CAPITOLO VI.

INVARIANTI DELL' ELEMENTO LINEARE PROIETTIVO (*)

§ 55. — Alcune considerazioni preliminari.

Dopo aver considerato, al Capitolo IV, il caso particolare di superficie rigate, ritorniamo ora alle ricerche generali. Al Cap. II abbiamo visto che, nella geometria proiettivo-differenziale di superficie non sviluppabili, ha importanza fondamentale la coppia di forme differenziali

$$(1)\qquad \begin{aligned} F_2 &= \Sigma a_{rs}\, du_r du_s\,, \\ F_3 &= \Sigma a_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t \end{aligned}$$

legate dalle relazioni di coniugio

$$(2)\qquad A_{11}a_{111}+2A_{12}a_{112}+A_{22}a_{122}=A_{11}a_{112}+2A_{12}a_{122}+A_{22}a_{222}=0\,,$$

e determinate soltanto a meno di un fattore comune arbitrario. Ricordiamo del resto che (Cap. II, § 15 D) supposto $J \neq 0$, dove

$$(3)\qquad J = \frac{1}{A^2}\begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{122} \\ a_{112} & a_{122} & a_{222} \\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}\,,$$

(*) I risultati di questo Capitolo sono stati esposti, per la prima volta, da Čech nella Memoria « *Étude analytique de l'élément linéaire projectif d'une surface* »,. Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, 1924, n. 36.

possiamo togliere ogni indeterminazione sostituendo alle F_2, F_3 le forme *normali* φ_2, φ_3 loro proporzionali per cui $J = -1$. Appare opportuno, e ne vedremo delle applicazioni importanti ai Capitoli seguenti, interrompere i nostri studî geometrici per dedurre parecchie formole utili relative a tali coppie di forme. *I lettori che desiderino arrivare al più presto alle applicazioni, possono omettere nella prima lettura i* §§ 59, 60, 61, 62, *accontentandosi di leggerne solo la definizione di* Φ, Ψ, Ψ', H, K, Θ, Θ' *al principio dei* §§ 59 *e* 60. Avvertiamo pure che il lettore frettoloso può accontentarsi di verificare le formole dei §§ 56-58 in coordinate asintotiche il che si fa immediatamente, omettendo le dimostrazioni generali da noi messe in carattere piccolo. Però lo studio delle dimostrazioni del testo appare utile per penetrare nello studio dei metodi usati ai due Capitoli seguenti.

Prima di tutto, spieghiamo il procedimento *d'elevazione degli indici* di cui faremo uso frequente. Sia per fissare le idee, come al Cap. II § 9, b_{rst} un sistema covariante simmetrico a tre indici. Porremo

$$b^i_{st} = \sum_r A_{ir} b_{rst},$$

$$b^{ik}_t = \sum_s A_{ks} b^i_{st} = \sum_{rs} A_{ir} A_{ks} b_{rst},$$

$$b^{ikl} = \sum_t A_{lt} b^{ik}_t = \sum_{rst} A_{ir} A_{ks} A_{lt} b_{rst}.$$

Il sistema b^{ik}_t p. es. si dice controvariante negli indici i e k e covariante nell'indice t. Ciò vuol dire che, introducendo nuove variabili indipendenti $\bar{u}, \bar{v}$, esso si trasforma come il prodotto $\beta_t du_i du_k$, le β_t essendo covarianti. Osserviamo che, anche se il sistema covariante b_{rst} non fosse simmetrico, si può *elevare* un indice qualunque; soltanto occorre tener presente l'ordine degli indici. Si pone allora p. es.

$$b^{ik}_{-t} = \sum_{rs} A_{ir} A_{ks} b_{rst},$$

$$b_r{}^{ik}_{-} = \sum_{st} A_{is} A_{kt} b_{rst}.$$

In virtù delle identità

(4) $\sum_i A_{ir} a_{is} = \varepsilon_s^r$ ove $\varepsilon_s^r = 0$, se $r \gtrless s$, $\varepsilon_s^r = 1$ se $r = s$; $\sum_{ik} A_{ik} a_{ik} = 2$

si ritorna semplicemente da uno qualunque dei sistemi b^i_{st}, b^{ik}_t, b^{ikl} a b_{rst} *(abbassamento degli indici)*. Si trova cioè tosto

$$b_{rst} = \sum_i a_{ir} b^i_{st} = \sum_{ik} a_{ir} a_{ks} b^{ik}_t = \sum_{ikl} a_{ir} a_{ks} a_{lt} b^{ikl},$$

ed anche

$$b^i_{st} = \sum_k a_{ks} b^{ik}_t \quad \text{ecc.}$$

Porremo anche frequentemente

$$A_{rs} = a^{rs};$$

e ciò non è che un caso particolare della notazione generale ora spiegata; infatti si riconosce subito che

$$a^{ik} = \sum_{rs} a^{ir} a^{ks} a_{rs}.$$

Avvertiamo ancora che ometteremo al solito d'indicare, sotto il segno Σ, gli indici rispetto a cui si somma, *tali indici essendo semplicemente sempre quelli che compaiono due volte,* come indice superiore e come indice inferiore (*).

§ 56. — I differenziali coniugati.

Il sistema covariante a_{rs} si è visto al Cap. II § 9 aver l'importante proprietà che il suo sistema derivato covariante è identicamente nullo. Vi è un altro sistema covariante che gode la medesima proprietà. Posto infatti

(1) $\vartheta_{11} = 0$, $\vartheta_{12} = \sqrt{|A|}$, $\vartheta_{21} = -\sqrt{|A|}$, $\vartheta_{22} = 0$,

(*) L'indice di un *differenziale* si deve riguardare come un indice ***superiore***.

è facile vedere che le ϑ_{rs} formano un sistema impropriamente covariante (cioè covariante per cambiamenti di variabili a Iacobiano positivo, cambiante di segno per quelle a Iacobiano negativo). Di più

$$\vartheta_{kst} = \frac{\partial \vartheta_{ks}}{\partial u_t} - \sum_q \binom{kt}{q} \vartheta_{qs} - \sum_q \binom{st}{q} \vartheta_{kq}$$

si vede subito identicamente nullo, in virtù della formola

$$\frac{\partial \log \sqrt{|A|}}{\partial u_i} = \binom{1i}{1} + \binom{2i}{2}.$$

Mentre il sistema a_{rs} è simmetrico, il sistema ϑ_{rs} è *pseudosimmetrico,* cioè $\vartheta_{sr} = -\vartheta_{rs}$. Ciò bisogna tener presente nei nostri calcoli.

Qual'è il sistema controvariante ϑ^{ik}? Essendo $A = -\varepsilon |A|$, si calcola subito

$$(1)_{\text{bis}} \qquad \vartheta^{11} = 0, \quad \vartheta^{12} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}}, \quad \vartheta^{21} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}}, \quad \vartheta^{22} = 0;$$

anche il sistema ϑ^{rs} è evidentemente pseudosimmetrico.

Notiamo le identità analoghe alle (4) del § 55

$$(2) \qquad \begin{aligned} \Sigma\, \vartheta^{kt} \vartheta_{st} = -\Sigma\, \vartheta^{tk} \vartheta_{st} = \Sigma\, \vartheta^{tk} \vartheta_{ts} &= 0 \quad \text{se} \quad k \gtrless s, \\ &= -\varepsilon \quad \text{se} \quad k = s, \\ \Sigma\, \vartheta^{ks} \vartheta_{ks} &= -2\varepsilon. \end{aligned}$$

Il sistema covariante ϑ_{rs} si può generalizzare al caso di un numero qualunque n di variabili indipendenti; ma nel caso attuale di $n = 2$ esso ci conduce ad un concetto peculiare per tale caso, cioè al concetto di *differenziali coniugati* che ci riesce opportuno per semplificare diversi calcoli. I differenziali du_i formando un sistema controvariante, lo stesso vale delle espressioni

$$(3) \qquad Du_i = \Sigma\, \vartheta^{ik} a_{ks} du_s.$$

Si ha anche

$$(3)_{\text{bis}} \qquad Du_i = \Sigma\, a^{ik} \vartheta_{ks} du_s;$$

infatti

$$(4) \qquad \Sigma\, \vartheta^{ik} a_{ks} = \Sigma\, a^{ik} \vartheta_{ks}$$

essendo

$$\Sigma\, \vartheta^{ik} a_{ks} = \Sigma\, \vartheta_{pq}\, a^{ip} a^{kq} a_{ks} = \Sigma\, \vartheta_{ps}\, a^{ip}.$$

Scrivendo per disteso, abbiamo

$$(3)_{\text{ter}} \qquad \begin{aligned} Du &= -\frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}}(a_{12}\,du + a_{22}\,dv), \\ Dv &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}}(a_{11}\,du + a_{12}\,dv). \end{aligned}$$

Si vede subito che, se $F_2 = 0$ definisce le asintotiche di una superficie, la direzione corrispondente a Du_i è coniugata a quella corrispondente a du_i; perciò appunto chiamiamo i Du_i i *differenziali coniugati*. Da ciò si prevede che si può, a meno di un fattore, scambiare d e D nelle (3); precisamente si trova osservando le (2)

$$\Sigma\, \vartheta^{ik} a_{ks} Du_s = \Sigma\, \vartheta^{ik} a_{ks} a^{sp} \vartheta_{pq}\, du_q = \Sigma\, \vartheta^{ik} \vartheta_{kq}\, du_q = \varepsilon du_i$$

sicchè

$$(3)_{\text{quater}} \qquad du_i = \varepsilon \Sigma\, \vartheta^{ik} a_{ks} Du_s = \varepsilon \Sigma\, a^{ik} \vartheta_{ks} Du_s.$$

Dal significato geometrico dei differenziali coniugati risulta subito senza calcolo che la forma F_2 si moltiplica soltanto per un fattore finito, se vi sostituiamo i Du_i al posto dei du_i, e lo stesso si vede valere di una forma differenziale quadratica qualunque *coniugata* ad F_2. Precisamente valgono le

$$(5) \qquad \Sigma\, a_{ks} Du_k Du_s = -\varepsilon F_2,$$

$$(6) \qquad \Sigma\, b_{ks} Du_k Du_s = \varepsilon \Sigma\, b_{ks}\, du_k\, du_s, \quad \text{se} \quad \Sigma\, A_{ks} b_{ks} = 0.$$

Cominciamo con la dimostrazione della (6). Noi sappiamo che

$$\Sigma\, b_{ks}\, Du_k\, Du_s = \alpha \Sigma\, b_{ks}\, du_k\, du_s$$

e vogliamo determinare il fattore α. Sostituendo qui

$$du_k + \lambda\, Du_k$$

a du_k e *quindi* [come risulta dal confronto di (3) e $(3)_{\text{quater}}$]

$$Du_k + \varepsilon\lambda\, du_k$$

a Du_k e confrontando i coefficienti di λ, risulta

$$\Sigma b_{ks}\, du_k\, Du_s = \varepsilon\alpha \Sigma b_{ks}\, Du_k\, du_s$$

sicchè, essendo $b_{ks} = b_{sk}$, $\varepsilon\alpha = 1$, *c. d. d.* (*) Per dimostrare la (5) si noti che

$$(5)_{\text{bis}} \qquad F_2 = -\varepsilon\sqrt{|A|}\,(du\,Dv - dv\,Du)$$

ossia

$$(5)_{\text{ter}} \qquad F_2 = -\varepsilon\Sigma\vartheta_{ik}\, du_i\, Du_k$$

come risulta subito p. es. dalle $(3)_{\text{ter}}$. Ora, sostituendo Du_i a du_i e *quindi* εdu_i a Du_i, la $(5)_{\text{bis}}$ mostra che F_2 si moltiplica per $-\varepsilon$, il che appunto è affermato dalla (5).

Introduciamo ancora una notazione, che ci sarà comoda qualche volta. Se φ è una funzione qualunque di u, v, si scrive:

$$d\varphi = \varphi_1 du + \varphi_2 dv;$$

e noi scriveremo analogamente qualche volta

$$(7) \qquad D\varphi = \varphi_1 Du + \varphi_2 Dv.$$

§ 57. — La forma differenziale F_3'.

A) Definizione di F_3'.

Noi porremo [cfr. le $(3)_{\text{ter}}$ del § 56]

$$(1) \qquad F_3' = \Sigma a_{kst}\, du_k\, du_s\, Du_t =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}} \begin{vmatrix} a_{11}du + a_{12}dv & a_{111}du^2 + 2a_{112}du\,dv + a_{122}dv^2 \\ a_{12}du + a_{22}dv & a_{112}du^2 + 2a_{122}du\,dv + a_{222}dv^2 \end{vmatrix}$$

(*) Si noti che il ragionamento *non* si applica se $b_{ks} = a_{ks}$, essendo identicamente $\Sigma a_{ks}\, du_k\, Du_s = 0$.

e indicheremo con b_{kst} il sistema *simmetrico* dei coefficienti della forma *impropriamente intrinseca* F'_3. La forma F'_3 è, come la F_3, *coniugata* ad F_2, cioè valgono le

$$(2) \qquad \Sigma A_{ks} b_{kst} = \Sigma a^{ks} b_{kst} = 0 .$$

Le b_{kst} sono date dalle

$$(3) \qquad b_{kst} = \Sigma \vartheta_{it} a^i_{ks} ,$$

ed inversamente valgono le

$$(3)_{\text{bis}} \qquad a_{kst} = \varepsilon \Sigma \vartheta_{it} b^i_{ks} .$$

Di più si hanno formole simili

$$(3)_{\text{ter}} \qquad b^t_{ks} = \Sigma \vartheta^{it} a_{ksi} ,$$

$$(3)_{\text{quater}} \qquad a^t_{ks} = \varepsilon \Sigma \vartheta^{it} b_{ksi} .$$

Accanto alla (1) possiamo scrivere anche

$$(1)_{\text{bis}} \qquad F_3 = \varepsilon \Sigma a_{kst}\, du_k Du_s Du_t ,$$

$$(1)_{\text{ter}} \qquad F_3' = \varepsilon \Sigma a_{kst}\, Du_k Du_s Du_t .$$

La $(1)_{\text{ter}}$ mostra che *l'equazione* $F'_3 = 0$ *definisce le tangenti di Segre.* Tutte le formole precedenti si verificano subito in coordinate asintotiche, ma noi le dimostreremo mediante calcoli diretti.

