Geometria proiettiva differenziale. I

Capitolo III. Gli elementi geometrici fondamentali

In: Guido Fubini (author); Eduard Čech (author): Geometria proiettiva differenziale. I. (Italian). Bologna: Zanichelli, Nicola, 1926. pp. [125]--179.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402434

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

CAPITOLO III.

GLI ELEMENTI GEOMETRICI FONDAMENTALI

§ 21. — La quadrica di Lie.

A) Sua definizione.

Nella teoria delle curve sghembe è notevole specialmente il sistema nullo osculatore in un loro punto; di cui sono analoghi per le superficie i sistemi nulli osculatori alle due asintotiche uscenti da un punto di esse. Ma accanto a queste corrispondenze ve ne sono molte altre, notevoli per molte ragioni. Qui studieremo le più semplici. Se $\overline{x}$ è un punto fisso di una superficie S, e $\overline{\xi}$ è il corrispondente piano tangente, le coordinate di ogni altro punto x e piano ξ dello spazio ambiente si possono scrivere nella forma:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x'\overline{x} + y'\overline{x}_u + z'\overline{x}_v + t'\overline{X} \\ \xi = \xi'\overline{\xi} + \eta'\overline{\xi}_u + \zeta'\overline{\xi}_v + \tau'\overline{\Xi}. \end{cases}$$

Si noti che, mentre x', t', ξ', τ' hanno significato intrinseco, ciò non avviene per y', z' le quali si dovrebbero considerare come un sistema controvariante; altrettanto dicasi delle η', ζ'. La condizione $S\xi x$ di appartenenza di punto e piano diventa, indicando senz' altro con Ω, a_{ik} i valori delle Ω ed a_{ik} nel punto considerato:

$$(2)\quad x'\tau' + \xi' t' + t'\tau'\Omega - \Big[a_{11}\, y'\eta' + a_{12}(y'\zeta' + \eta' z') + a_{22} z'\zeta'\Big] = 0$$

che si muta in sè stessa cambiando le x' (cioè x', y', z', t') nelle ξ'.

Quindi la *correlazione* definita dalle:

$$(3)\qquad \xi' = x'\,,\quad \eta' = y'\,,\quad \zeta' = z'\,,\quad \tau' = t$$

non è che la polarità rispetto alla quadrica Q di equazione

$$(4)\qquad 2x't' + \Omega t'^2 - (a_{11}\, y'^2 + 2a_{12}\, y'z' + a_{22} z'^2) = 0.$$

La correlazione (3) ha carattere evidentemente intrinseco ed invariante per collineazioni [perchè non muta neanche se moltiplichiamo le coordinate dei punti di S per uno stesso fattore $\rho(u, v)$] (*); altrettanto avverrà di questa quadrica, che chiameremo la *quadrica di Lie* relativa al punto considerato $\overline{x}$ di S.

Proseguiremo per semplicità i calcoli con coordinate u, v asintotiche. Sarà $a_{11} = a_{22} = 0$, $F_3 = a_{12}(\beta du^3 + \gamma du^3)$, $\Omega = \frac{1}{a_{12}}\beta\gamma - K$, $K = -\frac{1}{a_{12}}\theta_{uv}$, $a_{12} = \pm e^{\theta}$, $X = \frac{1}{a_{12}} x_{uv}$; e l'equazione della quadrica sarà:

$$(4)_{\text{bis}}\qquad 2x't' - 2a_{12}\, y'z' + \left(\frac{\beta\gamma}{a_{12}} - K\right)t'^2 = 0.$$

B) Interpretazioni geometriche della forma φ_2 e dell'elemento lineare $\varphi_3 : \varphi_2$.

Per quanto non abbiano relazioni con gli ulteriori sviluppi di questo Capitolo, sarà bene dare almeno l'enunciato di alcuni dei teoremi trovati dal Bompiani (**). In un punto O di una super-

---

(*) Questo fatto intuitivo sarà verificato in *C)*.
(**) Atti della R. Accad. di Torino (Aprile 1924).

ficie S costruiamo la quadrica di Lie che assumiamo ad assoluto di una metrica di Cayley.

Se O′ *è infinitamente vicino ad* O *su* S, *il birapporto che serve a misurare la distanza da* O′ *al piano tangente in* O *su una trasversale generica uscente da* O′ *vale* $\frac{1}{3}\,\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$.

Se Q *è una quadrica che ha per generatrici le tangenti asintotiche in* O, *ed* O′, O″ *sono punti vicini ad* O *sulle due asintotiche uscenti da* O, *il birapporto che serve a definire la distanza* O′O″ *nella metrica definita da* Q *vale* $h\varphi_2 = 2h\beta\gamma du dv$, *ove* h *è una costante numerica* $\left(\frac{1}{18}\right.$ se Q è la quadrica di Lie$\left.\right)$.

Se da un punto generico si proiettano le rette OO′, OO″ *sul piano tangente, il birapporto di tali proiezioni e delle direzioni asintotiche vale* $\frac{1}{8}\,\varphi_2$.

Nella Mem. cit. si troveranno anche altri teoremi analoghi, che tutti danno svariati significati geometrici delle nostre forme. (Cfr. anche § 13 *B* e 23 *C*)

C) **Fascio delle quadriche di Darboux.**

Consideriamo le coordinate x', y', z', t' di un punto di S posto in un intorno di $\bar{x}$. Esse per $u = v = 0$ si riducono ad $1, 0, 0, 0$, le loro derivate x'_u, y'_u, ecc., le x'_v ecc. e le x'_{uv} ecc. si riducono rispettivamente ad $0, 1, 0, 0$, ad $0, 0, 1, 0$ ed infine a $0, 0, 0, a_{12}$. Per le equazioni differenziali fondamentali sarà, posto al solito $\theta = \log|a_{12}|$:

$$x' = 1 + \text{termini almeno di } 2^\circ \text{ grado in } u, v$$

$$y' = u + \frac{1}{2}(\theta_u u^2 + \gamma v^2) + \text{termini almeno di } 3^\circ \text{ grado}$$

$$z' = v + \frac{1}{2}(\theta_v v^2 + \beta u^2) + \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»}$$

$$t' = a_{12}uv + \frac{a_{12}}{6}(\beta u^3 + 3\theta_u u^2 v + 3\theta_v uv^2 + \gamma v^3) + \text{termini}$$

almeno di 4° grado.

Quindi

t'^2 si annulla per $u=v=0$ del quart' ordine

$$\frac{1}{a_{12}}(x't'-a_{12}y'z')=\frac{-1}{3}(\beta u^3+\gamma v^3)+\text{ termini almeno di } 4^{\circ} \text{ grado}.$$

Perciò il fascio delle quadriche determinato dalla quadrica di Lie e dal piano tangente $t'=0$ contato due volte coincide col fascio di quadriche di Darboux. In altre parole la quadrica di Lie è una delle quadriche di Darboux. (§ 11, B).

In questo fascio si possono anche determinare altre quadriche.

A tal fine mutiamo le coordinate $\overline{x}$ di un punto di S, ponendo $\overline{x}=\rho(u,v)x^0$, ove ρ è un fattore di proporzionalità. Il nuovo valore a_{12}^0 di a_{12} è dato da $a_{12}=\rho^2 a_{12}^0$. Poniamo, analogamente alla (1)

$$x=x''x^0+y''x_u^0+z''x_v^0+t''\frac{x_{uv}^0}{a_{12}^0}.$$

Sarà chiaramente:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} x''&=\rho x'+\rho_u y'+\rho_v z'+\frac{\rho_{uv}}{\rho^2 a_{12}^0}t' \\ y''&=\rho y'+\frac{t'}{\rho^2 a_{12}^0}\rho_v \\ z''&=\rho z'+\frac{t'}{\rho^2 a_{12}^0}\rho_u \end{aligned}\right. \qquad t''=\frac{1}{\rho}t'$$

da cui (indicata con K^0 la curvatura di $2a_{12}^0\,du\,dv$) seguono le identità:

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} K&=\frac{1}{\rho^2}K^0-\frac{2}{a_{12}^0}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\log\rho}{\partial u\partial v} \\ 2x''t''-2a_{12}^0y''z''&=2x't'-2a_{12}y'z'+\frac{2}{a_{12}}\frac{\partial^2\log\rho}{\partial u\partial v}t'^2 \end{aligned}\right.$$

da cui segue non soltanto che *la quadrica di Lie non è mutata* perchè il primo membro di $(4)_{\text{bis}}$ vale proprio

$$2x''t'' - 2a^0_{12}y''z'' + \left(\frac{\beta\gamma}{a^0_{12}} - K^0\right)t''^2 = 0$$

ma anche più generalmente che la quadrica di Darboux

$$(7) \qquad 2x't' - 2a_{12}y'z' + t'^2\left(\mu\frac{\beta\gamma}{a^0_{12}} - K\right) = 0$$

ha per nuova equazione la perfettamente analoga

$$2x''t'' - 2a^0_{12}y''z'' + t''^2\left(\mu\frac{\beta\gamma}{a_{12}} - K^0\right) = 0 .$$

Perciò ogni quadrica di Darboux si può caratterizzare dando il valore del corrispondente parametro μ, che è sottoposto all'unica condizione di essere una *quantità intrinseca invariante.*

Per $\mu = 1$ si ha la quadrica di Lie.

Per $\mu = \infty$ il piano tangente contato due volte.

Per $\mu = -\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial^2 \log\beta\gamma}{\partial u \partial v}$ si ha una quadrica che, quando si scelgano coordinate normali ($\beta\gamma = a_{12}$), ha l'equazione

$$(7)_{\text{bis}} \qquad x't' - a_{12}y'z' = 0 \qquad (a_{12} = \beta\gamma) ,$$

e che diremo perciò la quadrica *normale.* Essa passa per il punto $x' = y' = z' = 0$, $t' = 1$, che in questo caso è il punto X *della normale proiettiva.*

Per $\mu = 0$ si ha una *quadrica,* che coincide con quella che Wilczynski trovò per altra via e chiamò *canonica.* La sua equazione è ancora $(7)_{\text{bis}}$ se sulla superficie sono adottate coordinate tali che $K = 0$ (p. es. le coordinate di Wilczynski).

Del resto, data una qualsiasi delle quadriche di Darboux, si può sempre scegliere il fattore ρ in modo che l'equazione della quadrica considerata sia proprio del tipo $(7)_{\text{bis}}$

$$x''t'' - a^0_{12}y''z'' = 0 ;$$

contemporaneamente resta scelta una coppia di rette $x'' = t'' = 0$ ed $y'' = z'' = 0$ *polari reciproche* rispetto alle quadriche di Darboux. Comunque sia scelto ρ, i risultati precedenti dimostrano che i termini dello sviluppo in serie di $\frac{1}{a_{12}^0} x''t'' - y''z''$ si riducono a $-\frac{1}{3}(\beta u^3 + \gamma v^3)$ a meno di termini del quart'ordine, che cioè

$$\frac{1}{a_{12}^0}\left(\frac{t''}{x''} - a_{12}^0 \frac{y''z''}{x''}\right) + \frac{1}{3}\left\{\beta\left(\frac{y''}{x''}\right)^3 + \gamma\left(\frac{z''}{x''}\right)^3\right\}$$

è sempre infinitesimo del quarto ordine, che cioè tutte le varie superficie cubiche V_3 definite dalla:

$$t''x''^2 - a_{12}^0 y''z''x'' + \frac{a_{12}^0}{3}(\beta y''^3 + \gamma z''^3) = 0 \tag{8}$$

hanno un contatto del terz' ordine con la superficie data, e che, al variare di ρ, nello sviluppo di $\frac{1}{a_{12}^0}\frac{t''}{x''}$ in serie di potenze di $\frac{y''}{x''}$, $\frac{z''}{x''}$ variano soltanto i termini del quarto grado o di grado superiore. Perciò lo studio delle varie quadriche di Darboux si può illustrare con la considerazione delle varie superficie cubiche (8) che hanno con S un contatto del terz'ordine, o con l'esame delle varie coppie di rette (una uscente da $\bar{x}$, l'altra posta in $\bar{\xi}$) polari reciproche rispetto alle quadriche di Darboux, o con l'esame dei termini di quarto grado nello sviluppo in serie recentemente citato. Di tali studii si occuparono Green e Wilczynski studiando qualche caso particolare (*).

(*) *Nelle Trans. of the Amer. Math. Soc.* tomi 9 e 20. Per altri sviluppi in serie cfr. FUBINI *Annali di Mat.* Ser. 3, Tomo 25 (1916) pag. 229 e seg. Invarianti proiettivi-differenziali ecc.

D) **La quadrica di Lie come iperboloide osculatore.**

Da ogni punto di una asintotica $u = \text{cost.}$ tiriamo le tangenti all'asintotica $v = \text{cost}$, che esce da tale punto; altrettanto facciamo per ogni asintotica $v = \text{cost.}$ Otterremo così due sistemi di *rigate asintotiche* della superficie S; da ogni punto x di S escono due di tali rigate, una di ciascun sistema. Lasciando il soprassegno, una di tali rigate sarà il luogo dei punti $x'' = x + wx_u$, (*) ove la u si tenga costante, che sono perciò funzioni dei due parametri v, w. L'equazione $(x'' x_w'' x_v'' d^2x'') = 0$ delle sue asintotiche è, tenuto conto delle equazioni fondamentali I per le x:

$$0 = dv\left(2\frac{dw}{w^2} - a_{12}\left[\frac{\beta\gamma}{a_{12}} - K\right]dv\right).$$

Un primo sistema di asintotiche è formato dalle generatrici, che sulla nostra rigata hanno per equazione $v = \text{cost.}$ Invece la tangente all'asintotica curva uscente dal punto $x'' = x + wx_u$ passerà per il punto:

$$x_v'' + x_w''\frac{dw}{dv} = x_v + wx_{uv} + \frac{a_{12}}{2}w^2 x_u\left(\frac{\beta\gamma}{a_{12}} - K\right).$$

Tale tangente è pertanto il luogo descritto dal punto

$$x\left\{1 + Zw\frac{a_{12}}{2}\left(K - \frac{\beta\gamma}{a_{12}}\right)\right\} + wx_u + Z(x_v + wx_{uv})$$

al variare del nuovo parametro Z. Il punto precedente ha, con le notazioni del § 21 *A*, le coordinate

$$x' = 1 + Zw\frac{a_{12}}{2}\left(K - \frac{\beta\gamma}{a_{12}}\right), \quad y' = w, \quad z' = Z, \quad t' = Zw$$

(*) Qui x'' ha tutt'altro significato che in § 21, *C*.

e pertanto, qualunque siano Z e w, giace sulla quadrica di Lie relativa al punto $\bar{x}$. Ora la rigata luogo delle tangenti alle asintotiche curve di una rigata R'' uscenti dai punti di una generatrice δ, com'è ben noto, la rigata osculatrice alla R'' nei punti della generatrice considerata (che contiene 3 generatrici consecutive di R''). Quindi:

La quadrica di Lie relativa a un punto $\bar{\mathrm{x}}$ *è la quadrica osculatrice alle due rigate asintotiche della superficie considerata uscenti dal punto* $\bar{\mathrm{x}}$.

Un' altra dimostrazione di questo teorema sarà data al Cap. IV § 2 *B*.

§ 22. — La corrispondenza di Segre.

