II. Logaritmus a obecná mocnina.

9. Pojem logaritmické funkce. Je-li každému kladnému číslu y přiřazeno určité číslo $f(y)$, máme funkci $f(y)$, jejíž obor je soustava všech kladných čísel. Řekneme, že $f(y)$ je logaritmická funkce, když má tyto dvě vlastnosti:

I. $f(y)$ je rostoucí funkce. To znamená, že když $0 < y_1 < y_2$, je také $f(y_1) < f(y_2)$.

II. Je-li $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, pak

$$f(y_1 y_2) = f(y_1) + f(y_2). \tag{9·1}$$

Cvičení **42.** Je-li $f(y)$ logaritmická funkce a je-li c kladné číslo, pak také $F(y) = c\,f(y)$ je logaritmická funkce.

Cvičení **43.** Je-li $f(y)$ logaritmická funkce, pak $f(1) = 0$. [Dosaďte $y_1 = y_2 = 1$ do (9·1).]

Cvičení **44.** Je-li $f(y)$ logaritmická funkce, pak pro $y > 1$ je $f(y) > 0$ a pro $0 < y < 1$ je $f(y) < 0$.

Cvičení **45.** Je-li $f(y)$ logaritmická funkce, pak pro $y > 0$ je $f\left(\frac{1}{y}\right) =$ $= -f(y)$. [Dosaďte $y_1 = y$, $y_2 = \frac{1}{y}$ do (9·1).]

Věta 14. Budiž $f(y)$ logaritmická funkce. Pro $y > 0$ a pro každé celé k je

$$f(y^k) = k\,f(y). \tag{9·2}$$

Důkaz. I. Pro $k = 0$ platí (9·2) podle cvič. 43.

II. Pro $k = 1$ je (9·2) zřejmé. Platí-li (9·2) pro určité celé kladné k, pak je podle (9·1)

$$f(y^{k+1}) = f(y^k\,.\,y) = f(y^k) + f(y) = k\,f(y) + f(y) = (k+1)\,f(y).$$

Tím je (9·2) dokázáno indukcí pro celé kladné k.

III. Je-li k celé kladné, pak je podle II a cvič. 45

$$f(y^{-k}) = f\left[\left(\frac{1}{y}\right)^k\right] = k\, f\left(\frac{1}{y}\right) = -k\, f(y).$$

Tím je (9·2) dokázáno také pro celé záporné k.

Nyní stojíme před dvěma důležitými otázkami: Existuje vůbec nějaká logaritmická funkce? Jaká je souvislost mezi dvěma logaritmickými funkcemi? Na tyto otázky odpovíme v odst. 11; odstavec 10 připraví odpověď.

10. Geometrické svazky. Obrazy kladných čísel vyplní tu část číselné osy, která je napravo od počátku; nazveme ji číselnou poloosou. Protože nulu nepočítáme mezi čísla kladná, počátek sám už nepatří do číselné poloosy.

Zvolme si určité číslo g větší než číslo 1 a tvořme postupně mocniny

$$g^0 = 1,\ g^1 = g,\ g^2,\ g^3,\ \ldots, \tag{10·1}$$

z nichž každá následující je g-krát větší než předcházející. Čísla (10·1) tvoří stoupající geometrickou posloupnost s prvým členem 1 a s kvocientem g. Intervaly

$$\langle 1, g\rangle, \langle g, g^2\rangle, \langle g^2, g^3\rangle, \langle g^3, g^4\rangle, \ldots \tag{10·2}$$

se řadí na číselné poloose jeden vedle druhého od levé strany k pravé. Podle věty 6 vyplní intervaly (10·2) celou část číselné poloosy od bodu 1 napravo (i s bodem 1 samotným). Věta 6 byla odvozena počtem; můžeme však také usuzovati geometricky takto. Délky intervalů (10·2) jsou

$$g - 1,\ g(g - 1),\ g^2(g - 1),\ g^3(g - 1), \ldots;$$

jsou tedy tyto délky čím dále tím větší a z toho je patrné, že intervaly (10·2) vyplní celou část číselné poloosy napravo od bodu 1, čímž je geometricky potvrzena věta 6. Z věty 6 následuje podle cvič. 14, že $\lim\limits_{n\to\infty} g^n(g - 1) = \infty$, t. j. že délky intervalů (10·2) rostou do nekonečna.

Nyní si k mocninám (10·2) připojme ještě mocniny se zápornými mocniteli

$$g^{-1} = \frac{1}{g},\ g^{-2} = \frac{1}{g^2},\ g^{-3} = \frac{1}{g^3}, \ldots; \tag{10·3}$$

také čísla (10·3) jsou kladná a každé následující je g-krát menší než předcházející. Čísla (10·3) tvoří klesající geometrickou posloupnost s prvým členem g^{-1} a s kvocientem g^{-1}. Intervaly

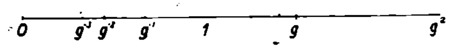
$$\langle g^{-1}, 1\rangle, \langle g^{-2}, g^{-1}\rangle, \langle g^{-3}, g^{-2}\rangle, \langle g^{-4}, g^{-3}\rangle, \ldots \qquad (10\cdot4)$$

se řadí na číselné poloose jeden vedle druhého od pravé strany k levé. Podle věty 7 vyplní intervaly (10·4) celou část číselné poloosy od bodu 1 nalevo (i s bodem 1 samotným).

Vyznačme si nyní na číselné poloose všecky body

$$\ldots, g^{-3}, g^{-2}, g^{-1}, 1, g, g^2, g^3, \ldots$$

Celá číselná poloosa se nám rozdělí na nekonečně mnoho intervalů, které číselnou poloosu celou pokryjí, ale nikde se nepřekrývají (viz obr. 6). Bod 0 pokryt není, ale také nepatří do číselné poloosy.



Obr. 6.

Takové rozdělení číselné poloosy nazveme geometrickou stupnicí a číslo g nazveme základem stupnice. Tedy geometrická stupnice se skládá z nekonečně mnoha nestejně dlouhých intervalů. Ze dvou intervalů geometrické stupnice je vždy ten delší, který leží více napravo. Mezi těmi intervaly jsou vždy takové, jejichž délka je větší než libovolně předepsané kladné číslo (jakkoli veliké), i takové, jejichž délka je menší než libovolně předepsané kladné číslo (jakkoli malé). Krajní body našich intervalů, tedy body (10·1) a (10·3), nazveme dělicí body geometrické stupnice.