Essendo [cfr. le $(3)_{\text{bis}}$ del § 56]

$$\Sigma a_{ksp}\, du_k\, du_s\, Du_p = \Sigma a_{ksp}\, a^{pi}\, \vartheta_{it}\, du_t\, du_k\, du_s = \Sigma \vartheta_{it}\, a^i_{ks}\, du_k\, du_s\, du_t ,$$

per dimostrare le (3) basta provare che, se si definiscono le b_{kst} dalle (3), esse formano un sistema *simmetrico.* Ora è evidentemente $b_{kst} = b_{skt}$, sicchè basta provare che $b_{kst} = b_{kts}$, ossia che $b_{k12} - b_{k21} = 0$, oppure che

$$\Sigma \vartheta^{st} b_{kst} = 0 .$$

Ora [cfr. le (2) del § 56]

$$\Sigma \vartheta^{st} b_{kst} = \Sigma \vartheta^{st} \vartheta_{it} a^i_{ks} = \Sigma \vartheta^{st} \vartheta_{it} a^{ir} a_{ksr} = - \varepsilon \Sigma a^{sr} a_{ksr} = 0 .$$

Da (3) si deduce poi [cfr. le (4) del § 56 e le $\vartheta_{ks} = -\vartheta_{sk}$]

$$b_{ks}^{t} = \Sigma a^{ti}\vartheta_{pi}\, a_{ks}^{p} = \Sigma \vartheta^{it} a_{pi}\, a_{ks}^{p} = \Sigma \vartheta^{it} a_{ksi},$$

cioè le $(3)_{\text{ter}}$. E lascio al lettore il facile esercizio di provare anche le $(3)_{\text{bis}}$, $(3)_{\text{quater}}$ e (2). Per dimostrare le $(1)_{\text{bis}}$ e $(1)_{\text{ter}}$ basta osservare che è per le relazioni di coniugio e per la (6) del § 56

$$\Sigma a_{kst}\, Du_k\, Du_s = \varepsilon \Sigma a_{kst}\, du_k\, du_s \;.$$

B) Alcune identità notevoli.

Noi sappiamo (Cap. II § 12) che la forma F_2 è proporzionale all'*Hessiano* della forma F_3; la seconda espressione (1) di F'_3 prova pertanto che la forma F'_3 è proporzionale al *covariante cubico* di F_3. Esiste dunque una relazione lineare ed omogenea fra F_3^2, $F_3'^2$, F_2^3, e precisamente

$$F_3^2 - \varepsilon F_3'^2 + \frac{1}{2} J F_2^3 = 0. \tag{4}$$

In particolare, usando le forme normali $\varphi_3 = -JF_3$, $\varphi'_3 = -JF'_3$, $\varphi_2 = -JF_2$, essa diventa

$$\varphi_3^2 - \varepsilon \varphi_3'^2 - \frac{1}{2} \varphi_2^3 = 0. \tag{4 bis}$$

La teoria dei covarianti di una forma cubica binaria conduce anche ad altre formole importanti. Infatti le forme F_2 e F'_3 essendo proporzionali a forme covarianti di F_3, evidentemente anche le forme

$$\Sigma a_r^{ik} a_{iks}\, du_r\, du_s\,, \quad \Sigma b_r^{ik} b_{iks}\, du_r\, du_s\,, \quad \Sigma a_r^{ik} b_{iks}\, du_r\, du_s$$

sono proporzionali a forme covarianti di F_3. Ora, come è noto, l'unica forma covariante di secondo ordine di una forma cubica binaria è il suo Hessiano, sicchè le forme sopra scritte sono nulle oppure sono proporzionali a F_2. Più precisamente, noi dimostreremo le formole importanti

$$\Sigma a_r^{ik} a_{iks} = -J a_{rs}\,, \tag{5}$$

$$\Sigma b_r^{ik} b_{iks} = \varepsilon J a_{rs}\,, \tag{5 bis}$$

$$(5)_{\text{ter}} \qquad \Sigma\, a_r^{ik}\, b_{iks} = -\, J\vartheta_{rs}\,.$$

Per provare lo (5), occorre dimostrare anzitutto le formole

$$(6) \qquad \Sigma\, a^{ikl}\, a_{ikl} = -\, 2J\,,$$

$$(6)_{\text{bis}} \qquad \Sigma\, b^{ikl}\, b_{ikl} = 2\,\varepsilon J\,,$$

$$(6)_{\text{ter}} \qquad \Sigma\, a^{ikl}\, b_{ikl} = \Sigma\, a_{ikl}\, b^{ikl} = 0\,.$$

Dalla (3) del § 55 segue subito

$$J = -\,\frac{\varepsilon}{2}\,\Sigma\,\frac{a^{ik}}{\sqrt{|A|}}\,(a_{i11}\, a_{k22} - 2a_{i12}\, a_{k12} + a_{i22}\, a_{k11}) =$$

$$= -\,\frac{\varepsilon}{2}\,\Sigma\,\vartheta^{rp}\,\vartheta^{sq}\, a^{ik}\, a_{irs}\, a_{kpq} = -\,\frac{\varepsilon}{2}\,\Sigma\,\vartheta^{rp}\,\vartheta^{sq}\, a_{irs}\, a_{pq}^{i}$$

o facendo uso di $(3)_{\text{ter}}$

$$J = -\,\frac{\varepsilon}{2}\,\Sigma\,\vartheta^{sq}\, b_{is}^{p}\, a_{pq}^{i}\,.$$

Da questo si passa subito a (6) e $(6)_{\text{bis}}$: a (6) facendo uso della $(3)_{\text{quater}}$, a $(6)_{\text{bis}}$ facendo uso della $(3)_{\text{ter}}$. In quanto alla $(6)_{\text{ter}}$, da (3) si ha

$$\Sigma\, a^{ikl}\, b_{ikl} = \Sigma\,\vartheta_{ri}\, a^{ikl}\, a_{kl}^{r}\,,$$

e il secondo membro, cambiando di segno se si scambiano gli indici i e r, svanisce identicamente.

Ciò premesso, osserviamo che i sistemi covarianti

$$\Sigma\, a_r^{ik}\, a_{iks}\,,\quad \Sigma\, b_r^{ik}\, b_{iks}\,,\quad \Sigma\, a_r^{ik}\, b_{iks} + J\vartheta_{rs}$$

sono simmetrici (*). Pertanto, ricordando l' osservazione fatta sull' Hessiano di una forma cubica binaria, risulta che si possono trovare α, β e γ tali che sia

$$\Sigma\, a_r^{ik}\, a_{iks} = \alpha\,.\, a_{rs}\,,$$

$$\Sigma\, b_r^{ik}\, b_{iks} = \beta\,.\, a_{rs}\,,$$

$$\Sigma\, a_r^{ik}\, b_{iks} + J\vartheta_{rs} = \gamma\,.\, a_{rs}\,.$$

(*) Ciò è evidente per i primi duo, ma vale anche per il terzo. Infatti [cfr. $(3)_{\text{quater}}$ e (6) del § 57 e (2) del § 56]

$$(\Sigma\, a_1^{ik}\, b_{ik2} + J\vartheta_{12}) - (\Sigma\, a_2^{ik}\, b_{ik1} + J\vartheta_{21}) =$$

$$= -\,\varepsilon\sqrt{|A|}\,\Sigma\,\vartheta^{rs}(\Sigma\, a_r^{ik}\, b_{iks} + J\vartheta_{rs}) = -\,\varepsilon\sqrt{|A|}\,(2\,\varepsilon J - 2\,\varepsilon J) = 0.$$

Ora moltiplicando le precedenti per a^{rs} e sommando, si trova

$$2\alpha = \Sigma a^{iks}\, a_{iks}\,,$$

$$2\beta = \Sigma b^{iks}\, b_{iks}\,,$$

$$2\gamma = \Sigma a^{iks}\, b_{iks}\,,$$

e basta osservare le (6) per arrivare alle (5).

Passiamo alla dimostrazione di (4). Dalle (1) e (1)$_{\text{bis}}$ si deduce

$$\begin{aligned}\varepsilon F_3^2 - F_3'^2 &= \Sigma a_{ikl}\, du_i\, du_k\, du_l \,.\, \Sigma a_{rst}\, du_r\, Du_s\, Du_t - \\ &\quad - \Sigma a_{ikl}\, du_i\, du_k\, Du_l \,.\, \Sigma a_{rst}\, du_r\, du_s\, Du_t \\ &= \Sigma a_{ikl}\, a_{rst}\, du_i\, du_k\, du_r\, Du_t\, (du_l\, Du_s - du_s\, Du_l) \\ &= -\, \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Sigma \vartheta^{ls}\, a_{ikl}\, a_{rst}\, du_i\, du_k\, du_r\, Du_t \,.\, (du\, Dv - dv\, Du)\end{aligned}$$

e per la (5)$_{\text{bis}}$ del § 56

$$\varepsilon F_3^2 - F_3'^2 = F_2\, \Sigma \vartheta^{ls}\, a_{ikl}\, a_{rst}\, du_i\, du_k\, du_r\, Du_t$$

e, scambiando gli indici i ed r, k e t, l e s, essendo $\vartheta^{sl} = -\vartheta^{ls}$

$$\begin{aligned}\varepsilon F_3^2 - F_3'^2 &= \frac{1}{2}\, F_2\, \Sigma \vartheta^{ls}\, a_{ikl}\, a_{rst}\, du_i\, du_r\, (du_k\, Du_t - du_t\, Du_k) \\ &= -\, \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{|A|}\, F_2\, \Sigma \vartheta^{ls}\, \vartheta^{kt}\, a_{ikl}\, a_{rst}\, du_i\, du_r\, (du\, Dv - dv\, Du).\end{aligned}$$

Applicando nuovamente la (5)$_{\text{bis}}$ del § 56 si deduce

$$\varepsilon F_3^2 - F_3'^2 = \frac{1}{2}\, F_2^2\, \Sigma \vartheta^{kt}\, \vartheta^{ls}\, a_{ikl}\, a_{rst}\, du_i\, du_r\,,$$

ed osservando la (3)$_{\text{ter}}$

$$= \frac{1}{2}\, F_2^2\, \Sigma \vartheta^{ls}\, b_{il}^{t}\, a_{rst}\, du_i\, du_r\,,$$

indi per la (3)$_{\text{quater}}$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\, F_2^2\, \Sigma a_i^{st}\, a_{rst}\, du_i\, du_r\,,$$

e finalmente per le (5)

$$\varepsilon F_3^2 - F_3'^2 = -\, \frac{\varepsilon}{2}\, J F_2^2\, \Sigma a_{ir}\, du_i\, du_r = -\, \frac{\varepsilon}{2}\, J F_2^3\,,\ c.\ d.\ d.$$

§ 58. — La forma differenziale $\Sigma \psi_i du_i$.

A) Definizione delle ψ_i.

Dimostreremo in questo § che il sistema covariante $\dot{a}_{rsti}$ derivato del sistema covariante a_{rst} può sostituirsi con un sistema covariante ψ_i ad un sol indice. Tale fatto è importantissimo, perchè, come vedremo anche nei futuri Capitoli, ciò permette di dare ai calcoli di geometria proiettivo-differenziale delle superficie grande semplicità ed eleganza. Però le formole che andiamo a dimostrare non hanno senso se $J = 0$. *Supponiamo quindi in tutto il § attuale* $J \neq 0$, sicchè le nostre formole non si applicano a superficie rigate. Osserviamo dapprima che le forme F_3 e F'_3 sono linearmente indipendenti (*) ; se ne deduce che ogni forma cubica coniugata ad F_2 è combinazione lineare di F_3 e F'_3. Ora tali sono le forme $\Sigma \dot{a}_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t$ $(i = 1, 2)$; infatti, derivando covariantemente le $\Sigma a^{rs} a_{rst} = 0$ si trova $\Sigma \dot{a}^{rs} \dot{a}_{rsti} = 0$. Ne segue tosto che si possono trovare due sistemi covarianti α_i e β_i ad un sol indice tali che sia

$$(\alpha) \qquad a_{rsti} = \alpha_i \dot{a}_{rst} + \beta_i b_{rst}\,.$$

Ora è facile vedere che $\alpha_i = \dfrac{1}{2}\dfrac{J_i}{J}$ (**) ; noi porremo

---

(*) Infatti, se fosse $b_{rst} = \alpha a_{rst}$, sarebbe

$$\Sigma b^{rst} b_{rst} = \alpha \Sigma b^{rst} a_{rst}\,, \quad \text{ossia} \quad J = 0$$

per le (6) bis e (6) ter del § 57.