Diremo che un'equazione $v = \varphi(u)$ definisce una *linea L* della superficie data, cioè un sistema di ∞^1 punti della superficie e dei relativi piani tangenti. Tre consecutivi di questi punti definiscono un *piano osculatore* della L; così come dualmente diremo *punto di regresso* di L il punto intersezione di tre consecutivi dei precedenti ∞^1 piani. Un piano osculatore è quello dei tre punti

$$x\,, \quad dx = x_u\,du + x_v\,dv\,, \quad d^2x = x_u\,\delta^2 u + x_v\,\delta^2 v + \Sigma x_{rs}\,du_r\,du_s$$

ed è perciò il piano μ di coordinate

$$(1) \qquad \xi(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u + \beta du^3 - \gamma dv^3) + 2\xi_u\,du^2 dv - 2\xi_v\,du dv^2,$$

mentre il corrispondente punto di regresso M è il punto

$$(2) \qquad x(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u - \beta du^3 + \gamma dv^3) + 2x_u\,du^2 dv - 2x_v\,du dv^2.$$

Ad ogni piano μ uscente da un punto $\bar{x}$ di S potremo far corrispondere il punto M di regresso per una linea a cui μ sia osculatore, cioè il punto d'incontro dei piani tangenti ad S in $\bar{x}$ e nei due punti consecutivi in cui μ incontra S.

Questa corrispondenza tra i punti (2) e i piani (1) è la *cor-*

rispondenza di Segre. Con le notazioni del § 21 essa è definita dalle:

$$x' = \xi'\eta'\zeta' + \beta\eta'^3 + \gamma\zeta'^3 , \quad y' = \eta'^2\zeta' , \quad z' = \zeta'\eta'^2 ,$$

che è una *corrispondenza birazionale cubica. Ai piani di un fascio (il cui asse* r *passi per il punto* $\overline{\mathrm{x}}$ *considerato) corrisponde nel piano* $\overline{\xi}$ *tangente in* $\overline{\mathrm{x}}$ *una cubica razionale tangente alle asintotiche, la cui retta dei flessi è la polare della* r *rispetto alla quadrica di Lie.*

A un piano corrisponde lo stesso punto nella polarità di Lie e nella corrispondenza di Segre soltanto se $\beta \mathrm{du}^3 - \gamma \mathrm{dv}^3 = 0$, *cioè se il piano passa per una direzione di Segre!* (F).

Ecco una proprietà geometrica molto semplice di queste linee. Il Prof. Segre le aveva definite con un'altra proprietà:

Sia π *un piano tale che il corrispondente punto di regresso* P *sia stazionario* (cioè P sia intersez. dei piani tangenti ad S in 4 punti consecutivi dell'intersezione di S e di π). *L'inviluppo di tali piani* π *è un cono* (di Segre cfr. § 16 *E*) *di sesta classe che tocca il piano tangente nelle direzioni asintotiche e nelle direzioni di Darboux. Il punto* P *descrive una curva di 6° grado che nel punto* $\overline{\mathrm{x}}$ *tocca le asintotiche e le direzioni di Segre.* Noi ritroveremo questo risultato al § 24.

Tutte queste proprietà verranno approfondite meglio in un altro capitolo.

§ 23. — Geodetiche, e analoghi sistemi di curve.

A) Primi teoremi.

Le linee geodetiche nella metrica di cui F_2 è elemento lineare hanno per equazione $du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u = 0$. Più generalmente studiamo le linee che soddisfano ad *un' equazione del secondo ordine*

$$(1) \quad a_{12}(du\delta^2 v - dv\delta^2 u) = a_{12}(Bdu^3 - Cdv^3) + 2ha_{12}dudv(l_1 du - l_2 dv)$$

ove con h indichiamo una costante. La equazione (1) è intrinseca, se la forma data $a_{12}(Bdu^3 - Cdv^3)$ è intrinseca, e se tale è $l_1 du - l_2 dv$, in altre parole se la forma data al secondo membro di (1) è intrinseca: noi l'abbiamo decomposta in due addendi, uno apolare ad F_2, l'altro divisibile per F_2. Se io pongo $x = \rho\overline{x}$, e indico con $\overline{a}_{12}$, $\overline{\delta^2 u}$ ecc. i nuovi valori di a_{12}, $\delta^2 u$, ecc., si ha: $a_{12} = \rho^2 \overline{a}_{12}$, $\delta^2 u = \overline{\delta^2 u} + 2 \frac{\rho_u}{\rho} du^2$, ecc. Se si vuole dunque che la (1) abbia un carattere invariante per collineazioni, bisogna far *la convenzione* che alla $x = \rho\overline{x}$, $a_{12} = \rho^2 \overline{a}_{12}$ corrispondano le $B = \overline{B}$, $\overline{C} = C$,

$$h\overline{l}_1 = hl_1 + \frac{\rho_u}{\rho} \qquad h\overline{l}_2 = hl_2 + \frac{\rho_v}{\rho}.$$

Se così è, diremo che la (1) è anche invariante. Dunque la (1) è intrinseca, se tale è il secondo membro; le (1) intrinseche anche invarianti sono definite da una forma $a_{12}(Bdu^3 - Cdv^3)$ che si trasformi come la F_3, e dai due punti $x_u + hl_1 x$, $x_v + hl_2 x$ delle tangenti asintotiche, o dalla retta che li congiunge che è posta sul piano tangente e che potremmo chiamare il *secondo asse* della (1).

Appare già di qui la *corrispondenza tra i differenziali* $\mathrm{h}(\mathrm{l}_1 \mathrm{du} - \mathrm{l}_2 \mathrm{du})$ *e le rette del piano tangente: corrispondenza tale che, al variare del parametro* h, *la retta corrispondente* (segnando due punteggiate proiettive [aventi il punto x comune] sulle due tangenti asintotiche) *descrive un fascio, cioè determina un punto* $\mathrm{l}_2 \mathrm{x}_\mathrm{u} - \mathrm{l}_1 \mathrm{x}_\mathrm{v}$ *del piano tangente.*

Chiameremo *primo asse* della (1) la retta polare del secondo asse rispetto alla quadrica di Lie, cioè l'intersezione dei piani $\xi_i + h\xi l_i$.

Il piano μ osculatore, e il punto M di regresso di una delle nostre linee sono il piano:

$$\xi \left[Bdu^3 - Cdv^3 + 2hdudv(l_1\, du - l_2\, dv) + \beta du^3 - \gamma dv^3 \right] +$$
$$+ 2\xi_u du^2 dv - 2\xi_v du dv^2$$

e il punto

$$x \left[Bdu^3 - Cdv^3 + 2hdudv(l_1\, du - l_2\, dv) - \beta du^3 + \gamma dv^3 \right] +$$
$$+ 2x_u du^2 dv - 2x_v du dv^2 .$$

Per ogni direzione $du:dv$ esce una delle nostre linee. Le precedenti formole dimostrano che al variare di $du:dv$

Tutte le linee soddisfacenti a (1) *uscenti da un punto* $\bar{\mathrm{x}}$ *della superficie hanno un punto di regresso che descrive una cubica razionale avente le asintotiche per tangenti nel punto doppio* $\bar{\mathrm{x}}$, *e il secondo asse della* (1) *per retta dei flessi; una proprietà duale vale per i piani osculatori. Al variare di* h *la retta dei flessi per la cubica e la retta cuspidale del cono duale descrivono due fasci polari rispetto alla quadrica di Lie.* (F.)

In particolare per le geodetiche $(\mathrm{B}=\mathrm{C}=\mathrm{l}_1=0)$ *la retta dei flessi è la retta* (ξ, Ξ) *e la retta cuspidale è la retta* (x, X). *La retta cuspidale per le geodetiche proiettive* (quelle relative alla forma normale φ_2) *è proprio la normale proiettiva.* Ecco una relazione tra geodetiche e normale, che ricorda l'analoga, ma più semplice relazione tra geodetiche e normale nella geometria metrica! (F.)

La nostra cubica si riduce a una retta soltanto se

$$\mathrm{B}=\beta, \quad \mathrm{C}=\gamma;$$

il cono duale si riduce a un fascio (come avviene per le geodetiche della geometria metrica) *soltanto se* $\mathrm{B}+\beta=\mathrm{C}+\gamma=0$.

In generale si ha: *I piani osculatori alle tre curve soddisfacenti a* (1) *e tangenti alle direzioni definite da* $(\mathrm{B}+\beta)\mathrm{du}^3=(\mathrm{C}+\gamma)\mathrm{dv}^3$ *si incontrano in una stessa retta. In particolare* $(\mathrm{B}=\mathrm{C}=\mathrm{l}_1=0)$ *cioè avviene delle tre geodetiche relative alla forma* F_2 *tangenti ad una direzione di Segre* (C.) Teoremi duali valgono per i punti di regresso.

Siano S ed S' due superficie in corrispondenza biunivoca, i cui punti sono caratterizzati da uguali valori delle coordinate u, v. Siano O ed O' due punti omologhi. Le curve C' di S', uscenti da O', i cui piani osculatori in O' passano per una retta fissa uscente da O', soddisfano in O' ad una equazione del tipo (1). Altrettanto avverrà per le curve C omologhe uscenti da O su S; e quindi i piani osculatori a queste curve C invilupperanno, come ha osservato esplicitamente il Castelnuovo, uno dei nostri coni di terza classe.

B) **Terne apolari** (*).

Siamo quindi condotti a studiare senz'altro quelle terne di curve *soddisfacenti ad* (1), *le cui direzioni formano una terna apolare alle asintotiche,* cioè quelle terne di curve, a cui corrispondono tre valori λ, $\lambda\varepsilon$, $\lambda\varepsilon^2$ di $du:dv$, ove $\varepsilon^3 = 1$. Supposto $h = 1$, i tre piani osculatori saranno:

$$\xi(D + E\varepsilon^r + F\varepsilon^{2r}) + 2\lambda^2\varepsilon^{2r}\xi_u - 2\lambda\varepsilon^r\xi_v$$

ove

$$D = (B + \beta)\lambda^3 - (C + \gamma)\,, \quad E = -2\lambda l_2\,, \quad F = 2l_1\lambda^2.$$

Ora i due piani $\xi_u - \rho\xi$ e $\xi_v - \sigma\xi$ individuano una retta uscente dal punto x della superficie considerata; e viceversa una retta uscente da x non posta sul piano tangente ξ determina due piani $\xi_u - \rho\xi$ e $\xi_v - \sigma\xi$. Queste quantità ρ e σ si potranno assumere pertanto a coordinate delle rette uscenti da x; esse diventano infinite per le rette poste sul piano ξ. In coordinate ρ, σ di retta i precedenti piani osculatori hanno per equazione

$$(D + E\varepsilon^r + F\varepsilon^{2r}) + 2\lambda^2\varepsilon^{2r}\rho - 2\lambda\varepsilon^r\sigma = 0.$$

E, se per un momento pensiamo ρ, σ come coordinate cartesiane in un piano ausiliario, queste equazioni determinano i lati di un triangolo avente per baricentro il punto $-\dfrac{F}{2\lambda^2}$, $\dfrac{E}{2\lambda}$. A questi valori di ρ, σ corrisponde la retta intersezione dei piani $\xi_u + l_1\xi$, $\xi_v + l_2\xi$. Perciò:

Tre curve soddisfacenti a (1), *uscenti da* $\overline{\mathrm{x}}$ *con direzioni formanti una terna apolare* (alle asintotiche) *hanno piani osculatori che formano un triedro, rispetto al quale il piano tangente* ξ *ha per retta polare il primo asse della* (1). (F.)

(*) Qui e nel seguito sono sovente tacitamente escluse le superficie rigate ($\beta\gamma = 0$).

Ecco una nuova proprietà geometrica di questa retta, a cui corrisponde una proprietà duale per il secondo asse.

Soltanto se $\mathrm{D} = 0$ *i tre piani osculatori precedenti formano un fascio, il cui asse è proprio il primo asse della* (1). (F.)

C) Le coppie apolari e la conica di Wilczynski. Interpretazione non euclidea della metrica proiettiva.

Recentemente (1923) il Wilczynski ha aggiunto ai precedenti risultati del Fubini una osservazione notevole. Consideriamo una coppia delle nostre curve con direzioni formanti una *coppia apolare,* cioè con direzioni coniugate, corrispondenti cioè ai valori $\pm\lambda$ di $du : dv$. Posto $\mu = \lambda^2$, i loro due punti di regresso determinano una retta, su cui giacciono evidentemente anche i punti (combinazione lineare dei precedenti) (*).

$$x\Big[(\beta - B)\mu + 2l_2\Big] + 2x_v\,, \qquad x\Big[(\gamma - C) + 2l_1\mu\Big] + 2\mu x_u.$$

Adottando a coordinate correnti di un punto $x'x + y'x_u + z'x_v$ del piano tangente proprio le x', y', z', *tale retta,* al variare di μ, *inviluppa la conica*

$$(x' - l_1 y' - l_2 z')^2 = (\beta - B)(\gamma - C)y'z'\,,$$

che tocca le tangenti asintotiche $\mathrm{y}' = 0$ e $\mathrm{z}' = 0$, *e rispetto alla quale il punto* $\overline{\mathrm{x}}$ *considerato della nostra superficie ha per polare precisamente il secondo asse della* (1)! Ciò che dà una ulteriore proprietà di questa retta. Prendiamo ora sulla nostra superficie accanto al punto $\overline{x}$ il punto infinitamente vicino $\overline{x} + \overline{dx} = x + x_u du + x_v dv$, cioè accanto al punto $x' = 1$, $y' = z' = 0$ anche il punto 1, du, dv. La retta che li congiunge incontra la precedente conica nei punti soddisfacenti alla:

$$(x' - l_1 y' - l_2 z') : y' : z' = \pm\sqrt{(\beta - B)(\gamma - C)du dv} : du : dv\,.$$

(*) Indichiamo con x, o con $\overline{x}$ un medesimo punto della superficie.

Proiettiamo i due punti precedenti $(1, 0, 0)$ ed $(1, du, dv)$, e queste due intersezioni dal punto $x' - l_1 y' - l_2 z' = z' = 0$. Troveremo le quattro rette.

$$H(x' - l_1 y' - l_2 z') - z' = 0,$$

corrispondenti ai seguenti 4 valori di H:

$$H = 0, \quad \frac{dv}{1 - l_1 du - l_2 dv} = dv, \quad \pm \frac{dv}{\sqrt{(\beta - B)(\gamma - C) du dv}}.$$

Perciò il birapporto di queste 4 rette, cioè dei precedenti 4 punti vale, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore:

$$1 + 2\sqrt{(\beta - B)(\gamma - C) du dv}.$$

Ora, assunta la precedente conica come assoluto di una metrica non euclidea, questo birapporto ha un logaritmo, che, a meno di un fattore numerico arbitrario, vale la distanza ds non enclidea di x, $x + dx$; per ds vale dunque la:

$$ds^2 = 2m(\beta - B)(\gamma - C) du dv$$

(m = costante numerica arbitraria).

Per $B = C = 0$ si ha la metrica (normale) del Fubini. Si ha quindi il teorema di Wilczynski:

Per le curve corrispondenti a valori arbitrarii di l_1, l_2, a_{12}, *p. es. per le geodetiche relative ad una qualsiasi forma* F_2 *avviene che, assunta la corrispondente conica come conica assoluto, la metrica non euclidea che ne viene definita coincide con la metrica proiettiva del Fubini; questa appare dunque come una metrica non euclidea ad assoluto variabile da punto a punto.* Questa interpretazione *della forma* $\mathrm{ds}^2 = 2\beta\gamma \mathrm{dudv}$ *è da porre accanto all'interpretazione che Čech ha dato per l'elemento lineare proiettivo.* (§ 13, B). Cfr. anche i teoremi di Bompiani (§ 21, B).