Nyní si vysvětlíme pojem geometrického svazku. To je posloupnost geometrických stupnic, k níž dojdeme takto. Zvolíme si určité číslo $g > 1$, které nazveme základem svazku. Základem prvé stupnice svazku bude číslo $g_1 = g$. Označíme-li obecně základ n-té stupnice svazku znakem g_n, bude

$$g_{n+1} = \sqrt{g_n}, \quad g_{n+1}^2 = g_n, \qquad (10\cdot5)$$

takže obecně bude

$$g_n = \sqrt[2^{n-1}]{g}.$$

(Je-li $g_n > 1$, je také $g_{n+1} > 1$.) Dělicí body n-té stupnice svazku jsou

$$\ldots, g_n^{-3}, g_n^{-2}, g_n^{-1}, 1, g_n, g_n^2, g_n^3, \ldots; \tag{10·6}$$

dělicí body $(n + 1)$-ní stupnice jsou

$$\ldots, g_{n+1}^{-3}, g_{n+1}^{-2}, g_{n+1}^{-1}, 1, g_{n+1}, g_{n+1}^2, g_{n+1}^3, \ldots \tag{10·7}$$

Podle (10·5) můžeme psáti (10·6) také ve tvaru

$$\ldots, g_{n+1}^{-6}, g_{n+1}^{-4}, g_{n+1}^{-2}, 1, g_{n+1}^2, g_{n+1}^4, g_{n+1}^6, \ldots$$

Tedy soustava (10·7) vznikne ze soustavy (10·6) tím, že mezi každé dva sousední body vsuneme jeden bod nový. Tedy intervaly $(n + 1)$-ní stupnice vzniknou tím, že každý interval n-té stupnice rozdělíme na dvě „poloviny". Slovo polovina dávám do uvozovek, protože to nejsou poloviny v obvyklém smyslu tohoto slova, nýbrž dvě části, z nichž levá je menší než pravá.

Protože interval $\langle 1, g_{n+1}\rangle$ je menší „polovinou" intervalu $\langle 1, g_n\rangle$, je

$$g_{n+1} - 1 < \tfrac{1}{2}(g_n - 1),$$

takže

$$0 < g_n - 1 < \frac{1}{2^{n-1}}(g - 1);$$

z toho následuje

$$\lim_{n \to \infty} g_n = 1. \tag{10·8}$$

V každé stupnici geometrického svazku jsou intervaly, jejichž délka přesáhne libovolně dané kladné číslo. Ale přes to platí:

Věta 15. Budiž dán geometrický svazek. Budiž $c > 0$, $\varepsilon > 0$. Pak existuje index p takový, že pro všecka $n > p$ mají všecky ty intervaly n-té stupnice svazku, které leží nalevo od bodu c, délku menší než ε.

Důkaz. Zvolme k tak, že $g^k > c$. Pro každé n je g^k levým krajním bodem určitého intervalu J_n z n-té stupnice svazku. Budiž d_n délka intervalu J_n. Pro každé n je $d_{n+1} < \frac{1}{2}d_n$, a z toho následuje $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$. Proto existuje index p takový, že pro všecka $n > p$ je $d_n < \varepsilon$. Je-li $n > p$ a leží-li nějaký interval K z n-té stupnice nalevo od bodu c, pak K leží nalevo od J, takže délka intervalu K je menší než délka intervalu J, která je menší než ε, takže délka intervalu K je menší než ε.

Dělicím bodem geometrického svazku rozumíme každý bod y, který je dělicím bodem některé stupnice svazku. Zřejmě dělicí bod geometrického svazku je dělicím bodem skoro všech stupnic svazku.

Je-li M nějaká soustava bodů na číselné poloose, pak řekneme, že M leží hustě na číselné poloose, když ke každému bodu y číselné poloosy a ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze udati bod z patřící do soustavy M a vzdálený od bodu y o méně než ε.

Cvičení **46.** Dělicí body geometrického svazku leží hustě na číselné poloose.

Cvičení **47.** Budiž M soustava bodů na číselné poloose. Leží-li M hustě na číselné poloose, pak uvnitř každého intervalu obsaženého v číselné poloose je nekonečně mnoho bodů soustavy M. Obráceně, když víme, že v každém intervalu obsaženém v číselné poloose leží aspoň jeden bod soustavy M, pak M leží hustě na číselné poloose.

Cvičení **48.** Leží-li soustava bodů M hustě na číselné poloose, pak: [1] nalevo od každého bodu číselné poloosy je nějaký bod soustavy M, [2] napravo od každého bodu číselné poloosy je nějaký bod soustavy M, [3] je-li dáno číslo $\varepsilon > 0$ a jsou-li dány dva různé body soustavy M, lze mezi ně vsunouti konečný počet dalších bodů soustavy M tak, aby vzdálenost dvou sousedních bodů byla vždy menší než ε. Obráceně, jsou-li splněny podmínky [1], [2] a [3], leží M hustě na číselné poloose.

Cvičení **49.** Leží-li soustava bodů M hustě na číselné poloose, pak ke každému kladnému číslu α lze určiti posloupnost (3·1), jejíž členy jsou vzaty vesměs ze soustavy M, a pro kterou platí $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \alpha$. Obráceně, je-li splněna tato podmínka, leží M hustě na číselné poloose.

Ačkoli dělicí body geometrického svazku leží na číselné poloose hustě, přece existují vždy na číselné poloose také body y, které nejsou dělicími body svazku. Volíme-li na př. $g = 2$, pak bod 3 není dělicím bodem svazku. Neboť kdyby bod 3 byl dělicím bodem n-té stupnice svazku, existovalo by celé číslo k, pro které by platilo $g_n{}^k = 3$. Protože $g_n{}^{2n-1} = 2$, bylo by $2^k = 3^{2n-1}$, což je nemožné.

Cvičení **50.** Když základ geometrického svazku je prvočíslo p, pak celé číslo není dělicím bodem svazku, není-li mocninou prvočísla p.

Cvičení **51.** Budiž dán jakýkoli geometrický svazek. Z čísel 2 a 3 je nejvýš jedno dělicím bodem svazku.

Zvolme bod y na číselné poloose tak, že y není dělicím bodem daného geometrického svazku. Pro každé n máme v n-té stupnici svazku určitý interval $\langle u_n, v_n \rangle$, uvnitř kterého leží bod y. Zřejmě interval $\langle u_{n+1}, v_{n+1} \rangle$ je buďto levou nebo pravou „polovinou" intervalu $\langle u_n, v_n \rangle$, takže

$$\langle u_1, v_1 \rangle, \langle u_2, v_2 \rangle, \langle u_3, v_3 \rangle, \ldots \tag{10·9}$$

je řetěz intervalů. Ze cvič. 25 a z věty 15 následuje, že (10·9) je vytvořující řetěz; protože bod y je uvnitř všech intervalů (10·9), je (10·9) vytvořující řetěz bodu y. Řekneme, že (10·9) je **geometrický řetěz** bodu y.

