPMF o něm referoval právě Pankraz (viz ČPMF 62 (1930), str. 66–67).

[26] ČPMF 61 (1932), 362–363.

V článku [P28] pak poznamenal: *Jakkoli však frekvenční pr. nám zjednává bezprostřední vztah k empirickému světu, zdaleka nevyčerpává celý obor statistiky a nevystačíme s ní právě v rozhodujících případech exaktní přírodovědy. Kromě toho nelze jí použít často ani na případy pozorované v běžném životě, kde má nám zachytiti a objektisovati aspoň část onoho subjektivního pocitu jistoty resp. nejistoty, se kterým vyslovujeme výroky o zkoumaných jevech.* ([P28], str. 44)

Jedinou možnost, jak se vyvarovat různých potíží, Pankraz viděl v axiomatickém přístupu, který v obecné rovině ocenil v článku *Formalistické pojetí matematiky* [P7]. Konkrétně o axiomatické definici pravděpodobnosti později napsal: *Nebudeme při ní používati žádné předem dané obsahové interpretace pr.-sti, tedy nebudeme se tázati, „co jest pr.“, nýbrž vyjdeme z otázky, „jaké vlastnosti (znaky) má míti pr.“. Vyběřeme její nejdůležitější znaky a prohlásíme, že každý pojem, který má tyto vybrané znaky, jest pr.-stí. Při výběru vlastností budeme přihlížeti jen k vlastnostem formálním, čímž si zaručíme co nejširší rozsah pojmu pr.* [...] *V důsledku toho, že axiomy vyjadřují jen a jen formální vlastnosti pojmů, vzniká otázka interpretace toho, co má vlastnosti v axiomech vyslovené. Tu snadno zjistíme, že danému axiomatickému systému vyhovují všechny interpretace, které jsou navzájem isomorfní.* ([P28], str. 44–45)

Připomeňme, že Pankraz působil jako asistent Karla Rychlíka, který již na podzim roku 1933 konal na univerzitě výběrovou přednášku o Kolmogorovově teorii, představené v knize *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [196], a v roce 1938 vydal první českou učebnici *Počet pravděpodobnosti* [313], založenou na Kolmogorovově axiomatické definici (viz str. 53). Téhož roku Pankraz napsal velmi podrobnou pochvalnou recenzi[27] Rychlíkovy knihy (viz str. 54), později však Kolmogorovovy axiomy kritizoval:

V Kolmogorovově systému jest axiomaticky vyjádřena jen věta o sčítání pr.-stí. Větu o násobení pr.-stí zavádí pomocí dodatečné definice podmíněné pr., stojící mimo axiomy. Toto rozlišování dvou pr.-ostí, nepodmíněné a podmíněné, nemá však žádného logického oprávnění a jeho význam pro p. pr. jest pouze konvenční a může míti odůvodnění jen s hlediska počtářské techniky, že se tím psaní některých vzorců snad zjednoduší.

V zásadě jde tu však o otázku, zda pr. jest definitoricky množinová funkce jednoho či dvou argumentů. Kolmogorov se snaží vystačiti s množinovou funkcí $P(A)$ o jednom argumentu, kterou ve svých axiomech definuje. Současně ale přichází k tomu, že při formulaci Bayesových vzorců s touto jedno-argumentovou funkcí nevystačí, a proto zavádí množinovou funkci

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} \tag{8.1}$$

o dvou argumentech A a B, o které dokazuje, že rovněž axiomům vyhovuje. Při tom ovšem musí předpokládat, že množina A jest konstantní, a tímto obratem z funkce dvouargumentové učiní funkci o jednom argumentu, pro kterou pak samozřejmě zvolené axiomy platí. ([P28], str. 56)

[27] ČPMF 67 (1938), D301–D303.

