INTRODUZIONE

§ 1. - Coordinate, versi, orientazioni.

A) Coordinate di punto, piano, retta.

Siano x, y, z, t coordinate omogenee di punto, ξ, η, ζ, τ coordinate omogenee di piano. Indicheremo un punto o un piano con la sola sua prima coordinata x o ξ. Dati n punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oppure più semplicemente con $(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ indicheremo sia *la matrice*

$$(1) \qquad \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 \ldots\ldots & x_n \\ y_1 & y_2 \ldots\ldots & y_n \\ z_1 & z_2 \ldots\ldots & z_n \\ t_1 & t_2 \ldots\ldots & t_n \end{matrix} \right\|$$

che *i massimi suoi minori*. Notazioni analoghe varranno per n piani ξ_i. Per $n=4$ tale matrice si riduce a un determinante. Per $n=3$ con (x_1, x_2, x_3) indichiamo quindi non solo la matrice delle x_i, y_i, z_i, t_i, $(i=1, 2, 3)$ ma anche i suoi minori del terzo ordine; e per evitare equivoci di segno, determiniamo senz'altro di considerare i complementi algebrici di x_4, y_4, z_4, t_4 in (x_1, x_2, x_3, x_4). Per $n=2$, con (x_1, x_2) indichiamo non solo la matrice delle x_i, y_i, z_i, t_i, $(i=1, 2)$, ma anche i suoi minori del secondo ordine; e per evitare equivoci, porremo:

$$(2) \quad \begin{cases} p_{ii}=0\,, \quad p_{ij}=-p_{ji} \\ p_{12}=(x_1 y_2 - x_2 y_1)=-p_{21}\,;\ p_{13}=(x_1 z_2 - x_2 z_1)=-p_{31}\,; \\ \text{ecc.}\,;\ p_{34}=(z_1 t_2 - z_2 t_1)=-p_{43}\,. \end{cases}$$

Le p_{rs} sono le coordinate di Plücker della retta congiungente i punti x_1 ed x_2.

Dualmente, se ξ_1, ξ_2 sono due piani, porremo:

$$\pi_{ii}=0,\ \pi_{12}=-\pi_{21}=(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1);\ \pi_{13}=-\pi_{31}=$$
$$=(\xi_1\eta_3-\xi_3\eta_1);\dots;\ \pi_{34}=-\pi_{43}=(\zeta_1\tau_4-\zeta_4\tau_1).$$

Le π_{rs} sono le coordinate di Plücker della retta intersezione dei piani ξ_1, ξ_2. Ora, se i piani ξ_1, ξ_2 contengono i punti x_1, x_2, le due rette precedenti coincidono; ed è ben noto che le coordinate dei precedenti punti e piani (determinate al solito a meno di un fattore, perchè si tratta di coordinate omogenee) si possono scegliere in guisa che sia proprio:

$$(3)\qquad \begin{cases} p_{12}=\pi_{34},\ p_{34}=\pi_{12},\ p_{13}=\pi_{42}=-\pi_{24},\\ \pi_{13}=p_{42},\ p_{14}=\pi_{23},\ p_{23}=\pi_{14}. \end{cases}$$

Queste uguaglianze saranno indicate simbolicamente con

$$(4)\qquad (x_1,\ x_2)=(\xi_1,\ \xi_2).$$

Se invece i punti x_1, x_2, x_1', x_2' giacciono su una stessa retta, la

$$(5)\qquad (x_1,\ x_2)=(x_1',\ x_2')$$

indica che:

$$x_1y_2-x_2y_1=x_1'y_2'-x_2'y_1'\ \text{ecc.},\ z_1t_2-z_2t_1=z_1't_2'-z_2't_1',$$

ossia, definendo le p' in modo analogo alle p, che: $p_{rs}=p_{rs}'$. Si noti il *differente* significato che, per definizione, hanno le (4), (5), dovuto al fatto che in (5) figurano in entrambi i membri coordinate x, x' di punto e in (4) coordinate x di punto in un membro, coordinate ξ di piano nell' altro. Così le:

$$(5)_{\text{bis}}\qquad (\xi_1,\ \xi_2)=(\xi_1',\ \xi_2')$$

hanno un significato analogo a (5), indicano cioè che $\pi_{rs}'=\pi_{rs}$.

Talvolta le sei coordinate di una retta, anzichè essere contraddistinte da indici, sono indicate con lettere differenti; e si pone:

$$p_{12}=l,\ p_{13}=m,\ p_{14}=n,\ p_{34}=p,\ p_{42}=q,\ p_{23}=r\,.$$

Anche una retta sarà indicata, enunciandone una sola coordinata; e noi diremo sovente la retta p anzichè dire la retta di coordinate p_{rs} oppure p, q, r, l, m, n.

B) I simboli S, Σ.

Con una espressione del tipo $S\,x^2$ (oppure $S\,\xi^2$, oppure $S\,\xi\,x$) indichiamo una somma, i cui addendi si ottengono dal primo, rotando le coordinate di punto o di piano. Così p. es.

$$(6)\qquad S\,x^2=x^2+y^2+z^2+t^2\,,\quad S\,\xi^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\tau^2,$$
$$S\,\xi\,x=\xi\,x+\eta\,y+\zeta\,z+\tau\,t,\ \text{ecc.}$$

Invece con espressioni del tipo $\Sigma\,x_i^2$, $\Sigma\,\xi_i\,x_i$, ecc. indichiamo somme i cui addendi si ottengono dal primo, facendo variare l'indice i. Così p. es. se abbiamo 3 punti x_i o 3 piani ξ_i $(i=1, 2, 3)$, poniamo:

$$(7)\qquad \Sigma\,x_i^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2,\ \Sigma\,\xi_i^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\,,$$
$$\Sigma\,\xi_i\,x_i=\xi_1\,x_1+\xi_2\,x_2+\xi_3\,x_3\,,\ \text{ecc.}$$

Talvolta incontreremo anche espressioni del tipo

$$S\,\Sigma\,x_i^2=\Sigma\,S\,x_i^2$$

e analoghe; il loro significato è chiaro senz'altro, così p. es. noi porremo:

$$(8)\qquad S\,\Sigma\,x_i^2=\sum_{i=1}^{3}(x_i^2+y_i^2+z_i^2+t_i^2),\ \text{ecc.}$$

se si tratta di 3 punti x_i.