Cvičení **52.** Budiž dán geometrický svazek. Zvolme v každé stupnici svazku interval $\langle u_n, v_n \rangle$, takže dostaneme posloupnost intervalů (10·9). Když (10·9) je geometrický řetěz nějakého bodu y na číselné poloose, který není dělicím bodem svazku, pak: [1] pro každé n je $\langle u_{n+1}, v_{n+1} \rangle$ buďto levou nebo pravou „polovinou" intervalu $\langle u_n, v_n \rangle$; [2] je nekonečně mnoho takových n, pro něž $\langle u_{n+1}, v_{n+1} \rangle$ je levou „polovinou" intervalu $\langle u_n, v_n \rangle$ i nekonečně mnoho takových n, pro něž $\langle u_{n+1}, v_{n+1} \rangle$ je pravou „polovinou" intervalu $\langle u_n, v_n \rangle$. Obráceně, jsou-li splněny podmínky [1] a [2], je (10·9) geometrický řetěz určitého bodu y na číselné poloose, který není dělicím bodem daného geometrického svazku.

Cvičení **53.** Budiž y dělicí bod geometrického svazku. Pak lze dvojím způsobem vybrati pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ z n-té stupnice svazku interval $\langle u_n, v_n \rangle$ tak, aby (10·9) byl vytvořující řetěz bodu y. Je-li p nejmenší z těch hodnot indexu n, pro které je y dělicím bodem n-té stupnice svazku, pak je y u jednoho z obou řetězů stále levým, u druhého stále pravým krajním bodem n-ho intervalu a to pro všecka $n \geqq p$; pro $n < p$ je interval $\langle u_n, v_n \rangle$ u obou řetězů stejný a obsahuje bod y uvnitř.

Cvičení **54.** Budiž $g = 2$ základ geometrického svazku. Geometrický řetěz bodu 3 začíná intervaly

$$\langle g_1, g^{2}_{1} \rangle, \langle g^{3}_{2}, g^{2}_{1} \rangle, \langle g^{3}_{2}, g^{7}_{3} \rangle, \langle g^{3}_{2}, g^{13}_{4} \rangle, \langle g^{25}_{5}, g^{13}_{4} \rangle, \langle g^{25}_{5}, g^{51}_{6} \rangle,$$
$$\langle g^{101}_{7}, g^{51}_{6} \rangle, \langle g^{101}_{7}, g^{203}_{8} \rangle.$$

11. Konstrukce všech logaritmických funkcí. Budiž nyní dána nějaká logaritmická funkce $f(y)$. Zvolme si určité číslo $g > 1$ a hodnotu $f(g)$ označme a:

$$a = f(g). \tag{11·1}$$

Podle cvič. 44 je $a > 0$. Protože $a > 0$, $g > 1$, můžeme zavésti aritmetický svazek se základem a a geometrický svazek se základem g.

Jako v odst. 7 a 10 budiž

$$a_1 = a, \; g_1 = g, \tag{11·2}$$

$$a_n = 2a_{n+1}, \; g_n = g_{n+1}^2. \tag{11·3}$$

Podle (11·1) a (11·2) je $a_1 = f(g_1)$. Obecněji je při každém n

$$a_n = f(g_n). \tag{11·4}$$

Neboť když při určitém n platí (11·4), pak podle (11·3) je $2a_{n+1} = f(g_{n+1}^2)$. Avšak $f(g_{n+1}^2) = 2f(g_{n+1})$ podle vlastnosti II logaritmických funkcí (viz odst. 9), takže $a_{n+1} = f(g_{n+1})$.

Z (11·4) následuje podle věty 14, že pro každé celé k (kladné, záporné i nulu) je

$$f(g_n^k) = ka_n. \tag{11·5}$$

Tedy funkce f přiřazuje dělicím bodům n-té stupnice geometrického svazku dělicí body n-té stupnice aritmetického svazku, a to popořádku bodům

$$1, g_n, g_n^2, g_n^3, \ldots$$

body

$$0, a_n, 2a_n, 3a_n, \ldots$$

a bodům

$$g_n^{-1}, g_n^{-2}, g_n^{-3}, \ldots$$

body

$$-a_n, -2a_n, -3a_n, \ldots$$

Budiž nyní y bod na číselné poloose, který není dělicím bodem geometrického svazku a budiž

$$\langle u_1, v_1 \rangle, \langle u_2, v_2 \rangle, \langle u_3, v_3 \rangle, \ldots \tag{11·6}$$

geometrický řetěz bodu y. Položme

$$r_n = f(u_n), \; s_n = f(v_n), \tag{11·7}$$

takže $\langle r_n, s_n \rangle$ je interval n-té stupnice aritmetického svazku. Intervaly (11·6) mají vlastnosti [1], [2] vyslovené ve cvič. 52. Z toho následuje snadno, že intervaly

$$\langle r_1, s_1 \rangle, \langle r_2, s_2 \rangle, \langle r_3, s_3 \rangle, \ldots \tag{11·8}$$

mají vlastnosti [1], [2] vyslovené ve cvič. 33. Proto (11·8) je aritmetický řetěz určitého bodu x, který není dělicím bodem aritmetického svazku. Snadno se dokáže, že

$$f(y) = x. \tag{11·9}$$

Neboť bod y leží uvnitř všech intervalů (11·6), t. j. $u_n < y < v_n$ pro všecka n. Z vlastnosti I logaritmických funkcí (viz odst. 9) následuje tedy podle (11·7), že $r_n < f(y) < s_n$, t. j. bod $f(y)$ leží uvnitř všech intervalů (11·8). Avšak x je jediný bod společný všem intervalům (11·8); z toho plyne (11·9).

Touto úvahou jsme získali předpis, který z každého bodu y číselné poloosy, ať už y je či není dělicím bodem geometrického svazku, vytvoří bod $f(y)$. O funkci $f(y)$ samé při tom předpisu potřebujeme znát pouze (11·1). Z toho následuje, že když dvě logaritmické funkce nabývají obě v jednom čísle $g > 1$ stejné hodnoty a, jsou ty dvě funkce identické.

Věta 16. Buďtež $f(y)$, $F(y)$ dvě logaritmické funkce. Pak existuje kladné číslo c takové, že je identicky (pro všecka $y > 0$)

$$F(y) = c \,.\, f(y).$$

Důkaz. Zvolme si libovolně číslo $g > 1$. Čísla $f(g)$, $F(g)$ jsou kladná podle cvič. 44, takže lze určiti kladné číslo c rovnicí

$$F(g) = c \,.\, f(g).$$

Funkce $F(y)$ a $c\,f(y)$ jsou dvě logaritmické funkce (viz cvič. 42), které nabývají pro $y = g$ obě stejné hodnoty, takže jsou identické.

Věta 16 dává odpověď na druhou z otázek uvedených na konci odst. 9. Zbývá odpověděti na prvou z těch otázek, zda totiž vůbec nějaká logaritmická funkce existuje. Cesta ke kladné odpovědi na tuto otázku je dosavadními vývody tohoto odstavce jasně naznačena. Zvolíme si číslo $a > 0$ a číslo $g > 1$. Zavedeme si aritmetický svazek se základem a a geometrický svazek se základem g. Pomocí těchto dvou svazků přiřadíme každému kladnému číslu y určité číslo $f(y)$. Je-li y dělicí bod geometrického svazku, definujeme číslo $f(y)$ podle (11·5). Není-li y dělicí bod geometrického svazku, budiž (11·6) geometrický řetěz bodu y; pomocí (11·7) dostaneme aritmetický řetěz (11·8) určitého bodu x a definujeme $f(y) = x$.