8.2.2 Axiomy teorie pravděpodobnosti

Pankraz ve shodě s Kolmogorovem obhajoval axiomatickou definici pravděpodobnosti jako množinové funkce. Na rozdíl od něj však tvrdil, že pravděpodobnost by měla být již od začátku definována jako dvouargumentová funkce, což také odpovídá všem interpretacím, s nimiž jsme se zatím setkali, stejně jako geometrické pravděpodobnosti, jíž byla věnována 6. kapitola. Názor, že výchozím pojmem teorie pravděpodobnosti by měla být pravděpodobnost podmíněná, vyslovil již dříve například John Maynard Keynes v knize *A Treatise on Probability* [193] z roku 1921 (viz část 1.3.2, str. 66) či Hans Reichenbach v monografii *Wahrscheinlichkeitslehre* [299] z roku 1935; originalita Pankrazových článků spočívá především ve skutečnosti, že tuto myšlenku spojují s Kolmogorovovým přístupem založeným na teorii míry.

O axiomech počtu pravděpodobnosti

Podívejme se nyní podrobněji na obsah Pankrazových prací, pojednávajících o axiomatické definici pravděpodobnosti. Článek *O axiomech počtu pravděpodobnosti* [P28] začíná obecným výkladem o vědeckých teoriích a logické syntaxi, o různých přístupech k teorii pravděpodobnosti a významu její axiomatické definice (viz citát na str. 223). Pankraz zde rovněž vymezuje pojem *statistická teorie,* a to pomocí následujících podmínek:

> *1. Statistický výrok se musí týkati zkušenostních údajů (tedy údajů empiricky kontrolovatelných). 2. Statistický výrok se netýká jediného objektu, nýbrž souboru resp. souborů objektů (zpravidla ve velikém počtu). 3. Statistický výrok musí býti výrokem pravděpodobnostním, to zn. musí obsahovati pravděpodobnost ve smyslu určité teorie p. pr. (podle čehož můžeme pak rozeznávati různé teorie statistiky).* ([P28], str. 56)

V dalších odstavcích Pankraz vykládá základní pojmy teorie množin. Definuje rovněž *množinové těleso*, *Borelovo těleso* (viz část 1.2.4, str. 51–52), *homomorfismus* a jeho speciální případy. Potom se věnuje vztahům mezi výrokovými formami, množinami a náhodnými jevy, o nichž jsme hovořili v části 1.3.2 (viz str. 58), a dále tzv. *pravděpodobnostní implikaci*, s níž jsme se setkali na str. 59. Pravděpodobnost považuje za *číselné ohodnocení určitého vztahu mezi dvěma náhodnými jevy X a Y*, popř. odpovídajícími výrokovými formami nebo množinami. V každém případě ji chápe jako funkci dvou argumentů a hledá axiomatickou definici, která by tomuto pojetí odpovídala. Po citované kritice Kolmogorovových axiomů podává následující definici:

Definice (Pankraz 1). *Nechť $\mathfrak{K}$ jest soustava částečných množin množiny E. Budeme pro soustavu $\mathfrak{K}$ požadovati:*

- *I.* *$\mathfrak{K}$ jest množinové těleso s E jako největší množinou.*[28]
- *II.* *Ke každým dvěma množinám A a B z $\mathfrak{K}$ jest přiřazeno jedno reálné číslo* $P(A,B) \geq 0$.
- *III.* $P(A,A) = 1$.

[28] Dnešními slovy, $\mathfrak{K}$ je algebra.

IV. Axiom součtový:[29]
Jsou-li množiny B a C disjunktní, platí $P(A, B+C) = P(A, B) + P(A, C)$.

V. Axiom násobení pravděpodobností:[30] $P(A, BC) = P(A, B) \cdot P(AB, C)$
za předpokladu $P(A, B) > 0$. ([P28], str. 56–57)

Pankraz pak poznamenává, že uvedený systém axiomů je bezesporný.[31] Pro $P(A, B)$ používá také Kolmogorovovo označení $P_A(B)$ (dnes bychom psali $P(B|A)$); místo *podmíněné pravděpodobnosti* však dává přednost pojmenování *pravděpodobnost jevu B se zřetelem k jevu A*, které nebudí zdání kauzální souvislosti. Dále podotýká: *Toto pojmenování úplně souhlasí s ostatními teoriemi p. pr., jako na př. s Misesovou teorií a s logickými teoriemi p. pr., podle nichž pr. jest vyjádřením vztahu mezi dvěma výroky, to zn. tvrdí se tím, že jeden výrok jest v určitém stupni pravděpodobný ve srovnání s údaji obsaženými v jiném výroku. Z toho plyne, že mluviti o pr. jevu B bez udání jevu A postrádá smyslu. Jestliže tak přesto někdy činíme, jde o pouhou brachylogii, při které dodatek „vzhledem k jevu A“ mlčky předpokládáme jako samozřejmý.* ([P28], str. 57)