Significato analogo ha la scrittura Spp', quando p e p' siano le coordinate di due rette. Se la prima congiunge i punti x_1, x_2, la seconda i punti x_3, x_4, così che

$$p=(x_1,\ x_2),\ p'=(x_3,\ x_4),$$

si porrà:

$$(9)\qquad Spp'=p_{12}p'_{34}+p_{34}p'_{12}+p_{13}p'_{42}+p_{42}p'_{13}+p_{14}p'_{23}+p_{23}p'_{14}=$$

$$=(pl'+p'l+q'm+qm'+rn'+r'n).$$

$$(10)\qquad =(x_1\ x_2\ x_3\ x_4).$$

In particolare

$$Sp^2=2\,(p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23})=2\cdot(pl+qm+rn).$$

Cosicchè, com'è ben noto: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè* p, q, r, l m, n, *siano coordinate di una retta è che* $Sp^2=0$; *affinchè* p *e* p' *siano due rette incidenti è che* $Spp'=0$.

Se p è la retta individuata dai punti x_1, x_2 e p' la retta intersezione dei piani ξ_1 e ξ_2 così che

$$p=(x_1\ x_2),\quad p'=(\xi_1\ \xi_2)\ (*),$$

allora:

$$(11)\qquad Spp'=S\,(x_1,\ x_2)\,(\xi_1,\ \xi_2)=\begin{vmatrix} S\,\xi_1\,x_1 & S\,\xi_1\,x_2 \\ S\,\xi_2\,x_1 & S\,\xi_2\,x_2 \end{vmatrix}.$$

(*) Questa seconda uguaglianza indica che:

$$p'_{12}=\pi'_{34}=(\zeta_1\,\tau_2-\tau_1\,\zeta_2),\ \ldots\ldots,\ p'_{34}=\pi'_{12}=(\xi_1\,\eta_2-\xi_2\,\eta_1).$$

C) Orientazioni di una retta.

Diremo punto *analitico* una quaterna di valori reali non tutti nulli delle x, y, z, t determinati a meno di un fattore *positivo*. Le quaterne x, y, z, t e $-x, -y, -z, -t$, pure individuando uno stesso punto geometrico, si considereranno pertanto come definenti due punti *analitici* distinti; in modo simile definiremo i piani *analitici*.

Due punti *analitici* x_1 ed x_2 determinano un *verso* sulla retta che li congiunge; il verso in cui si muove il punto

$$\lambda\, x_1 + \mu\, x_2 \text{ per } \mu : \lambda$$

crescente; così due piani *analitici* ξ_1 e ξ_2 determinano nel loro fascio il verso in cui ruota il piano $\lambda\,\xi_1 + \mu\,\xi_2$ per $\mu : \lambda$ crescente.

Siano dati 4 punti analitici

$$x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ x_4 \text{ tali che } (x_1\, x_2\, x_3\, x_4) > 0\,.$$

Considereremo *associati* il verso per $\mu : \lambda$ crescente in cui si muove il punto $\lambda\, x_1 + \mu\, x_2$, e quello in cui ruota il piano che dai punti x_1, x_2 proietta la punteggiata $\lambda\, x_3 + \mu\, x_4$. Al variare dei punti x_3, x_4 in guisa che sia sempre $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) > 0$, cosicchè in particolare i punti x_i non diventano mai complanari, io dico *che non cambia l'associazione* dei versi sulla punteggiata x_1, x_2 e sul fascio dei piani passanti per essa. Ciò si può dimostrare direttamente, o con considerazioni di continuità, oppure anche trasformando la precedente definizione in modo da renderla indipendente da x_3, x_4. Siano ξ_1, ξ_2 due piani passanti per x_1, x_2, e sia $(\xi_1\, \xi_2) = (x_1\, x_2)$. Sarà:

$$S\,(\xi_1\, \xi_2)\,(x_3\, x_4) = S\,(x_1\, x_2)\,(x_3\, x_4)$$

cioè:

$$\begin{vmatrix} S\,\xi_1\, x_3 & S\,\xi_1\, x_4 \\ S\,\xi_2\, x_3 & S\,\xi_2\, x_4 \end{vmatrix} = (x_1\, x_2\, x_3\, x_4) > 0\,.$$

Il piano $\rho\,\xi_1 + \sigma\,\xi_2$ passa per $\lambda\,x_3 + \mu\,x_4$ se:

$$0 = S(\rho\,\xi_1 + \sigma\,\xi_2)\,(\lambda\,x_3 + \mu\,x_4) = \rho\,\lambda\,S\xi_1\,x_3 + \\ + \rho\,\mu\,S\xi_1\,x_4 + \lambda\,\sigma\,S\,\xi_2\,x_3 + \mu\,\sigma\,S\,\xi_2\,x_4$$

ossia:

$$\frac{\sigma}{\rho} = -\frac{\frac{\mu}{\lambda}\,S\,\xi_1\,x_4 + S\,\xi_1\,x_3}{\frac{\mu}{\lambda}\,S\,\xi_2\,x_4 + S\,\xi_2\,x_3}$$

In virtù della precedente disuguaglianza $\frac{\sigma}{\rho}$ cresce con $\frac{\mu}{\lambda}$; ciò che avviene anche se le $(\xi_1\ \xi_2)$ differiscono per un fattore *positivo* dalle $(x_1\ x_2)$. Quindi:

Se i piani ξ_1, ξ_2 *passano per i punti* x_1 *ed* x_2, *se* $(\xi_1\ \xi_2)$ *differiscono per un fattore positivo dalle* $(\mathrm{x}_1\ \mathrm{x}_2)$, *allora sono associati i versi per* $\mu:\lambda$ *crescente nella punteggiata* $\lambda\,\mathrm{x}_1 + \mu\,\mathrm{x}_2$ *e nel fascio* $\lambda\,\xi_1 + \mu\,\xi_2$, *e sono pure tra loro associati i versi per* $\mu:\lambda$ *decrescente.*

Si noti che *questa associazione, se è dato il tetraedro fondamentale, dipende esclusivamente dalla retta* (e non dal modo come su essa sono stati scelti i punti x od i piani ξ). Ciò è evidente se ai punti x_1, x_2 sostituiamo altri due punti $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ in guisa che $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ differiscano per un fattore *positivo* da (x_1, x_2). Ma anche se cambiamo i segni, il modo d'associazione non varia. Infatti p. es. cambiando x_1 in $-x_1$, oppure x_2 in $-x_2$, oppure x_1 con x_2, si dovrà fare una operazione analoga sulle ξ, affinchè $(\xi_1\ \xi_2)$ e $(x_1\ x_2)$ differiscano per un fattore positivo. E la precedente associazione di versi resta inalterata.