D) Curve di un fascio; l'asse della superficie.

Un caso particolare di equazioni (1) è quella a cui soddisfano le curve di un fascio, cioè le curve per cui

$$(2) \qquad \frac{1}{\lambda}\,\frac{du}{dv} = \text{cost.} \qquad (\lambda = \text{funzione di } u\,, v).$$

Differenziando (2) si trova che vale la (1), ove sia posto

$$B = C = 0\,, \quad h = 1\,, \quad l_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial \log \lambda a_{12}}{\partial u}\,,$$

$$l_2 = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial \log a_{12} : \lambda}{\partial v}.$$

Un tale sistema di curve sarà detto un *fascio* di curve.

Dunque anche per le curve di un fascio avviene che *i piani osculatori nel punto* $\overline{x}$ *della superficie* S *per quelle curve del fascio che escono da* $\overline{x}$ *inviluppano un cono di terza classe; la sua retta cuspidale* (intersezione dei tre piani cuspidali) *è la retta polare del piano tangente rispetto al triedro formato dai piani osculatori a* 3 *curve qualsiasi del fascio, le cui direzioni* λ, $\lambda\varepsilon$, $\lambda\varepsilon^2$ *formino una terna apolare.*

E questi tre piani osculatori passano proprio per tale retta cuspidale soltanto se $\beta\lambda^3 - \gamma = 0$, cioè se la terna di direzioni considerata è la terna delle direzioni di Segre. Per queste vale dunque il seg. teorema, molto analogo a quello precedentemente enunciato:

L'unica terna di curve di un fascio uscenti da un punto $\overline{x}$, *le cui direzioni formano una terna apolare, e i cui piani osculatori passano per una stessa retta è la terna corrispondente alle curve di Segre* (Č.)

Questa retta è poi la polare del piano tangente rispetto al triedro dei piani osculatori in $\overline{x}$ *ad un'altra terna qualsiasi di curve dello stesso fascio con direzioni formanti una terna apolare, p. es. alle tre curve di Darboux; e tale retta è anche la retta cuspidale del cono* *di terza classe inviluppato dai piani osculatori in* $\bar{\mathrm{x}}$ *alle curve di tale fascio; ed è anche polare del piano tangente rispetto al cono quadrico* (duale della conica di Wilczynski) *relativo al fascio considerato* (F).

Questa retta si dirà il *primo asse* della superficie in $\bar{x}$; la sua retta duale, posta sul piano tangente, si dirà il *secondo asse, che contiene i punti di regresso delle curve di Segre.*

Il primo asse (o, senz'altro, l'*asse*) *è l'intersezione dei piani*

$$(3)\qquad \begin{gathered} 2\xi_u - \left(\theta_u + \frac{1}{3}\frac{\gamma_u}{\gamma} - \frac{1}{3}\frac{\beta_u}{\beta}\right)\xi\,, \\ 2\xi_v - \left(\theta_v - \frac{1}{3}\frac{\gamma_v}{\gamma} + \frac{1}{3}\frac{\beta_v}{\beta}\right)\xi \end{gathered}$$

cioè la retta congiungente il punto x *al punto*

$$(4)\qquad \begin{aligned} 2x_{uv} &+ \left(\frac{1}{3}\frac{\gamma_v}{\gamma} - \frac{1}{3}\frac{\beta_v}{\beta} - \theta_v\right)x_u + \\ &+ \left(\frac{1}{3}\frac{\beta_u}{\beta} - \frac{1}{3}\frac{\gamma_u}{\gamma} - \theta_u\right)x_v \end{aligned}$$

I punti di regresso delle curve di Darboux (e dualmente i loro piani osculatori) godono di una proprietà assai meno semplice. Essi sono i punti

$$x\left\{\gamma + l_1\lambda^2\varepsilon^{2r} - l_2\lambda\varepsilon^r\right\} - x_u\lambda^2\varepsilon^{2r} - x_v\lambda\varepsilon^r$$

ove $$\lambda^3 = -\gamma:\beta\,,\quad l_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\log(\lambda a_{12})\,,$$

$$l_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\log(a_{12}:\lambda).$$

Ogni conica del piano tangente che nel punto $\bar{\mathrm{x}}$ (cioè nel punto $x' = 1$, $y' = z' = t' = 0$) *tocca p. es. la tangente asintotica* $z' = 0$ ha una equazione del tipo:

$$cy'^2 + 2gy'z' + 2fx'z' + hz'^2 = 0\,.$$

Determinati c, g, f, h in guisa che *essa contenga i 3 punti di regresso citati*, si riconosce subito che *essa passa anche per il punto ove l'altra tangente asintotica incontra il secondo asse.* (Č).

§ 24. — Le pangeodetiche. Il fascio canonico.

Noi abbiamo studiato non solo le geodetiche proiettive, ma anche più generalmente le geodetiche per ogni forma F_2. Ora studieremo le estremali per l'integrale dell'*elemento lineare proiettivo* $F_3 : F_2$, che, come sappiamo, *è sempre uguale a* $\varphi_3 : \varphi_2$. Le chiameremo *pangeodetiche.*

Se noi annulliamo la variazione prima di $\int \frac{\varphi_3}{\varphi_2}$, troviamo:

$$2\left(\frac{\gamma_u}{u'} - \beta_v u'\right) + \left(\frac{\gamma_v}{u'^2} - \beta_u u'^2\right) = 2\,\frac{\beta u'^3 + \gamma}{u'^3}\,u''$$

$$\left(u' = \frac{du}{dv}\,,\quad u'' = \frac{d^2u}{dv^2}\right)$$

che è la stessa equazione trovata al § 16 *E.* Questa equazione del Fubini è stata da Čech (§ 16 *E*, per le superficie ad asintotiche reali) scritta nella forma semplicissima:

$$(x\;dx\;d^2x\;d^3x) = (\xi\;d\xi\;d^2\xi\;d^3\xi).$$

Ricordando i risultati del § 5 se ne deduce l'osservazione dovuta pure al Čech:

Se due superficie hanno contatto del secondo ordine lungo una curva, questa, se è pangeodetica per una di esse, è pangeodetica anche per l'altra.

L'ultimo teorema del § 16 *E serve a dare una definizione geo-*

metrica delle pangeodetiche, perchè dà una proprietà caratteristica dei loro piani osculatori.

Il piano osculatore ad una pangeodetica, cioè il piano passante per x, $x_u u' + x_v$, $x_u u'' + x_{uu} u'^2 + 2x_{uv} u' + x_{vv}$, ove u'' è dato dalla precedente equazione, è il piano

$$w_2 \xi + w_0(2\xi_u - \theta_u \xi) + w_1(2\xi_v - \theta_v \xi),$$

ove:

$$w_2 = 2(\beta^2 du^6 - \gamma^2 dv^6) + (\beta_u du^4 - \gamma_v dv^4) du dv +$$

$$+ 2(\beta_v du^2 - \gamma_u dv^2) du^2 dv^2$$

$$w_0 = 2du^2 dv(\beta du^3 + \gamma dv^3)\,; \qquad w_1 = -2du dv^2(\beta du^3 + \gamma dv^3).$$

Posto $w_0 = \rho du$, $w_1 = -\rho dv$, sarà $-\rho^6 = 2w_0 w_1(\beta w_0^3 - \gamma w_1^3)$. Moltiplicando quindi per ρ^6 il valore di w_2, si trova:

$$0 = 2w_0 w_1 w_2 (\beta w_0^3 - \gamma w_1^3) + 2(\beta^2 w_0^6 - \gamma^2 w_1^6) - (\beta_u w_0^4 - \gamma_v w_1^4) w_0 w_1 +$$

$$+ 2w_0^2 w_1^2 (\beta_v w_0^2 - \gamma_u w_1^2).$$

Considerate le w_i come le coordinate di un piano uscente da $\bar{x}$, se ne deduce (cfr. l'ultimo teor. del § 22) che *l'inviluppo dei piani osculatori alle pangeodetiche uscenti da un punto coincide col cono di Segre ed è un cono Γ_6 di sesta classe, che tocca il piano tangente nelle 2 direzioni asintotiche e nelle 3 direzioni di Darboux* (F. e Č.) Al sistema lineare determinato da Γ_6 e dai due coni (degeneri) $w_0^6 = 0$, $w_1^6 = 0$ appartiene un solo cono spezzato nei fasci $w_0 = 0$, $w_1 = 0$ dei piani passanti per una tangente asintotica e in un cono Γ_4 di quarta classe. L'equazione di Γ_4 si trova essere:

$$0 = 2w_2(\beta w_0^3 - \gamma w_1^3) + (\gamma_v w_1^4 - \beta_u w_0^4) + 2w_0 w_1(\beta_v w_0^2 - \gamma_u w_1^2).$$

Troviamo (Introd. § 4 *C*) le rette *principali* di questi due coni. Dobbiamo cercare, tra i coni del sistema lineare determinato da Γ_4 e dai fasci di piani aventi per sostegno una retta di Darboux, ciascuno contato quattro volte, quel cono che si spezza in questi tre fasci di piani, e in un quarto fascio, il cui sostegno sarà la retta principale di Γ_4. E uno studio analogo si farà poi per Γ_6.

Un facile calcolo dimostra che la retta *principale* di Γ_4 è

$$w_2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \log \gamma\beta^2}{\partial u} w_0 + \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial v} w_1\right) = 0,$$

cioè è la retta d' intersezione dei piani

$$(1) \quad 2\xi_u + \left(\frac{1}{3}\frac{\partial \log \gamma\beta^2}{\partial u} - \theta_u\right)\xi, \quad 2\xi_v + \left(\frac{1}{3}\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial v} - \theta_v\right)\xi,$$

cioè è la retta che congiunge x ad

$$(1)_{\text{bis}} \quad x_{uv} + \frac{1}{6}\left(-3\theta_u + \frac{\partial \log \gamma\beta^2}{\partial u}\right)x_v + \\ + \frac{1}{6}\left(-3\theta_v + \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial v}\right)x_u.$$

Così la retta *principale* di Γ_6 è la retta intersezione dei piani

$$(2) \quad 4\xi_u + \left(\frac{1}{3}\frac{\partial \log \gamma^4\beta^5}{\partial u} - 2\theta_u\right)\xi, \quad 4\xi_v + \left(\frac{1}{3}\frac{\partial \log \beta^4\gamma^5}{\partial v} - 2\theta_v\right)\xi$$

che congiunge x al punto

$$(2)_{\text{bis}} \quad x_{uv} + \frac{1}{12}\left(\frac{\partial \log \beta^4\gamma^5}{\partial v} - 6\theta_v\right)x_u + \frac{1}{12}\left(\frac{\partial \log \gamma^4\beta^5}{\partial u} - 6\theta_u\right)x_v$$

da confrontare con le (2) e (3) del precedente § relative all'asse.

In coordinate *normali* ($\beta\gamma = a_{12}$) l'asse e le rette principali sono quelle che congiungono il punto x al punto:

$$(3) \quad \begin{cases} x_{uv} - \frac{1}{3}\left(\frac{\gamma_v}{\gamma} + 2\frac{\beta_v}{\beta}\right)x_u - \frac{1}{3}\left(\frac{\beta_u}{\beta} + 2\frac{\gamma_u}{\gamma}\right)x_v \ \text{(asse) (Č.)} \\ x_{uv} - \frac{1}{6}\left(\frac{\gamma_v}{\gamma} + 2\frac{\beta_v}{\beta}\right)x_u - \frac{1}{6}\left(\frac{\beta_u}{\beta} + 2\frac{\gamma_u}{\gamma}\right)x_v \\ x_{uv} - \frac{1}{12}\left(\frac{\gamma_v}{\gamma} + 2\frac{\beta_v}{\beta}\right)x_u - \frac{1}{12}\left(\frac{\beta_u}{\beta} + 2\frac{\gamma_u}{\gamma}\right)x_v \end{cases} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\\d\end{matrix}}\right\} \text{(rette } \textit{principali}\text{) (F.)}$$

Si noti che la retta congiungente x al punto

$$(3)_{\text{bis}} \qquad x_{uv} - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_v}{\gamma} + 2\frac{\beta_v}{\beta}\right)x_u - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_u}{\beta} + 2\frac{\gamma_u}{\gamma}\right)x_v \qquad \text{(F.)}$$

si può (F) definire come la retta *pseudoprincipale*, la quale è sostegno di un fascio di piani, che, insieme ai fasci di piani aventi per sostegno una retta di Darboux, formano un cono (degenere) appartenente al sistema lineare determinato da Γ_4 e dai fasci di piani aventi per sostegno una tangente asintotica, ciascuno contato 4 volte.

L'asse, le rette principali (3) e $(3)_{\text{bis}}$ *e la normale proiettiva appartengono ad uno stesso fascio; il fascio canonico*, in cui troveremo ben presto altre rette fondamentali per la teoria.

Così p. es. *la normale proiettiva si potrebbe definire come l'unica retta del fascio canonico, le cui sviluppabili corrispondono per una superficie generica ad un sistema coniugato.* Noi chiameremo *canoniche* tutte le rette congiungenti x ad

$$x_{uv} + \lambda\left(\frac{\gamma_v}{\gamma} + 2\frac{\beta_v}{\beta}\right)x_u + \lambda\left(\frac{\beta_u}{\beta} + 2\frac{\gamma_u}{\gamma}\right)x_v,$$

ove λ *ha un valore numerico* $\left(\lambda = -\frac{1}{3}\right.$ per l'asse, $\lambda = -\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{12}$, $-\frac{1}{2}$ per le rette principali, $\lambda = 0$ per la normale proiettiva$\left.\right)$.

§ 25. — Congruenze di rette (*).

A) Sviluppabili e fuochi.

Abbìamo già visto al § 23 che a un differenziale $l_1 du - l_2 dv$ corrisponde una coppia di rette duali: la retta r' congiungente i punti $x_u + l_1 x$, $x_v + l_2 x$, intersezione dei piani ξ e $\xi_{uv} + l_1 \xi_v +$

(*) Oltre ai primi studii del Fubini negli Atti della R. Accad. di Torino (1918) si devono ricordare le posteriori, ma importanti ricerche del Green.

$+ l_2 \xi_u$, e la retta r duale, intersezione dei piani $\xi_u + l_1 \xi$, $\xi_v + l_2 \xi$ congiungente i punti x ed $x_{uv} + l_1 x_v + l_2 x_u$.

Noi preferiremo considerare queste due rette come *definite dal differenziale coniugato* $l_1 du + l_2 dv$, convenendo che ad una trasformazione $x = \rho \bar{x}$ corrisponda la $\bar{l}_i = l_i + \frac{\rho_i}{\rho}$ per $i = 1, 2$. Sovente scriveremo $l = l_2$, $l_1 = m$.

Al variare di u, v la retta r descrive una congruenza K, la r' una congruenza K', che diremo congruenze *duali*. Cerchiamo i fuochi della retta r della congruenza K. Se $x + R(x_{uv} + lx_u + mx_v)$ ne è un fuoco, devono potersi trovare $du : dv$ e due parametri λ, μ in guisa che:

$$dx + Rd(x_{uv} + lx_u + mx_v) = \lambda x + \mu(x_{uv} + lx_u + mx_v).$$

Tenuto conto delle equazioni fondamentali I, il primo membro si potrà scrivere nella forma $Ax_u + Bx_v + Cx_{uv} + Dx$; sarà $D = \lambda$, $C = \mu$, $B = \mu m$, $A = \mu l$, cioè dovrà essere $B = mC$, $A = lC$.