V dalším kromě jiného ukazuje, že součtový axiom IV platí pro libovolný konečný počet sčítanců; kdyby však sčítanců bylo nekonečně mnoho, pak platit nemusí. Připomeňme, že když jsme v části 1.1.1 hovořili o souvislosti koherentních sázek a axiomů teorie pravděpodobnosti, dospěli jsme rovněž jen ke konečné aditivitě, kterou preferoval Bruno de Finetti (viz str. 16). Pankraz potom svou definici upravuje tak, aby platila i aditivita spočetná. Od množiny $\mathfrak{K}$ požaduje, aby byla uzavřená i vzhledem ke spočetným sjednocením, tj. aby byla σ-algebrou, a součtový axiom nahrazuje tzv. *axiomem absolutní aditivnosti*:[32]

IV.' Jsou-li A, B_1, B_2, $B_3, \dots$ v konečném nebo nekonečném spočetném počtu množiny z tělesa $\mathfrak{K}$, při čemž B_1, B_2, $B_3, \dots$ jsou navzájem vesměs disjunktní, platí $P(A, B_1 + B_2 + B_3 + \cdots) = P(A, B_1) + P(A, B_2) + P(A, B_3) + \cdots$

Jako definitivní pak Pankraz označuje následující definici.

Definice (Pankraz 2). *Budiž $\mathfrak{K}$ Borelovo množinové těleso s E jakožto největší množinou. Pak nechť v $\mathfrak{K}$ jest definována jednoznačná funkce $P(A, B)$ dvou argumentů A, B vyhovující podmínkám:*

1. *$P(A, B) \geq 0$ pro každé A a B z $\mathfrak{K}$.*
2. *$P(A, A) = 1$.*
3. *Platí axiom absolutní sčitatelnosti pravděpodobností.*
4. *Platí axiom násobení pravděpodobností.* ([P28], str. 58)

[29] Pankraz značil podobně jako například Kolmogorov průnik a sjednocení množin jako součin a součet (viz str. 51). Použijeme-li k tomu pozdější označení podmíněné pravděpodobnosti, můžeme axiom IV přepsat ve tvaru: $P(B + C|A) = P(B|A) + P(C|A)$.

[30] Tj. $P(BC|A) = P(B|A) \cdot P(C|AB)$ za předpokladu, že $P(B|A) > 0$.

[31] Teprve v článku [P32] Pankraz z axiomu III vylučuje případ $A = \emptyset$, který vede ke sporu.

[32] Pankraz rovněž poznamenává, že axiom IV' lze v duchu Kolmogorovovy definice nahradit axiomem IV spolu s tzv. *axiomem spojitosti* (viz část 1.2.4, str. 52, axiom VI): Pro každou klesající posloupnost $R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_n \supset \cdots$ množin z $\mathfrak{K}$, kde $\Pi_n R_n = \emptyset$, je $\lim P(A, R_n) = 0$. Z axiomu IV totiž plyne: $P(A, \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n-1} P(A, B_\nu) + P(A, R_n)$, kde $R_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} B_\nu$. Posloupnost množin R_n zřejmě splňuje výše uvedené podmínky. Platí-li tedy axiom spojitosti, pak je také $\lim P(A, R_n) = 0$ a platí i axiom IV'.