Tale associazione di versi si dirà l'*orientazione proiettiva* della retta; essa dipende soltanto, data la retta, dal sistema di coordinate, cioè dal tetraedro di riferimento.

Dalla definizione segue immediatamente che, se sono dati 4 punti x_1, x_2, x_3, x_4 tali che $(x_1\,x_2\,x_3\,x_4) > 0$, ossia, *se sono date due rette* p e p' [essendo p $(x_1\ x_2)$, $p' = (x_3 x_4)$] *tali che* $Spp' > 0$, allora il verso per $\mu:\lambda$ crescente sulla punteggiata $\lambda\,x_1 + \mu\,x_2$ è quello associato al verso in cui ruota il piano che dalla stessa retta p proietta $\lambda\,x_3 + \mu\,x_4$, quando $\mu:\lambda$ cresce.

D) Orientazione di un fascio.

Sia dato un *elemento analitico* (x, ξ) cioè un punto analitico x e un piano analitico ξ che si appartengono, così che si abbia $S\,x\,\xi = 0$. Scegliamo in ξ altri due punti analitici x_2, x_3 in guisa tale che ξ e (x, x_2, x_3) differiscano per un fattore positivo; e per x facciamo passare due piani ξ_2, ξ_3 in guisa che altrettanto avvenga per x e (ξ, ξ_2, ξ_3). Allora x ed $[(x, x_2, x_3), \xi_2, \xi_3]$ differiranno per un fattore positivo. Il primo minore di questa matrice, cioè il complemento algebrico di χ nel determinante

$$[(x,\ x_2,\ x_3),\ \xi_2,\ \xi_3,\ \chi]$$

è il prodotto della matrice (x, x_2, x_3) per la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & \tau_3 \end{vmatrix}$$

cambiato di segno, cioè, poichè $S\,\xi_2\,x = S\,\xi_3\,x = 0$, vale

$$-\,x\,S\,(x_2\,x_3)\,(\xi_2\,\xi_3) = -\,x\,(S\,x_2\,\xi_2\,S\,x_3\,\xi_3 - S\,x_2\,\xi_3\,S\,x_3\,\xi_2).$$

Poichè deve differire da x per un fattore positivo, l' *espressione*

$$S\,(x_2\,x_3)\,(\xi_2\,\xi_3) = S\,x_2\,\xi_2\,S\,x_3\,\xi_3 - S\,x_2\,\xi_3\,S\,x_3\,\xi_2$$

sarà negativa. E quindi, poichè il piano $\rho\,\xi_2 + \sigma\,\xi_3$ è incidente al punto $\lambda\,x_2 + \mu\,x_3$ quando

$$0 = S(\rho\,\xi_2 + \sigma\,\xi_3)(\lambda\,x_2 + \mu\,x_3) =$$

$$= \rho\,\lambda\left\{S\,\xi_2\,x_2 + \frac{\mu}{\lambda}\,S\,\xi_2\,x_3 + \frac{\sigma}{\rho}\,S\,\xi_3\,x_2 + \frac{\mu}{\lambda}\,\frac{\sigma}{\rho}\,S\,\xi_3\,x_3\right),$$

ne segue che $\dfrac{\sigma}{\rho}$ è *decrescente* per $\dfrac{\mu}{\lambda}$ *crescente* e viceversa.

Il verso di $\mu : \lambda$ *crescente sulla punteggiata* $\lambda x_2 + \mu x_3$ *che coincide col verso per* $\sigma : \rho$ *decrescente nel fascio* $\rho \xi_2 + \sigma \xi_3$ *(segato con* ξ*) si diranno il verso positivo nel fascio di vertice* x *e piano* ξ.

Mentre, dato il tetraedro di riferimento, *una retta individua la sua orientazione proiettiva, non basta dare un fascio per individuarne il suo verso positivo.* Questo infatti si *conserva cambiando contemporaneamente di segno* x *e* ξ, *ma si inverte cambiando di segno le sole* x *o le sole* ξ. Questo verso invertito si può anche considerare come il verso del fascio (ξ, x) indicato enunciando prima le coordinate del piano analitico ξ poi quelle del punto analitico x.

E) Alcune identità di matrici.

$$(12)\quad \begin{cases} [(x_1 x_2 x_3), (x_1 x_2 x_4)] = (x_1 x_2)(x_1 x_2 x_3 x_4) \\ [(x_1 x_2 x_3), (x_1 x_2 x_4), (x_1 x_3 x_4)] = x_1 (x_1 x_2 x_3 x_4)^2 \\ [(x_1 x_2 x_3), (x_1 x_2 x_4), (x_1 x_3 x_4), (x_2, x_3, x_4)] = (x_1 x_2 x_3 x_4)^3. \end{cases}$$

§ 2 - Collineazioni.

A) Preliminari.