Ora si trova:

$$C = R(d\theta + ldv + mdu),$$

$$A = du + R\left[(\beta\gamma + \theta_{uv})du + dl + l\theta_u du + m\gamma dv + \pi_{22} dv\right],$$

e una formola analoga per B. Eliminando dalle $B - mC = A - lC = 0$ la R, si giunge *all'equazione delle sviluppabili di* K:

$$(1) \quad 0 = \left(\pi_{11} + \frac{\partial m}{\partial u} - m\theta_u + l\beta - m^2\right)du^2 + (m_v - l_u)dudv + \\ + (-\pi_{22} - l_v + l\theta_v - m\gamma + l^2)dv^2.$$

Incidentalmente voglio osservare che *alla terza forma fondamentale* $\pi_{11} du^2 + \pi_{22} dv^2$ di una superficie si poteva giungere anche studiando tale equazione (1) p. es. per $l = m = 0$.

Eliminando invece $du : dv$ e ponendo $R = \rho : a_{12}$ (cosicchè ρ avrà significato intrinseco) si giunge all'equazione che determina i fuochi

$$(2) \quad \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\left[2\frac{\beta\gamma}{a_{12}} + \frac{2}{a_{12}}\theta_{uv} + \frac{1}{a_{12}}(l_u + m_v - 2lm)\right] + \ldots = 0.$$

L'equazione delle *sviluppabili* di K' *si otterrà da* (1) *cambiando* β, γ *in* $-\beta, -\gamma$ *e* π_{ii} *in* p_{ii}. Ricordo che:

$$(3) \quad \begin{cases} \pi_{11} = \frac{1}{2}(q_{11} + \beta_v + \beta\theta_v) & p_{11} = \frac{1}{2}(q_{11} - \beta_v - \beta\theta_v) \\ \pi_{22} = \frac{1}{2}(q_{22} + \gamma_u + \gamma\theta_u) & p_{22} = \frac{1}{2}(q_{22} - \gamma_u - \gamma\theta_u) \end{cases}$$

Se $a_{12} = \beta\gamma$, ed $l = m = 0$, cioè se r è la normale proiettiva, i valori di $\frac{1}{\rho}$ diconsi le curvature (proiettive), i valori di ρ i raggi proiettivi di curvatura, perchè nella metrica proiettiva sono le distanze dai fuochi di una normale proiettiva al suo piede. La (2) dimostra che:

La semicurvatura proiettiva media $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$ *vale la curvatura della forma* φ_2 *diminuita di* 1; teorema che ricorda l'analogo di Gauss per la curvatura totale di una superficie nella geometria metrica. (F.)

I centri di curvatura e i punti x, X si dividono armonicamente se φ_2 ha la curvatura $+1$, cioè *se la quadrica di Lie e la quadrica normale coincidono.* (Č.)

Una congruenza $K(K')$ si dirà *coniugata (armonica)* alla superficie, se le sue sviluppabili corrispondono a un sistema *coniugato* di questa, o sono indeterminate. Basta osservare la (1) per concludere:

Quando la congruenza K *è coniugata alla superficie, la* K' *è armonica; ciò che avviene soltanto quando* $l dv + m du$ *è un differenziale esatto; nel qual caso,* con una trasformazione di coordinate $x = \rho\bar{x}$, *si può renderlo identicamente nullo,* donde segue:

La più generale congruenza K *coniugata alla superficie è quella delle rette congiungenti* x *a* $(\rho x)_{uv}$ *ossia a* $\Delta_2(\rho x)$.

Ricordando qual'è il modo più semplice per determinare un ρ (§ 15 *D*) ne deduciamo (F.):

La più semplice congruenza K *coniugata alla superficie e determinata in modo intrinseco invariante è quella delle normali proiettive.* Teoremi duali si hanno per K'.

B) Le direttrici di Wilczynski.

Ci chiediamo: *Quando si corrispondono le sviluppabili di* K, K′?

Caso 1°) $l_u \neq m_v$; le sviluppabili non sono indeterminate, nè corrispondono a un sistema coniugato. In tal caso dovrà essere:

$$\pi_{11} + l\beta = p_{11} - l\beta \qquad \pi_{22} + m\gamma = p_{22} - m\gamma$$

ossia per le (3), se $\beta\gamma \neq 0$:

$$(4) \qquad l = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log \beta a_{12}}{\partial v} \qquad m = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log \gamma a_{12}}{\partial u}.$$

La retta canonica per $\lambda = -\frac{1}{2}$, *già trovata al* § 24 *coincide con la retta* r *qui determinata.*

La retta r corrispondente si dirà *direttrice*, o *prima direttrice*, la r' *seconda direttrice*; la loro scoperta è dovuta a Wilczynski, che le ha definite come *le direttrici della congruenza comune ai complessi lineari osculatori delle due asintotiche* (*). Per dimostrarne questa loro proprietà basterà dimostrare che *esse sono il luogo dei punti che hanno lo stesso piano polare in questi due complessi.* Ora noi sappiamo (§ 18 *B*) che, considerate le ξ come coordinate del piano osculatore ad una asintotica, esse seguono le nostre convenzioni relative alle curve; e perciò nel sistema nullo osculatore ad una asintotica $v =$ cost. al punto

$$x_{uu} - \theta_u x_u - \frac{1}{2} q_{11} x \text{ corrisponde il piano } \xi_{uu} - \theta_u \xi_u - \frac{1}{2} q_{11} \xi$$

(*) Bompiani ne ha scoperto la seguente proprietà. Demoulin ha dimostrato che le quadriche di Lie hanno un inviluppo che tocca la quadrica di Lie relativa a un punto P della superficie, oltre che in P, in 4 punti vertici di un quadrangolo, di cui quattro lati appartengono alla quadrica di Lie, e i due rimanenti sono reciproci rispetto ad essa. *Una direttrice di Wilczynski si può definire come la retta uscente da* P *che si appoggia a questi due lati.*

cioè, per le equazioni fondamentali I, al punto A

$$\beta x_v + \left(p_{11} - \frac{1}{2} q_{11}\right)x = \beta x_v - \frac{1}{2}(\beta_v + \beta\theta_v)x$$

corrisponde il piano

$$-\left[\beta\xi_v - \frac{1}{2}(\beta_v + \beta\theta_v)\xi\right],$$

i quali evidentemente si corrispondono anche nel sistema nullo osculatore dell'altra asintotica $u=$cost. Altrettanto dicasi del punto B di coordinate $\gamma x_u - \frac{1}{2}(\gamma_u + \gamma\theta_u)x$ e del piano corrispondente. La retta AB, che è precisamente *la seconda direttrice sopra definita, ha dunque nei due sistemi nulli la stessa retta polare, che è precisamente la prima direttrice, duale di AB, cioè polare di AB anche rispetto alla quadrica di Lie. Dalla teoria delle superficie rigate seguirà poi che* A *e* B *sono i coniugati armonici del punto considerato* $\bar{x}$ *della superficie* S *rispetto ai punti flecnodali delle corrispondenti generatrici delle rigate asintotiche uscenti da* $\bar{x}$; ciò che dà un *quarto* modo per definire la retta AB. (Ricorderò qui che Wilczynski ha anche studiato i complessi lineari osculatori alle rigate asintotiche).

1ª Oss. Se la superficie iniziale è rigata, p. es. $\beta = 0$, *per tutte le congruenze* K, K' *definite, scegliendo* l *ad arbitrio e ponendo*

$$m = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log \gamma a_{12}}{\partial u}$$

avviene che alle sviluppabili di K *corrispondono le sviluppabili di* K'.

2ª Oss. Non si esclude che i valori (4) soddisfino alla $l_u = m_v$. Si vede subito che ciò avviene ossia che *le congruenze delle direttrici sono coniugate od armoniche alla superficie soltanto se questa è isotermo asintotica* $\left(\frac{\partial^2 \log\beta : \gamma}{\partial u \partial v} = 0\right)$.

C) Congruenze *K* coniugate e *K'* armoniche ad *S*, tra cui si corrispondono le sviluppabili.

Rispondiamo ora alla domanda postaci in *B)* nel caso di congruenze armoniche coniugate ad S, cioè nel caso $l_u = m_v$. Le sviluppabili si corrispondono se, posto $l = -\frac{\partial \log \Phi}{\partial v}$, $m = -\frac{\partial \log \Phi}{\partial u}$, è:

$$\frac{\beta\Phi_v - \frac{1}{2}(\beta_v + \beta\theta_v)\Phi}{\Phi_{uu} - \theta_u\Phi_u - \frac{1}{2}q_{11}\Phi} = \frac{\gamma\Phi_u - \frac{1}{2}(\gamma_u + \gamma\theta_u)\Phi}{\Phi_{vv} - \theta_v\Phi_v - \frac{1}{2}q_{22}\Phi}.$$

Oppure, essendo $l_u = m_v$, potremmo, cambiando il fattore di proporzionalità delle x, rendere, come già sappiamo, $l = m = 0$. La nostra condizione diventa allora semplicemente: $\pi_{11} : p_{11} = \pi_{22} : p_{22}$ equivalente alla $p_{11} : q_{11} = p_{22} : q_{22}$ [cfr. le (3)].

Una semplice proprietà geometrica di queste congruenze si trova, ponendoci con Čech la seguente domanda: *Quando mai si può scegliere sulla retta* r *in* ∞^1 *modi un punto* P *ed in corrispondenza il piano* π *che lo proietta da* r'*, in guisa che al variare di* r *il punto* P *descriva una superficie* S'*, di cui* π *è il piano tangente?*

Se con x' e ξ' indico, per brevità, le coordinate di P, π, dovrà essere:

$$S\xi' x' = S\xi' x_u' = S\xi' x_v' = 0.$$

Per ipotesi esistono due parametri ρ, σ tali che:

$$x' = x_{uv} + l x_u + m x_v + \rho x, \qquad \xi' = \xi_{uv} + l\xi_u + m\xi_v + \sigma\xi.$$

Sostituendo nelle precedenti e trascurando i termini che non dipendono nè da ρ, nè da σ, si trova:

$$\rho = -\sigma + \ldots \quad \rho_u = (\theta_u + 2m)\rho + \ldots \quad \rho_v = (\theta_v + 2l)\rho + \ldots$$

Per l'ipotesi fatta *la posizione iniziale di* P *è arbitraria, perchè alle congruenze* K, K' *corrispondono* ∞^1 *superficie* S'. Le condizioni d'integrabilità delle precedenti equazioni in ρ devono pertanto essere identicamente soddisfatte. *Ciò dà* $l_u = m_v$, *provando che le congruenze* K, K' *devono essere coniugate alla superficie* S; e, variando il solito fattore di proporzionalità delle coordinate omogenee, potremo supporre $l = m = 0$, e quindi:

$$x' = x_{uv} + \rho x \qquad \xi' = \xi_{uv} + \xi\sigma.$$

E quindi

$$x_u' - \theta_u x' = Ex_u + Fx_v + \left(\beta p_{22} + \frac{\partial p_{11}}{\partial v} + \rho_u - \rho\theta_u\right)x,$$

ove non ci interessano i valori di E, F. La $S\xi' x' = 0$ determina $\sigma + \rho$; la $S\xi' x'_u = 0$ diventa, per le precedenti:

$$\rho_u = \rho\theta_u - \frac{\partial p_{11}}{\partial v} - \beta p_{22}.$$

E la $S\xi' x'_v = 0$ dà analogamente:

$$\rho_v = \rho\theta_v - \frac{\partial p_{22}}{\partial u} - \gamma p_{11}.$$

La condizione d'integrabilità è:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{p_{11v} + \beta p_{22}}{a_{12}}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{p_{22u} + \gamma p_{11}}{a_{12}}\right)$$

che, in virtù della ultima delle (12) § 16, diventa:

$$p_{22}(\beta_v + \beta\theta_v) = p_{11}(\gamma_u + \gamma\theta_u),$$

che equivale alle precedenti $p_{11} : \pi_{11} = p_{22} : \pi_{22}$ in virtù delle (3).

Alla domanda sopra postaci *soddisfano perciò tutte e sole le congruenze* K, K′ *armoniche ad* S, *su cui si corrispondono le sviluppabili.*

D) Le superficie a curvatura — 2.

Possiamo chiederci con Čech anche *quando mai si può in* ∞^1 *modi scegliere su* r′ *un punto* P *il quale generi una superficie* Σ, *a cui sia tangente il piano* π *che da* P *proietta* r. Se P è il punto

$$x' = \lambda(x_u + mx) + \mu(x_v + lx),$$

il piano π è

$$\xi' = \lambda(\xi_u + m\xi) - \mu(\xi_v + l\xi).$$

La condizione $S\xi' dx' = 0$ dà, posto $\rho = \lambda : \mu$

$$\rho_u = \beta\rho^2 - (2m + \theta_u)\rho \qquad \rho_v = -\gamma + (2l + \theta_v)\rho.$$

La condizione d'integrabilità, che deve essere soddisfatta identicamente in ρ, dà:

$$2l = -\frac{\beta_v}{\beta} - \theta_v \qquad 2m = -\frac{\gamma_u}{\gamma} - \theta_u$$

$$l_u + m_v + (\beta\gamma + \theta_{uv}) = 0\,.$$

Dalle prime due si trae: *Le congruenze cercate sono quelle delle direttrici di Wilczynski.* E l'ultima dà poi, sostituendovi i valori trovati delle l, m, l'equaz. di Liouville:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log\beta\gamma}{\partial u \partial v} + \beta\gamma = 0.$$

Si trova così che, cambiando i parametri delle u, v si può porre $\beta\gamma = (u + v)^{-2}$; si trova poi dalle equaz. precedenti:

$$\frac{\gamma}{\rho} = \frac{k-u}{k+v}\,\frac{1}{u+v}\,, \qquad \beta\rho = \frac{k+v}{k-u}\,\frac{1}{u+v} \qquad (k = \text{cost.})$$

cioè: *Le superficie* S *per cui esistono due congruenze duali* K, K′ *del tipo richiesto sono quelle, per cui la curvatura della forma* φ_2 *vale* -2; *e per queste superficie le congruenze* K, K′ *sono quelle delle direttrici di Wilczynski. La* S *ed ogni* Σ, *come è facile riconoscere, sono falde focali di una congruenza* C. Infatti, posto $\mu = 1$, $\lambda = \rho$, il calcolo effettivo dimostra che $x'_v - \rho x'_u$ è combinazione lineare di x e di $\rho x_u + x_v$, cioè di x ed x', precisamente come avviene di $\rho x_u + x_v = x' - (\rho m + l)x$.

Quelle delle precedenti superficie che sono isotermo-asintotiche (per cui cioè si può supporre $\beta = \gamma$) *sono tutte e sole le superficie, di cui le asintotiche appartengono a complessi lineari.* (§ 18 C). In tal caso la C è congruenza W.

E) Le congruenze a sviluppabili indeterminate.

Vogliamo verificare col calcolo diretto che le congruenze K a sviluppabili indeterminate sono quelle, le cui rette escono da un punto fisso, insieme al teorema duale per K'. Se le sviluppabili di K sono indeterminate, è $l_u = m_v$ ed esiste una funzione Φ tale che $-d\log\Phi = mdu + ldv$.