Po této definici se Pankraz ještě vrací k definičnímu oboru pravděpodobnosti $P(A, B)$. Požadavek, že systém množin, do něhož argumenty A, B náležejí, je *množinovým tělesem*, tj. obsahuje prázdnou množinu a je uzavřený vzhledem k průniku, sjednocení a rozdílu libovolných dvou množin, plyne z isomorfismu mezi tímto systémem a množinou výrokových forem, týkajících se daného *myšlenkového oboru*, protože klasický predikátový kalkul vychází z předpokladu, že výsledkem negace, konjunkce a disjunkce libovolných výrokových forem je opět výroková forma týkající se daného oboru. Bude-li však uvažovaným myšlenkovým oborem kvantová fyzika, pak je požadavek bezvýhradné spojovatelnosti výrokových forem omezen Heisenbergovou relací neurčitosti. Pro kvantovou teorii proto Pankraz podává obecnější definici pravděpodobnosti, v níž se i nadále požaduje, aby systém množin, výše značený symbolem $\mathfrak{K}$, obsahoval největší množinu, upouští se však od požadavku uzavřenosti vůči průniku:

Definice (Pankraz 2K).

1. *Definičním oborem jest každá množina isomorfní k množině projektivních operátorů.*[33]
2. *Axiomy 1.,…, 4.* [z definice 2] *zůstávají v platnosti.*
3. *Třeba přibrat další axiom t. zv. existenční: Je-li podle axiomů vypočtena hodnota $P(X, Y)$, pak má význam, t. j. existuje, jen tehdy, když X a Y mají význam.* ([P28], str. 67)

Interpretace pravděpodobnosti

V závěru článku [P28] se Pankraz vrací k interpretacím pravděpodobnosti:

Axiomatický systém počtu pravděpodobnosti jest formální povahy, a proto poskytuje různé interpretace, z nichž význam mají tyto:

1. *interpretace povahy empirické, která může býti dvojí:*
   - 1a. *pomocí relativních četností: hodí se nejlépe pro účely sociání, hospodářské, populační a pod. statistiky (viz na př. pojednání Misesova a Kamkeho),*
   - 1b. *pravděpodobnost vypočtená na podkladě rovnic různých teorií: používá se ve vlnové mechanice (na př. Schrödingerova rovnice);*
2. *interpretace pomocí ideálních předmětů:*
   - 2α. *matematických, má význam pro ryze matematický výzkum a podle definičního oboru lze v ní použíti*
     - 2αa. *teorie množinové míry a aditivních množinových funkcí (na př. studie P. Lévy-ho a H. Cramérovy),*
     - 2αb. *teorie projektiv. operátorů (na př. studie J. v. Neumanna a M. Strausse),*
   - 2β. *logických: za definiční elementy se považují výroky (na př. práce Wittgensteinovy a Waismannovy).* ([P28], str. 68)

[33] K tomu dodává: *Byl-li definiční obor tělesem, pak axiom existenční byl zbytečný, neboť s X a Y také XY patřilo do tělesa. Nyní však tomu tak není a bez existenčního axiomu mohly by axiomy dávati rovnice, ve kterých by existovala jen některá jejich část.*

O pojmu pravděpodobnosti

Axiomatickou definicí pravděpodobnosti se Pankraz zabýval také v článku *O pojmu pravděpodobnosti* [P30], otištěném v roce 1940 v ČPMF. Podle úvodních slov jej Pankraz vydal na žádost posluchačů přednášek o počtu pravděpodobnosti, které konal na pražské univerzitě v akademickém roce 1938/39.

I zde zavádí pravděpodobnost jako funkci dvou argumentů, za které považuje množiny z určitého *množinového tělesa* $\mathfrak{K}$, popř. obecněji *abstraktní elementy* z libovolné *isomorfní abstraktní množiny*, která je *tělesem vůči operacím v ní definovaným* (v tehdejší terminologii). Pro tzv. *obyčejné rozdělení pravděpodobnosti P v $\mathfrak{K}$* uvádí axiomy I až IV z definice 1, kterou jsme citovali na str. 224; poslední axiom vynechává. Pro tzv. *kvantové rozdělení pravděpodobnosti* pak opět upouští od požadavku uzavřenosti dané množiny vůči daným operacím a k axiomům II až IV přidává existenční axiom uvedený v definici 2K.