Una collineazione è definita da formole del tipo:

$$(1)\quad \begin{cases} \bar{x} = a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + a_{14} t \\ \bar{y} = a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z + a_{24} t \\ \bar{z} = a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z + a_{34} t \\ \bar{t} = a_{41} x + a_{42} y + a_{43} z + a_{44} t \end{cases}$$

a cui corrisponde sui piani la:

$$(1)_{\text{bis}}\quad \xi = a_{11} \bar{\xi} + a_{21} \bar{\eta} + a_{31} \bar{\zeta} + a_{41} \bar{\tau}$$

e analoghe o anche, se A_{rs} è il complemento algebrico di a_{rs} nel determinante $A = |a_{rs}|$, diviso per lo stesso A:

$$\overline{\xi} = A_{11}\xi + A_{12}\eta + A_{13}\zeta + A_{14}\tau. \tag{1 ter}$$

Il determinante A, *differente da zero per collineazioni non degeneri, si dirà il modulo della collineazione.* È identicamente:

$$S\xi x = S\overline{\xi}\,\overline{x} \tag{2}$$

La (1) si può riguardare come *prodotto* delle:

$$\overline{x} = \rho x, \quad \overline{x} = \frac{a_{11}}{\sqrt[4]{A}} x + \frac{a_{12}}{\sqrt[4]{A}} y + \frac{a_{13}}{\sqrt[4]{A}} z + \frac{a_{14}}{\sqrt[4]{A}} t$$

e analoghe, ove

$$\rho = \sqrt[4]{A}\,.$$

La prima si dirà una *collineazione moltiplicativa di fattore* ρ e geometricamente equivale alla trasformazione identica; la seconda si dirà *unimodulare* perchè ha il modulo 1. Questa decomposizione, che nel campo complesso è sempre possibile, è invece nel campo reale possibile soltanto se $A > O$. *Nel campo reale cioè ogni collineazione a modulo positivo è ancora scomponibile nel prodotto di una collineaz. moltiplicativa e di una unimodulare.* Invece *ogni collineazione a modulo negativo è prodotto di una collineaz. a modulo positivo e di una particolare collineaz. a modulo negativo* (p. es. della $\overline{x} = -x, \overline{y} = y, \overline{z} = z, \overline{t} = t$). *Quelle a modulo positivo conservano* il segno dei determinanti $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ e perciò *la legge di orientazione delle rette: quelle a modulo negativo* (o di seconda specie) *invertono tale legge di orientazione.*

Noi, per studiare gli invarianti proiettivi, cercheremo dapprima gli invarianti per le collineazioni unimodulari, che diremo *invarianti unimodulari.* Dedurremo poi da questi gli invarianti proiettivi per collineazioni a modulo positivo, *normando* le coordinate degli enti studiati (punti, rette o piani) cioè fissando in qualche modo il fattore di proporzionalità delle loro coordinate omogenee.

B) Collineazioni nello spazio rigato.

Una collineaz. moltiplicativa di fattore $\pm\rho$ individua evidentemente una trasformazione moltiplicativa di fattore ρ^2 sulle coordinate di retta; e viceversa una collineaz. unimodulare sulle x equivale ad una collineazione ancora unimodulare sulle coordinate di retta che trasforma in sè la forma quadratica

$$S p^2 = 2\,(l p + m q + n r)\,,$$

e quindi anche la forma bilineare

$$S p p' = l p' + l' p + m' q + m q' + n' r + n r'\,.$$

Viceversa sia data una collineazione unimodulare sulle p che trasformi in sè stessa tali forme. Essa porterà due rette incidenti p, p' in due rette incidenti $\overline{p}$, $\overline{p}'$ e perciò porterà un fascio di rette in un fascio di rette, una stella di rette in un'altra stella oppure in un piano rigato. Io dico che il secondo caso è da escludere. Infatti in tal caso, o variando con continuità la trasform. considerata, o moltiplicandola per una collineazione unimodulare, possiamo supporre che alla nostra trasform. sulle p corrisponda nello spazio la reciprocità

$$\overline{\xi} = a\,x,\ \overline{\eta} = b\,y,\ \overline{\zeta} = c\,z,\ \overline{\tau} = d\,t$$

con a, b, c, d costanti, cosicchè la nostra trasformazione sarebbe

$$\overline{\pi}_{12} = \overline{p}_{34} = a b\, p_{12},\ \overline{\pi}_{13} = \overline{p}_{42} = d b\, p_{13}\,; \ldots\ldots\ ;\ \overline{\pi}_{34} = \overline{p}_{12} = c d\, p_{34}$$

che è a *modulo* negativo.

Una collineazione a modulo negativo è prodotto di una collineazione a modulo positivo per la collineazione,

$$\overline{x} = -\,x,\ \overline{y} = y,\ \overline{z} = z,\ \overline{t} = t.$$

Questa individua sulle coordinate di retta una trasf. lineare intera omog. a modulo -1, che cambia di segno la forma Sp^2.

Una reciprocità è prodotto di una collineazione C per la reciprocità

$$\bar{\xi} = x, \ \bar{\eta} = y, \ \bar{\zeta} = z, \ \bar{\tau} = t,$$

alla quale sulle p corrisponde la

$$\bar{p}_{12} = p_{34}, \ \bar{p}_{13} = p_{42}, \text{ ecc.}, \ \bar{p}_{34} = p_{12}$$

che è una trasform. di modulo negativo, che trasforma in sè la forma Sp^2. In conclusione:

Le trasform. sulle p *unimodulari che trasformano* Sp^2 *in sè sono tutte e sole quelle che corrispondono a collineazioni unimodulari, quelle a modulo* -1 *che cambiano di segno* Sp^2 *corrispondono alle collineazioni di modulo* -1; *quelle a modulo* -1 *che trasformano* Sp^2 *in sè, e quelle unimodulari che cambiano* Sp^2 *di segno sono tutte e sole quelle che corrispondono ad una correlazione.*

§ 3 - Contatto di curve e superficie.

A) Contatto di curve.

Due curve C, $\bar{C}$ siano definite dando le coordinate *non* omogenee x, y, z ed $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, dei loro punti in funzione di due parametri u, $\bar{u}$. (Si suppone cioè $t = 1$, $\bar{t} = 1$). Se hanno comune un punto A, ivi sarà $x = \bar{x}$. Qui e nel seguito si intenderanno sempre sottintese le uguaglianze analoghe per y e per z. Se ivi si toccano sarà:

$$(1) \qquad x = \bar{x}, \ x_u = \sigma \bar{x}_{\bar{u}},$$

ove σ è un conveniente fattore. Il contatto sarà tripunto (di se–

condo ordine) se

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2\bar{z}}{d\bar{x}^2},$$

ossia se i rapporti

$$\frac{y_{uu}\,x_u - y_u\,x_{uu}}{x_u^3} \text{ e } \frac{z_{uu}\,x_u - z_u\,x_{uu}}{x_u^3}$$

non mutano in A, sostituendo alle x, y, z, u le $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{u}$; in altre parole se esiste un' altra costante τ tale che:

(2) $$x_{uu} = \delta^2\,\bar{x}_{\bar{u}\bar{u}} + \tau\,\bar{x}_{\bar{u}} \text{ (e analoghe in } y, z),$$

La (1) si può enunciare dicendo che si può sulla $\bar{C}$ scegliere un nuovo parametro u', tale che in A sia

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u'} \left(\text{Basta che sia } \delta = \frac{\partial u}{\partial u'} \text{ nel punto } A\right).$$

La (2) si può enunciare dicendo che con conveniente scelta di tale parametro nel punto A si ha:
$\frac{\partial^i x}{\partial u^i} = \frac{\partial^i \bar{x}}{\partial u'^i}$ $(i = 1,\ 2)$ (Basterà che in A sia anche $\tau = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial u^2}$.
Risultati analoghi valgono per contatti di ordine superiore· Se fin dal principio era $u = \bar{u}$, veniva determinata tra i punti delle due curve una corrispondenza, quando fossero considerati come omologhi punti individuati dallo stesso valore di u. In tal caso, se nella (1) è $\delta = 1$, o nella (2) $\delta = 1$, $\tau = 0$, diremo che il contatto è *analitico*, o anche che le due curve hanno in A comuni due o tre punti infinitamente vicini, omologhi l' uno dell' altro nella corrispondenza citata.

B) Contatto di superficie.

Siano S, $\bar{S}$ due superficie, i cui punti x, y, z ed $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ sono rispettivamente funzioni dei parametri u, v, e dei parametri $\bar{u}$, $\bar{v}$. Quando mai le superficie hanno un contatto di ordine r in un punto comune A di coordinate a, b, c? È necessario e sufficiente che, sviluppando $z - c$ in serie di potenze di $x - a$, $y - b$, oppure $\bar{z} - c$ in serie di potenze di $\bar{x} - a$, $\bar{y} - b$, si abbiano due sviluppi aventi a comune tutti i coefficienti fino a quelli dei termini di grado r inclusi, ossia che, assumendo a nuovi parametri u_1, v_1 sull'una le $x - a$, $y - b$, e sull'altra le $\bar{x} - a$, $\bar{y} - b$, siano identici i differenziali di x, y, z e quelli di $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ fino a quelli di ordine r inclusi. E questa proprietà si conserva per una trasformazione $u_1 = \varphi(u_2, v_2)$, $v_1 = \psi(u_2, v_2)$ dei parametri. Noi potremo servircene in guisa da rendere $u_2 = u$, $v_2 = v$; allora $\bar{u}$, $\bar{v}$ risulteranno funzioni delle u, v. Quindi: *Condizione necessaria ed evidentemente anche sufficiente affinchè le superficie S, $\bar{S}$ si tocchino di ordine r in un punto comune A è che si possano sostituire alle $\bar{u}$, $\bar{v}$ tali funzioni delle u, v che nel punto considerato i differenziali delle x, y, z e quelli delle $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ coincidano fino a quelli di ordine r inclusi.* Indicando cioè con α, β, γ, ecc. i valori nel punto A di convenienti derivate di queste funzioni, dovrà essere: (F).

$$(3) \qquad \bar{x} = x, \quad x_u = \alpha\, \bar{x}_{\bar{u}} + \beta\, \bar{x}_{\bar{v}}, \quad x_v = \gamma\, \bar{x}_{\bar{u}} + \delta\, \bar{x}_{\bar{v}}$$

$$(\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \quad (\text{per } r = 1)$$

e inoltre, per $r = 2$

$$(4) \quad \begin{cases} x_{uu} = \lambda\, \bar{x}_{\bar{u}} + \mu\, \bar{x}_{\bar{v}} + \alpha^2\, \bar{x}_{\bar{u}\bar{u}} + 2\alpha\beta\, \bar{x}_{\bar{u}\bar{v}} + \beta^2\, \bar{x}_{\bar{v}\bar{v}} \\ x_{uv} = \nu\, \bar{x}_{\bar{u}} + \pi\, \bar{x}_{\bar{v}} + \alpha\gamma\, \bar{x}_{\bar{u}\bar{u}} + (\alpha\delta + \beta\gamma)\, \bar{x}_{\bar{u}\bar{v}} + \beta\delta\, \bar{x}_{\bar{v}\bar{v}} \\ x_{vv} = \rho\, \bar{x}_{\bar{u}} + \omega\, \bar{x}_{\bar{v}} + \gamma^2\, \bar{x}_{\bar{u}\bar{u}} + 2\gamma\delta\, \bar{x}_{\bar{u}\bar{v}} + \delta^2\, \bar{x}_{\bar{v}\bar{v}} \end{cases}$$

(oltre alle analoghe in y, z)

Il contatto si dirà analitico, se $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$, $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = \lambda = \mu = \nu = \rho = \nu = \omega = 0$. Otteniamo un *caso particolare* di contatto del secondo ordine supponendo che:

$$(5) \qquad x = \bar{x} \quad x_u - \alpha\, \bar{x}_{\bar{u}} = x_v - \delta\, \bar{x}_{\bar{v}} = 0$$

e che

$$(6) \qquad x_{uu} - \alpha^2\, x_{\bar{u}\bar{u}}, \quad x_{uv} - \alpha\delta\, x_{\bar{u}\bar{v}}, \quad x_{vv} - \delta^2\, x_{\bar{v}\bar{v}}$$

siano *combinazioni lineari* di x_u, x_v.

C) Contatto di superficie in corrispondenza biunivoca.

Supponiamo ora $u = \overline{u}$, $v = \overline{v}$, e quindi i punti di S, $\overline{S}$ in corrispondenza biunivoca. Quando mai avverrà che curve *omologhe* di S, $\overline{S}$, uscenti dal punto comune A hanno un contatto di ordine r?