Nyní budeme zkoumati vlastnosti právě definované funkce $f(y)$; hlavním cílem je ovšem věta 21.

Cvičení 55. Jsou-li u, v dělicí body geometrického svazku a je-li $u < v$, je $f(u) < f(v)$.

Věta 17. Je-li $u < y < v$ a jsou-li u, v dělicí body geometrického svazku, jest $f(u) < f(y) < f(v)$.

Důkaz. Je-li také y dělicí bod geometrického svazku, plyne to ze cvič. 55. Není-li y dělicí bod geometrického svazku, budiž (11·6) geometrický řetěz bodu y; pomocí (11·7) vznikne aritmetický řetěz (11·8) bodu $f(y)$. Protože (11·6) je vytvořující řetěz bodu y, je

$$\lim_{n \to \infty} u_n = y, \lim_{n \to \infty} v_n = y;$$

protože $u < y < v$, existuje index n takový, že $u < u_n$, $v_n < v$. Podle (11·7) a podle cvič. 55 je $f(u) < r_n$, $s_n < f(v)$. Protože (11·8) je aritmetický řetěz bodu $f(y)$, je $r_n \leqq f(y) \leqq s_n$. Tedy $f(u) < f(y) < f(v)$.

Věta 18. $f(y)$ je rostoucí funkce.

Důkaz. Budiž $0 < y_1 < y_2$. Máme dokázati, že $f(y_1) < f(y_2)$. Podle cvičení 46 a 47 existují dělicí body u, v, w geometrického svazku takové, že $u < y_1 < v < y_2 < w$. Podle věty 17 je $f(u) < f(y_1) < f(v) < f(y_2) < f(w)$, tedy $f(y_1) < f(y_2)$.

Cvičení 56. Ke každému reálnému číslu x existuje kladné číslo y, pro které je $f(y) = x$.

Věta 19. Budiž

$$y_1, y_2, y_3, \ldots$$

posloupnost kladných čísel; budiž $\lim_{n \to \infty} y_n = y$, kde také y je kladné číslo. Pak je

$$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = f(y).$$

Důkaz. Zvolme kladné číslo ε. Máme dokázati, že pro skoro všecka n je $| f(y_n) - f(y) | < \varepsilon$. Podle cvič. 56 existují kladná čísla u, v taková, že $f(u) = f(y) - \varepsilon$, $f(v) = f(y) + \varepsilon$. Z věty 18 následuje snadno, že $u < y < v$. Protože $\lim_{n \to \infty} y_n = y$, existuje index p takový, že pro všecka $n > p$ je $u < y_n < v$. Pro $n > p$ je podle věty 18: $f(u) < f(y_n) < f(v)$, t. j. $f(y) - \varepsilon < f(y_n) < f(y) + \varepsilon$.

Cvičení 57. Jsou-li u, v dělicí body geometrického svazku, je $f(uv) = f(u) + f(v)$.

Věta 20. Je-li $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, je $f(y_1 y_2) = f(y_1) + f(y_2)$.

Důkaz. Podle cvič. 46 a 49 existují posloupnosti

$$u_1, u_2, u_3, \ldots; v_1, v_2, v_3, \ldots,$$

jejichž členy jsou všecky dělicími body geometrického svazku, a pro které platí $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = y_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = y_2$. Podle cvič. 57 je pro všecka n

$$f(u_n v_n) = f(u_n) + f(v_n).$$

Podle vět 3, 4 a 19 je však

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n v_n) = f(y_1 y_2), \lim_{n\to\infty} [f(u_n) + f(v_n)] = f(y_1) + f(y_2),$$

takže $f(y_1 y_2) = f(y_1) + f(y_2)$.

Věta 21. $f(y)$ je logaritmická funkce.

To plyne z vět 18 a 20. Mimoto je z našich úvah patrné, že každá logaritmická funkce je tvaru $f(y)$, volíme-li $g > 1$ libovolně a volíme-li za a hodnotu dané logaritmické funkce v bodě g. Proto výsledek cvič. 56 platí pro každou logaritmickou funkci. Zejména ke každé logaritmické funkci $\varphi(y)$ existuje číslo $g > 0$ takové, že $\varphi(g) = 1$; protože $\varphi(y)$ je rostoucí funkce, je jen jediné takové číslo g; podle cvič. 44 je $g > 0$. Toto číslo g nazveme základem logaritmické funkce. Za základ můžeme voliti libovolné číslo $g > 1$; neboť volíme-li dané $g > 1$ za základ geometrického svazku a číslo 1 za základ aritmetického svazku, pak naše funkce $f(y)$ je patrně logaritmická funkce se základem g. Konečně podle věty 16 je logaritmická funkce svým základem g jednoznačně určena. Logaritmickou funkci se základem $g > 1$ označíme

$$\log_g y.$$

V početní praxi se užívá logaritmické funkce se základem $g = 10$, což má tu výhodu, že násobíme-li číslo mocninou desíti, změní se pouze celá část logaritmu (t. zv. charakteristika). Při praktických výpočtech se užívá pro logaritmy se základem 10 (t. zv. dekadické neboli briggsovy logaritmy) značky log; i v této knížce jsme tak na jednom místě učinili (na konci odst. 6). V teoretických úvahách však jsou nejvýhodnější logaritmy se základem e [viz (6·16)] a budeme i v této knížce užívati znaku log pouze pro tyto logaritmy (viz odst. 15).*)

*) Obvykle se u nás pro logaritmy o základu e užívá značky lg, aby se rozlišily od logaritmů dekadických označovaných log.

Věta 22. Budiž $g > 1$, $h > 1$. Pak je identicky

$$\log_h y = \frac{\log_g y}{\log_g h}, \tag{11·9}$$

$$\log_h y = \log_h g \,.\, \log_g y. \tag{11·10}$$

Důkaz. Podle věty 16 existuje číslo $c > 0$, pro které je identicky $\log_h y = c \,.\, \log_g y$. Dosadíme-li $y = h$, vyjde $1 = c.\ \log_g h$, z čehož plyne (11·9); dosadíme-li však $y = g$, vyjde $\log_h g = c$, z čehož plyne (11·10).

12. Obecná mocnina. Dosud jsme v této knížce užívali pouze takových mocnin u^s, u kterých mocnitelem s je číslo celé. Budeme nyní přesně definovati numerický význam znaku u^s, u kterého je mocnitelem s libovolné reálné číslo. Ale o mocněnci u budeme při tom předpokládati, že je to kladné číslo. Na jednu věc musíme při tom dávati pozor! Je-li s celé číslo, je nám význam znaku u^s už znám; proto se musíme přesvědčit, že obecná definice znaku u^s ve zvláštním případě celého s dává tomuto znaku jeho obvyklý význam.