Pankraz podotýká, že podaný systém axiomů není úplný, a proto mu vyhovuje více různých pojmů, speciálně *absolutní (nepodmíněná) pravděpodobnost jevu A* jako číslo $P(A) = P(E, A)$, kde A je prvek množinového tělesa $\mathfrak{K}$ s největším prvkem E, a dále *pravděpodobnost podmíněná*, definovaná vztahem

$$P_A(B) = P(A, B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(E, AB)}{P(E, A)}\,. \tag{8.2}$$

Ve stejném ročníku ČPMF vyšel ještě dodatek *Poznámka k mému článku „O pojmu pravděpodobnosti“* [P32], v němž Pankraz odstraňuje nedopatření, která do jeho axiomů *vnikla vlivem Reichenbachových problematických výkladů v jeho knize Wahrscheinlichkeitslehre* [299]. Hlavním problémem je skutečnost, že axiom III nevylučuje $A = \emptyset$, což spolu s axiomem IV vede ke sporu.[34] Pankraz proto omezuje definiční obor pravděpodobnosti $P(A, B)$ na množinu $\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{M}$, kde $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} \times \mathfrak{K}$, $\mathfrak{M} = \{(\emptyset, B), B \in \mathfrak{K}\}$. Druhou *nepříjemností* je skutečnost, že z vlastností nezáporných aditivních funkcí pro $\emptyset \neq A \subseteq B$ plyne: $P(A, B) \geq P(A, A) = 1$. Nerovnost je neostrá, Pankraz však axiom III upravuje tak, aby v uvedeném případě platilo definitoricky $P(A, B) = 1$. Systém axiomů tak získává následující tvar.[35]

Definice (Pankraz 3). $(\mathfrak{K}, P)$ se nazývá *obyčejné rozložení pravděpodobnosti P v $\mathfrak{K}$*, jsou-li splněny tyto podmínky:

I. *$\mathfrak{K}$ jest těleso množin A, B, $C, \ldots$ s největší množinou E.*[36]

II. *Ke každé dvojici (A, B) elementů $A \in \mathfrak{K}$, $B \in \mathfrak{K}$ s výjimkou dvojic $(\emptyset, B)$ jest jednoznačně přiřazeno reálné číslo $P(A, B) \geq 0$.*

III. *Pro každou dvojici (A, B) nenulových elementů $A \in \mathfrak{K}$, $B \in \mathfrak{K}$ s podmínkou $B \supseteq A$ platí $P(A, B) = 1$.*

---

[34] Podle axiomu IV platí: $P(A, \emptyset) = P(A, \emptyset) + P(A, \emptyset)$; pro $P(\emptyset, \emptyset) = 1$ by vycházelo $1 = 1 + 1$.

[35] Ponecháváme stejné označení jako v článku [P28]; Pankraz psal Ω, X, Y, Z místo $\mathfrak{K}, A, B, C$.

[36] *V počtu pravděp. jeví se výhodnější podati relativní definici pojmu „tělesa“ vzhledem k určité množině operací: Nechť F jest množina operací definovaných na množině $\mathfrak{K}$ abstraktních elementů. $\mathfrak{K}$ sluje F-těleso, je-li uzavřená vůči každé operaci z F.* [Poznámka O. Pankraze.]

IV. Pro libovolný nenulový element $A \in \mathfrak{K}$ a pro dva libovolné elementy $B \in \mathfrak{K}$, $C \in \mathfrak{K}$ platí $P(A, B + C) = P(A, B) + P(A, C)$. ([P31], str. D162)

Potom se Pankraz věnuje logické interpretaci, v níž je libovolná množina $X \in \mathfrak{K}$ nahrazena výrokovou formou $X(\xi)$: *ξ má vlastnost X, to jest ξ patří do množiny X* (viz str. 58–59). V souvislosti s interpretací četnostní poznamenává, že pokud bychom chtěli *funkci $P(A, B)$ na $\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{M}$ specialisovati tak, aby byla vždy schopna statistické (t. j. frekvenční) interpretace*, museli bychom jako V. axiom přidat podmínku, že pro každou dvojici $(A, B) \in \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{M}$ platí (8.2). Pankraz poznamenává, že otázka platnosti tohoto axiomu pro kvantovou fyziku zatím zůstává nerozhodnuta, a proto svůj axiomatický systém ponechal v tomto směru otevřený. Potom dodává, že bez přidaného axiomu *jest možno vybudovat počet pravděpodobnosti analogický obvyklému počtu tím, že bychom podmíněné pravděpodobnosti (a tím t. zv. větu o násobení pravděpodobností) zrelativisovali vzhledem k elementu A definicí*