Per $r = 1$ dovrà essere nel punto A identicamente in $d\,u$, dv, in virtù della (1):

$$x_u\, d\,u + x_v\, d\,v = \sigma\,(\overline{x}_{\overline{u}}\, d\,u + \overline{x}_{\overline{v}}\, d\,v) \text{ ossia per (3)}$$

$$\alpha\, \overline{x}_{\overline{u}} + \beta\, \overline{x}_{\overline{v}} = \sigma\, \overline{x}_{\overline{u}} \qquad \gamma\, \overline{x}_{\overline{u}} + \delta\, \overline{x}_{\overline{v}} = \sigma\, \overline{x}_{\overline{v}}\,.$$

Ora, escludendo senz'altro i punti singolari, *le* $\overline{x}_{\overline{u}}$ *non possono essere proporzionali alle* $\overline{x}_{\overline{v}}$. E perciò sarà:

$$\sigma = \alpha = \delta\,; \quad \beta = \gamma = 0 \qquad (\text{per } r = 1). \tag{7}$$

Per $r = 2$, oltre alle (7) dovrà essere inoltre nel punto A identicamente, comunque siano scelte le funzioni $u = u\,(t)$. $v = v\,(t)$ di un nuovo parametro t:

$$\frac{d^2 x}{d\,t^2} = \sigma^2 \frac{d^2 \overline{x}}{d\,t^2} + \tau \frac{d\,\overline{x}}{d\,t} \qquad \text{(cfr. le (2))},$$

ove σ ha il valore precedente, e τ può anche dipendere dai valori nel punto A delle u', v', u'', v''. Questa equazione, scritta per disteso, diventa:

$$(7)_{\text{bis}} \quad \left\{ \begin{aligned} & x_u u'' + x_v v'' + x_{u\,u}\, u'^{\,2} + 2\, x_{u\,v}\, u'\, v' + x_{v\,v}\, v'^{\,2} = \\ & = \sigma^2\, (\overline{x}_u u'' + x_v \overline{v}'' + x_{u\,u}\, \overline{u}'^{\,2} + 2\, x_{u\,v}\, \overline{u}'\, \overline{v}' + x_{v\,v}\, \overline{v}'^{\,2}) + \\ & + \tau\, (\overline{x}_u\, u'' + \overline{x}_v\, v''). \end{aligned} \right.$$

Sostituendovi i valori (4) e identificando i due membri si trova $\sigma^2 = \sigma$ e perciò $\sigma = 1$, perchè non può essere $\sigma = 0$, da cui seguirebbe $x_u = x_v = 0$, mentre noi abbiamo escluso i punti singolari; e inoltre che τ è indipendente da u'', v'' ed è lineare in u', v'. Cosicchè in fine si trova: (F)

$$dx = d\overline{x} \qquad d^2 x = d^2 \overline{x} + 2\,(l\,du + m\,dv)\,d\overline{x} \tag{8}$$

ossia:

$$(8)_{\text{bis}} \quad \left\{ \begin{array}{lll} x_u = \overline{x}_{\overline{u}} & x_{uu} = \overline{x}_{uu} + 2\,l\,\overline{x}_u & \\ & x_{uv} = \overline{x}_{uv} + (l\,\overline{x}_v + m\,\overline{x}_u) & x = \overline{x} \\ x_v = \overline{x}_{\overline{v}} & x_{vv} = \overline{x}_{vv} + 2\,m\,\overline{x}_v & \end{array} \right.$$

Alle (8) potremmo giungere direttamente, anche senza invocare le (4). Infatti, derivando $(7)_{\text{bis}}$ rispetto u'' o v'', si deduce tosto che $\sigma = 1$ e che τ è funzione delle sole u', v'; la $(7)_{\text{bis}}$ dimostra poi che τ è lineare omogenea in u', v'.

Le $(8)_{\text{bis}}$ sono un caso particolare delle (5) e (6).

Se ora ritorniamo a coordinate omogenee, ponendo $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ al posto di x, y, z, le (3) e (4) diventano del tipo:

$$\begin{array}{l} (3)_{\text{bis}} \\ \\ (4)_{\text{bis}} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = r\,\overline{x} \qquad x_u = r\,(\alpha\,\overline{x}_u + \beta\,\overline{x}_v + l\,\overline{x}) \\ \qquad\qquad\qquad x_v = r\,(\gamma\,\overline{x}_u + \delta\,\overline{x}_v + m\,\overline{x}) \\ x_{uu} = r\,(\lambda\,\overline{x}_{\overline{u}} + \mu\,\overline{x}_{\overline{v}} + \alpha^2\,\overline{x}_{\overline{u}\,\overline{u}} + 2\,\alpha\,\beta\,\overline{x}_{\overline{u}\,\overline{v}} + \\ \qquad\qquad + \beta^2\,\overline{x}_{\overline{v}\,\overline{v}} + n\,\overline{x}), \text{ ecc.} \end{array} \right.$$

e le $(8)_{\text{bis}}$ diventano:

$$(8)_{\text{ter}} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_u = \rho\,\overline{x} \qquad x_u = \rho(x_u + a\,x) \qquad x_v = \rho\,(x_v + b\,x) \\ x_{uu} = \rho\,[\overline{x}_{uu} + 2\,l\,\overline{x}_u + p\,\overline{x}] \\ x_{uv} = \rho\,[\overline{x}_{uv} + l\,\overline{x}_v + m\,\overline{x}_u + q\,\overline{x}] \\ x_{vv} = \rho\,[\overline{x}_{vv} + 2\,m\,\overline{x}_v + r\,\overline{x}]. \end{array} \right.$$

Il contatto è analitico se $l = a$, $m = b$. Si noti invece che il contatto del prim'ordine subordinato al contatto $(8)_{\text{ter}}$ del 2° ordine è sempre analitico.

§ 4. – Osservazioni varie.

A) Curve razionali di terzo grado.

Sia $\varphi(x, y)$ un polinomio omogeneo di 2^0 grado in due variabili x, y con discriminante diverso da zero; ψ sia un polinomio analogo di 3^0 grado.

Interpretiamo le

$$(1) \qquad \xi = x\varphi\,, \; \eta = y\varphi\,, \; \zeta = \psi$$

come coordinate omogenee di punto in un piano π. Tale punto al variare delle x, y (che noi considereremo come coordinate omogenee di punto su una retta r) descrive una cubica C razionale, in corrispondenza biunivoca coi punti di tale retta r.