Budiž tedy u číslo kladné a s libovolné číslo reálné. Při definici znaku u^s budeme rozeznávati tři případy.

I. Budiž $u = 1$. Pak klademe $1^s = 1$ pro všecka s. Pro celá s to souhlasí.

II. Budiž $u > 1$. Víme (viz cvič. 56), že existuje kladné číslo v, pro které je

$$\log_u v = s. \tag{12·1}$$

Protože logaritmická funkce stále roste, může býti jen jediné takové číslo v. Numerickou hodnotou znaku u^s rozumíme toto číslo v. Že to souhlasí pro celá s, plyne z věty 14.

III. Budiž konečně $0 < u < 1$. Pak je $\dfrac{1}{u} < 1$, takže podle II víme, co znamená znak $\left(\dfrac{1}{u}\right)^s$; hodnotou znaku u^s rozumíme převrácenou hodnotu

$$u^s = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{u}\right)^s}$$

čísla $\left(\dfrac{1}{u}\right)^s$. Pro celá s zase to souhlasí.

Ve všech případech je u^s kladné číslo (pro všecka kladná u a pro libovolné s).

Na střední škole se postupuje obráceně nežli jsme postupovali zde. My jsme napřed zavedli logaritmus a užili jsme vztahu (12·1) k tomu, abychom pojem obecné mocniny převedli na pojem logaritmu. Na střední škole se obráceně pomocí vztahu (12·1) převádí pojem logaritmu na pojem mocniny. Postup známý ze střední školy není nesprávný; ale aby byl přesný, musila by se napřed mocnina s iracionálním exponentem definovati pečlivěji než se to děje na střední škole.

Věta 23. Je-li $g > 1$, $u > 0$ a s jakékoli reálné číslo, je

$$\log_g u^s = s \log_g u. \tag{12·2}$$

Důkaz. I. Je-li $u = 1$, platí (12·2) podle cvič. 43.

II. Budiž $u > 1$. Pro $g = u$ platí (12·2) podle (12·1), neboť $\log_u u = 1$. Změníme-li (12·2), pak se obě strany vztahu (12·2) znásobí týmž číslem, takže vztah (12·2) zůstane správný.

III. Případ $0 < u < 1$ se převede na případ $u > 1$ podle cvič. 45.

Věta 24. Pro $u > 0$ a libovolná s, t jest

$$u^s \,.\, u^t = u^{s+t}.$$

Důkaz. Zvolme $g > 1$. Protože pro $y_1 > 0$, $y_2 > 0$ ze vztahu $\log_g y_1 = \log_g y_2$ následuje $y_1 = y_2$, stačí dokázati, že

$$\log_g (u^s \,.\, u^t) = \log_g u^{s+t},$$

což plyne z věty 23.

Cvičení 58. Pro $u > 0$, $v > 0$ a libovolné s jest

$$u^s \,.\, v^s = (uv)^s.$$

Cvičení 59. Pro $u > 0$ a libovolná s, t jest

$$(u^s)^t = u^{st}.$$

Cvičení 60. Pro $u > 1$, $s < t$ je $u^s < u^t$.

Cvičení 61. Pro $0 < u < 1$, $s < t$ je $u^s > u^t$.

Cvičení 62. Pro $0 < u < v$, $s > 0$ je $u^s < v^s$.

Cvičení 63. Pro $0 < u < v$, $s < 0$ je $u^s > v^s$.

13. Spojitost. Budiž $f(x)$ funkce, která nemusí býti definována pro všecky hodnoty proměnné x. Je-li c číslo, pro které hodnota $f(c)$ je definována (neboli je-li c číslo z oboru funkce $f(x)$), pak říkáme, že funkce $f(x)$ je v čísle c spojitá, když

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c). \tag{13·1}$$

Vztah (13·1) znamená, že pro všecky body x z oboru funkce $f(x)$, které leží dosti blízko u bodu c, je hodnota $f(x)$ blízká hodnotě $f(c)$. Přesný význam vztahu (13·1) je: Každému číslu $\varepsilon > 0$ lze přiřaditi číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost $| f(x) - f(c) | < \varepsilon$ je splněna pro všecka ta x z oboru funkce $f(x)$, pro která je $| x - c | < \delta$.

Věta 25. Budiž $f(x)$ funkce spojitá v čísle c. Budiž

$$c_1, c_2, c_3, \dots \tag{13·2}$$

posloupnost, jejíž všecky členy jsou v oboru funkce $f(x)$. Je-li $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = c$, pak také $\lim\limits_{n \to \infty} f(c_n) = f(c)$.

Důkaz. Budiž dáno $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že pro skoro všecka n je $| f(c_n) - f(c) | < \varepsilon$. Protože platí (13·1), existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro všecka x z oboru funkce $f(x)$, pro která $| x - c | < \delta$, je $| f(x) - f(c) | < \varepsilon$. Protože $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = c$, existuje index p takový, že pro všecka $n > p$ je $| c_n - c | < \delta$. Pro $n > p$ je $| f(c_n) - f(c) | < \varepsilon$.

Věta 26. Budiž c číslo z oboru funkce $f(x)$. Budiž $\lim\limits_{n \to \infty} f(c_n) = f(c)$ pro každou posloupnost (13·2), jejíž všecky členy jsou v oboru funkce $f(x)$, pro kterou platí $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = c$. Pak funkce $f(x)$ je spojitá v čísle c.

Důkaz. Je-li ε kladné číslo, řekneme, že číslo $\delta > 0$ má vlastnost $V(\varepsilon)$, když $| f(x) - f(c) | < \varepsilon$ pro všecka ta x z oboru funkce $f(x)$, pro která je $| x - c | < \delta$. Máme dokázati, že při každé volbě čísla $\varepsilon > 0$ existuje nějaké číslo $\delta > 0$ s vlastností $V(\varepsilon)$. Budeme předpokládati naopak, že máme dáno určité číslo $\varepsilon > 0$ takové, že *žádné* číslo $\delta > 0$ nemá vlastnost $V(\varepsilon)$. Důkaz bude dokončen, jakmile se přesvědčíme, že tento předpoklad vede k nemožnému důsledku. Podle našeho předpokladu pro každé $n = 1, 2, 3, \dots$ číslo $\dfrac{1}{n}$ *nemá* vlastnost $V(\varepsilon)$. To znamená, že v oboru funkce $f(x)$ musí existovat aspoň jedno číslo c_n takové, že

$$| c_n - c | < \frac{1}{n}, \tag{13·3}$$

$$| f(c_n) - f(c) | \geqq \varepsilon. \tag{13·4}$$

Ze (13·3) však následuje $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = c$, takže musí býti $\lim\limits_{n \to \infty} f(c_n) = f(c)$. To je však nemožné, platí-li (13·4) pro všecka n.

Věta 27. Buďtež $f(x)$ a $g(x)$ dvě funkce, které jsou obě spojité v čísle c. Pak také funkce

$$f(x) + g(x),\ f(x) - g(x),\ f(x) \cdot g(x)$$

jsou spojité v čísle c.