$$P_B(A, C) = \frac{P(A, BC)}{P(A, B)}, \qquad P(A, B) > 0. \tag{8.3}$$

Význam tohoto počtu pravděpodobnosti dal by se charakterisovati takto: Dosavadní počet pravděpodobnosti určuje čísla $P(A, B)$ vzhledem k největší množině E jakožto k universálnímu oboru diskuse. Zrelativisovaný počet pravděpodobnosti určoval by $P(A, B)$ vzhledem k diskusním oborům A, které jsou podobory universálního oboru E, čímž by se pravděpodobnostní výroky objevily v novém a hlubším světle.[37]

Podobné myšlenky v druhé polovině 20. a na počátku 21. století

Viděli jsme, že Pankraz své důležité práce publikoval i německy, anglicky či francouzsky. Lze se proto domnívat, že kdyby nebylo druhé světové války a poválečných událostí, které znamenaly v jeho životě zásadní zvrat, představil by v cizím jazyce i popsanou axiomatickou definici pravděpodobnosti. Bohužel k tomu však již nedošlo. Česky psané práce [P28], [P31] a [P32] zůstaly dlouho téměř zapomenuty a v zahraničí zcela nepovšimnuty. Nezávisle na Pankrazovi pak v padesátých letech 20. století podobnou axiomatiku, vycházející z dvouargumentové funkce, představil Alfréd Rényi (1929–1970).[38] V jeho článku *On a New Axiomatic Theory of Probability* [300] z roku 1955 nalezneme následující definici.

Definice (Rényi). *Nechť je dána množina S, jejíž prvky budeme značit malými písmeny a, b, ... a budeme je nazývat elemenárními jevy. $\mathscr{A}$ nechť značí*

[37] Viz [P32], str. D164. Ve vztahu $P_B(C) = P(BC)/P(B)$, plynoucím z (8.2), Pankraz tedy všechny pravděpodobnosti podmiňuje jevem A. Povšimněme si, že přepíšeme-li vzorec (8.3) ve tvaru $P(BC|A) = P(B|A)P(C|AB)$, obdržíme axiom V z definice 1 (viz pozn. 30).

[38] Alfréd Rényi studoval v letech 1940 až 1944 matematiku a fyziku na univerzitě v Budapešti. Potom by nasazen na nucené práce, odkud uprchl a díky falešným dokladům unikl dopadení. Krátce před koncem druhé světové války získal doktorát na univerzitě v Szegedu. Od října 1946 strávil půl roku v Rusku, kde se blíže seznámil s výsledky J. V. Linnika a I. M. Vinogradova z oblasti teorie čísel a pravděpodobnosti. Ještě v roce 1947 se habilitoval na univerzitě v Budapešti, o dva roky později byl jmenován mimořádným profesorem na univerzitě v Debrecínu. V roce 1950 byl jmenován ředitelem nově založeného Ústavu aplikované matematiky, který se později stal součástí maďarské akademie věd. Od roku 1952 až do své smrti navíc působil jako profesor pravděpodobnosti a statistiky na univerzitě v Budapešti.

σ-algebru podmnožin množiny S [srov. str. 52]; *její prvky budeme značit A, B, $C, \ldots$ a budeme je nazývat náhodnými jevy nebo jednoduše jevy. [Předpoklad, že $\mathscr{A}$ je σ-algebra, znamená, že 1. je-li $A_n \in \mathscr{A}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, potom je také $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$; 2. je-li $A \in \mathscr{A}$, potom je také $S - A \in \mathscr{A}$; 3. množina $\mathscr{A}$ je neprázdná. Odtud plyne, že $\emptyset \in \mathscr{A}$ a $S \in \mathscr{A}$.] Dále předpokládejme, že je dána neprázdná podmnožina $\mathscr{B}$ množiny $\mathscr{A}$; ohledně množiny $\mathscr{B}$ nepředpokládáme žádné omezení.*[39] *Konečně předpokládejme, že pro $A \in \mathscr{A}$ a $B \in \mathscr{B}$ je definována množinová funkce $P(A|B)$ dvou proměnných; $P(A|B)$ se bude nazývat podmíněná pravděpodobnost jevu A vzhledem k jevu B. [...] množinu $\mathscr{B}$ můžeme nazvat množinou možných podmínek. Předpokládáme, že funkce $P(A|B)$ splňuje následující axiomy:*