(**) Infatti, derivando covariantemente la (6) del § 57, si deduce

$$J_i = -\frac{1}{2} \Sigma (a^{hr} a^{ps} a^{qt} a_{hpq} a_{rst})_i =$$

$$= -\frac{1}{2} \Sigma a^{hr} a^{ps} a^{qt} (a_{hpqi} a_{rst} + a_{hpq} a_{rsti}) =$$

$$= - \Sigma a^{hr} a^{ps} a^{qt} a_{hpq} a_{rsti} = - \Sigma a^{rst} a_{rsti}\,.$$

Moltiplicando la (α) con a^{rst} e sommando, si ottiene pertanto, osservando anche le (6) e (6) bis del § 57, $-J_i = -2J\alpha_i$, *c. d. d.*

$$\beta_i = \varepsilon \Sigma \vartheta_{ik} \psi^k \text{ (*)},$$

sicchè

$$(1) \qquad a_{rsti} = \frac{1}{2} \frac{J_i}{J} a_{rst} + \varepsilon \Sigma \vartheta_{ik} \psi^k \, . \, b_{rst} \, .$$

Accanto alla (1), vale la formola analoga

$$(1)_{\text{bis}} \qquad b_{rsti} = \frac{1}{2} \frac{J_i}{J} b_{rst} + \Sigma \vartheta_{ik} \psi^k \, . \, a_{rst} \, .$$

Essa si deduce subito dalla precedente, derivando covariantemente la (3) del § 57, e osservando che le derivate covarianti di ϑ_{it} sono nulle.

La forma differenziale $\Sigma \psi_i du_i$ è evidentemente *intrinseca;* ma essa non è invariante. È invece intrinseca ed invariante la forma

$$(2) \qquad \Sigma \psi_i du_i + \frac{3}{2} \frac{dJ}{J}$$

ma è inutile confermarlo con calcolo, perchè ci arriveremo in modo indiretto al Cap. IX § 76 dove vedremo anche il significato geometrico delle direzioni definite dall'annullarsi di tale forma.

B) Relazioni con le $p_{rs} - \Pi_{rs}$.

Il sistema covariante a_{rsti} appare nella formola (13) Cap. II, § 14 *B*). Usando i differenziali coniugati essa si scrive

$$P - \Pi = \frac{1}{\sqrt{|A|}} \Sigma (a_{ik12} - a_{ik21}) du_i Du_k$$

ossia

$$(3) \qquad P - \Pi = - \varepsilon \Sigma \vartheta^{rs} a_{ikrs} du_i Du_k$$

(*) La ragione perchè prendiamo le ψ_i e non le β_i come quantità fondamentali, sta nel fatto che le ψ_i dipendono *razionalmente* dai coefficienti di F_2 e F_3 e dalle loro derivate, come si verifica facilmente.

Sostituendovi a Du_k i valori (3), si trova tenendo conto successivamente delle (3) $_{\text{ter}}$ e (3) $_{\text{quater}}$ del § 57

$$P - \Pi = -\varepsilon \Sigma \vartheta^{rs} \vartheta^{kp} a_{ikrs} a_{pq} du_i du_q =$$

$$= -\varepsilon \Sigma \vartheta^{rs} b_{ir\overset{p}{-}s} a_{pq} du_i du_q = -\Sigma a_{pq} a_{i\overset{ps}{-}s} du_i du_q =$$

$$= -\Sigma a_{iq\overset{s}{-}s} du_i du_q = \Sigma (p_{iq} - \pi_{iq}) du_i du_q ,$$

e ciò può scriversi

$$(3)_{\text{bis}} \qquad p_{ik} - \pi_{ik} = -\Sigma a_{ik\overset{r}{-}r} \quad (*).$$

Se $J \neq 0$, possiamo usare la formola (1) che dà

$$\Sigma a_{ik\overset{r}{-}r} = \frac{1}{2} \Sigma \frac{J_r}{J} a^r_{ik} + \varepsilon \Sigma \psi^t \vartheta_{rt} b^r_{ik}$$

$$= \frac{1}{2} \Sigma \frac{J_r}{J} a^r_{ik} + \Sigma \psi^t a_{ikt} \quad [\text{cfr. § 57, } (3)_{\text{bis}}]$$

sicchè, se $J \neq 0$,

$$(3)_{\text{ter}} \qquad p_{ik} - \pi_{ik} = -\Sigma \left(\frac{1}{2} \frac{J^r}{J} + \psi^r \right) a_{ikr} .$$

§ 59. — Gli invarianti del primo ordine dell'elemento lineare proiettivo.

A) Definizione.

In tutto il resto del Capitolo faremo uso di coordinate normali ($J = -1$) (**).

(*) Si ricordi che

$$\Sigma a_{ik\overset{r}{-}r} = \Sigma A_{rs} a_{iksr} .$$

(**) Le formole che andremo a dedurre si generalizzano senza difficoltà al caso di J qualunque, ma ciò ha poco interesse.

Porremo

$$
\begin{aligned}
&\Phi = \Sigma a^{ik}\,\psi_i\,\psi_k = \Sigma a_{ik}\,\psi^i\,\psi^k = \Sigma \psi_i\,\psi^i\,,\\
(1)\qquad &\Psi = \Sigma a^{ikl}\,\psi_i\,\psi_k\,\psi_l = \Sigma a_{ikl}\,\psi^i\,\psi^k\,\psi^l\,,\\
&\Psi' = \Sigma b^{ikl}\,\psi_i\,\psi_k\,\psi_l = \Sigma b_{ikl}\,\psi^i\,\psi^k\,\psi^l\,.
\end{aligned}
$$

Le quantità Φ, Ψ, Ψ' hanno evidentemente significato intrinseco ed invariante (*). Essi sono del resto gl' invarianti più semplici dell'elemento lineare proiettivo; vale infatti il teorema che ci accontentiamo d' enunciare, che ogni invariante (assoluto) di $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$ che contiene soltanto derivate prime dei coefficienti di φ_2 e φ_3 è funzione razionale di Φ, Ψ e Ψ'. Essi sono legati dall'identità

$$
(2)\qquad \Psi^2 - \varepsilon\,\Psi'^2 = \frac{1}{2}\,\Phi^3 \ (**).
$$

B) **Alcune identità nel caso $\Phi \neq 0$.**

Le forme differenziali lineari

$$
\begin{aligned}
&\Sigma \psi_i\, du_i\,, \quad \Sigma \psi_i\, Du_i = \Sigma \vartheta_{ri}\,\psi^r\, du_i\,,\\
&\Sigma a_{rsi}\,\psi^r\,\psi^s\, du_i\,,\ \Sigma a_{rsi}\,\psi^r\,\psi^s\, Du_i = \Sigma b_{rsi}\,\psi^r\,\psi^s\, du_i
\end{aligned}
$$

sono intrinseche (le due forme a destra impropriamente intrinseche) ed invarianti. Se $\Phi \gtrless 0$, le forme $\Sigma \psi_i\, du_i$, $\Sigma \psi_i\, Du_i$ sono linearmente indipendenti e viceversa (***); in tal caso pertanto le altre due sono combinazioni lineari di esse; precisamente valgono le

(*) Si tenga presente che esse s' intendono calcolate in coordinate normali e che Ψ' è soltanto impropriamente intrinseco.

(**) Ciò si vede subito, sostituendo ψ^i a du_i nell'identità (4)$_{\text{bis}}$ del § 57.

(***) Infatti

$$
\begin{vmatrix} \psi_1 & \Sigma \vartheta_{r1}\,\psi^r \\ \psi_2 & \Sigma \vartheta_{r2}\,\psi_r \end{vmatrix} = -\varepsilon\sqrt{|A|}\,\Sigma \vartheta^{ik}\,\vartheta_{rk}\,\psi_i\,\psi^r = \sqrt{|A|}\,\Sigma \psi_r\,\psi^r = \sqrt{|A|}\,\Phi
$$

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
\Sigma\, a_{irs}\, \psi^r\, \psi^s\, du_i &= \frac{\Psi}{\Phi}\, \Sigma\, \psi_i\, du_i + \varepsilon\, \frac{\Psi'}{\Phi}\, \Sigma\, \psi_i\, Du_i\,, \\
\Sigma\, a_{irs}\, \psi^r\, \psi^s\, Du_i &= \frac{\Psi'}{\Phi}\, \Sigma\, \psi_i du_i + \frac{\Psi}{\Phi}\, \Sigma\, \psi_i\, Du_i\,.
\end{aligned}
$$

Infatti, noi sappiamo che si possono determinare α e β in modo che sia

$$\Sigma\, a_{irs} \psi^r\, \psi^s\, du_i = \alpha\, \Sigma \psi_i\, du_i + \beta\, \Sigma \psi_i\, Du_i\,.$$

Sostituendovi Du_i al posto di du_i e quindi εdu_i al posto di Du_i si ottiene

$$\Sigma\, a_{irs} \psi^r\, \psi^s\, Du_i = \varepsilon\, \beta\, \Sigma \psi_i\, du_i + \alpha\, \Sigma \psi_i\, Du_i\,.$$

Nelle due equazioni poniamo ψ^i al posto di du_i e quindi $\Sigma \vartheta_{ir} \psi^r$ al posto di Du_i. Si ottiene, tenendo conto delle (1) § 59 e delle (3) § 57,

$$\Psi = \alpha\, \Phi \quad , \quad \varepsilon \Psi' = \beta\, \Phi\,,$$

da cui si hanno le (3).

C) Altre identità.

Dimostreremo subito che i quattro sistemi controvarianti a due indici

$$
(4) \qquad \vartheta^{ik}\,, \quad a^{ik}\,, \quad \Sigma\, a^{ikr} \psi_r\,, \quad \Sigma\, b^{ikr} \psi_r
$$

sono linearmente indipendenti se $\Phi \gtrless 0$. Ne segue che, sotto l'ipotesi $\Phi \gtrless 0$, ogni sistema controvariante a due indici è combinazione lineare dei sistemi (4). Ciò vale in particolare per $\psi^i du_k$, $\Sigma\, a^{rsi}\, \psi_r\, \psi_s\, du_k$, $\Sigma\, b^{rsi}\, \psi_r\, \psi_s\, du_k$. Precisamente proveremo che

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
\psi^i du_k = & \left(\frac{1}{2}\, a^{ik} + \frac{\Psi}{\Phi^2}\, \Sigma\, a^{ikr}\, \psi_r - \varepsilon\, \frac{\Psi'}{\Phi^2}\, \Sigma\, b^{ikr}\, \psi_r\right) \Sigma\, \psi_i du_i + \\
& + \varepsilon \left(-\frac{1}{2}\, \vartheta^{ik} + \frac{\Psi'}{\Phi^2}\, \Sigma\, a^{ikr}\, \psi_r - \frac{\Psi}{\Phi^2}\, \Sigma\, b^{ikr}\, \psi_r\right) \Sigma\, \psi_i\, Du_i
\end{aligned}
$$

$$
(5)_{\text{bis}}\quad
\begin{aligned}
\Sigma a^{rsi} \psi_r \psi_s du_k = &\left(-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\Psi'}{\Phi}\vartheta^{ik} + \frac{1}{2}\frac{\Psi}{\Phi}a^{ik} + \frac{1}{2}\Sigma a^{ikr}\psi_r\right)\Sigma\psi_i du_i + \\
&+ \varepsilon\left(-\frac{1}{2}\frac{\Psi}{\Phi}\vartheta^{ik} + \frac{1}{2}\frac{\Psi'}{\Phi}a^{ik} - \frac{1}{2}\Sigma b^{ikr}\psi_r\right)\Sigma\psi_i Du_i ,
\end{aligned}
$$

$$
(5)_{\text{ter}}\quad
\begin{aligned}
\Sigma b^{rsi} \psi_r \psi_s du_k = &\left(-\frac{1}{2}\frac{\Psi}{\Phi}\vartheta^{ik} + \frac{1}{2}\frac{\Psi'}{\Phi}a^{ik} + \frac{1}{2}\Sigma b^{ikr}\psi_r\right)\Sigma\psi_i du_i + \\
&+ \left(-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\Psi'}{\Phi}\vartheta^{ik} + \frac{1}{2}\frac{\Psi}{\Phi}a^{ik} - \frac{1}{2}\Sigma a^{ikr}\psi_r\right)\Sigma\psi_i Du_i .
\end{aligned}
$$

Dimostriamo dapprima che i sistemi controvarianti (4) sono linearmente indipendenti. Se

$$c_0\vartheta^{ik} + c_1 a^{ik} + c_2\Sigma a^{ikr}\psi_r + c_3\Sigma b^{ikr}\psi_r = 0,$$

scambiando i con k e sottraendo si ricava $c_0 = 0$.