To plyne z vět 3, 4 a 26. Jiný důkaz věty 27 se najde ve VM, odst. 15.

Cvičení 64. Budiž $f(x)$ funkce spojitá v čísle c. Je-li $f(c) \neq 0$, pak také funkce $\frac{1}{f(x)}$ je spojitá v čísle c.

Řekneme-li o funkci $f(x)$ prostě, že je spojitá, míníme, že je spojitá v každém čísle c z oboru funkce $f(x)$.

Věta 28. Logaritmická funkce je spojitá.

To plyne z vět 19 a 26.

Věta 29. Jsou-li $f(x)$ a $\varphi(y)$ spojité funkce, pak také $\varphi[f(x)] = F(x)$ je spojitá funkce.

Důkaz. Budiž c číslo z oboru funkce $F(c)$. To znamená, že jednak číslo c je v oboru funkce $f(x)$, jednak číslo $f(c)$ je v oboru funkce $\varphi(y)$. Budiž (13·2) posloupnost, jejíž každý člen je v oboru funkce $F(x)$ a pro kterou platí $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = c$. Podle věty 26 stačí dokázati, že $\lim\limits_{n \to \infty} F(c_n) = F(c)$. Ježto každé c_n je v oboru funkce $F(x)$, je každé c_n v oboru funkce $f(x)$ a každé $f(c_n)$ je v oboru funkce $\varphi(y)$. Protože $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = c$ a protože čísla c_n jsou v oboru spojité funkce $f(x)$, podle věty 25 je $\lim\limits_{n \to \infty} f(c_n) = f(c)$. Protože $\lim\limits_{n \to \infty} f(c_n) = f(c)$ a protože čísla $f(c_n)$ jsou v oboru funkce $\varphi(y)$, podle věty 25 je $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi[f(c_n)] = \varphi[f(c)]$, t. j. $\lim\limits_{n \to \infty} F(c_n) = F(c)$. Tím je důkaz dokončen.

Jiný důkaz se najde ve VM, odst. 17.

Věta 30. Všecky členy posloupnosti (13·2) buďtež čísla kladná; také c budiž kladné. Budiž $g > 1$.

Je-li

$$\lim_{n \to \infty} \log_g c_n = \log_g c, \tag{13·5}$$

je

$$\lim_{n \to \infty} c_n = c.$$

Důkaz. Budiž $0 < \varepsilon < c$. Máme dokázati, že pro skoro všecka n je $| c_n - c | < \varepsilon$. Protože logaritmická funkce roste, je

$$\log_g (c - \varepsilon) < \log_g c < \log_g (c + \varepsilon). \tag{13·6}$$

Podle (13·5) existuje index p takový, že pro všecka $n > p$ je

$$\log_g (c - \varepsilon) < \log_g c_n < \log_g (c + \varepsilon).$$

Protože logaritmická funkce roste, je $c - \varepsilon < c_n < c + \varepsilon$ pro všecka $n > p$.

Věta 31. Budiž $u > 0$. Pro všecka reálná x budiž $f(x) = u^x$. Pak $f(x)$ je spojitá funkce.

Důkaz. Budiž $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$. Podle věty 26 máme dokázati, že $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n) = f(c)$. Zvolme $g > 1$. Podle cvičení 14 je $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \log_g u = c \log_g u$. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \log_g f(c_n) = \log_g f(c)$ podle věty 23, takže $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n) = f(c)$ podle věty 30.

Cvičení 65. Budiž s reálné číslo. Pro všecka kladná y budiž $f(y) = y^s$. Pak $f(y)$ je spojitá funkce.

14. Exponenciální funkce. Je-li každému reálnému číslu x přiřazeno určité číslo $f(x)$, máme funkci, jejíž obor je soustava všech reálných čísel. Řekneme, že $f(x)$ je exponenciální funkce, když má tyto dvě vlastnosti:

I. $f(x)$ je rostoucí funkce.

II. Jsou-li x_1, x_2 libovolná reálná čísla, pak

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \, . \, f(x_2).$$

Věta 32. Je-li $f(x)$ exponenciální funkce, pak $f(0) = 1$.

Důkaz. Podle vlastnosti I exponenciální funkce existuje číslo c takové, že $f(c) \neq 0$. Podle vlastnosti II je $f(c) = f(0) \, . \, f(c)$, tedy $f(0) = 1$.

Cvičení 66. Je-li $f(x)$ exponenciální funkce, je $f(x) \, . \, f(-x) = 1$ pro každé reálné x.

Cvičení 67. Je-li $f(x)$ exponenciální funkce, je $f(x) > 1$ pro $x > 0$, $0 < f(x) < 1$ pro $x < 0$.

Cvičení 68. Budiž $f(x)$ exponenciální funkce. Pro každé reálné x a pro každé celé k je $f(kx) = [f(x)]^k$.

Cvičení 69. Budiž $u > 1$. Pro všecka reálná x budiž $f(x) = u^x$. Pak $f(x)$ je exponenciální funkce.

Věta 33. Buďtež $f_1(x)$, $f_2(x)$ dvě exponenciální funkce. Budiž $a > 0$, $f_1(a) = f_2(a)$. Pak je identicky $f_1(x) = f_2(x)$.

Důkaz. Položme $g = f_1(a) = f_2(a)$, takže $g > 1$ podle cvič. 67. Zaveďme aritmetický svazek se základem a a geometrický svazek se základem g. Jako obvykle položme

$$a_1 = a, \; g_1 = g,$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2}, \; g_{n+1} = \sqrt{g_n}.$$

Pro $n = 1$ jest $f_1(a_n) = g_n$; platí-li $f_1(a_n) = g_n$ při určitém n, jest $f_1(a_{n+1}) \, . \, f_1(a_{n+1}) = f_1(2a_{n+1}) = f_1(a_n) = g_n = g_{n+1} \, . \, g_{n+1}$, tedy $f_1(a_{n+1}) = \pm g_{n+1}$, takže $f_1(a_{n+1}) = g_{n+1}$ podle cvič. 67. Tedy je $f_1(a_n) = g_n$

pro všecka n; podle cvič. 68 je $f_1(ka_n) = g_n^k$ pro všecka celá k. Docela stejně se dostane $f_2(ka_n) = g_n^k$, takže $f_1(x) = f_2(x)$ pro všecky dělicí body x aritmetického svazku. Není-li x dělicí bod aritmetického svazku, budiž

$$\langle r_1, s_1\rangle, \langle r_2, s_2\rangle, \langle r_3, s_3\rangle, \dots \qquad (14\cdot 1)$$

aritmetický řetěz bodu x. Položme

$$u_n = f_1(r_n), \; v_n = f_1(s_n), \qquad (14\cdot 2)$$

takže $\langle u_n, v_n\rangle$ je interval n-té stupnice geometrického svazku. Intervaly (14·1) mají vlastnosti [1], [2] vyslovené ve cvič. 33. Z toho následuje snadno, že intervaly

$$\langle u_1, v_1\rangle, \langle u_2, v_2\rangle, \langle u_3, v_3\rangle, \dots \qquad (14\cdot 3)$$

mají vlastnosti [1], [2] vyslovené ve cvič. 52. Proto (14·3) je geometrický řetěz určitého bodu y, který není dělicím bodem geometrického svazku. Pro všecka n je $r_n < x < s_n$; protože exponenciální funkce stále roste, následuje ze (14·2), že $u_n < f_1(x) < v_n$ pro všecka n. Tedy bod $f_1(x)$ je uvnitř všech intervalů (14·3). Avšak y je jediný bod společný všem intervalům (14·3). Proto je $f_1(x) = y$. Docela stejně se dokáže také $f_2(x) = y$, takže $f_1(x) = f_2(x)$.