Esprimendo che (1) è un'identità si trova:

$$\Phi_{uu} = \theta_u \Phi_u - \beta\Phi_v + \pi_{11}\Phi\,, \qquad \Phi_{vv} = \theta_v \Phi_v - \gamma\Phi_u + \pi_{22}\Phi$$

Perciò Φ è una combinazione lineare $b\xi + c\eta + e\zeta + f\tau$ delle coordinate di piano tangente con $b\,, c\,, e\,, f =$ cost.; la retta r generica della congruenza K è l'intersezione dei piani $\xi' = \xi\Phi_v - \Phi\xi_v$, $\xi'' = \xi\Phi_u - \Phi\xi_u$. È evidente che questi due piani passano per il punto fisso $(b\,, c\,, e\,, f)$, per cui passano dunque tutte le rette di K.

Se, come in casi analoghi, avessimo cambiato coordinate omogenee in guisa che $l = m = 0$, cioè $\Phi = 1$, la (1) sarebbe riuscita un'identità se $\pi_{11} = \pi_{22} = 0$. Cambiando tetraedro di riferimento, avremmo potuto rendere la quarta coordinata τ del piano tangente uguale ad 1; la retta r, intersezione di $\xi_u\,, \xi_v$ sarebbe passata sempre per il punto $x = y = z = 0$. Ci chiediamo ora: *Quando avviene che le sviluppabili sia di* K *che di* K' *sono indeterminate?* In tal caso si possono (essendo $mdu + ldv$ un differenziale esatto) scegliere le coordinate omogenee di punto in guisa che $l = m = 0$. Le sviluppabili saranno indeterminate se $p_{11} = p_{22} = \pi_{11} = \pi_{22} = 0$. L'essere $p_{11} = p_{22} = 0$ significa che, cambiando il tetraedro di riferimento, si può rendere p. es. la $t = 1$, in modo che le $x\,, y\,, z$ siano coordinate *non omogenee*. Essendo $\pi_{11} = \pi_{22} = 0$ le coordinate di piano tangente devono soddisfare ad una equazione lineare a coefficienti costanti:

$$h\xi + k\eta + r\zeta + \tau = \text{cost.}, \quad (h\,, k\,, r = \text{cost.})$$

(Cfr. più sotto). Scritta l'equazione del piano tangente nella forma:

$$\xi(x - h) + \eta(y - k) + \zeta(z - r) + (\tau + h\xi + k\eta + \zeta r) = 0$$

se ne deduce che, con una traslazione di assi ed una similitudine, tale piano acquista l'equazione

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 1 ;$$

le nostre superficie (come si vede interpretando x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali) *sono dunque quelle, i cui piani tangenti hanno la distanza* $\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$ *dall'origine, ossia* (§ 18 A) essendo ξ, η, ζ di Lelieuvre, *sono quelle per cui tale distanza vale* $\sqrt[4]{-\frac{1}{K}}$, *ove* K *qui indica la curvatura totale di Gauss* (o almeno si riducono a queste superficie con un cambiamento di assi coordinati).

Si potrebbe anche dire che *le nostre superficie sono quelle, a cui,* secondo le nostre convenzioni, *a coordinate non omogenee* ($t = 1$) *di punto corrispondono coordinate non omogenee di piano.*

Noi abbiamo scritto poco fa la relazione lineare che lega le ξ, η, ζ, τ (in virtù delle $\pi_{ii} = 0$) nella forma $h\xi + k\eta + r\zeta + \tau = \text{cost.}$ Ciò è lecito, escluso il caso che tale equazione abbia la forma $h\xi + k\eta + r\zeta = \text{cost.}$, e non contenga τ. In questo caso, cambiando assi, posso ridurre p. es. $\xi = 1$, pure conservando $t = 1$. La congruenza K luogo delle rette (ξ_u, ξ_v) appare (quando il piano $t = 0$ si consideri come piano all'∞) come la congruenza delle rette parallele all'asse delle x, e la congruenza K' come la congruenza delle rette all'infinito. *Questo è dunque il caso particolare che si presenta quando il punto comune alle rette di* K *giace nel piano stesso, a cui appartengono le rette di* K'.

Si noti ancora che dalle $\pi_{ii} = p_{ii} = 0$ segue $\beta\theta_v + \beta_v = \gamma\theta_u + \gamma_u = 0$; *la retta* r *che genera* K *è la retta che unisce* x *ad* x_{uv}, *che, per tali condizioni, è la direttrice.* Partendo da questo fatto studieremo di nuovo queste superficie al § 28.

§ 26. — Lo spigolo *(edge)* di Green.

Cerchiamo il polo B di una tangente asintotica (x, x_v) in un punto x della nostra superficie rispetto alla conica osculatrice dell'altra asintotica $v = \text{cost.}$ nella sola ipotesi $\beta \neq 0$. Secondo le convenzioni del Cap. I°, a forma cubica F_3 dell'asintotica $v = \text{cost.}$

posso assumere la forma

$$\frac{1}{2} S(x_u \xi_{uu} - \xi_u x_{uu}) du^3 = \beta a_{12} du^3,$$

e come coordinate t della sua retta tangente le

$$t = \frac{1}{\sqrt[3]{a_{12}\beta}} (x\,,\, x_u).$$

Dal § 7 D si deduce che il polo della retta $t_u + \frac{4}{3}\sigma t$ rispetto alla conica osculatrice della $dv = 0$ è il punto $x_u + \sigma x$. Posto $\sigma = -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial u}\log(a_{12}^2 : \beta)$, se ne deduce che *il polo della retta* (x, x_v), *cioè della tangente all'asintotica* $u =$ cost., *è il punto* B

$$(1) \qquad x_u - \frac{1}{4}\frac{\partial \log a_{12}^2 : \beta}{\partial u} x.$$

Il punto B si può anche *definire come il polo della retta* $(x\, x_v)$ *rispetto alla conica osculatrice della proiezione dell'asintotica* $v =$ cost. *fatta sul piano tangente* ξ *da un punto qualsiasi* V *del piano*

$$(2) \qquad \xi_u - \frac{1}{4}\frac{\partial \log a_{12}^2 : \beta}{\partial u} \xi\,,$$

che è il piano polare di B *sia nella polarità di Lie, che in quella definita dal sistema nullo osculatore alla* $v =$ cost. (Č.)

Analogamente, se $\gamma \neq 0$, definiamo un punto A sulla tangente asintotica $(x\,,\, x_u)$. La retta AB si dirà *il secondo spigolo, la retta duale il primo spigolo, o senz'altro lo spigolo.*

Ne segue: *I punti* A, B *ove il secondo spigolo taglia le tangenti asintotiche sono coniugati rispetto ai due coni quadrici osculatori alle asintotiche (nel punto* x *considerato sulla superficie* S) *i quali abbiano il vertice* V *sul primo spigolo.*

Consideriamo una retta del piano tangente ξ passante per il punto B, e la retta duale congiungente x ad $x_{uv} + l x_u -$

$-\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial \log a_{12}^2 : \beta}{\partial u} x_v$ (dove l è per ora arbitrario). Scrivendo la condizione che i coefficienti di du^2 nelle equazioni delle sviluppabili di K, K' coincidano, troviamo $l\beta + \dfrac{1}{2}(\beta_v + \beta\theta_v) = 0$. Quindi:

Se $\beta \neq 0$, la retta r congiungente x ad

$$x_{uv} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\log(\beta a_{12}) x_u - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial u}\log(a_{12}^2 : \beta) x_v \tag{3}$$

gode delle proprietà dello spigolo per ciò che riguarda la asintotica v=cost.; *l'involuzione di direzioni di cui una coppia corrisponde alle sviluppabili della congruenza* K *luogo di* r, *e un'altra coppia alle sviluppabili della congruenza duale* K' *ha per raggio doppio la tangente all'asintotica* v = cost.

Nel caso $\gamma = 0$ Sullivan era giunto a questa retta studiando i complessi osculatori alla superficie rigata data; e Green l'aveva per le rigate (cioè appunto nel caso $\gamma = 0$) sostituita alla direttrice del Wilczynski. Green, dopo il Fubini, ma in modo indipendente, era poi giunto al concetto di normale proiettiva cercando una retta del fascio determinato dall'asse e dalla direttrice, la quale generasse una congruenza coniugata alla superficie data; con questo metodo però, come già abbiamo osservato, non si *riconosce la necessità* della definizione da noi posta per la normale proiettiva.

§ 27. — Il fascio canonico.

Le rette (§ 24, 25 *B* e 26) *congiungenti* x *ad*

$$x_{uv} + \lambda\left(\frac{\partial \log\beta^2\gamma}{\partial v} x_u + \frac{\partial \log\beta\gamma^2}{\partial u} x_v\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \dfrac{\beta\gamma}{a_{12}}}{\partial v} x_u + \frac{\partial \log \dfrac{\beta\gamma}{a_{12}}}{\partial u}\right),$$

[di cui l'ultimo termine si annulla in coordinate normali] *descri-*

vono il fascio canonico. Precisamente per

$\lambda = 0$ *si ha la normale proiettiva,* (F.)

$\lambda = -\frac{1}{2}$ *si ha la direttrice,* (di Wilczynski) (Cfr. anche § 24)(F.)

$\lambda = -\frac{1}{4}$ *si ha lo spigolo,* (di Green)

$\lambda = -\frac{1}{3}$ *si ha l'asse,* (di Čech) (*)

$\lambda = -\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}$ *si hanno le rette principali,* (F.)

$\lambda = \infty$ *si ha la tangente canonica della data superficie,* (F.)

$\lambda =$ *costante numerica* si ha *una retta canonica.*

Tutte queste rette formano, a 4 a 4, birapporti soltanto numerici. Così p. es. la retta coniugata armonica della tangente canonica rispetto alla normale proiettiva e alla direttrice è lo spigolo; la coniugata della tangente canonica rispetto alla normale proiettiva e all'asse è una delle rette principali; la coniugata della tangente canonica rispetto alla normale e alla precedente retta principale è l'altra retta principale. Lo spigolo e la direttrice dividono armonicamente la normale e l'asse.

Solo le rette normali descrivono per qualunque superficie una congruenza coniugata alla superficie; un'altra delle precedenti gode

(*) Le rette congiungenti x ad

$$x_{uv} + \sqrt[3]{\beta\gamma^2}\, x_u + \sqrt[3]{\beta^2\gamma}\, x_v - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\, x_u - \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\, x_v\right),$$

dove i $\sqrt[3]{\ }$ sono scelti in modo che il loro prodotto sia $\beta\gamma$, sono (Bompiani) intersezione dei piani osculatori a due linee di Darboux e del piano osculatore ad una linea di Segre.

della stessa proprietà soltanto se la superficie è isotermo asintotica, nel qual caso la congruenza generata da una qualsiasi retta canonica è coniugata alla superficie.

Quando mai le rette canoniche coincidono tutte tra loro? Evidentemente soltanto se

$$\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} = \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} = 0,$$

cioè se le linee di Darboux sono geodetiche per l'elemento lineare $2\beta\gamma du dv$ (Bompiani).

Cambiando i parametri u, v delle asintotiche potrò allora rendere $\beta = \gamma = 1$; e le coordinate normali ($a_{12} = \beta\gamma = 1$) soddisferanno alle:

$$x_{uu} = x_v + xp_{11} \qquad x_{vv} = x_u + xp_{22}.$$

La condizioni d'integrabilità danno tosto:

$$p_{11} = cu + h \qquad p_{22} = cv + k \qquad (c, h, k = \text{cost.})$$

Le superficie di coincidenza (per cui cioè coincidono le rette canoniche) *sono le superficie, i cui punti soddisfano a equazioni del tipo:*

$$(1) \qquad x_{uu} = x_v + x(cu + h), \qquad x_{vv} = x_u + x(cu + k).$$
$$(c, h, k = \text{cost.})$$

e sono tutte tra di loro proiettivamente applicabili (perchè hanno gli stessi valori di β, γ). Queste equazioni si integrano immediatamente nel caso $c = 0$.

In tal caso, posto $x = Ae^{mu+nv}$ ($A, m, n = \text{cost.}$), si trova:

$$m^2 = n + h, \qquad n^2 = m + k, \qquad \text{ossia } (m^2 - h)^2 = m + k.$$

Se m_i ($i = 1, 2, 3, 4$) sono le 4 radici di questa equazione (supposte distinte), ed n_i i corrispondenti valori della n, a coordinate dei punti della nostra superficie potremo addottare le:

$$(2) \qquad x = e^{m_1 u + n_1 v}, \quad y = e^{m_2 u + n_2 v}, \quad z = e^{m_3 u + n_3 v}, \quad t = e^{m_4 u + n_4 v}.$$

Determinando le costanti r_i con le equazioni $\Sigma m_i r_i = \Sigma n_i r_i = \Sigma r_i = 0$, troviamo che l'*equazione delle nostre superficie è l'equazione omogenea di grado zero*

$$x^{r_1}\, y^{r_2}\, z^{r_3}\, t^{r_4} = \text{cost.} \tag{3}$$

Se $h = k = 0$, si ha $m_i = 0, 1, \alpha, \alpha^2$ ed $n_i = 0, 1, \alpha^2, \alpha$ con $\alpha^3 = 1$, e la superficie si riduce alla $yzt = x^3$. *Tutte le altre superficie di coincidenza sono dunque proiettivamente applicabili su questa.*

Lasciamo al lettore l'esame del caso che non tutte le m_i siano distinte. Viceversa *ogni superficie* (3) *è una superficie di coincidenza* (per cui $c = 0$). Infatti, posto $t = 1$, l'equazione (3) diventa del tipo: $z = x^r y^s$; per una tale superficie l'equazione delle asintotiche è

$$r(r-1)y^2dx^2 + 2rsxydxdy + s(s-1)x^2dy^2 = 0.$$

Se α, β sono le radici costanti di questa, considerata come un'equazione nell'incognita $\dfrac{dx}{x} : \dfrac{dy}{y}$, si riconosce che le equazioni delle asintotiche sono

$$u = \log x - \alpha \log y = \text{cost.} \quad , \quad v = \log x - \beta \log y = \text{cost.}$$

e che perciò $\log x$, $\log y$, $\log z$ sono lineari nelle u, v, mentre $\log t = 0$.

Essendo $t = 1$, sarà $p_{11} = p_{22} = 0$. E, per calcolare β, basterà ricordare le due equaz. (nelle θ_u, β, riguardate come incognite) $x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v$, $y_{uu} = \theta_u y_u + \beta y_v$, per dedurne che $\beta = \text{cost.}$ Similmente si prova $\gamma = \text{cost.}$, come si voleva.

Queste ultime superficie godono di un'altra notevolissima proprietà. Consideriamo una collineazione $x' = k_1 x$, $y' = k_2 y$, $z' = k_3 z$, $t' = k_4 t$ con $k_i = \text{cost.}$ Sia S una superficie ed S' la sua trasformata per tale collineazione. Se S ed S' sono le falde focali di una congruenza, di cui u e v sono le sviluppabili, varranno delle equazioni del tipo:

$$x_u = \lambda x + \mu x' \qquad x'_v = \rho x + \sigma x',$$

ossia:

$$x_u = (\lambda + \mu k_1)x \quad , \quad x_v = \left(\sigma + \frac{\rho}{k_1}\right)x$$

e analoghe in y, z, t.