Moltiplicando con a_{ik} e sommando risulta anche $c_1 = 0$ per le solite relazioni di coniugio. Infine moltiplicando con $a_{ik}^{s}\psi_s$ oppure con $b_{ik}^{s}\psi_s$ e tenendo conto delle identità (5) del § 57 si ottiene

$$c_2\Phi = 0 \quad , \quad c_3\Phi = 0 .$$

Quindi $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$, *c. d. d.* Pertanto si può porre

$$\psi^i du_k = \alpha_0\vartheta^{ik} + \alpha_1 a^{ik} + \alpha_2\Sigma a^{ikr}\psi_r + \alpha_3\Sigma b^{ikr}\psi_r ,$$

$$\Sigma a^{rsi}\psi_r\psi_s du_k = \beta_0\vartheta^{ik} + \beta_1 a^{ik} + \beta_2\Sigma a^{ikr}\psi_r + \beta_3\Sigma b^{ikr}\psi_r ,$$

$$\Sigma b^{rsi}\psi_r\psi_s du_k = \gamma_0\vartheta^{ik} + \gamma_1 a^{ik} + \gamma_2\Sigma a^{ikr}\psi_r + \gamma_3\Sigma b^{ikr}\psi_r .$$

Per determinare i coefficienti, moltiplichiamo le precedenti equazioni per ϑ_{ik} , a_{ik} , $\Sigma a_{ik}^{l}\psi_l$, $\Sigma b_{ik}^{l}\psi_l$ e sommiamo rispetto a i e k. Moltiplicando per ϑ_{ik}, osservando che $\vartheta_{ik} + \vartheta_{ki} = 0$ e tenendo conto delle (3) e (3)$_{\text{bis}}$ del § 57 si trova

$$\Sigma\psi_i Du_i = -2\varepsilon\alpha_0 , \quad \Sigma b_{rsi}\psi^r\psi^s du_i = -2\varepsilon\beta_0 , \quad \Sigma a_{rsi}\psi^r\psi^s du_i = -2\gamma_0 .$$

Moltiplicando per a_{ik} , si trova per le relazioni di coniugio

$$\Sigma\psi_i du_i = 2\alpha_1 , \quad \Sigma a_{rsi}\psi^r\psi^s du_i = 2\beta_1 , \quad \Sigma b_{rsi}\psi^r\psi^s du_i = 2\gamma_1 .$$

Moltiplicando per $\Sigma a_{ik}^{l}\psi_l$ e tenendo conto delle (5), (5)$_{\text{bis}}$ e (5)$_{\text{ter}}$ del § 57 dove nel caso attuale $J = -1$, si trova

$$\Sigma a_{rsi}\psi^r\psi^s du_i = \alpha_2\Phi ,$$

$$\Sigma a^{rsi} a^l_{ik} \psi_r \psi_s \psi_l du_k = \beta_2 \Phi ,$$

$$\Sigma b^{rsi} a^l_{ik} \psi_r \psi_s \psi_l du_k = \gamma_2 \Phi .$$

Similmente si trova moltiplicando per $\Sigma b^l_{ik} \psi_l$

$$\Sigma b_{rsi} \psi^r \psi^s du_i = - \varepsilon \alpha_3 \Phi ,$$

$$\Sigma a^{rsi} b^l_{ik} \psi_r \psi_s \psi_l du_k = - \varepsilon \beta_3 \Phi ,$$

$$\Sigma b^{rsi} b^l_{ik} \psi_r \psi_s \psi_l du_k = - \varepsilon \gamma_3 \Phi .$$

Le espressioni così trovate di β_2, β_3, γ_2, γ_3 si possono semplificare. Infatti, esse si possono scrivere evidentemente

$$\Sigma a_{irs} a^i_{kl} \psi^r \psi^s \psi^l du_k = \beta_2 \Phi ,$$

$$\Sigma a_{irs} b^i_{kl} \psi^r \psi^s \psi^l du_k = - \varepsilon \beta_3 \Phi ,$$

$$\Sigma b_{irs} a^i_{kl} \psi^r \psi^s \psi^l du_k = \gamma_2 \Phi ,$$

$$\Sigma b_{irs} b^i_{kl} \psi^r \psi^s \psi^l du_k = - \varepsilon \gamma_3 \Phi .$$

D'altra parte, sostituendo nelle (3) (*) $\Sigma a^i_{kl} \psi^l du_k$ al posto di du_i, si trova per le (3) stesse, osservando anche l'identità (2)

$$\beta_2 \Phi = \frac{1}{\Phi} (\Psi \Sigma a^i_{kl} \psi_i \psi^l du_k + \varepsilon \Psi' \Sigma \vartheta_{ri} a^i_{kl} \psi^r \psi^l du_k)$$

$$= \frac{1}{\Phi} (\Psi \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i - \varepsilon \Psi' \Sigma b_{irs} \psi^r \psi^s du_i) =$$

$$= \frac{1}{2} \Phi \Sigma \psi_i du_i ,$$

$$\gamma_2 \Phi = \frac{1}{\Phi} (\Psi' \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i - \Psi \Sigma b_{irs} \psi^r \psi^s du_i) =$$

$$= - \frac{1}{2} \Phi \Sigma \psi_i Du_i .$$

Similmente, sostituendo nelle (3) $\Sigma b^i_{kl} \psi^l du_k$ al posto di du_i, si trova

$$- \varepsilon \beta_3 \Phi = \frac{1}{\Phi} (\Psi \Sigma b_{irs} \psi^r \psi^s du_i - \Psi' \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i) =$$

$$= \frac{1}{2} \Phi \Sigma \psi_i Du_i ,$$

(*) Si pensi scritto $\Sigma \vartheta_{ri} \psi^r du_i$ al posto di $\Sigma \psi_i Du_i$.

$$-\varepsilon\gamma_3\Phi = \frac{1}{\Phi}(\Psi'\Sigma b_{irs}\psi^r\psi^s du_i - \varepsilon\Psi\Sigma a_{irs}\psi^r\psi^s du_i) =$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2}\Phi\Sigma\psi_i du_i .$$

Sostituendo i valori trovati di $\alpha_0, \ldots \gamma_3$ e facendo uso delle (3) si ottengono finalmente le formole che volevamo dimostrare.

$D)$ Il caso $\Phi = 0$, $\Psi \neq 0$.

Le formole (3) e (5) non hanno senso se $\Phi = 0$. Se non soltanto $\Phi = 0$, ma anche $\Psi = 0$ (*), i primi membri di esse svaniscono identicamente. Supponiamo pertanto che sia $\Phi = 0$, ma $\Psi \gtrless 0$ (**).

Si dimostrano facilmente le formole

$$\Sigma\vartheta_{ri}\psi^i = \omega\psi_r, \quad \Psi' = \omega\Psi, \quad \omega^2 = 1, \qquad \text{se } \Phi = 0. \tag{6}$$

Infatti, essendo $\Phi = \psi_1\psi^1 + \psi_2\psi^2 = 0$, esiste una quantità ω tale che

$$\sqrt{|A|}\,\psi^2 = \omega\psi_1, \quad \sqrt{|A|}\,\psi^1 = -\omega\psi_2,$$

ossia $\Sigma\vartheta_{ri}\psi^i = \omega\psi_r$. Se ne deduce

$$\Psi' = \Sigma b_{ikl}\psi^i\psi^k\psi^l = \Sigma\vartheta_{ri}a^r_{kl}\psi^i\psi^k\psi^l = \omega\Sigma a^r_{kl}\psi_r\psi^k\psi^l = \omega\Psi.$$

D' altra parte la (2) si riduce a $\Psi'^2 - \varepsilon\Psi^2 = 0$, sicchè $\varepsilon = 1$, $\omega^2 = 1$, *c. d. d.*

Nel caso ora considerato, le forme

$$\Sigma\psi_i du_i, \quad \Sigma a_{irs}\psi^r\psi^s du_i$$

sono linearmente indipendenti (***), e le formole (3) vanno sostituite

(*) E quindi, come si vede subito, $\psi_1 = \psi_2 = 0$.

(**) Tale caso si può presentare nel campo reale soltanto se $\varepsilon = 1$.

(***) Infatti $\begin{vmatrix} \Sigma a_{1rs}\psi^r\psi^s & \psi_1 \\ \Sigma a_{2rs}\psi^r\psi^s & \psi_2 \end{vmatrix} = \sqrt{|A|}\,\Sigma\vartheta^{ik}\psi_i a_{krs}\psi^r\psi^s$

$$= -\sqrt{|A|}\,\Psi' = -\omega\sqrt{|A|}\,\Psi \gtrless 0.$$

con le

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\Sigma \psi_i Du_i = -\omega \Sigma \psi_i du_i , \\ &\Sigma b_{irs} \psi^r \psi^s du_i = \omega \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i , \text{ se } \Phi = 0 , \end{aligned}$$

che si dimostrano subito osservando la prima delle (6).

Continuando a supporre $\Phi = 0$, $\Psi \gtrless 0$, dimostriamo subito che i sistemi contravarianti a due indici

$$\vartheta^{ik} , \quad a^{ik} , \quad \Sigma a^{ikr} \psi_r , \quad \psi^i \psi^k$$

sono linearmente indipendenti, sicchè ogni sistema contravariante a due indici ne è combinazione lineare.

In particolare valgono le formole

$$(8)\qquad \psi^i du_k = \left(\frac{\omega}{2} \vartheta^{ik} + \frac{1}{2} a^{ik} \right) \Sigma \psi_i du_i + \frac{\psi^i \psi^k}{\Psi} \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i ,$$

$$(8)_{\text{bis}}\qquad \begin{aligned} \Sigma a^{irs} \psi_r \psi_s du_i = {} & \Sigma a^{ikr} \psi_r . \Sigma \psi_i du_i + \\ & + \left(-\frac{\omega}{2} \vartheta^{ik} + \frac{1}{2} a^{ik} \right) \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i , \end{aligned}$$

che sostituiscono le (5), $(5)_{\text{bis}}$ e $(5)_{\text{ter}}$ (*) nel caso attualmente considerato.

Per dimostrare l' indipendenza dei quattro sistemi contravarianti sopra enumerati supponiamo che valga un' identità della forma

$$c_0 \vartheta^{ik} + c_1 a^{ik} + c_2 \Sigma a^{ikr} \psi_r + c_3 \psi^i \psi^k = 0 ,$$

e dimostriamo che è $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Scambiando i con k e sottraendo, risulta $c_0 = 0$. Moltiplicando per a_{ik} e sommando si ottiene

$$2 c_1 + c_3 \Phi = 2 c_1 = 0.$$

Moltiplicando per $\psi_i \psi_k$ e sommando si ha

$$c_2 \Psi + c_3 \Phi^2 = c_2 \Psi = 0 ,$$

sicchè $c_2 = 0$ e quindi anche $c_3 = 0$, *c. d. d.*

(*) È evidentemente $\Sigma b^{irs} \psi_r \psi_s du_i = \omega \Sigma a^{irs} \psi_r \psi_s du_i$.

Possiamo pertanto porre

$$\psi^i \, du_k = \alpha_0 \, \vartheta^{ik} + \alpha_1 \, a^{ik} + \alpha_2 \, \Sigma \, a^{ikr} \psi_r + \alpha_3 \, \psi^i \, \psi^k ,$$

$$\Sigma \, a^{irs} \psi_r \, \psi_s \, du_k = \beta_0 \, \vartheta^{ik} + \beta_1 \, a^{ik} + \beta_2 \, \Sigma \, a^{ikr} \psi_r + \beta_3 \, \psi^i \, \psi^k .$$

Moltiplicando per ϑ_{ik} e sommando si trova subito (si tenga presente che $\varepsilon = 1$)

$$\alpha_0 = \frac{\omega}{2} \, \Sigma \, \psi_i \, du_i , \quad \beta_0 = - \frac{\omega}{2} \, \Sigma \, a_{irs} \, \psi^r \, \psi^s \, du_i .$$

Moltiplicando per a_{ik} e sommando, si ottiene pure subito (essendo $\Sigma a_{ik} \psi^i \, \psi^k = \Phi = 0$)

$$\Sigma \, \psi_i \, du_i = 2 \, \alpha_1 , \quad \Sigma \, a_{irs} \psi^r \, \psi^s \, du_i = 2 \, \beta_1 .$$

Moltiplicando per $\psi_i \, \psi_k$ e sommando si ottiene, osservando che $\Sigma \psi_i \, \psi^i = \Phi = 0$,

$$\alpha_2 \, \Psi = 0 , \quad \Psi \, \Sigma \, \psi_i \, du_i = \Psi \, \beta_2 .$$

Infine moltiplicando per $\Sigma \, a_{ikt} \psi^t$ e sommando si ha, osservando che $\alpha_2 = 0$,

$$\Sigma \, a_{irs} \psi^r \, \psi^s \, du_i = \alpha_3 \, \Psi ,$$

$$\Sigma \, a^{irs} \, a_{ikt} \, \psi_r \, \psi_s \, \psi^t \, du_k = \beta_2 \, \Sigma \, a^{ikr} \, a_{ikt} \, \psi_r \, \psi^t + \beta_3 \, \Psi .$$

Ora la (5) del § 57 dimostra che

$$\Sigma \, a^{ikr} \, a_{ikt} \psi_r \, \psi^t = \Sigma \, a_r^{ik} \, a_{ikt} \, \psi^r \, \psi^t = \Sigma \, a_{rt} \, \psi^r \, \psi^t = \Phi = 0 ,$$

sicchè risulterà $\beta_3 = 0$ se ci riesce di provare che

$$\Sigma \, a_{rs}^{i} \, a_{pqi} \, \psi^r \, \psi^s \, \psi^p \, du_q = 0 ,$$

e le formole (8) e (8)$_{\text{bis}}$ saranno dimostrate.