L'equazione di C è

$$(2) \qquad \zeta\,\varphi\,(\xi\,, \eta) = \psi\,(\xi\,, \eta)$$

Se ne deduce, che, com'era evidente, il punto $\xi = \eta = 0$ è doppio per C, che ha ivi per tangenti le due rette definite dalla $\varphi(\xi, \eta) = 0$.

Alle intersezioni di C con una retta $\lambda\,\xi + \mu\,\eta + \nu\zeta = 0$ del suo piano, cioè alle terne di punti di C allineati corrisponde su r una schiera lineare ∞^2 di terne di punti: la schiera definita da:

$$(3) \quad (\lambda\, x + \mu\, y)\,\varphi(x, y) + \nu\,\psi(x\,, y) = 0 \qquad (\lambda, \mu\,, \nu = \text{cost.})$$

Se $\varphi\,(x\,, y) = kxy$, le $\xi = 0$, $\eta = 0$ sono le tangenti alla C nel punto doppio; e, se

$$\psi = a_{111}\, x^3 + 3a_{112}\, x^2\, y + 3a_{122}\, x\, y^2 + a_{222}\, y^3,$$

allora

$$\zeta - \frac{3}{k}(a_{112}\,\xi + a_{122}\,\eta) = 0$$

è la retta congiungente i tre *flessi* della C, ai quali pertanto corrisponde su r la terna dei punti definita dalla $a_{111}\, x^3 + a_{222}\, y^3 = 0$. Osserviamo che questa terna è l' unica delle terne (3) la quale sia *apolare* o *coniugata* alla φ, cioè *abbia un Hessiano proporzionale alla* $\varphi(x\,,\,y)$. Dunque: *Vi sono tre terne* (3) *di punti tra di loro coincidenti* (quelle corrispondenti alle tre tangenti di flesso della curva C); *i tre punti così determinati* (corrispondenti ai flessi di C) *appartengono ad una medesima terna* (3) *e precisamente a quella delle terne* (3) *che è apolare o coniugata alla* φ. *In generale, se* $\varphi(x\,,\,y) = a_{11}\, x^2 + 2 a_{12}\, x\, y + a_{22}\, y^2$ *con* $A = a_{12}\, a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$, *e se* A_{rs} *è il complemento algebrico di* a_{rs} in A, *diviso per* A, *la terna* $b_{111}\, x^3 + 3 b_{112}\, x^2\, y + 3 b_{122}\, x\, y^2 + b_{222}\, y^3 = 0$ *è apolare alla* φ *se valgono le equazioni*

$$\sum_{r,s} A_{rs}\, b_{rs1} = \Sigma\, A_{rs}\, b_{rs2} = 0.$$

Se la ψ è essa stessa apolare alla φ, se cioè $\sum_{r,s} A_{rs}\, a_{rsi} = 0$ per $i = 1, 2$, allora la retta dei flessi è senz'altro la retta $\zeta = 0$. Se invece così non è, la retta dei flessi è $\lambda\,\xi + \mu\,\eta + \nu\,\zeta = 0$, ove i rapporti $\lambda : \mu : \nu$ sono determinati dalla condizione che il primo membro di (3) sia apolare alla φ.

B) Varietà di terzo grado.

Sia φ una forma di 2° grado di n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\varphi = \Sigma\, a_{rs}\, x_r\, x_s$$

col determinante $A = |\, a_{rs} \,| \neq 0$, e sia ψ una forma di 3° grado nelle medesime variabili. Sia r lo spazio ad $n - 1$ dimensioni, in cui le x sono coordinate omogenee; e sia π uno spazio ad n dimensioni in cui siano coordinate omogenee $\xi_1\,, \xi_2\,, \ldots, \xi_n\,, \zeta$. Poniamo:

$$\xi_1 = x_1\,\varphi\,,\ \xi_2 = x_2\,\varphi\,,\ \ldots\,,\ \xi_n = x_n\,\varphi\,,\ \zeta = \psi.$$

Allora, al variare delle x, il punto $\xi\,, \zeta$ descriverà una varietà V_{n-1} ad $n - 1$ dimensioni di *terzo* grado avente per equazione:

$$\zeta\,\varphi(\xi_1\,, \xi_2\,, \ldots, \xi_n) = \psi(\xi_1\,, \xi_2\,, \ldots, \xi_n). \tag{4}$$

Essa è razionale, e in corrispondenza biunivoca coi punti di r. Il punto $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$ è un punto doppio; la

$$\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$$

è l'equazione del cono tangente in questo punto. Alle sezioni iperpiane di questa varietà corrisponde su r un sistema lineare di varietà, e precisamente il sistema lineare:

$$(5) \qquad \varphi(x_1, \ldots, x_n) \sum_i \lambda_i x_i + \mu \psi(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

$$(\lambda_i, \mu = \text{cost.})$$

Tra di esse chiameremo *principale* quella, univocamente determinata, che è *coniugata od apolare* alla φ; e ricordo che una forma cubica $\Sigma b_{rst} x_r x_s x_t$ si dice apolare alla φ, se valgono le n condizioni

$$(6) \qquad \sum_{r,s} A_{rs} b_{rst} = 0 \quad (\text{per } t = 1, 2, \ldots, n).$$

ove con A_{rs} indichiamo, al solito, il complemento algebrico di a_{rs} in A, diviso per A. Se $\psi = \Sigma a_{rst} x_r x_s x_t$, allora, poichè

$$(7) \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) \Sigma \lambda_i x_i = \frac{1}{3} \Sigma (\lambda_r a_{st} + \lambda_s a_{rt} + \lambda_t a_{rs}) x_r x_s x_t,$$

la (4) è apolare alla φ, se:

$$0 = \mu \sum_{r,s} A_{rs} a_{rst} + \frac{1}{3} \sum_{r,s} A_{rs} (\lambda_r a_{st} + \lambda_s a_{rt} + \lambda_t a_{rs})$$

ossia, se:

$$(8) \qquad 0 = \mu \sum_{r,s} A_{rs} a_{rst} + \frac{n+2}{3} \lambda_t,$$

le quali equazioni determinano i rapporti $\lambda_1 : \lambda_2 : \ldots . \lambda_n : \mu$.

C) La retta principale del Togliatti.