Moltiplicando x, y, z, t per uno stesso fattore posso rendere $\lambda = 0$. Sarà allora:

$$\frac{\partial^2 \log x}{\partial u \partial v} = k_1 \mu_v = \sigma_u + \frac{\rho_u}{k_1} \qquad \text{(e analoghe per } y, z, t).$$

Dunque

$$(4) \qquad k_i \mu_v - \sigma_u - \frac{\rho_u}{k_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Ma, se la collineazione non si riduce ad una identità, vi saranno almeno due delle k_i distinte tra di loro. Dalle corrispondenti equazioni (4) si deduce che i rapporti $\mu_v : \sigma_u : \rho_u$ sono costanti.

Potremo dunque porre $\mu = m\varphi_u$, $\sigma = s\varphi_v$, $\rho = r\varphi_v$ con m, s, r costanti e φ funzione di u, v. Sarà così:

$$x_u = k_1 m \varphi_u x \qquad x_v = \left(s + \frac{r}{k_1}\right)\varphi_v x$$

e quindi

$$k_1 m \varphi_{uv} = \left(s + \frac{r}{k_1}\right)\varphi_{uv}$$

che deve valere anche per k_2, k_3, k_4. Se $\varphi_{uv} \neq 0$, allora $k_1 m = s + \frac{r}{k_1}$. E quindi sia x, che y, z, t sarebbero, a meno di fattori costanti, uguali ad e^{φ}; e il punto $(x\, y\, z\, t)$ sarebbe fermo. Dunque $\varphi_{uv} = 0$, $\varphi = U + V$ con U funzione della sola u, V della v; ed è

$$x = h_1 e^{U k_1 m + \left(s + \frac{r}{k_1}\right)V} \qquad (h_1 = \text{cost.})$$

insieme all'analoghe per y, z, t. E, se le r_i sono costanti tali che

$$\Sigma r_i = \Sigma k_i r_i = \Sigma r_i\left(s + \frac{r}{k_i}\right) = 0\,,$$

la nostra superficie ha l'equazione del tipo $x^{r_1} y^{r_2} z^{r_3} t^{r_4} = \text{cost.}$, *cioè è una superficie di coincidenza con* c $= 0$ (su cui però le attuali u, v segnano un sistema coniugato). *Tali superficie sono dunque caratterizzate dal fatto di essere prima falda focale di una congruenza* W, *la cui seconda falda le è collineare in una proiettività di tipo generico.*

§ 28. — Le superficie per cui una retta canonica passa per un punto fisso, e superficie duali.

A) Caso delle normali proiettive.

Studiamo quando le *seconde* normali giacciono in un piano fisso e perciò generano una congruenza a sviluppabili indeterminate. In coordinate *normali* ciò avverrà se $p_{11} = p_{22} = 0$, se cioè le coordinate *normali* sono anche *coordinate non omogenee*, cioè quando, calcolato l'invariante I in coordinate *non omogenee*, si trova $I = \text{cost.}$; *questa condizione, per* $z = f(x, y)$, *equivale ad una equazione alle derivate parziali del terzo ordine per* z. *Il piano fisso su cui giacciono le seconde normali (aventi i punti* x_u, x_v) *risulta poi il piano* t $= 0$ *all'infinito.* Un teorema duale vale per le superficie, le cui *prime normali* passano per un punto fisso (l'analogo proiettivo delle *sfere*). (Č.)

B) Formole generali.

Studiamo una retta canonica qualsiasi con $\lambda \neq 0, \infty$. Perchè la *prima* retta considerata passi per un punto fisso, e quindi generi una congruenza a sviluppabili indeterminate, la superficie dovrà essere isotermo-asintotica; e noi potremo supporre $\beta = \gamma$. Scegliamo coordinate *non omogenee* di piano tangente ($\pi_{11} = \pi_{22} = 0$). La retta considerata è quella che congiunge x ad

$$x_{uv} - \frac{H_v}{H} x_u - \frac{H_u}{H} x_v . \qquad \left(H = \sqrt{a_{12}}\, \beta^{-3\lambda - 1}\right)$$

Scrivendo che le sviluppabili sono indeterminate, si trova:

$$H_{uu} = \theta_u H_u - \beta H_v \qquad H_{vv} = \theta_v H_v - \beta H_u .$$

Ora

$$a_{12} = H^2 \beta^{2(1+3\lambda)}, \qquad \theta = \log a_{12} = 2\log H + 2(1+3\lambda)\log\beta$$

E quindi (§ 16 D):

$$L = \theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 + \beta\theta_v + \beta_v = \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left[\log\beta^{2(1+3\lambda)}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\log\beta^{2(1+3\lambda)}\right]\right\}^2 + \beta\frac{\partial}{\partial v}\log\beta^{2(1+3\lambda)} + \beta_v .$$

Una formola analoga vale per M.

Possiamo ora cambiare coordinate omogenee in guisa che:

(1) $\quad a_{12} = \beta^{2(1+3\lambda)} \qquad \theta = 2(1+3\lambda)\log\beta \qquad$ e quindi $H = 1$.

Dal confronto dei valori precedenti di L, M con quelli validi in generale risulta che sarà $\pi_{11} = \pi_{22} = 0$, come precedentemente. Potremo perciò supporre contemporaneamente $\pi_{11} = \pi_{22} = 0$, $H = 1$. Sarà poi:

(2) $\quad p_{11} = \pi_{11} - \beta\theta_v - \beta_v = -3(1+2\lambda)\beta_v\,; \quad p_{22} = -3(1+2\lambda)\beta_u .$

Varranno così le:

$$(3)\qquad \begin{cases} x_{uu} = -(k+1)\dfrac{\beta_u}{\beta}x_u + \beta x_v + k\beta_v x\,, \\[2mm] x_{vv} = \beta x_u - (k+1)\dfrac{\beta_v}{\beta}x_v + k\beta_u x\,, \\[2mm] \text{ove:} \qquad k = -3(1+2\lambda) \qquad 2(1+3\lambda) = -k-1. \end{cases}$$

Essendo $H = 1$, la nostra retta canonica è semplicemente la retta congiungente x ad x_{uv}. Con una collineaz. unimodulare a coefficienti costanti, che non muta i valori delle p, π, potremo portare il punto fisso per cui passa tale retta nel punto $x = y = z = 0$.

Varrà pertanto una equazione

(4) $x_{uv}+\mu x=0$ (per $x=x\,,\,y\,,\,z\,,$ **non** per $x=t$).

Scrivendo che (3), (4) formano un sistema integrabile, si trova:

$$(5)\quad\begin{cases}\mu=(k+1)\dfrac{\partial^2\log\beta}{\partial u\partial v}-\beta^2=-(\theta_{uv}+\beta\gamma)\\[2ex] \mu_u+(k+1)\mu\dfrac{\beta_u}{\beta}+k(\beta_{vv}+\beta\beta_u)=0\\[2ex] \mu_v+(k+1)\mu\dfrac{\beta_v}{\beta}+k(\beta_{uu}+\beta\beta_v)=0.\end{cases}$$

Sostituendo nelle ultime due il valore di β dato dalla prima, si trovano due equazioni alle derivate parziali per β.

C) **Il caso $1+k=0$ (per l'asse).** (Č.)

Le (5) diventano semplicemente

(6) $$\beta_{uu}+3\beta\beta_v=\beta_{vv}+3\beta\beta_u=0.$$

Gli assi passano per il punto fisso O di coordinate $x=y=z=0$; cioè tutti i piani osculatori ad ogni linea di Segre passano per O. *Si tratta delle superficie di Čech a linee di Segre piane.* Le (3), (4) diventano

(7) $x_{uu}=\beta x_v-\beta_v x \quad x_{vv}=\beta x_u-\beta_u x$ (per $x=x\,,\,y\,,\,z\,,\,t$)

(8) $x_{uv}=\beta^2 x$ (per $x=x\,,\,y\,,\,z\,,$ **non** per $x=t$).

Una prima soluzione di (6) è

(I) $$\beta=\text{cost.}$$

Altre soluzioni si trovano supponendo che β sia funzione della sola $w=au+bv$ con $a\,,\,b=$ cost.

Le (6) danno $a^2\beta_{ww}+3b\beta\beta_w=b^2\beta_{ww}+3a\beta\beta_w=0$ donde $a^3=b^3$;

perciò potremo supporre, se $\varepsilon = \sqrt[3]{1}$, che w valga $\varepsilon^{2i} v + \varepsilon^i u$ con $i = 0, 1, 2$ e $\beta_{ww} + 3\beta\beta_w = 0$, ossia $\beta_w + \frac{3}{2}\beta^2 = \text{cost.}$, donde:

$$\text{(II)} \qquad \beta = \frac{2}{3}\frac{1}{w+a} \quad (a = \text{cost.})$$

$$\text{oppure} \qquad \beta = \frac{2}{3}\alpha\operatorname{cotg}(\alpha w + a) \quad (\alpha, a = \text{cost.})$$

Esclusi questi tipi più semplici, passiamo al caso generale. Dalle (6), sottraendo, si deduce:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial\beta}{\partial u} + \frac{\partial\beta}{\partial v} - \frac{3}{2}\beta^2\right) = 0.$$

Similmente, se $\varepsilon^3 = 1$, si trova:

$$\left(\varepsilon^i \frac{\partial}{\partial u} - \varepsilon^{2i}\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\varepsilon^i \beta_u + \varepsilon^{2i}\beta_v - \frac{3}{2}\beta^2\right) = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Posto $w_0 = u + v$, $w_1 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v$, $w_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v$, se ne deduce che:

$$\varepsilon^i \beta_u + \varepsilon^{2i}\beta_v - \frac{3}{2}\beta^2 = F_i'(w_i) \qquad (i = 0, 1, 2)$$

ove F_i è una funzione della sola w_i. Sommando, dopo aver moltiplicato per 1, o per ε^i, o per ε^{2i}, si deduce:

$$-\frac{9}{2}\beta^2 = \sum_i F_i'(w_i)$$

$$3\beta_v = \sum_i \varepsilon^i F'(w_i)$$

$$3\beta_u = \sum_i \varepsilon^{2i} F'(w_i).$$

Dunque, scegliendo opportunamente le costanti additive in F, si avrà:

$$\text{(A)} \qquad -\frac{9}{2}\beta^2 = \Sigma F_i'(w_i) \qquad\qquad 3\beta = \sum_i F_i(w_i).$$

La

$$\beta_u + \beta_v - \frac{3}{2}\beta^2 = F_0'(w_0)$$

dà, derivando successivamente, e ricordando i valori di β_{uu}, β_{vv}:

$$\beta_{uv} - 3\beta(\beta_u + \beta_v) = F_0''(w_0)\,, \quad \text{ecc.,}$$

donde si trae:

$$F_0'''' + 6F_0'F_0'' = 0. \quad \text{(Ugual formola si trova per } F_1 \text{ ed } F_2\text{).}$$

Per ognuna delle F vale perciò la

$$F_i''' + 3F_i'^2 = \text{cost.} \qquad \text{ossia} \qquad \frac{1}{2}F_i''^2 + F_i'^3 = c_i w_i + d_i \quad (c_i\,,\ d_i = \text{cost.})$$

donde

$$\text{(B)} \qquad F_i' = -2p_{(i)}(w_i + \alpha_i)$$

$$\left[\text{oppure } -2\alpha_i^2 \operatorname{cotg}(\alpha_i x + \beta_i) - \frac{4\alpha_i^2}{3} \text{ oppure } \frac{-2}{(x+\alpha)^2} \text{ oppure } \alpha_i\right]$$

ove α_i, β_i sono costanti, e la $p_{(i)}$ è una funzione ellittica p di Weierstrass a periodi qualsiasi. Ma dalle (A) si deduce:

$$-9\beta\beta_u = \Sigma\varepsilon^{2i}F_i''(w_i) = -3\beta\,.\,3\beta_u = \Sigma F_i(w_i)\,\Sigma\varepsilon^{2i}F_i'(w_i)$$

$$-9\beta\beta_v = \Sigma\varepsilon^{i}F_i''(w_i) = -3\beta\,.\,3\beta_v = \Sigma F_i(w_i)\,\Sigma\varepsilon^{i}F_i'(w_i)$$

donde, eliminando F_0'' oppure F_1'', si trae:

$$\text{(C)} \qquad \frac{F_1''(w_1) - F_2''(w_2)}{F_1'(w_1) - F_2'(w_2)} = F_0(w_0) + F_1(w_1) + F_2(w_2) =$$

$$= \frac{F_0''(w_0) - F_2''(w_2)}{F_0'(w_0) - F_2'(w_2)}$$

eccetto il caso che due delle F_i' siano una stessa costante, e quindi β sia funzione di una sola delle w_i : caso che abbiamo già esaurito. Dal confronto dei primi due membri si trae che, se p. es. diamo da u, v tali incrementi che w_1 aumenti di un periodo ω_1 di F_1' e w_2 resti immutato, allora w_0 aumenta di un periodo di F_0'; e, poichè in tal caso w_0 aumenta di $-\omega_1$, deduciamo che i periodi di F_1' sono periodi anche di F_0'. Si prova poi che le F' hanno tutte e tre gli stessi periodi, ripetendo più volte tale ragionamento. In conclusione troviamo per le (B) che:

$$F_i' = -2p(w_i + a_i) \quad \text{oppure} \quad F_i' = -2\alpha^2 \mathrm{cotg}^2\left[\alpha(w_i + a_i)\right] - \frac{4\alpha^2}{3}$$

$$\text{oppure} \qquad F_i' = -\frac{2}{(w_i + a_i)^2} \quad \text{insieme alle } (A),$$

ove le a_i sono costanti, la p è una (sola) funzione p di Weierstrass a periodi qualsiasi, α è una costante.

Senza fare una discussione completa, del resto facilissima, si trova che:

$$(\mathrm{III}) \left\{ \begin{aligned} &\beta = \frac{2}{3}\left[\zeta(w_0 + a_0) + \zeta(w_1 + a_1) + \zeta(w_2 + a_2)\right] \\ &\text{oppure} \quad \beta = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{w_0 + \alpha_0} + \frac{1}{w_1 + \alpha_1} + \frac{1}{w_2 + \alpha_2}\right] \\ &\text{oppure} \quad \beta = \frac{2}{3}\alpha\left[\mathrm{cotg}\alpha(w_0 + a_0) + \mathrm{cotg}\alpha(w_1 + a_1) + \right. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \mathrm{cotg}\alpha(w_2 + a_2)\right] \\ &(\alpha, a_i = \text{cost.};\ \Sigma a_i = 0;\ \zeta = \text{funzione } \zeta \text{ di Weierstrass}). \end{aligned} \right.$$

Si è così determinata la β; cioè sono *determinate completamente le forme fondamentali della nostra superficie.* Si può anche determinare la superficie in termini finiti, dando le coordinate di un suo punto in modo esplicito. Per ciò che riguarda questo studio rinviamo alla Mem. originale del Čech nelle *Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk* (Brno, année 1922, N.° 11).

Qui ci accontenteremo di provare che: *I piani delle linee di Segre inviluppano un cono di terza classe* W. Un tale piano passa per un punto x della superficie, per $\varepsilon x_u + x_v$, perchè $du = \varepsilon dv$ è una direzione di Segre, e per il punto $x = y = z = 0$.