Ora ciò segue immediatamente dalla formola generale

$$\Sigma \, a_{rs}^{i} \, a_{pqi} \, \psi^r \, \psi^s \, \psi^p \, du_q = - \frac{1}{2} \, \Phi \, \Sigma \, \psi_i \, du_i \tag{9}$$

e dalla nostra ipotesi $\Phi = 0$. La formola (9) è stata dimostrata a pag. 311, sotto l' ipotesi $\Phi \gtrless 0$, ma essa evidentemente non può cessare d' esser valida se $\Phi = 0$.

§ 60. — Invarianti del secondo ordine dell' elemento lineare proiettivo.

A) Definizione.

Oltre gli invarianti Φ, Ψ e Ψ' studiati al § precedente, ci sarà utile considerare quattro ulteriori invarianti che dipendono anche dalle derivate seconde dei coefficienti dell' elemento lineare proiettivo. Essi sono (le ψ_{rs} sono naturalmente le derivate covarianti di ψ_r)

$$K = -\frac{1}{3}\Sigma a^{rs}\psi_{rs} = -\frac{1}{3\sqrt{|A|}}\left[\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{|A|}\,\psi^1) + \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{|A|}\,\psi^2)\right] (*),$$

(1)
$$H = \Sigma\vartheta^{rs}\psi_{rs} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial u} - \frac{\partial\psi_1}{\partial v}\right),$$

$$\Theta = \Sigma a^{rst}\psi_{rs}\psi_t \quad , \quad \Theta' = \Sigma b^{rst}\psi_{rs}\psi_t .$$

Osserviamo che H e Θ' sono soltanto *impropriamente* intrinseche. *La quantità* K *non è che la curvatura della forma* φ_2; ciò si vede facilmente calcolandola in coordinate asintotiche (**). La $H = 0$ *è la condizione che caratterizza una superficie isotermo-asintotica.*

B) Il caso $\Phi \neq 0$.

Supponiamo ora $\Phi \gtrless 0$. Allora ogni forma lineare in du, dv

(*) L' identità $\Sigma a^{rs}\psi_{rs} = \frac{1}{\sqrt{|A|}}\left[\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{|A|}\,\psi^1) + \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{|A|}\,\psi^2)\right]$ si dimostra nel calcolo assoluto al solito supponendo che $\Sigma\psi_i\, du_i$ sia un differenziale esatto; ma la dimostrazione (v. p. es. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale,* vol. I, 3ª ed., p. 85) vale in generale.

(**) Ci torneremo al Cap. IX.

si può esprimere come combinazione lineare di $\Sigma \psi_i \, du_i$ e $\Sigma \psi_i \, Du_i$ (*). Ciò vale in particolare per i differenziali $d\Phi$, $d\Psi$, $d\Psi'$. Precisamente si hanno le formole

$$
(2) \qquad \begin{aligned} d\Phi = & \left(-3K + 2\,\frac{\Psi\Theta - \varepsilon\Psi'\Theta'}{\Phi^2}\right)\Sigma\psi_i\,du_i + \\ & + \varepsilon\left(-H + 2\,\frac{\Psi'\Theta - \Psi\Theta'}{\Phi^2}\right)\Sigma\psi_i\,Du_i\,, \end{aligned}
$$

$$
(2)_{\rm bis} \qquad \begin{aligned} d\Psi = & \left(-\frac{3\varepsilon}{2}\,\frac{\Psi'H}{\Phi} - \frac{9}{2}\,\frac{\Psi K}{\Phi} + \frac{3}{2}\,\Theta\right)\Sigma\psi_i\,du_i + \\ & + \varepsilon\left(-\Psi' - \frac{3}{2}\,\frac{\Psi H}{\Phi} - \frac{9}{2}\,\frac{\Psi' K}{\Phi} - \frac{3}{2}\,\Theta'\right)\Sigma\psi_i\,Du_i\,, \end{aligned}
$$

$$
(2)_{\rm ter} \qquad \begin{aligned} d\Psi' = & \left(-\frac{3}{2}\,\frac{\Psi H}{\Phi} - \frac{9}{2}\,\frac{\Psi' K}{\Phi} + \frac{3}{2}\,\Theta'\right)\Sigma\psi_i\,du_i + \\ & + \left(-\Psi - \frac{3\varepsilon}{2}\,\frac{\Psi' H}{\Phi} - \frac{9}{2}\,\frac{\Psi K}{\Phi} - \frac{3}{2}\,\Theta\right)\Sigma\psi_i\,Du_i\,. \end{aligned}
$$

Le identità dedotte al § precedente forniscono una facile dimostrazione delle formole precedenti.

Infatti

$$
d\Phi = d\Sigma a^{ir}\psi_i\psi_r = 2\Sigma a^{ir}\psi_{ik}\psi_r\,du_k = 2\Sigma\psi_{ik}\psi^i\,du_k\,.
$$

Sostituendovi i valori (5) del § 59 per $\psi^i \, du_k$ ed osservando le (1) si ricava subito la formola (2). Similmente

$$
d\Psi = d\Sigma a^{rsi}\psi_r\psi_s\psi_i = \Sigma a^{rsi}_{\ \ \ \ \underline{\ \ }k}\psi_r\psi_s\psi_i\,du_k + 3\Sigma a^{rsi}\psi_r\psi_s\psi_{ik}\,du_k\,,
$$

$$
d\Psi' = d\Sigma b^{rsi}\psi_r\psi_s\psi_i = \Sigma b^{rsi}_{\ \ \ \ \underline{\ \ }k}\psi_r\psi_s\psi_i\,du_k + 3\Sigma b^{rsi}\psi_r\psi_s\psi_{ik}\,du_k\,.
$$

Ora dalle (1) e $(1)_{\rm bis}$ del § 58 si ha, essendo $J = -1$,

$$
a^{rsi}_{\ \ \ \ \underline{\ \ }k} = \varepsilon\Sigma\vartheta_{kt}\psi^t\,.\,b^{rsi}\,,
$$

$$
b^{rsi}_{\ \ \ \ \underline{\ \ }k} = \Sigma\vartheta_{kt}\psi^t\,.\,a^{rsi}\,,
$$

(*) Cfr. § 59, pag. 308.

cosicchè

$$d\Psi = \varepsilon \Sigma \vartheta_{kt} \psi^t du_k \,. \Sigma b^{rsi} \psi_r \psi_s \psi_i + 3 \Sigma a^{rsi} \psi_r \psi_s \psi_{ik} du_k =$$

$$= - \varepsilon \Psi' \Sigma \psi_i Du_i + 3 \Sigma a^{rsi} \psi_r \psi_s \psi_{ik} du_k \,,$$

$$d\Psi' = - \Psi \Sigma \psi_i Du_i + 3 \Sigma b^{rsi} \psi_r \psi_s \psi_{ik} du_k \,.$$

Sostituendovi a $\Sigma a^{rsi} \psi_r \psi_s du_k$ e $\Sigma b^{rsi} \psi_r \psi_s du_k$ i valori $(5)_{\text{bis}}$ e $(5)_{\text{ter}}$ del § 59, ed osservando le (1) si ottengono le formole $(2)_{\text{bis}}$ e $(2)_{\text{ter}}$.

$C)$ Il caso $\Phi = 0$.

Se $\Phi = \Psi = 0$, è naturalmente $d\Phi = d\Psi = d\Psi' = 0$. Se $\Phi = 0$, ma $\Psi \gtrless 0$, è $\Psi' = \omega \Psi$, $(\omega = \pm 1)$, come sappiamo dal § 59 (pag. 312); e si dimostra precisamente nello stesso modo che vale anche la prima delle

$$(3) \qquad \begin{aligned} \Theta' &= \omega \Theta \,, \\ H &= 3 \omega K \,; \quad \text{se } \Phi = 0 \,, \end{aligned}$$

la seconda identità sarà dimostrata fra poco. La formola $(2)_{\text{bis}}$ va sostituita con la

$$(4) \qquad d\Psi = (\Psi + 3\Theta) \Sigma \psi_i du_i - 9K \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i$$

$$(\text{se } \Phi = 0).$$

Per dimostrare la seconda delle (3) osserviamo che, nelle nostre ipotesi,

$$0 = d\Phi = 2 \Sigma a^{ir} \psi_{ik} \psi_r du_k = 2 \Sigma \psi_{ik} \psi^i du_k \,.$$

Sostituendovi il valore di $\psi^i du_k$ dato nella (8) del § 59, risulta

$$(\omega H - 3K) \Sigma \psi_i du_i + \frac{2 \Sigma \psi^i \psi^k \psi_{ik}}{\Psi} \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i = 0.$$

Ora le forme differenziali $\Sigma \psi_i du_i$ e $\Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i$ sono linearmente indipendenti (*). Vale dunque la seconda delle (3) ed anche la $\Sigma \psi^i \psi^k \psi_{ik} = 0$ (**).

(*) Cfr. § 59, pag. 312.

(**) Se $\Phi \gtrless 0$, è $\Sigma \psi^i \psi^k \psi_{ik} = - \frac{3}{2} \Phi K + \frac{\Psi \Theta - \varepsilon \Psi' \Theta'}{\Phi}$. Infatti, so-

E similmente si dimostra la (4). Infatti, è, come a pag. 317, essendo qui $\varepsilon = 1$, $\Psi' = \omega\Psi$,

$$d\Psi = -\omega\Psi\Sigma\psi_i\, Du_i + 3\Sigma a^{rsi}\,\psi_r\,\psi_s\,\psi_{ik}\,du_k\,.$$

Sostituendovi il valore di $\Sigma a^{rsi}\,\psi_r\,\psi_s\,du_k$ dato nella $(8)_{\text{bis}}$ del § 59, ed osservando la (1) del § 60 e la prima delle (7) del § 59 si trova la formola cercata (4).

D) Il caso delle Φ e Ψ costanti.

Come prima applicazione delle formole del presente § dimostreremo che: *Se* Φ *e* Ψ *sono costanti, è*

$$(5)\qquad \begin{aligned} &H = 0\,, \quad K = -\frac{1}{9}\Phi\,, \\ &\Theta = -\frac{1}{3}\Psi\,, \quad \Theta' = -\frac{1}{3}\Psi'. \end{aligned}$$

Viceversa se valgono le (5), Φ *e* Ψ *sono costanti* (*).

Infatti, se $\Phi = \Psi = 0$, è $\psi_1 = \psi_2 = 0$, e quindi per le (1) anche $H = K = \Theta = \Theta' = 0$. Se $\Phi = 0$, $\Psi =$ costante $\gtrless 0$, la (4) dà, le forme $\Sigma\psi_i\, du_i$ e $\Sigma a_{irs}\,\psi^r\,\psi^s$ essendo indipendenti,

$$\Theta = -\frac{1}{3}\Psi\,, \quad K = 0\,,$$

e basta ricordare le (3) e la $\Psi' = \omega\Psi$ per vedere l'esattezza delle (5). Se infine $d\Phi = d\Psi = 0$, ma $\Phi \gtrless 0$, le forme $\Sigma\psi_i\, du_i$ e $\Sigma\psi_i\, Du_i$ essendo indipendenti, le (5) si deducono tosto dalle (2) e $(2)_{\text{bis}}$. E in modo perfettamente analogo si dimostra la proposizione inversa.

---

stituendo ψ^k a du_k e quindi zero a $\Sigma\psi_i\, Du_i = \Sigma\vartheta_{ri}\,\psi^r\, du_i$ nella formola (5) del § 59, si trova

$$\psi^i\,\psi^k = \frac{1}{2}\Phi\, a^{ik} + \frac{\Psi}{\Phi}\Sigma a^{ikr}\,\psi_r - \varepsilon\frac{\Psi'}{\Phi}\Sigma b^{ikr}\,\psi_r\,.$$

Moltiplicando per ψ_{ik} e osservando le (1) si giunge subito alla formola che si voleva dedurre.

(*) Vedremo più tardi che le corrispondenti superficie sono quelle che ammettono ∞^2 deformazioni proiettive in sè.

§ 61. — Il primo problema dell'applicabilità proiettiva.

A) Preliminari.

Il problema che ora ci accingiamo a risolvere, partendo dalle ricerche dei §§ precedenti, si enuncia: *Dati due elementi lineari proiettivi, riconoscere se è possibile trasformare l'uno nell'altro cambiando opportunamente le variabili indipendenti e, nel caso affermativo, determinare tutte quelle trasformazioni.*

Nel caso che gli elementi lineari dati appartengano effettivamente a due superficie date, tal problema è equivalente all'altro di riconoscere se le due superficie sono proiettivamente applicabili e, nel caso affermativo, di determinare tutte le corrispondenze che realizzano l'applicabilità (*). Noi possiamo senz' altro escludere il caso $J=0$ esaurientemente trattato al Cap. IV § 40, e far uso di forme *normali*. Riteniamo le nostre solite notazioni per il primo elemento lineare $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$, e per l'altro $\frac{\bar{\varphi}_3}{\bar{\varphi}_2}$ faremo uso di notazioni analoghe dotate di un soprassegno. Il nostro problema è stato risoluto, per la prima volta, dal CARTAN, nella Memoria *Sur la déformation projective des surfaces*, Annales de l'École Normale, (3) 37, 1920, pagg. 259-356 (cfr. pagg. 307-311). Il metodo di Cartan suppone risoluta l'equazione cubica $\varphi_3=0$. Noi non faremo uso di nessuna irrazionalità oltre la solita $\sqrt{|A|}$.