Si deve al Togliatti la seguente generalizzazione a curve più generali della retta dei flessi di una cubica. Supponiamo di nuovo $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, *la* φ *un polinomio omogeneo di grado* m *nelle* x_i, *la* ψ *un polinomio omogeneo di grado* m $+ 1$. Il punto

$$\xi = x\varphi\,,\quad \eta = y\varphi\,,\quad \zeta = \psi$$

(ove, come sopra, ξ, η, ζ sono coordinate omogenee in un piano π) genera, al variare di $x : y$ una curva *razionale* di grado $m + 1$ di equazione

$$\zeta\,\varphi\,(\xi\,, \eta) = \psi\,(\xi\,, \eta)$$

che ha nel punto $\xi = \eta = 0$ un punto m^{uplo}, in cui ha m tangenti definite dall'equazione

$$\varphi\,(\xi\,, \eta) = 0.$$

E, se $\varphi(\xi\,, \eta) = p_1\, p_2 \ldots . p_m$, ove p_i è un polinomio omogeneo di primo grado nelle ξ, η, allora tali tangenti sono le rette $p_i = 0$. Supponiamo che sia possibile determinare m costanti λ_i in guisa che

$$\psi - \sum_i \lambda_i\, p_i^{m+1}$$

sia divisibile per φ, ossia sia uguale al prodotto $\varphi\,\mathrm{P}$, ove P è un polinomio omogeneo $\mu_1\,\xi + \mu_2\,\eta$ di primo grado nelle ξ, η. La retta $\zeta = \mu_1\,\xi + \mu_2\,\eta$ si dirà la retta *principale* (di Togliatti) della curva. Se p. es. $\varphi = k\,x\,y$ e

$$\psi = a_{111}\,x^3 + 3a_{112}\,x^2\,y + 3a_{122}\,x\,y^2 + {}_{222}\,y^3,$$

allora

$$p_1 = \xi\,,\quad p_2 = \eta\,,\quad \lambda_1 = a_{111}\,,\quad \lambda_2 = a_{222}\,,$$

$$\mathrm{P} = \frac{3a_{112}\,x + 3a_{122}\,y}{k}.$$

E la retta *principale* si riduce alla precedente retta dei flessi.

D) Una ulteriore generalizzazione.

Possiamo col Fubini ulteriormente estendere la definizione del Togliatti; supponiamo che delle m tangenti $p_i = 0$ *due* abbiano un ufficio ben distinto dalle altre; e senz'altro scegliamole come assi $\xi = 0$, $\eta = 0$. La nostra curva avrà per equazione

$$\xi \eta \zeta \chi (\xi, \eta) = \psi (\xi, \eta)$$

ove χ è di grado $m - 2$ nelle ξ, η. Supponiamo le costanti λ_1, λ_2 tali che $\psi - \lambda_1 \xi^{m+1} - \lambda_2 \eta^{m+1}$ sia divisibile per $\xi \eta$, ossia sia uguale al prodotto $\xi \eta Q$, ove Q è un polinomio omogeneo di grado $m - 1$ nelle ξ, η. Allora la curva $\chi \zeta - Q (\xi, \eta) = 0$ si dirà la *curva principale* definita dalla curva data e dalle due tangenti considerate; e anche per questa potremo, come sopra, definire una *retta principale.*

Oss. La definiz. data in *C)* si può esporre così: La curva $\psi - \zeta \varphi = 0$ e le curve (degeneri) $p_i^{m+1} = 0$ definiscono un sistema lineare di ∞^m curve, in cui generalmente vi è una sola curva che si scompone nelle m tangenti complessivamente di equazione $\varphi = 0$, e in una retta residua $\zeta = P$, che si dirà la retta principale.

La definiz. data in *D)* si può enunciare così: Nel sistema lineare di ∞^2 curve determinato dalla curva data e dalle $\xi^{m+1} = 0$, $\eta^{m+1} = 0$ esiste generalmente una sola curva che si spezza in queste tangenti $\xi \eta = 0$, e in una curva ulteriore $\chi \zeta = Q$, la curva *principale.*

Ulteriori e non difficili generalizzazioni ci sono inutili.

E) La divisione covariante.

Se $\varphi = \Sigma a_{rs} x_r x_s$ è una forma quadratica binaria con discriminante $A \neq 0$, e ψ è una forma nelle stesse variabili x_1, x_2 di grado $m > 1$, noi potremo in un solo modo decomporre ψ in una somma $\psi_1 + \varphi \chi$, ove ψ_1 è apolare alla φ (*) e χ è di grado

---

(*) Una forma $F = \sum_1^m b_{i_1 i_2 \ldots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}$ di m esimo grado nelle x_i dicesi apolare alla φ se per ogni sistema di valori per le $i_3, i_4, \ldots, i_m$ vale la:

$$\sum_{i_1, i_2} A_{i_1 i_2} b_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_m} = 0.$$

Questa proprietà è *intrinseca,* cioè è invariante rispetto a una trasform. lineare omogenea eseguita sulle x.

$m-2$. Se $m-2>1$, potremo di nuovo operare nello stesso modo nella χ decomponendola nella somma di una forma χ_1 apolare alla φ e di un prodotto $\theta\,\varphi$, ove θ è di grado $m-4$. E così via. Se p. es. $\varphi = 2a_{12}\,x_1\,x_2$, e $\psi = \Sigma\, b_{rsth}\, x_r\, x_s\, x_t\, x_h$, si ha:

$$\varphi = (b_{1111}x_1^4 + b_{2222}\,x_2^4) + \frac{\varphi}{2a_{12}}\,(4b_{1112}\,x^2 + 6b_{1122}\,xy + 4b_{2221}\,y^2),$$

di cui il primo termine è apolare alla φ, il secondo divisibile per φ.

Applicando di nuovo lo stesso procedimento si trova

$$\psi = (b_{1111}\,x_1^4 + b_{2222}\,x_2^4) + \varphi\left(\frac{2\,b_{1112}\,x^2 + 2\,b_{2221}\,y^2}{a_{12}}\right) +$$

$$+ \left(\varphi^2\,\frac{3}{2\,a_{12}^2}\,b_{1122}\right)$$

Questa decomposizione si può generalizzare anche a forme quadratiche in più di 2 variabili x.