Axiom I. $P(A|B) \geq 0$, *je-li* $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$; *dále* $P(B|B) = 1$, *je-li* $B \in \mathscr{B}$.

Axiom II. *Pro libovolné pevné $B \in \mathscr{B}$ je $P(A|B)$ míra na $\mathscr{A}$, tj. spočetně aditivní množinová funkce proměnné $A \in \mathscr{A}$, neboli pro $A_n \in \mathscr{A}$, $A_j A_k = \emptyset$ $(j \neq k,\ j, k = 1, 2, \ldots)$ platí:*

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n | B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B).$$

Axiom III. *Je-li $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{A}$, $C \in \mathscr{B}$ a $BC \in \mathscr{B}$, pak platí:*

$$P(A|BC) \cdot P(B|C) = P(AB|C)\,.$$

Jsou-li axiomy I–III, splněny, pak množinu S spolu se σ-algebrou $\mathscr{A}$ podmnožin množiny S, podmnožinou $\mathscr{B}$ množiny $\mathscr{A}$ a množinovou funkcí $P(A|B)$, definovanou pro $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$, nazveme podmíněným pravděpodobnostním prostorem; tento prostor budeme pro jednoduchost značit $[S, \mathscr{A}, \mathscr{B}, P(A|B)]$.
([300], str. 288–289)

Povšimněme si, že položíme-li v Rényiově definici $A = \mathfrak{K}$, $B = \mathfrak{K} \setminus \emptyset$, obdržíme Pankrazovu definici 2, citovanou na str. 225, v níž je definiční obor pravděpodobnosti omezen podle poznámky [P32] na množinu $\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{M}$.

Podobnou definici nalezneme také v článcích *Axiomatischer Aufbau der Wahrscheinlichketisrechnung* [301] a *On conditional probability spaces generated by a dimensionally ordered set of measures* [302] a v knize *Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einem Angang über Informationstheorie* [303], která byla v roce 1972 přeložena do češtiny (viz [304]) a je dobře známa i dnešním studentům.

Nezávisle na Rényiovi i Pankrazovi představil axiomatickou definici pravděpodobnosti jako dvouargumentové funkce také Karl Popper (1902–1994).[40]

[39] K tomu však Rényi poznamenává, že jeho axiomy implikují $\emptyset \notin \mathscr{B}$ (srov. naši pozn. 34); dodává, že množina $\mathscr{B}$ může obsahovat například všechny prvky množiny $\mathscr{A}$ s výjimkou $\emptyset$, anebo také jen jedinou množinu. Rovněž podotýká, že teorie poněkud ztratí na obecnosti, zato se však výrazně zjednoduší, přidá-li se předpoklad, že pro libovolná $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ je také $B_1 + B_2 \in \mathscr{B}$.

[40] Karl Popper studoval na univerzitě ve Vídni, kde v roce 1928 získal doktorát filosofie. V následujícím roce se kvalifikoval pro vyučování matematiky, fyziky a chemie na středních školách (kvalifikaci pro základní školu získal již v roce 1925). Až do roku 1937 vyučoval na střední škole, potom emigroval na Nový Zéland, kde začal přednášet filosofii na univerzitě

O této myšlence se zmínil již v článku *A set of Independent Axioms for Probability* [290] z roku 1938, explicitně však axiomy uvedl až v pojednání *Two Autonomous Axiom Systems for the Calculus of Probabilities* [291] z roku 1955. V Dodatku IV, zařazeném v roce 1959 do knihy *The Logic of Scientific Discovery* [292], nalezneme vedle jiných variant definici, kterou lze stručně popsat takto:

DEFINICE (POPPER). Nechť je dána množina $S = \{A, B, C, \dots\}$, která obsahuje nejvýše spočetně mnoho prvků. Na množině S nechť je dána binární operace AB, tzv. *součin prvků A, B*, a unární operace $\overline{A}$, tzv. *doplněk prvku A*. Předpokládejme, že množina S je uzavřená vzhledem k oběma operacím. Reálnou funkci $P(A, B)$ definovanou na $S \times S$ nazveme *pravděpodobností A vzhledem k B*, jsou-li pro všechna A, $B \in S$ splněny následující podmínky:[41]

A1. $\exists B, C \in S : P(A|B) \neq P(C|D)$

A2. $(\forall C \in S : P(A|C) = P(B|C)) \;\Rightarrow\; (\forall D \in S : P(D|A) = P(D|B))$

A3. $P(A|A) = P(B|B)$

B1. $\forall C \in S : P(AB|C) \leq P(A|C)$

B2. $\forall C \in S : P(AB|C) = P(B|C)P(A|BC)$

C. $P(A|B) + P(\overline{A}|B) = P(B|B)$, není-li $\forall C \in S : P(B|B) = P(C|B)$.

K zastáncům axiomatiky založené na podmíněné pravděpodobnosti jako primitivním pojmu patří také například Alan Hájek, Hugues Leblanc, Peter Roeper a Wolfgang Spohn, jejichž práce [132], [306] a [350] vyšly na konci 20. a na počátku 21. století. Trvalý zájem o tuto myšlenku je přirozený. Představitelé logické i subjektivní interpretace pravděpodobnosti a nakonec i „nematematikové“ se selským rozumem se shodují v tom, že každá pravděpodobnost je ve skutečnosti podmíněná (viz např. str. 66 a 225) – závisí na okolnostech, za nichž daný jev probíhá, a její výpočet či odhad je ovlivněn mírou informovanosti o těchto okolnostech, popř. také psychickými vlastnostmi toho, kdo jej provádí. Vrátíme-li se k příkladům z úvodní kapitoly, tak například pravděpodobnost vítězství v závodě závisí na připravenosti sportovce, kvalitách soupeřů, ale také na řadě dalších okolností, které často nelze předem odhadnout (zdravotní či psychická indispozice apod.). V 6. kapitole jsme navíc viděli, že podmíněná pravděpodobnost je zcela nezbytná v teorii geometrické pravděpodobnosti, jejíž aplikace jsou pro náš život neobyčejně důležité.

---

v Canterbury. Po druhé světové válce se přestěhoval do Velké Británie a působil nejprve jako docent (od roku 1946), později jako profesor (1949–1969) logiky a vědeckých metod na londýnské univerzitě. V roce 1965 jej královna Alžběta II. pasovala na rytíře.

[41] Značení je pro přehlednost upraveno. Popper používal pro pravděpodobnost i prvky množiny S malá písmena a *pravděpodobnost a vzhledem k b* značil symbolem $p(a, b)$. Podle svých slov usiloval o co nejobecnější definici, která by předem nevylučovala žádnou interpretaci. Za omezující přitom považoval i předpoklad, že množina, na níž je pravděpodobnost definována, je systémem množin, protože pak se automaticky pracuje s obvyklým průnikem a sjednocením, které mají řadu specifických vlastností (asociativita, komutativita apod.). Na druhé straně však předpokládal, že množina S je nejvýše spočetná. Dodejme, že Popper ke své definici poznamenal, že lze uvažovat také ekvivalentní systém axiomů, v němž jsou ponechány axiomy A_1, A_2 a B_2, axiomy A_3 a B_1 jsou nahrazeny axiomy $A_3' : P(A, A) = 1$, $A_4' : P(A|B) \geq 0$ a B_1' : je-li $P(AB|C) > P(A|C)$, pak $P(AB|C) > P(B|C)$, a axiom C je nahrazen axiomem C' : je-li $P(A|B) \neq 1$, pak $P(C|B) + P(\overline{C}|B) = 1$.