B) Condizioni necessarie.

Supponiamo dapprima che esistano due invarianti (proprî o improprî) P e Q del primo elemento lineare proiettivo (**) le quali

(*) Ciò è stato dimostrato al Cap. II, § 20 *A)*. Il problema si può chiamare il *primo problema dell' applicabilità proiettiva,* analogamente alla locuzione usata dal Bianchi nel caso metrico.

(**) Cioè quantità intrinseche o impropriamente intrinseche, che dipendono soltanto dai coefficienti di φ_2 e φ_3 e dalle loro derivate.

siano funzioni *indipendenti* di u, v cioè tali che $\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial P}{\partial v} \\ \frac{\partial Q}{\partial u} & \frac{\partial Q}{\partial v} \end{vmatrix} \gtrless 0.$

Allora anche $\overline{P}$ e $\overline{Q}$ devono essere funzioni indipendenti di $\overline{u}$, $\overline{v}$.

Poniamo $\eta_1 = 1$ oppure $\eta_1 = -1$ secondo che P è invariante proprio o improprio, e similmente $\eta_2 = 1$ oppure $\eta_2 = -1$ secondo il comportamento di Q. La trasformazione cercata, se esiste, è evidentemente tale che sono soddisfatte le

$$\overline{P} = \alpha_1 P \quad , \quad \overline{Q} = \alpha_2 Q \ , \tag{1}$$

dove $\alpha_i = 1$ se $\eta_i = 1$, e $\alpha_i = \pm 1$ se $\eta_i = -1$. Un primo passo nella risoluzione del nostro problema sarà pertanto di esaminare se le (1) si possono risolvere rispetto a $\overline{u}$, $\overline{v}$. Se così non è, il problema è subito risolto negativamente. Invece, nel caso affermativo, affinchè un sistema di soluzioni possa fornirci la trasformazione cercata, è evidentemente necessario che, se $\eta_i = -1$, il segno α_i sia quello dello Iacobiano di $\overline{u}$, $\overline{v}$ rispetto a u, v. Per brevità diciamo ***soluzioni proprie*** di (1) quelle che soddisfano a questa condizione relativa ai segni (*).

C) Condizioni sufficienti.

Scelti gli invarianti P e Q comunque, purchè funzioni indipendenti di u e v, l'esistenza di una soluzione propria delle (1) è soltanto una condizione *necessaria* per la trasformabilità di $\varphi_3 : \varphi_2$ in $\overline{\varphi}_3 : \overline{\varphi}_2$.

Per trovare condizioni *sufficienti*, osserviamo dapprima che si possono, con semplici derivazioni, dedurre da due invarianti qualunque P e Q, degli invarianti nuovi. Infatti, posto

$$\begin{aligned} \Delta(P, Q) &= \Sigma a^{ik} P_i Q_k \ , & \Delta(P, P) &= \Delta(P) \\ \mathrm{E}(P, Q) &= \Sigma a^{ikl} P_i P_k Q_l \ , & \mathrm{E}(P, P) &= \mathrm{E}(P) \ , \end{aligned} \tag{2}$$

(*) Se $\eta_1 = \eta_2 = 1$, (e quindi $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) *ogni* soluzione di (1) è propria. Le soluzioni che non sono proprie non hanno per noi nessun interesse.

sono invarianti nuovi le espressioni (*)

$$\begin{aligned}&\Delta(P)\,,\quad \Delta(P,Q)\,,\quad \Delta(Q)\,,\\ &E(P)\,,\quad E(P,Q)\,,\quad E(Q,P)\,,\quad E(Q).\end{aligned} \tag{3}$$

Ora possiamo enunciare il teorema: *Se* P *e* Q *sono due invarianti di* $\varphi_3 : \varphi_2$ *che siano funzioni indipendenti di* u *e* v, *condizioni necessarie e sufficienti affinchè* $\varphi_3 : \varphi_2$ *sia trasformabile in* $\overline{\varphi}_3 : \overline{\varphi}_2$ sono

1° *che esista qualche soluzione propria* (**)

$$\overline{u} = U(u, v)\,,\quad \overline{v} = V(u, v) \tag{4}$$

delle (1);

2° *che le equazioni*

$$\begin{aligned}&\overline{\Delta}(\overline{P}) = \Delta(P)\,,\quad \overline{\Delta}(\overline{P}, \overline{Q}) = \alpha_1\alpha_2\,\Delta(P, Q)\\ &\overline{\Delta}(\overline{Q}) = \Delta(Q)\,,\quad \overline{E}(\overline{P}) = \alpha_1\,E(P)\,,\\ &\overline{E}(\overline{P}, \overline{Q}) = \alpha_2\,E(P, Q)\,,\quad \overline{E}(\overline{Q}, \overline{P}) = \alpha_1\,E(Q, P)\,.\\ &\overline{E}(\overline{Q}) = \alpha_2\,E(Q)\ (***).\end{aligned} \tag{4}_{\text{bis}}$$

siano conseguenza delle (4). Le trasformazioni di $\varphi_3 : \varphi_2$ in $\overline{\varphi}_3 : \overline{\varphi}_2$

(*) Esse son legate dalle identità facilmente dimostrabili:

$$\Delta(Q)\,E(P) - 2\,\Delta(P, Q)\,E(P, Q) + \Delta(P)\,E(Q, P) = 0\,,$$

$$\Delta(Q)\,E(P, Q) - 2\,\Delta(P, Q)\,E(Q, P) + \Delta(P)\,E(Q) = 0\,,$$

$$\begin{vmatrix} E(P), & E(P, Q), & E(Q, P)\\ E(P, Q), & E(Q, P), & E(Q)\\ \Delta(P), & \Delta(P, Q), & \Delta(Q)\end{vmatrix} + \left[\Delta(P)\,\Delta(Q) - \Delta(P, Q)^2\right]^2 = 0\,.$$

Se p. es. P è invariante proprio, Q improprio, $\Delta(P)$, $\Delta(Q)$, $E(P)$, $E(Q, P)$ sono invarianti proprî e gli altri improprî.

(**) Cfr. pag. 320.

(***) dove i segni α_i son quelli che compaiono nelle (1). Tra le equazioni $(4)_{\text{bis}}$, quattro soltanto sono indipendenti. Cfr. la penultima nota a piè di pag.

sono tutte e sole quelle soluzioni proprie di (1) che si trovano nelle condizioni dell'enunciato.

Per dimostrare il teorema basta evidentemente provare che, scelte P e Q a nuove variabili indipendenti (*), i coefficienti delle forme trasformate di φ_2 e φ_3 sono funzioni razionali delle quantità (3), a coefficienti numerici. Ma, dato il significato intrinseco di P e Q e delle espressioni (3), basta provare che i coefficienti delle φ_2 e φ_3 stesse sono funzioni razionali delle sole

$$\Delta(u)\,,\quad \Delta(u\,,v)\quad \text{ecc.}$$

Ora

$$\Delta(u)=a^{11}\,,\quad \Delta(u\,,v)=a^{12}\,,\quad \Delta(v)=a^{22}\,,$$

$$\mathrm{E}(u)=a^{111}\,,\quad \mathrm{E}(u\,,v)=a^{112}\,,\quad \mathrm{E}(v\,,u)a^{122}\,,\quad \mathrm{E}(v)=a^{222}\,,$$

ed a_{ik} e a_{ikl} sono evidentemente funzioni razionali, a coefficienti numerici, delle a^{ik} e a^{ikl}.

Per poter applicare il teorema ora dimostrato in tutti i casi in cui esso è applicabile, occorre saper decidere se un dato elemento lineare $\varphi_3:\varphi_2$ possiede due invarianti che siano funzioni indipendenti di u e v. A ciò risponde il teorema che noi dimostreremo al § seguente: *dato comunque un elemento lineare proiettivo* $\varphi_3:\varphi_2$, *o vi sono due funzioni indipendenti fra le espressioni*

(5) $$\Phi\,,\ \Psi\,,\ \Psi',\ \mathrm{H}\,,\ \mathrm{K}\,,\ \Theta\,,\ \Theta'$$

definite ai §§ 59 *e* 60, *oppure non è possibile trovare due invarianti di* $\varphi_3:\varphi_2$ *che siano funzioni indipendenti di* u *e* v.

D) **Nuova forma delle condizioni sufficienti.**

In particolare, il criterio precedente è applicabile se Φ e Ψ sono funzioni indipendenti di u e v. Ma in tal caso possiamo enunciare un criterio più semplice: *Se* Φ *e* Ψ *sono funzioni indipen-*

(*) Ciò è possibile, essendo per ipotesi P e Q funzioni indipendenti di u e v.

denti di u *e* v, *condizioni necessarie e sufficienti affinchè* $\varphi_3 : \varphi_2$ *sia trasformabile in* $\bar{\varphi}_3 : \bar{\varphi}_2$ *sono :*

1° *che esista qualche soluzione*

$$\bar{\mathrm{u}} = \mathrm{U}(\mathrm{u}, \mathrm{v}), \quad \bar{\mathrm{v}} = \mathrm{V}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \tag{6}$$

delle equazioni $\bar{\Phi} = \Phi$, $\bar{\Psi} = \Psi$;

2° *che, essendo* α *il segno dello Iacobiano*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{u}}, & \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{v}} \\ \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{u}}, & \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{v}} \end{vmatrix},$$

le equazioni

$$\bar{\Psi}' = \alpha \Psi', \quad \bar{\mathrm{H}} = \alpha \mathrm{H}, \quad \bar{\mathrm{K}} = \mathrm{K}, \quad \bar{\Theta} = \Theta, \quad \bar{\Theta}' = \alpha \Theta'$$

siano conseguenza delle (6). Le trasformazioni di $\varphi_3 : \varphi_2$ in $\bar{\varphi}_3 : \bar{\varphi}_2$ sono tutte e sole quelle che soddisfano alle condizioni dell'enunciato.

Per dimostrare il teorema, osserviamo dapprima che, se si possono (*), partendo da un' espressione intrinseca P qualsiasi, definire due altre espressioni intrinseche P_{I} e P_{II} (**) dalla

$$dP = P_{\mathrm{I}} \, \Sigma \psi_i \, du_i + P_{\mathrm{II}} \, \Sigma \psi_i \, Du_i, \tag{7}$$

ed è

$$P_{\mathrm{I}} = \frac{1}{\Phi} \Sigma \psi^i P_i, \quad P_{\mathrm{II}} = -\frac{\varepsilon}{\Phi} \Sigma \vartheta^{ri} \psi_r P_i \; (***). \tag{7 bis}$$

Q essendo un'altra espressione intrinseca, poniamo analogamente

$$dQ = Q_{\mathrm{I}} \, \Sigma \psi_i \, du_i + Q_{\mathrm{II}} \, \Sigma \psi_i \, Du_i .$$

(*) Se $\Phi \gtrless 0$; in particolare dunque se Φ e Ψ sono funzioni indipendenti di u e v.

(**) Se P è propriamente intrinseco, P_{I} è pr. intr. e P_{II} è impr. intr.; se P è impr. intr., P_{I} è impr. intr. e P_{II} è pr. intr.

(***) Ciò segue dalla definizione stessa di Φ.

Segue

$$\Delta(P\,,\;Q) = \Sigma\, a^{ik} P_i\, Q_k =$$

$$= \Sigma\, a^{ik} (P_{\rm I}\, \psi_i + P_{\rm II}\, \Sigma\, \vartheta_{ri}\, \psi^r)\,(Q_{\rm I}\, \psi_k + Q_{\rm II}\, \Sigma\, \vartheta_{sk}\, \psi^k) =$$

$$= P_{\rm I}\, Q_{\rm I}\, \Sigma\, a^{ik}\, \psi_i\, \psi_k + (P_{\rm I}\, Q_{\rm II} + P_{\rm II}\, Q_{\rm I})\, \Sigma\, \vartheta_{ri}\, \psi^r\, \psi^i +$$

$$+ P_{\rm II}\, Q_{\rm II}\, \Sigma\, \vartheta_{ri}\, \vartheta_{sk}\, a^{ik}\, \psi^r\, \psi^s\,.$$

Ora

$$\Sigma\, a^{ik}\, \psi_i\, \psi_k = \Phi\,, \quad \Sigma\, \vartheta_{ri}\, \psi^r\, \psi^i = -\, \Sigma\, \vartheta_{ir}\, \psi^r\, \psi^i = 0\,,$$

$$\Sigma\, \vartheta_{ri}\, \vartheta_{sk}\, a^{ik}\, \psi^r\, \psi^s = \Sigma\, \vartheta^{pq}\, a_{pr}\, a_{qi}\, a^{ik}\, \vartheta_{sk}\, \psi^r\, \psi^s =$$

$$= \Sigma\, \vartheta^{pk}\, \vartheta_{sk}\, a_{pr}\, \psi^r\, \psi^s = -\, \varepsilon\, \Sigma\, a_{pr}\, \psi^p\, \psi^r = -\, \varepsilon\, \Phi\,,$$

cosicchè

$$\Delta(P\,,\;Q) = \Phi\,(P_{\rm I}\, Q_{\rm I} - \varepsilon\, P_{\rm II}\, Q_{\rm II})\,, \tag{8}$$

e in particolare

$$\Delta(P) = \Phi\,(P_{\rm I}^2 - \varepsilon\, P_{\rm II}^2)\,. \tag*{(8) bis}$$