Cvičení 70. Je-li $f(x)$ exponenciální funkce, pak existuje číslo $u > 1$ takové, že je identicky $f(x) = u^x$.

15. Derivace. Pojem derivace je jeden z nejdůležitějších pojmů nauky o funkcích. Názorný výklad tohoto pojmu se najde ve VM, odst. 10. Zde si pouze uveďme aritmetickou definici derivace. O funkci $f(x)$ pravíme, že má pro $x = a$ derivaci rovnou číslu α, je-li funkce $f(x)$ definována ve všech bodech dosti blízkých bodu a a je-li

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \alpha. \qquad (15\cdot 1)$$

Přesný význam vztahu (15·1) jest: Každému číslu $\varepsilon > 0$ lze přiřaditi číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \alpha \right| < \varepsilon$$

je splněna i pro kladná h taková, že $0 < h < \delta$ i pro záporná h taková, že $0 < -h < \delta$. Hodnotu derivace funkce $f(x)$ pro $x = a$ značíme obvykle $f'(a)$. Pojmu derivace jsme v této knížce již jednou příležitostně užili (při větě 13).

Z vlastností derivace si uveďme jen tuto:

Věta 34. Budiž $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $\langle r, s\rangle$. Má-li $f(x)$ pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$ stále kladnou derivaci, pak $f(x)$ roste v intervalu $\langle r, s\rangle$. Má-li $f(x)$ pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$ stále zápornou derivaci, pak $f(x)$ klesá v intervalu $\langle r, s\rangle$.

Důkaz se najde ve VM, odst. 21 a 35.

Užitečnost věty je prokázána četnými příklady ve VM, odst. 21 a 22.

Má-li logaritmická funkce $\log_g y$ pro $y = 1$ derivaci rovnou číslu α, pak existuje limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log_g (1 + h)}{h} = \alpha. \tag{15·1}$$

Existuje-li takové číslo α, pak je zřejmě při každém kladném y

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log_g\left(1 + \dfrac{h}{y}\right)}{\dfrac{h}{y}} = \alpha$$

neboli

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log_g (y + h) - \log_g y}{h} = \frac{\alpha}{y},$$

takže

$$(\log_g y)' = \frac{\alpha}{y}$$

pro každé kladné y. Potíž je pouze v důkaze existence limity (15·1). Za tím účelem potřebujeme zkoumati, jakých hodnot nabývá funkce

$$\frac{\log_g y}{y - 1} \tag{15·2}$$

v blízkosti bodu $y = 1$. Místo funkce (15·2) můžeme studovati její převrácenou hodnotu, tedy funkci

$$\varphi(y) = \frac{y - 1}{\log_g y}.$$

Pro $y = 1$ není $\varphi(y)$ definována, neboť zlomek se jmenovatelem 0 je bezvýznamný. Pro všecka ostatní $y > 0$ je však funkce $\varphi(y)$ definována. Tedy obor funkce $\varphi(y)$ je číselná poloosa, ze které se odstraní bod 1.

Věta 35. Funkce $\varphi(y)$ je spojitá.

To plyne z vět 27, 28 a cvič. 64.

Zaveďme si aritmetický svazek se základem $a_1 = 1$ a geometrický svazek se základem $g_1 = g$. Jako obvykle budiž

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2},\ g_{n+1} = \sqrt{g_n}.$$

Víme, že

$$\log_g g_n^k = ka_n,$$

takže pro $k \neq 0$ je

$$\varphi(g_n^k) = \frac{g_n^k - 1}{ka_n}. \tag{15·3}$$

Věta 36. Jsou-li u, v dělicí body geometrického svazku a je-li $u \neq 1 \neq v$, $u < v$, jest $\varphi(u) < \varphi(v)$.

Důkaz. Zvolme n tak, že oba body u, v jsou dělicí body n-té geometrické stupnice. Mimo bod 1, ve kterém funkce $\varphi(y)$ není definována, má tato stupnice za dělicí body jednak body

$$g_n, g_n^2, g_n^3, \ldots \tag{15·4}$$

napravo od bodu 1, jednak body

$$\frac{1}{g_n}, \frac{1}{g_n^2}, \frac{1}{g_n^3}, \ldots \tag{15·5}$$

nalevo od bodu 1. V bodech (15·4) nabude funkce $\varphi(y)$ hodnot

$$\frac{g_n - 1}{a_n}, \frac{g_n^2 - 1}{2a_n}, \frac{g_n^3 - 1}{3a_n}, \ldots; \tag{15·6}$$

v bodech (15·5) nabude funkce $\varphi(y)$ hodnot

$$\frac{g_n - 1}{g_na_n}, \frac{g_n^2 - 1}{2g_n^2a_n}, \frac{g_n^3 - 1}{3g_n^3a_n}, \ldots; \tag{15·7}$$

Protože $g_n > 1$, $a_n > 0$, následuje ze cvič. 6, že (15·6) je stoupající posloupnost, a ze cvič. 7, že (15·7) je klesající posloupnost. V (15·6) je tedy nejmenší člen $\frac{g_1 - 1}{a_1}$; v (15·7) je největší člen $\frac{g_1 - 1}{g_1 a_1}$; zřejmě však

$$\frac{g_1 - 1}{g_1a_1} < \frac{g_1 - 1}{a_1},$$

takže kterýkoli člen posloupnosti (15·7) je menší než kterýkoli člen posloupnosti (15·6). Tím je patrně důkaz věty dokončen.

Věta 37. Funkce $\varphi(y)$ je rostoucí funkce.