Se x', y', z', t' sono coordinate correnti, avrà per equazione

$$0 = \begin{vmatrix} x & \varepsilon x_u + x_v & x' \\ y & \varepsilon y_u + y_v & y' \\ z & \varepsilon z_u + z_v & z' \end{vmatrix}$$

che indicheremo con $\xi' x' + \eta' y' + \zeta' z' = 0$. Indichiamo ora con $\xi x' + \eta y' + \zeta z' = 0$ l'equazione di un piano generico per il punto $x' = y' = z' = 0$; io dico che i piani delle linee di Segre inviluppano il cono di terza classe

$$\begin{aligned} 0 = W = (2\beta^3 - \beta_{uv})\,(\xi x + \eta y + \zeta z)^3 + \\ + 2\left[(\xi x_u + \eta y_u + \zeta z_u)^3 + (\xi x_v + \eta y_v + \zeta z_v)^3\right] \\ - 6\beta(\xi x + \eta y + \zeta z)\,(\xi x_u + \eta y_u + \zeta z_u)\,(\xi x_v + \eta y_v + \zeta z_v) + \\ + 3\beta_v(\xi x + \eta y + \zeta z)^2\,(\xi x_u + \eta y_u + \zeta z_u) + \\ + 3\beta_u(\xi x + \eta y + \zeta z)^2\,(\xi x_v + \eta y_v + \zeta z_v). \end{aligned}$$

Dalle (7), (8) segue tosto che $W_u = W_v = 0$, cioè *che il cono* W $= 0$ *è un cono fisso nello spazio;* d'altra parte, essendo

$$\xi' x + \eta' y + \zeta' z = 0 \qquad \xi' x_u + \eta' y_u + \zeta' z_u = -(x\, x_u\, x_v)$$

$$\xi' x_v + \eta' y_v + \zeta' z_v = -\varepsilon(x\, x_u\, x_v)$$

segue che $W = 0$ per $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$, $\zeta = \zeta'$.

D) Il caso $k = 0$ delle direttrici.
Le superficie di Tzitzeica-Wilczynski.

Le (5) diventano:

$$\mu = \frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u \partial v} - \beta^2 \, ; \quad (\mu\beta)_u = (\mu\beta)_v = 0 \quad \text{cioè} \quad \mu = \frac{k}{\beta} \quad (k = \text{cost.})$$

Dunque la β soddisferà all'unica condizione:

$$\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u \partial v} = \beta^2 + \frac{k}{\beta}. \tag{9}$$

Le (3) e (4) danno poi:

$$x_{uu} = -\frac{\beta_u}{\beta} x_u + \beta x_v \quad x_{vv} = \beta x_u - \frac{\beta_v}{\beta} x_v \quad (\text{per } x = x, y, z, t). \tag{10}$$

$$x_{uv} = \left(\beta^2 - \frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u \partial v}\right) x = -\frac{k}{\beta} x \tag{11}$$

(per $x = x$, y, z, **non** per $x = t$).

Noi abbiamo $\pi_{ii} = p_{ii} = 0$; cioè a coordinate omogenee di punto corrispondono coordinate omogenee di piano; siamo nel caso già studiato al § 25 E. Ma esaminiamo la questione più minutamente.

Noi abbiamo scelto a punto $x = y = z = 0$ quello per cui passano le prime direttrici. D'altra parte per (11)

$$0 = S x_{uv} \xi_u = -\frac{k}{\beta}(x\xi_u + y\eta_u + z\zeta_u) + t_{uv}\tau_u = \left(t_{uv} + \frac{k}{\beta} t\right)\tau_u$$

Poichè t *non* soddisfa a (11) sarà $\tau_u = 0$; similmente si trova $\tau_v = 0$, cioè $\tau = \text{cost.}$ Dalle $S\xi x_{uv} = a_{12} = \frac{1}{\beta}$ si trae in modo simile

$$\frac{1}{\beta\tau} = t_{uv} + \frac{k}{\beta} t \tag{12}$$

che è l'equazione, analoga ad (11), cui soddisfa la t.

Distinguiamo due casi:

1°) $k = 0$. Se ne deduce $t \neq$ cost.; cioè le x, y, z *non* si possono assumere a coordinate non omogenee. Le (10) ed (11) per $k = 0$ provano però che esse sono legate da una relazione $ax + by + cz =$ cost. a coefficienti a, b, c costanti. Sarà perciò $ax_i + by_i + cz_i = 0$ per $i = 1, 2$. E le $S\xi_{uv} x_i = 0$ danno, essendo $\tau_{uv} = 0$, che $\xi_{uv} : \eta_{uv} : \zeta_{uv} = a : b : c$. Dunque: *Se* $k = 0$, *le seconde direttrici giacciono nel piano* ξ_{uv}, *che è un piano fisso di coordinate* $a, b, c, 0$ *passante quindi per l'origine, cioè per il punto comune alle prime direttrici.*

Le superficie corrispondenti sono per la $(\log\beta)_{uv} = \beta^2$ *un caso particolare di quelle, le cui asintotiche appartengono a complessi lineari e si ottengono dalle formole del* § 18 *C ponendo nelle* $(13)_{bis}$ $k = h - l = p = 0$.

Otteniamo così anche il risultato: *Tutte le superficie, le cui asintotiche appartengono a complessi lineari o sono una superficie* S *le cui prime direttrici passano per un punto fisso* O, *e le seconde direttrici giacciono in un piano contenente* O, *oppure sono proiettivamente applicabili su una tale superficie.*

2°) Supponiamo ora $k \neq 0$. Moltiplicando u, v per una stessa costante posso rendere $k = 1$. Essendo $p_{11} = p_{22} = 0$, esiste una relazione

$$ax + by + cz + dt = \text{cost.} \quad \text{con} \quad a, b, c, d \text{ costanti}$$

che non può [soddisfacendo le x, y, z alla (11) con $k \neq 0$] essere indipendente dalla t. Dunque $d \neq 0$; e, ponendo $ax + by + cz + dt$ al posto della t, posso rendere $t =$ cost. Con questo cambiamento della sola variabile t, e non delle x, y, z l'origine resta fissa, e la τ si moltiplica al più per una costante; e resta perciò costante; anzi la possiamo rendere uguale ad 1. Essendo $t =$ cost., la (12) prova che anche $t = 1$. Dunque x, y, z *sono coordinate non omogenee di punto e le* ξ, η, ζ *coordinate non omogenee di piano. Le* x, y, z *soddisfano a* (10) e (12); *le* ξ, η, ζ *alle*

$$(10)_{bis} \qquad \xi_{uu} = -\frac{\beta_u}{\beta}\xi_u - \beta\xi_v \quad , \quad \xi_{vv} = -\beta\xi_u - \frac{\beta_v}{\beta}\xi_v ,$$

come risulta dalla teoria generale, e in più alla:

$$(12)_{\text{bis}} \qquad \xi_{uv} + \frac{1}{\beta}\,\xi = 0 \qquad (\text{per } \xi = \xi\,,\ \eta\,,\ \zeta\ \textit{non}\ \text{per } \xi = \tau = 1).$$

La $(12)_{\text{bis}}$ si prova, osservando che moltiplicando per x (oppure per x_i) e sommando con le analoghe in η, ζ, si trovano delle identità.

Il piano su cui giacciono le seconde direttrici è il piano $\xi_{uv} + \frac{1}{\beta}\xi$, *che è dunque, nelle coordinate attuali, il piano all'infinito. Il suo polo* rispetto alla quadrica di Lie, cioè il *centro della quadrica di Lie è il punto* $\mathrm{x}_{uv} + \frac{1}{\beta}\mathrm{x}$, *cioè il punto ove concorrono le prime direttrici.* Per le nostre superficie dunque *il centro della quadrica di Lie è fisso* (il caso 1° sarebbe quello in cui queste quadriche sono paraboloidi).

Nel § 25 E abbiamo già dato quella proprietà metrica, da cui Tzitzeica è partito per trovare queste superficie. Qui aggiungeremo altre proprietà dovute a Tzitzeica.

La rigata asintotica corrispondente ad una $u =$ cost. è il luogo dei punti $(x + wx_u\,,\ y + wy_u\,,\ z + wz_u\,,\ 1)$ al variare di v, w. Il piano ξ' ad essa tangente è determinato dalle:

$$S\xi' x = S\xi' x_u = S\xi'(x_v + wx_{uv})$$

che, per $w = \infty$, diventa il piano definito dalle:

$$S\xi' x = S\xi' x_u = 0 \quad , \quad 0 = S\xi' x_{uv} = -\frac{1}{\beta}(x\xi' + y\eta' + z\zeta') = \frac{\tau'}{\beta}.$$

Perciò $\tau' = 0$; tale piano passa per O. Quindi: *I piani asintotici* (tangenti all'infinito) *delle rigate asintotiche delle nostre superficie inviluppano coni col vertice nel centro della quadrica di Lie.*

Si trova facilmente che l'equazione delle asintotiche curve di tale rigata è $2\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{\beta}$, e che esse hanno un flesso solo nei punti $\frac{1}{w} = 0$. Perciò:

La linea flecnodale delle rigate asintotiche delle precedenti superficie si riduce alla sezione col piano all'infinito contata due volte.

È evidente che x, y, z si possono considerare come coordinate omogenee della proiezione di un punto della superficie fatta dal centro della quadrica di Lie sul piano all'infinito. Su tale piano le tangenti ad una linea $v =$ cost. lungo una linea $u =$ cost. sono il luogo dei punti $x_u + wx$; una di queste tangenti incontra la consecutiva nel punto $x' = x_u$, che giace sia su di essa che sulla consecutiva congiungente $x_u + x_{uv}dv$ ad $x + x_v dv$, perchè, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore è per (11)

$$(x_u + x_{uv}dv) + \frac{dv}{\beta}(x + x_v dv) = x_u = x',$$

od anche perchè x'_v giace sulla retta (x, x_u).

Dunque: *Il punto* $x' = x_u$ *descrive sul piano all'infinito il trasformato di Laplace del sistema delle* u, v. La retta $(x' x_u')$, cioè la retta $(x_u x_{uu})$ incontra similmente la consecutiva $(x_u + x_{uv}dv$, $x_{uu} + x_{uuv}dv)$ nel punto $x_{uu} + \frac{\partial \log\beta}{\partial u} x_u = x_v$, che si ottiene da x con la trasformazione di Laplace inversa di quella inizialmente considerata.

Sul piano all' ∞ *il sistema delle* u, v *ammette una trasformazione ciclica di Laplace di ordine* 3.

§ 29. — Le superficie di Čech a linee di Darboux piane.

Il piano osculatore a una linea di Darboux è (in coordinate normali $a_{12} = \beta\gamma$)

$$\varphi = \left(\beta\gamma + \varepsilon^2 \frac{\partial \sqrt[3]{\beta\gamma^2}}{\partial u} + \varepsilon \frac{\partial \sqrt[3]{\beta^2\gamma}}{\partial v}\right)\xi - \varepsilon^2 \sqrt[3]{\beta\gamma^2}\,\xi_u - \varepsilon\sqrt[3]{\beta^2\gamma}\,\xi_v \quad (\varepsilon^3 = 1).$$

La linea di Darboux è piana, se questo piano non si muove quando ci spostiamo sulla curva, cioè se

$$\varepsilon^2 \sqrt[3]{\beta\gamma^2}\,\varphi_u - \varepsilon\sqrt[3]{\beta^2\gamma}\,\varphi_v \quad \text{è proporzionale alla } \varphi.$$

Servendoci delle equazioni fondamentali per le ξ, si trova che:

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varepsilon^2\sqrt[3]{\beta\gamma^2}\,\varphi_u - \varepsilon\sqrt[3]{\beta^2\gamma}\,\varphi_v + \Bigg[\varepsilon\left(\frac{\partial\sqrt[3]{\beta^2\gamma}}{\partial v} + \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\,\frac{\partial\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}{\partial v}\right) - \\
&- \varepsilon^2\left(\frac{\partial\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}{\partial u} + \sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}}\,\frac{\partial\sqrt[3]{\beta^2\gamma}}{\partial u}\right)\Bigg]\varphi = (P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2)\xi,
\end{aligned}
\right.
$$

dove P_1, P_2 sono espressioni complicate, mentre

$$P_0 = \beta\gamma\,\frac{\partial^2 \log\sqrt[3]{\beta : \gamma}}{\partial u \partial v}.$$

Ora, *se tutte le linee di Darboux sono piane,* deve essere $P_0 = P_1 = P_2 = 0$. In particolare dunque $P_0 = 0$, e *la superficie è isotermo-asintotica.*

Possiamo dunque supporre $\beta = \gamma$, sicchè

$$\varphi = \beta\left[\left(\beta + \varepsilon^2\frac{\beta_u}{\beta} + \varepsilon\frac{\beta_v}{\beta}\right)\xi - \varepsilon^2\xi_u - \varepsilon\xi_v\right].$$

La (1) diventa:

$$(2)\qquad \beta\left[\varepsilon^2\varphi_u - \varepsilon\varphi_v + 2\left(\varepsilon\frac{\beta_v}{\beta} - \varepsilon^2\frac{\beta_u}{\beta}\right)\varphi\right] = P\xi$$

ove:

$$P = \varepsilon\left(\frac{\beta_{uu}}{\beta} - 2\frac{\beta_u^2}{\beta^2} - \pi_{11}\right) - \varepsilon^2\left(\frac{\beta_{vv}}{\beta} - 2\frac{\beta_v^2}{\beta^2} - \pi_{22}\right).$$

Le superficie cercate soddisfano dunque alle:

$$(3)\qquad \pi_{11} = \frac{\beta_{uu}}{\beta} - 2\frac{\beta_u^2}{\beta^2}\quad,\quad \pi_{22} = \frac{\beta_{vv}}{\beta} - 2\frac{\beta_v^2}{\beta^2}.$$

Sostituendo questi valori nelle equazioni fondamentali per le ξ, queste diventano semplicemente (in coordinate *normali* : $a_{12} = \beta\gamma$):

$$(4) \qquad \left(\frac{\xi}{\beta}\right)_{uu} + \xi_v = 0 \qquad \left(\frac{\xi}{\beta}\right)_{vv} + \xi_u = 0.$$

Sostituendo alle ξ le $\xi\beta$ (con che le nuove coordinate ξ *non saranno più le coordinate normali*) le (4) diventano:

$$(5) \qquad \xi_{uu} + \beta_v \xi + \beta\xi_v = \xi_{vv} + \beta_u \xi + \beta\xi_u = 0.$$

E il piano φ di una linea di Darboux diventa il piano:

(6) $\varphi = \beta^2(\beta\xi - \varepsilon^2\xi_u - \varepsilon\xi_v)$. Porremo $\pi_i = (-\beta\xi + \varepsilon^{2i}\xi_u + \varepsilon^i\xi_v)(i = 1, 2, 3)$.

Le condizioni d'integrabilità delle (5) sono:

$$(7) \qquad \beta_{uu} + \beta\beta_v = \beta_{vv} + \beta\beta_u = 0$$

affatto analoghe alle (6) del precedente § corrispondenti al caso che le linee di Segre siano piane. L'integrale generale si trova come al § 28 *C* essere

$$(8) \qquad \beta = 2(\zeta w_0 + \zeta w_1 + \zeta w_2)$$

$$w_0 = u + v + a_0, \quad w_1 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v + a_2, \quad w_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v + a_3,$$

ove le a_i siano costanti di somma nulla cosicchè $\Sigma w_i = 0$.

Vi sono altri due soli casi, in cui la β non si riduca ad una funzione di una sola delle w_i: i casi seguenti, che si possono del resto considerare come casi limiti del precedente:

$$(9) \qquad \beta = 2a(\cot g\, a w_0 + \cot g\, a w_1 + \cot g\, a w_2) \qquad (a = \text{cost.})$$

$$(10) \qquad \beta = 2\left(\frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right).$$

Degli altri casi possibili, di quelli cioè, in cui la β si riduce ad una funzione di una sola delle w, parleremo più avanti.