Similmente

$$\mathrm{E}(P\,,\;Q) = \Sigma\, a^{ikl}\, P_i\, P_k\, Q_l =$$

$$= \Sigma\, a^{ikl} (P_{\rm I}\, \psi_i + P_{\rm II}\, \Sigma\, \vartheta_{ri}\, \psi^r)\,(P_{\rm I}\, \psi_k + P_{\rm II}\, \Sigma\, \vartheta_{sk}\, \psi^s)\,(Q_{\rm I}\, \psi_l + Q_{\rm II}\, \Sigma\, \vartheta_{tl}\, \psi^t) =$$

$$= P_{\rm I}^2\, Q_{\rm I}\, \Sigma\, a^{ikl}\, \psi_i\, \psi_k\, \psi_l +$$

$$+ P_{\rm I}\,(2\,P_{\rm II}\, Q_{\rm I} + 2\,P_{\rm I}\, Q_{\rm II})\, \Sigma\, a^{ikl}\, \vartheta_{ri}\, \psi^r\, \psi_k\, \psi_l +$$

$$+ P_{\rm II}\,(P_{\rm II}\, Q_{\rm I} + 2\,P_{\rm I}\, Q_{\rm II})\, \Sigma\, a^{ikl}\, \vartheta_{ri}\, \vartheta_{sk}\, \psi^r\, \psi^s\, \psi_l +$$

$$+ P_{\rm II}^2\, Q_{\rm II}\, \Sigma\, a^{ikl}\, \vartheta_{ri}\, \vartheta_{sk}\, \vartheta_{tl}\, \psi^r\, \psi^s\, \psi^t\,,$$

onde, ricordando la definizione di Ψ e Ψ' e le formole (3) e (3) bis del § 57,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(P,\;Q) &= \Psi\,(P_{\rm I}^2\, Q_{\rm I} + 2\,\varepsilon\, P_{\rm I}\, P_{\rm II}\, Q_{\rm II} + \varepsilon\, P_{\rm II}^2\, Q_{\rm I}) - \\ &- \Psi'\,(P_{\rm I}^2\, Q_{\rm II} + 2\,P_{\rm I}\, P_{\rm II}\, Q_{\rm I} + \varepsilon\, P_{\rm II}^2\, Q_{\rm II})\,, \end{aligned} \tag{9}$$

in particolare

$$\mathrm{E}(P) = \Psi\, P_{\rm I}\,(P_{\rm I}^2 + 3\,\varepsilon\, P_{\rm II}^2) - \Psi'\, P_{\rm II}\,(3\,P_{\rm I}^2 + \varepsilon\, P_{\rm II}^2) \tag*{(9) bis}$$

Ora possiamo tosto dimostrare il teorema di pag. 323. Infatti, per il teorema di pag. 321, basta provare che le $\Delta(\Phi)$, $\Delta(\Phi\,,\,\Psi)$, $\Delta(\Psi)$, $\mathrm{E}(\Phi)$, $\mathrm{E}(\Phi\,,\,\Psi)$, $\mathrm{E}(\Psi\,,\,\Phi)$, $\mathrm{E}(\Psi)$ si possono esprimere razionalmente mediante Φ, Ψ, Ψ', H, K, Θ, Θ'. Ora le (7) e (8) mostrano che quelle quantità sono funzioni razionali di Φ, Ψ, Ψ', Φ_{I}, Φ_{II}, Ψ_{I}, Ψ_{II} (*); d'altra parte, le formole (2) e (2)$_{bis}$ del § 60 esprimono Φ_{I}, Φ_{II}, Ψ_{I}, Ψ_{II} mediante Φ, Ψ, Ψ', H, K, Θ, Θ'.

§ 62. — Continuazione. Elementi lineari proiettivi con un gruppo continuo di trasformazioni in sè.

A) Alcune formole preliminari.

Prima di procedere alla risoluzione del nostro problema anche nel caso in cui le sette espressioni

$$(1)\qquad \Phi\,,\ \Psi\,,\ \Psi',\ H\,,\ K\,,\ \Theta\,,\ \Theta'$$

sono funzioni di una di esse, occorre premettere qualche formola sulle forme differenziali lineari

$$\Sigma \psi_i\, du_i\,,\quad \Sigma \psi_i\, Du_i\,,\quad \Sigma a_{irs}\, \psi^r\, \psi^s\, du_i\,.$$

Siano $\Sigma \alpha_i\, du_i \quad , \quad \Sigma \beta_i\, du_i$

due forme differenziali lineari nelle variabili u e v, e d, δ siano due simboli diversi di differenziali; poniamo col Cartan

$$(2)\qquad [\Sigma \alpha_i\, du_i\,,\ \Sigma \beta_i\, du_i] = \begin{vmatrix} \Sigma \alpha_i\, du_i & \Sigma \beta_i\, du_i \\ \Sigma \alpha_i\, \delta u_i & \Sigma \beta_i\, du_i \end{vmatrix} =$$

$$= \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Sigma \vartheta^{ki} \alpha_i \beta_k\, [du\,,\ dv].$$

Valgono le formole (**)

(*) E di ε; ma ε è funzione razionale di Φ, Ψ, Ψ', per l'identità (2) del § 59.

(**) Infatti, per la (1), la (2) del § 56 e la (3)$_{ter}$ del § 57,

$$[\Sigma \psi_i\, du_i\,,\ \Sigma \psi_i\, Du_i] = [\Sigma \psi_i\, du_i\,,\ \Sigma \vartheta_{ri} \psi^r\, du_i] =$$

$$= \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Sigma \vartheta^{ki} \vartheta_{rk} \psi_i\, \psi^r\, [du\,,\ dv] = \sqrt{|A|}\, \Sigma \psi_i\, \psi^i\, [du\,,\ dv],$$

$$[\Sigma \psi_i\, du_i\,,\ \Sigma a_{irs}\, \psi^r\, \psi^s\, du_i] = \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Sigma \vartheta^{ki}\, a_{krs}\, \psi_i\, \psi^r\, \psi^s\, [du\,,\ dv] =$$

$$= \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Sigma b^i_{rs}\, \psi_i\, \psi^r\, \psi^s\, [du\,,\ dv].$$

$$(2)_{\text{bis}} \qquad [\Sigma\, \psi_i\, du_i\,,\ \Sigma\, \psi_i\, Du_i] = \sqrt{|A|}\, \Phi\, [du\,, dv]\,,$$

$$(2)_{\text{ter}} \qquad [\Sigma\, \psi_i\, du_i\,,\ \Sigma\, a_{irs}\, \psi^r\, \psi^s du_i] = \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Psi'\, [du\,, dv]\,.$$

Covariante bilineare della forma differenziale lineare $\Sigma\, \alpha_i\, du_i$ si dice (*) l'espressione a due sistemi di differenziali

$$(3) \qquad (\Sigma\, \alpha_i\, du_i)' = \delta\, \Sigma\, \alpha_i\, du_i - d\, \Sigma\, \alpha_i\, \delta u_i =$$

$$= \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Sigma\, \vartheta^{ki}\, \alpha_{ik}\, [du\,, dv]\,,$$

le α_{ik} essendo derivate covarianti rispetto a (una qualsiasi forma differenziale quadratica, poniamo rispetto a φ_2). È ovvio che $(\Sigma\, \alpha_i\, du_i)' = 0$ allora ed allora soltanto se $\Sigma\, \alpha_i\, du_i$ è un differenziale esatto.

Dimostriamo che: 1° se $\Phi \gtrless 0$,

$$(4) \qquad (\Sigma\, \psi_i\, du_i)' = -\, \varepsilon\, \frac{H}{\Phi}\, [\Sigma\, \psi_i\, du_i\,,\ \Sigma\, \psi_i\, Du_i]\,;$$

$$(4)_{\text{bis}} \qquad (\Sigma\, \psi_i\, Du_i)' = 3\, \varepsilon\, \frac{K}{\Phi}\, [\Sigma\, \psi_i\, du_i\,,\ \Sigma\, \psi_i\, Du_i]\,.$$

2° se $\Phi = 0$; $\Psi \gtrless 0$

$$(5) \qquad (\Sigma\, \psi_i\, du_i)' = -\, \frac{H}{\Psi'}\, [\Sigma\, \psi_i\, du_i\,,\ \Sigma\, a_{irs}\, \psi^r\, \psi^s\, du_i]\,,$$

$$(5)_{\text{bis}} \quad (\Sigma\, a_{irs}\, \psi^r\, \psi^s\, du_i)' = -\left(1 + 2\, \frac{\Theta'}{\Psi'}\right) [\Sigma\, \psi_i\, du_i\,, \Sigma\, a_{irs}\, \psi^r\, \psi^s\, du_i]\,.$$

Infatti, da (3) si deduce

$$(\Sigma\, \psi_i\, du_i)' = \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Sigma\, \vartheta^{ki}\, \psi_{ik}\, [du\,, dv] =$$

$$= -\, \varepsilon \sqrt{|A|}\, H\, [du\,, dv]\,,$$

(*) Cfr. p. es. Goursat *Leçons sur le problème de Pfaff,* p. 17.

$$(\Sigma \psi_i Du_i)' = (\Sigma \vartheta_{ri} \psi^r du_i)' = \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Sigma \vartheta^{ki} \vartheta_{ri} a^{rs} \psi_{sk} [du, dv] =$$

$$= - \sqrt{|A|}\, \Sigma a^{rs} \psi_{rs} [du, dv] = 3 \sqrt{|A|}\, K [du, dv],$$

e basta ricordare la $(2)_{\text{bis}}$ per dedurne le (4) e $(4)_{\text{bis}}$, e la $(2)_{\text{ter}}$ per dedurre la (5). Similmente si deduce da (3)

$$(\Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i)' = \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Sigma \vartheta^{ki} a_{irsk} \psi^r \psi^s [du, dv] +$$

$$+ 2 \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Sigma \vartheta^{ki} a_i^{rs} \psi_r \psi_{sk} [du, dv]$$

cosicchè, ricordando la $(3)_{\text{ter}}$ del § 57 e la (1) del § 58

$$(\Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i)' = - \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Psi' + 2 \Theta') [du, dv].$$

Osservando la $(2)_{\text{ter}}$ si ricava la $(5)_{\text{bis}}$.

B) Un lemma.

Se $\Sigma \alpha_i du_i$ *e* $\Sigma \beta_i du_i$ *sono due forme differenziali lineari linearmente indipendenti nelle variabili* u, v, *e* λ *è una funzione qualunque di* u, v *ma non costante, e se nelle equazioni*

$$(\Sigma \alpha_i du_i)' = A [\Sigma \alpha_i du_i, \Sigma \beta_i du_i],$$

$$(\Sigma \beta_i du_i)' = B [\Sigma \alpha_i du_i, \Sigma \beta_i du_i],$$

$$d\lambda = C \Sigma \alpha_i du_i + D \Sigma \beta_i du_i$$

le A, B, C, D *sono funzioni della sola* λ, *si può con quadrature determinare un fattore integrante per* $\Sigma \alpha_i du_i$ *e per* $\Sigma \beta_i du_i$, *più generalmente per* $\Lambda_1 \Sigma \alpha_i du_i + \Lambda_2 \Sigma \beta_i du_i$, Λ_1 *e* Λ_2 *essendo funzioni qualunque della sola* λ; tal fattore integrante *è funzione della sola* λ.

Basta provare l' esistenza di un fattore integrante per $\Sigma \alpha_i du_i$ (*). Ora da (3) si ricava, se ρ è funzione di λ,

---

(*) Se p. es. $\Lambda_1 \gtrless 0$, le condizioni dell' enunciato restano soddisfatte se introduciamo la forma $\Lambda_1 \Sigma \alpha_i du_i + \Lambda_2 \Sigma \beta_i du_i$ al posto di $\Sigma \alpha_i du_i$.

$$(\rho \Sigma \alpha_i \, du_i)' = \rho(\Sigma \alpha_i \, du_i)' + [\Sigma \alpha_i \, du_i \, , \, d\rho] =$$

$$= \left(\rho A + D \frac{d\rho}{d\lambda}\right) [\Sigma \alpha_i \, du_i \, , \, \Sigma \beta_i \, du_i].$$

Se $D \neq 0$, è pertanto

$$e^{-\int \frac{A}{D} d\lambda} \Sigma \alpha_i \, du_i$$

un differenziale esatto; se invece $D = 0$,

$$C \Sigma \alpha_i \, du_i = d\lambda$$

è pure un differenziale esatto.

C) Il teorema fondamentale.

Se tutte le quantità (1) *sono funzioni di una sola variabile* $\lambda = \lambda(u, v)$, *e non è simultaneamente* $\Phi = \text{cost.}$, $\Psi = \text{cost.}$, *condizione necessaria e sufficiente per la trasformabilità di* $\varphi_3 : \varphi_2$ *in* $\overline{\varphi}_3 : \overline{\varphi}_2$ *è, che*

$$\overline{\Phi}\,,\ \overline{\Psi}\,,\ \overline{\Psi}'\,,\ \overline{H}\,,\ \overline{K}\,,\ \overline{\Theta}\,,\ \overline{\Theta}'$$

siano le stesse funzioni di una sola variabile $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(\overline{u}, \overline{v})$ *come le* (1) *di* λ. *La trasformazione di* $\varphi_3 : \varphi_2$ *in* $\overline{\varphi}_3 : \overline{\varphi}_2$ *può farsi in* ∞^1 *modi che si trovano con quadrature.*

È evidente che le condizioni dell'enunciato sono necessarie. Per dimostrare che son sufficienti, e per trovare effettivamente le trasformazioni di $\varphi_3 : \varphi_2$ in $\overline{\varphi}_3 : \overline{\varphi}_2$, distinguiamo due casi.