Posto

(11) $\varepsilon^{2i}\beta_u + \varepsilon^i\beta_v - \frac{1}{2}\beta^2 = f(w_i)$ [funzione della sola w_i per le (7)],

si trova nei tre casi rispettivamente:

$$f(w_i) = -6pw_i \quad \text{oppure} \quad -6a^2 \operatorname{cotg} a w_i \quad \text{oppure} \quad -\frac{6}{w_i^2}$$

e in ogni caso

$$(12) \qquad f''' = -2ff' \quad ; \quad f' = -(\varepsilon^{2i}\beta\beta_u + \varepsilon^i\beta\beta_v - \beta_{uv})$$

Derivando (6) si trova:

$$(13) \quad \frac{d^2\pi_i}{dw_i^2} = (2\varepsilon^{2i}\beta\beta_u + 2\varepsilon^i\beta\beta_v - \beta_{uv})\xi + (\varepsilon^{2i}\beta^2 - 2\varepsilon^i\beta_u - \beta_v)\xi_u +$$
$$+ (\varepsilon^i\beta^2 - 2\varepsilon^{2i}\beta_v - \beta_u)\xi_v - \beta\xi_{uv}.$$

$$(13)_{\text{bis}} \qquad \frac{d^3\pi_i}{dw_i^3} = (\beta^2 - 2\varepsilon^{2i}\beta_u - 2\varepsilon^i\beta_v)\frac{d\pi_i}{dw_i} +$$
$$+ 2(\varepsilon^{2i}\beta\beta_u + \varepsilon^i\beta\beta_v - \beta_{uv})\pi_i$$

ossia per (12)

$$(13)_{\text{ter}} \qquad \frac{d^3\pi_i}{dw_i^3} = -2\frac{d}{dw_i}\left[\pi_i f(w_i)\right]$$

ossia

$$(14) \qquad \frac{d^2\pi_i}{dw_i^2} + 2\pi_i f(x_i) + A = 0,$$

ove il piano A è costante (è fisso), e, confrontando con (13), si trova essere il piano

$$(15) \qquad A = (\beta_{uv} - \beta^3)\xi - \beta_v\xi_u - \beta_u\xi_v + \beta\xi_{uv}.$$

Moltiplicando (14) per $f'(w_i)$, e, tenendo conto di (7), si trova:

$$(14)_{\text{bis}} \qquad f'(w_i)\frac{d^2\pi_i}{dw_i^2} - \pi_i f'''(w_i) + Af'(w_i) = 0,$$

donde, integrando:

$$(14)_{\text{ter}} \qquad f'(w_i)\frac{d\pi_i}{dw_i} - f''(w_i)\pi_i + Af(w_i) + \frac{1}{2}B = 0,$$

ove B è un nuovo piano *fisso* che, sostituendo nella precedente a $\frac{d\pi_i}{dw_i}$ il valore ottenuto derivando, si vede essere il piano:

$$(16) \qquad B = \beta(3\beta\beta_{uv} - 2\beta_u\beta_v - \beta^4)\xi - (2\beta_u^2 + \beta^2\beta_v)\xi_u -$$

$$- (2\beta_v^2 + \beta^2\beta_u)\xi_v + (\beta^3 - 2\beta_{uv})\xi_{uv}.$$

Integrando l'ultima equazione ottenuta, si trova:

$$(17) \qquad \frac{\pi_i}{f'(w_i)} + A\int\frac{f(w_i)}{f'^2(w_i)}dw_i + \frac{1}{2}B\int\frac{dw_i}{[f'(w_i)]^2} = C_i,$$

ove i piani C_0, C_1, C_2 sono pure *fissi* nello spazio.

Servendoci di (15) e (16) calcoliamo $(2\beta_{uv} - \beta^3)A + \beta B$, ove alle ξ, ξ_u, ξ_v si sostituiscano i valori dedotti da (6) in funzione lineare delle π. Troviamo:

$$(18) \qquad \Sigma\lambda_i\pi_i + \frac{3}{2}\beta(2\beta_{uv} - \beta^3)A + \frac{3}{2}\beta^2 B = 0,$$

ove è posto:

$$\lambda_i = \beta_{uv}^2 - \beta^2\beta_u\beta_v + \varepsilon^i\beta(\beta_v\beta_{uv} + \beta\beta_u^2) + \varepsilon^{2i}\beta(\beta_u\beta_{uv} + \beta\beta_v^2).$$

Da (12) si deduce che

$$\lambda_i f'(w_i) = \beta_{uv}^3 - 3\beta^2\beta_u\beta_v\beta_{uv} - \beta^3\beta_u^3 - \beta^3\beta_v^3 = \mu,$$

ove μ non dipende più dall'indice i, sicchè (18) diventa:

$$\mu\Sigma\frac{\pi_i}{f'(w_i)} + \frac{3}{2}\beta(2\beta_{uv} - \beta^3)A + \frac{3}{2}\beta^2 B = 0$$

che, confrontata con (17) dà

$$(19)\qquad A\left\{\frac{3}{2}\,\frac{\beta}{\mu}(2\beta_{uv}-\beta^3)-\Sigma\int\frac{f(w_i)dw_i}{f'^2(w_i)}\right\}+$$

$$+B\left[\frac{3}{2}\,\frac{\beta^2}{\mu}-\Sigma\int\frac{dw_i}{f'(w_i)^2}\right]+\Sigma C_i=0.$$

Non essendo le β funzione di una sola delle w_i, e quindi $\beta_u^3 \mp \beta_v^3$, nei secondi membri delle (15), (16) i coefficienti di ξ_u, ξ_v non sono proporzionali; perciò i piani A, B non possono coincidere; e quindi i coefficienti di A, B in (19) sono delle costanti che, con opportuna scelta dei limiti inferiore d'integrazione [il calcolo effettivo prova che si possono scegliere questi limiti uguali a zero] si possono rendere nulle. Sarà così:

$$(20)\qquad \Sigma C_i=0\quad,\quad \Sigma\int_0^{w_i}\frac{f(w_i)}{f'^2(w_i)}=\frac{3}{2\mu}\beta(2\beta_{uv}-\beta^3)\,,$$

$$\Sigma\int_0^{w_i}\frac{dw_i}{f'^2(w_i)}=\frac{3}{2\mu}\beta^2.$$

Dalla definizione di π_i segue che:

$$3\beta\xi=-\Sigma\pi_i=A\Sigma f'(w_i)\int_0^{w_i}\frac{f(w)}{f'^2(w)}dw+$$

$$+\frac{1}{2}B\Sigma f'(w_i)\int_0^{w_i}\frac{dw}{f'^2(w)}-\Sigma C_i f'(w_i)\,,$$

insieme alle analoghe in η, ζ, τ. Scegliendo opportunamente il tetraedro di riferimento, si avranno pertanto le formole seguenti valide nel caso (8):

$$\xi:\eta:\zeta:\tau=\Sigma p'(w_i)\int_0^{w_i}\frac{dw}{(pw-e_1)(pw-e_2)}:$$

$$: \Sigma p'(w_i) \int_0^{w_i} \frac{dw}{(pw - e_2)(pw - e_3)} :$$

$$: (p'w_0 - p'w_2) : (p'w_1 - p'w_2) \ , \qquad (w_0 + w_1 + w_2 = 0)$$

oppure nel caso (9):

$$\xi : \eta : \zeta : \tau = \Sigma \rho_i (1 + \rho_i^2) \int_\infty^{\rho_i} \frac{dw}{(1 + w^2)^3} :$$

$$: \Sigma \rho_i (1 + \rho_i^2) \int_\infty^{\rho_i} \frac{dw}{(1 + w^2)^3} :$$

$$: \left[\rho_0(1 + \rho_0^2) - \rho_2(1 + \rho_2^2)\right] : \left[\rho_1(1 + \rho_1^2) - \rho_2(1 + \rho_2^2)\right] ,$$

oppure nel caso (10):

$$\xi : \eta : \zeta : \tau = \Sigma w_i^2 : \Sigma w_i^4 : \left(\frac{1}{w_0^3} - \frac{1}{w_2^3}\right) : \left(\frac{1}{w_1^3} - \frac{1}{w_2^3}\right).$$

Le integrazioni si sanno eseguire; nel primo caso le e_i sono i valori di pw negli zeri di $p'w$ (semiperiodi); nel secondo caso le ρ sono parametri legati dalla: $\rho_0 \rho_1 + \rho_0 \rho_2 + \rho_1 \rho_2 = 0$.

Dai calcoli precedenti si deduce facilmente:

Se β *non dipende da una sola delle* w, *come può avvenire in qualche caso limite, allora: I piani di ogni sistema di linee di Darboux inviluppano tre coni quadrici, perchè soddisfano alla* $(13)_{ter}$. *Le* w_i *si possono considerare come i parametri sui tre coni–inviluppo. Imponendo la* $\Sigma \mathrm{w}_i = 0$, *i tre piani corrispondenti hanno una intersezione che genera la nostra superficie.*

I vertici dei tre coni sono per le (14) *e* $(14)_{ter}$ *in linea retta sulla retta intersezione dei piani* A, B; *due qualunque dei tre coni risultano prospettivi, quando si facciano corrispondere due piani, i cui parametri* w_i *abbiano uguali valori. I tre piani di prospettività formano un fascio ed incontrano la retta dei vertici in tre punti,* *che sono il covariante cubico dei tre vertici, ed intersecano la superficie in tre linee di Segre particolari* (*).

Se invece β dipende da una sola delle w, come avviene nei casi limiti $\beta = 2a\operatorname{cotg}(aw_i)$ $(a = \text{cost.})$, $\beta = \dfrac{2}{w_i}$, $\beta = \text{cost.}$, *allora nei primi due casi un sistema di linee di Darboux* $w_i = \text{cost.}$ *è formato da coniche, nell'ultimo caso si ha l'unica superficie a linee di Darboux tutte coniche ; le sue linee di Segre sono pure curve piane e precisamente cubiche con un punto di regresso.*

§ 30. — Breve riassunto di altre ricerche.

A) Se x, y, z, $t = 1$ sono coordinate cartesiane ortogonali, e se $\left\{ {rs \atop t} \right\}$ sono i simboli di Christoffel per l'elemento lineare di Gauss, allora la retta normale *metrica* è la retta congiungente x ad $x_{uv} - \left\{ {12 \atop 1} \right\} x_u - \left\{ {12 \atop 2} \right\} x_v$, essendo sempre u, v asintotiche. La retta duale (che potremo chiamare la *seconda* normale metrica) è la congiungente i punti $x_u - \left\{ {12 \atop 2} \right\} x$ ed $x_v - \left\{ {12 \atop 1} \right\} x$, cioè i due punti

$$x_i - \frac{1}{2} x \frac{\rho_i}{\rho}, \quad y_i - \frac{1}{2} y \frac{\rho_i}{\rho}, \quad z_i - \frac{1}{2} y \frac{\rho_i}{\rho}, \quad - \frac{1}{2} \frac{\rho_i}{\rho},$$

ove $-\dfrac{1}{\rho^2}$ è la curvatura di Gauss. Quindi : *Le superficie a curvatura costante metrica sono quelle per cui la seconda normale me-*

(*) Si consideri l'omografia tra le due stelle (A, B, C_i) ed (A, B, C_j), che al piano $k_1 A + k_2 B + k_3 C_i$ dell'una fa corrispondere il piano $k_1 A + k_2 B + k_3 C_j$ dell'altra ; essa è una prospettività ; il piano di prospettività essendo $C_i - C_j = 0$. La (17) prova che i coni inviluppati da π_i, π_j si corrispondono in tale prospettività, quando si considerino come omologhi i piani per cui $w_i = w_j$. Infine (20) dimostra che C_k $(i, j, k = 1, 2, 3)$ e $C_i - C_j$ dividono armonicamente i piani C_i, C_j

trica è all' infinito, ossia la prima normale passa per il centro della quadrica di Lie.

B) Sia K una congruenza di rette r uscenti dai punti O di una superficie S. I piani focali di r incontrano S nelle direzioni determinate dalle sviluppabili della congruenza, uscenti da r. Il teorema per la congruenza K' duale, dovuto a Green, si enuncia:

Se K′ *è una congruenza di rette* r′ *poste sui piani tangenti alla superficie* S, *le rette che da un punto* O *di* S *proiettano i fuochi della corrispondente retta* r′ *determinano le direzioni coniugate di quelle corrispondenti alle sviluppabili.*

C) Green ha anche considerato una coppia *qualsiasi* di sistemi di linee u, v della S. Ha chiamato *asse* in un punto O di S l'intersezione dei piani osculatori alle linee u, v uscenti da O, *raggio* (ray) la retta unente i due fuochi delle congruenze generate dalle tangenti alle linee $u =$ cost. e $v =$ cost., che giacciono sul piano tangente in O (e sono distinte da O). Ha chiamato *assi–tangenti* e *raggi–tangenti* le direzioni corrispondenti alle sviluppabili della congruenza degli assi o dei raggi, ha chiamato *assi–rigate* R_u le rigate luogo dei raggi uscenti dai punti di una $v =$ cost., e in modo simile ha definito le *assi–rigate* R_v. Ecco i più notevoli risultati del Green:

Su un asse giacciono i fuochi F, F′ *della congruenza degli assi, e i punti* P, Q *ove i piani osculatori alle* v = cost. *ed* u = cost. *uscenti su* S *dal piede* O *dell'asse toccano* R_u, R_v. *Il coniugato armonico di* O *rispetto ad* F, F′ *è anche coniugato di* O *rispetto a* P, Q. *Le assi–tangenti incontrano un raggio nei suoi fuochi soltanto se le rette tangenti alle* u = cost. *ed alle* v = cost. *generano congruenze* W.

Se le u, v *sono coniugate, esse formeranno un sistema a invarianti uguali, soltanto se le raggi–tangenti sono coniugate; se in più le tangenti alle* u, v *generano congruenze* W, *allora le* u, v *formano un sistema isotermo–coniugato.*

D) Per interpretazioni geometriche dei sistemi isotermi coniugati rinviamo alla Mem. di Wilczynski a pag. 208 del Tomo 85 dei Math. Ann.

E) Finiremo dimostrando (Č.) un bel teorema di Wilczynski sui sistemi coniugati ad invarianti tangenziali uguali.

Se le u, v *formano un sistema coniugato ad invarianti tangen-*

ziali uguali, la intersezione dei piani osculatori alle u , v *in un punto comune genera una congruenza armonica alla superficie. E viceversa. Un risultato duale vale naturalmente per i sistemi coniugati con uguali invarianti di punto.*

Infatti nelle ipotesi del teorema, posso fissare le coordinate di piano tangente in guisa che $\xi_{uv} = \lambda\xi$. Sarà $S\xi_u x = S\xi_u x_v = 0$ perchè il sistema è coniugato e $S\xi_u x_{vv} = (S\xi_u x_v)_v - \lambda S x_v \xi = 0$. Cioè il piano ξ_u è osculatore alle $u =$ cost.; e similmente ξ_v è osculatore alle $v =$ cost. La congruenza citata nell'enunciato è dunque quella delle rette (ξ_u, ξ_v); e noi sappiamo che, comunque siano fissate le coordinate di piano tangente, una tal congruenza è sempre armonica alla superficie.