1° caso: $\Phi \gtrless 0$. Posto

$$\Sigma \alpha_i \, du_i = \Sigma \psi_i \, du_i \, , \quad \Sigma \beta_i \, du_i = \Sigma \psi_i \, Du_i \, ,$$

$$\lambda = \Phi \quad \text{o se} \quad \Phi = \text{cost.}, \quad \lambda = \Psi$$

le condizioni del *lemma* son soddisfatte, in virtù delle (4) e (4) bis e della (2) del § 60. Il lemma ci dice pertanto che possiamo con quadrature determinare due funzioni di u, v, siano U e V, tali che

$$dU = \rho \Sigma \psi_i \, du_i \quad , \quad dV = \sigma \Sigma \psi_i \, Du_i \, ,$$

ρ e σ essendo funzioni di λ. Analogamente si vede che possiamo con quadrature determinare due funzioni di $\bar{u}$ e $\bar{v}$, siano $\overline{U}$ e $\overline{V}$, tali che

$$d\overline{U} = \bar{\rho}\Sigma\bar{\psi}_i\, d\bar{u}_i \quad , \quad d\overline{V} = \bar{\sigma}\Sigma\bar{\psi}_i\, D\bar{u}_i \,;$$

inoltre $\bar{\rho}$ e $\bar{\sigma}$ sono le stesse funzioni di $\bar{\lambda}$ come ρ e σ di λ. Per fissare le idee, supponiamo $D \gtrless 0$ (*).

La trasformazione cercata non può essere contenuta che fra le (**)

$$(6) \qquad \bar{\lambda} = \lambda \quad , \quad \overline{U} = U + a \,, \quad a \text{ costante arbitraria.}$$

E, comunque si scelga a, la trasformazione scritta porta $\varphi_3 : \varphi_2$ in $\bar{\varphi}_3 : \bar{\varphi}_2$. Per vederlo, introduciamo λ e $U + a$ al posto di u e v (e $\bar{\lambda}$ e $\overline{U}$ al posto di $\bar{u}$ e $\bar{v}$) come nuove variabili indipendenti. È (cfr. la (7) del § 61)

$$\lambda_{\mathrm{I}} = C \,, \quad \lambda_{\mathrm{II}} = D \,, \quad (U + a)_{\mathrm{I}} = \rho \,, \quad (U + a)_{\mathrm{II}} = 0 \,,$$

$$\bar{\lambda}_{\mathrm{I}} = \overline{C} \,, \quad \bar{\lambda}_{\mathrm{II}} = \overline{D} \,, \quad \overline{U}_{\mathrm{I}} = \bar{\rho} \,, \quad \overline{U}_{\mathrm{II}} = 0 \,;$$

inoltre Φ, Ψ, Ψ', C, D sono funzioni della sola λ, e $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$, $\overline{\Psi}'$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ sono *le stesse* funzioni di $\bar{\lambda}$. Le equazioni (8) e (9) del § 61 mostrano quindi immediatamente che, introdotte le nuove variabili sopra nominate, sarà $\bar{\varphi}_3 : \bar{\varphi}_2 = \varphi_3 : \varphi_2$ in virtù delle (6), *c. d. d.*

2° caso: $\Phi = 0$. Scegliendo

$$\Sigma\alpha_i\, du_i = \Sigma\psi_i\, du_i \,, \quad \Sigma\beta_i\, du_i = \Sigma a_{irs}\psi^r\psi^s\, du_i \,, \quad \lambda = \Psi \,,$$

le ipotesi del *lemma* sono soddisfatte per le (5) e $(5)_{\text{bis}}$ e per la (4) del § 60. Il lemma dice che si possono con quadrature determinare U e V in modo che sia

$$dU = \rho\Sigma\psi_i\, du_i \quad , \quad dV = \sigma\Sigma a_{irs}\psi^r\psi^s\, du_i \,,$$

ρ e σ essendo funzioni della sola λ. E si continua come sopra, cosicchè possiamo lasciare al lettore il resto della dimostrazione (***).

(*) Se $D = 0$, è $C \gtrless 0$ (altrimenti λ sarebbe costante, contro l'ipotesi), e si procede analogamente.

(**) Si osservi che λ e U sono funzioni indipendenti di u, v, essendo $\rho D \gtrless 0$.

(***) Il lettore vedrà facilmente che il lemma si può usare a determinare con quadrature le linee asintotiche, le linee di Darboux o di Segre, le linee integrali di $\Sigma\psi_i\, du_i = 0$, ecc.

Corollario: *Se le* (1) *sono funzioni di una sola variabile, ma* Φ *e* Ψ *non sono simultaneamente costanti, l'elemento lineare proiettivo ammette un gruppo continuo di deformazioni proiettive in sè.* Basta prendere, nel teorema che precede, $\overline{\varphi}_3 : \overline{\varphi}_2$ identico a $\varphi_3 : \varphi_2$. Da ciò risulta che non possono esistere due invarianti funzioni indipendenti di u, v, come abbiamo già annunciato a pag. 322.

Resta il caso in cui Φ e Ψ sono costanti. Allora vale il seguente teorema semplicissimo:

Se Φ *e* Ψ *sono costanti, condizioni necessarie e sufficienti per la trasformabilità di* $\varphi_3 : \varphi_2$ *in* $\overline{\varphi}_3 : \overline{\varphi}_2$ *sono*

$$\overline{\varepsilon} = \varepsilon \quad , \quad \overline{\Phi} = \Phi \quad , \quad \overline{\Psi} = \Psi .$$

La trasformazione può farsi in ∞^2 *modi che si trovano con quadrature.*

È evidente che le condizioni dette sono necessarie; per dimostrare che sono sufficienti, distinguiamo tre casi.

1° caso: $\Phi \gtrless 0$. Le (4) e (4)$_{\text{bis}}$ si scrivono, ricordando il teorema del § 60 D,

$$(\Sigma \psi_i \, du_i)' = 0 \, , \quad (\Sigma \psi_i \, Du_i)' = -\frac{\varepsilon}{3} [\Sigma \psi_i \, du_i \, \Sigma \psi_i \, Du_i] .$$

La prima dice che

$$\Sigma \psi_i \, du_i = -3\varepsilon \frac{dU}{U}$$

è un differenziale esatto; e dalla seconda si ottiene tosto

$$(U \Sigma \psi_i \, Du_i)' = 0 \, ,$$

cosicchè anche

$$U \Sigma \psi_i \, Du_i = dV$$

è un differenziale esatto. Introdotte U e V a nuove variabili indipendenti (*), si trova senza difficoltà, ricorrendo alle formole (8) e (9) del § 61

$$\varphi_2 = \frac{1}{9 \, U^2 \, \Phi} (dU^2 - 9 \varepsilon \, dV^2) \, ,$$

(*) Si vede subito che esse sono funzioni indipendenti di u e v.

$$\varphi_3 = \frac{\varepsilon}{27\, U^3 \Phi^3}\, (\Psi\, dU^3 + 3\,\Psi'\, dU^2\, dV +$$

$$+ 9\,\Psi\, dU\, dV^2 + 27\,\Psi'\, dV^3).$$

Introducendo in modo analogo nuove variabili indipendenti al posto di $\bar{u}$ e $\bar{v}$, si vede subito che ponendo

$$\bar{U} = U \ , \ \bar{V} = \pm\, V \ (*)$$

$\varphi_3 : \varphi_2$ si trasforma in $\bar{\varphi}_3 : \bar{\varphi}_2$. Ora U e V non sono determinate che a meno di sostituzioni della forma

$$aU \quad , \quad aV + b \ ,$$

con a, b costanti $\left(a \gtrless 0\right)$ cosicchè risulta provato tutto ciò che si è enunciato.

2° caso: $\Phi = 0$, $\Psi \gtrless 0$. Osservando di nuovo le (5) del § 60 D, le (5) e (5)$_{\text{bis}}$ dànno

$$(\Sigma \psi_i\, du_i)' = 0, \quad (\Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s\, du_i)' = -\frac{1}{3}\, [\Sigma \psi_i\, du_i \ , \ \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s\, du_i\,].$$

Si può quindi porre

$$\Sigma \psi_i\, du_i = -3\, \frac{dU}{U} \ , \quad U \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s\, du_i = dV.$$

Introducendo U e V come nuove variabili indipendenti, il che il lettore faccia come esercizio, si giunge facilmente alla dimostrazione dell' enunciato.

3° caso: $\Phi = \Psi = 0$, ossia $\psi_1 = \psi_2 = 0$, quindi in particolare $K = 0$. La curvatura di φ_2 essendo nulla, si possono, come ben si sa, introdurre con quadrature nuove variabili indipendenti in modo che i nuovi coefficienti di φ_2 siano costanti.

La (1) del § 58 mostra che anche i nuovi coefficienti di φ_3 sono costanti. Ed è un facile teorema d'algebra che due coppie di tali forme si possono trasformare l' una nell' altra mediante una sostituzione lineare a coefficienti costanti in du, dv, a cui corrispondono ∞^2 trasformazioni in u, v.

Corollario: *Se Φ e Ψ sono costanti, l' elemento lineare proiettivo $\varphi_3 : \varphi_2$ ammette ∞^2 trasformazioni in sè.*

(*) $\pm$ secondo che $\bar{\Psi}' = \Psi'$ oppure $\bar{\Psi}' = -\Psi'$.

Quadro di formole per coordinate asintotiche.

$$a_{11} = a_{22} = a_{112} = a_{122} = 0\,, \quad \omega = \operatorname{sgn} a_{12}\,,$$

$$a_{111} = a_{12}\beta \quad , \quad a_{222} = a_{12}\gamma\,.$$

$$F_2 = 2\,a_{12}\,du\,dv \quad , \quad F_3 = a_{12}\,(\beta du^3 + \gamma dv^3).$$

$$J = -\frac{\beta\gamma}{a_{12}}\,.$$

$$\vartheta_{11} = \vartheta_{22} = 0 \quad , \quad \vartheta_{12} = -\vartheta_{21} = |a_{12}|\,,$$

$$\vartheta^{11} = \vartheta^{22} = 0 \quad , \quad \vartheta^{12} = -\vartheta^{21} = -\frac{1}{|a_{12}|}.$$

$$Du = -\omega\,du \quad , \quad Dv = \omega\,dv\,,$$

$$D\varphi = -\omega\,\varphi_1\,du + \omega\,\varphi_2\,dv\,.$$

$$b_{112} = b_{122} = 0\,,$$

$$b_{111} = -\omega\,a_{12}\beta \quad , \quad b_{222} = \omega\,a_{12}\gamma\,,$$

$$F'_3 = \omega\,a_{12}\,(-\beta du^3 + \gamma dv^3)\,.$$

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log(\gamma\,a_{12}^3 : \beta)}{\partial u} \quad , \quad \psi_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log(\beta\,a_{12}^3 : \gamma)}{\partial v}\,.$$

In coordinate normali:

$$a_{12} = \beta\gamma \quad , \quad a_{111} = \beta^2\gamma \quad , \quad a_{222} = \beta\gamma^2\,,$$

$$\omega = \operatorname{sgn}\beta\gamma \quad , \quad b_{111} = -\omega\beta^2\gamma \quad , \quad b_{222} = \omega\beta\gamma^2.$$

$$\varphi_2 = 2\,\beta\gamma\,du\,dv \quad , \quad \varphi_3 = \beta\gamma\,(\beta du + \gamma dv)\,,$$

$$\varphi'_3 = \omega\beta\gamma\,(-\beta du + \gamma dv).$$

$$\psi_1 = \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} \quad , \quad \psi_2 = \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}.$$

$$\Phi = \frac{2}{\beta\gamma} \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v},$$

$$\Psi = \frac{1}{\beta^2 \gamma} \left(\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} \right)^3 + \frac{1}{\beta\gamma^2} \left(\frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} \right)^3,$$

$$\Psi' = \frac{\omega}{\beta^2 \gamma} \left(\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} \right)^3 - \frac{\omega}{\beta\gamma^2} \left(\frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} \right)^3.$$

$$K = - \frac{1}{\beta\gamma} \frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u \, \partial v},$$

$$H = \frac{1}{|\beta\gamma|} \frac{\partial^2 \log (\beta : \gamma)}{\partial u \, \partial v},$$

$$\Theta = \frac{1}{\beta^2 \gamma} \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma^2}{\partial u^2} - \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} \right)$$

$$+ \frac{1}{\beta\gamma^2} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 \log \beta^2 \gamma}{\partial v^2} - \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} \right),$$

$$\Theta' = \frac{\omega}{\beta^2 \gamma} \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma^2}{\partial u^2} - \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} \right)$$

$$- \frac{\omega}{\beta\gamma^2} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 \log \beta^2 \gamma}{\partial v^2} - \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} \right).$$