Důkaz. Budiž $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, $y_1 \neq 1 \neq y_2$, $y_1 < y_2$. Máme dokázati, že $\varphi(y_1) < \varphi(y_2)$. Podle cvič. 46 a 47 existují dělicí body geometrického svazku u, v takové, že $u \neq 1 \neq v$, $y_1 < u < v < y_2$. Podle věty 36 je $\varphi(v) > \varphi(u)$. Proto můžeme zvoliti číslo $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\varphi(u) + \varepsilon < \varphi(v) - \varepsilon. \tag{15·8}$$

Podle věty 35 existuje na číselné poloose interval J, který neobsahuje bod 1, takový, že bod y_1 leží uvnitř J a takový, že $|\varphi(y) - \varphi(y_1)| < \varepsilon$ pro každý bod y uvnitř J. Podle cvič. 46 a 47 můžeme zvolit uvnitř J dělicí bod t_1 geometrického svazku, pro který je $t_1 < u$; jest tedy $\varphi(t_1) < \varphi(u)$ podle věty 36 a mimoto je $|\varphi(t_1) - \varphi(y_1)| < \varepsilon$. Docela stejně se dokáže, že existuje dělicí bod $t_2 \neq 1$ geometrického svazku, pro který je $\varphi(v) < \varphi(t_2)$ a $|\varphi(t_2) - \varphi(y_2)| < \varepsilon$. Jest

$$\varphi(y_1) < \varphi(t_1) + \varepsilon < \varphi(u) + \varepsilon,$$
$$\varphi(y_2) > \varphi(t_2) - \varepsilon > \varphi(v) - \varepsilon,$$

takže podle (15·8) je $\varphi(y_1) < \varphi(y_2)$.

Body $g_n, g_{n+1}, g_n^{-1}, g_{n+1}^{-1}$ jsou dělicí body našeho geometrického svazku, jsou různé od bodu 1 a jest $g_n^{-1} < g_{n+1}^{-1} < g_{n+1} < g_n$. Podle věty 36 je

$$\varphi(g_n^{-1}) < \varphi(g_{n+1}^{-1}) < \varphi(g_{n+1}) < \varphi(g_n).$$

Tedy

$$\langle\varphi(g_1^{-1}), \varphi(g_1)\rangle, \langle\varphi(g_2^{-1}), \varphi(g_2)\rangle, \langle\varphi(g_3^{-1}), \varphi(g_3)\rangle, \ldots \tag{15·9}$$

je řetěz intervalů. Podle (15·3) je

$$\varphi(g_1^{-1}) > 0, \quad \frac{\varphi(g_n)}{\varphi(g_n^{-1})} = g_n,$$

takže podle (10·8) a podle cvič. 26 je (15·9) vytvořující řetěz určitého bodu α. Bod α leží v intervalu $\langle\varphi(g_1^{-1}), \varphi(g_1)\rangle$, takže je $\alpha > 0$.

Věta 38. Pro $y > 1$ je $\varphi(y) > \alpha$; pro $0 < y < 1$ je $\varphi(y) < \alpha$; mimo to je

$$\lim_{y \to 1} \varphi(y) = \alpha. \tag{15·10}$$

Důkaz. Je-li $y > 1$, pak podle (10·8) existuje index n, pro který $g_n < y$, takže $\varphi(g_n) < \varphi(y)$ podle věty 37; protože α je v n-tém intervalu posloupnosti (15·9), je $\alpha < \varphi(y)$. Je-li $0 < y < 1$, pak existuje takové n, že $g_n < y^{-1}$ neboli $g_n^{-1} > y$, tedy $\varphi(g_n^{-1}) > y$, takže $\alpha > y$. Zbývá dokázati vztah (15·10). Budiž dáno číslo $\varepsilon > 0$; máme dokázati, že existuje interval J, uvnitř kterého je bod 1, takový, že $|\varphi(y) - \alpha| < \varepsilon$ pro všecka $y \neq 1$ uvnitř intervalu J. Ježto (15·9) je vytvořující řetěz bodu α, jest

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(g_n^{-1}) = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi(g_n) = \alpha.$$

Tedy můžeme zvolit n tak, že $|\varphi(g_n^{-1}) - \alpha| < \varepsilon$, $|\varphi(g_n) - \alpha| < \varepsilon$. Protože $g_n^{-1} < 1 < g_n$, leží bod 1 uvnitř intervalu $J = \langle g_n^{-1}, g_n \rangle$. Leží-li $y \neq 1$ uvnitř J, pak podle věty 37 je

$$\varphi(y) < \varphi(g_n) < \alpha + \varepsilon, \quad \varphi(y) > \varphi(g_n^{-1}) > \alpha - \varepsilon.$$

Hodnota čísla $\alpha > 0$ závisí na volbě základu g logaritmické funkce, s pomocí které jsme tvořili funkci $\varphi(y)$. Nahradíme-li funkci $\log_g y$ jinou logaritmickou funkcí, pak podle věty 16 existuje číslo $c > 0$ takové, že nová logaritmická funkce je identická s funkcí $c \log_g y$; obráceně $c \log_g y$ je podle cvič. 42 logaritmická funkce při každé volbě čísla $c > 0$. Zavedeme-li místo funkce $\log_g y$ funkci $c \log_g y$, máme místo funkce

$$\varphi(y) = \frac{y - 1}{\log_g y}$$

funkci

$$\frac{y - 1}{c \log_g y} = \frac{\varphi(y)}{c},$$

takže místo čísla α dostaneme číslo $\frac{\alpha}{c}$. Protože je $\alpha > 0$, vidíme, že vhodnou volbou základu logaritmické funkce můžeme docíliti toho, že číslo odpovídající číslu α bude míti libovolně předepsanou kladnou hodnotu; a různým hodnotám čísla α odpovídají různé logaritmické funkce. Zejména existuje zcela určitá logaritmická funkce, u které číslo odpovídající číslu α má hodnotu 1. Základ této logaritmické funkce označíme e; my jsme sice v odst. 6 už označili písmenem e zcela určité číslo, ale to nevadí, neboť ze vztahu (15·13), který v brzku dokážeme, plyne volbou $x = 1$ a porovnáním s (6·16), že číslo e zde zavedené je totožné s číslem e zavedeným v odst. 6. Logaritmy o základu e se jmenují **přirozené** neboli **Napierovy** (čti neperovy) logaritmy; budeme je značiti symbolem log, poněvadž záměna s logaritmy dekadickými není zde možná.*)

Cvičení 71. Jest

$$\lim_{y \to 1} \frac{y - 1}{\log y} = 1, \tag{15·11}$$

$$\lim_{y \to 1} \frac{\log y}{y - 1} = 1. \tag{15·12}$$

Cvičení 72. Pro $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, $y_1 \neq 1 \neq y_2$, $y_1 < y_2$ jest

$$\frac{y_1 - 1}{\log y_1} < \frac{y_2 - 1}{\log y_2}.$$

Věta 39. Pro $y > 0$, $y \neq 1$ je $1 + \log y < y$.

Důkaz. Podle věty 38 (ve které $g = e$, tedy $\alpha = 1$) je pro $y > 1$

$$\frac{y - 1}{\log y} > 1$$

a mimo to $\log y > 0$ podle cvičení 44, takže $y - 1 > \log y$ neboli $y > 1 + \log y$. Podle věty 38 je pro $0 < y < 1$

$$\frac{y - 1}{\log y} < 1 \quad \text{neboli} \quad \frac{y - 1}{-\log y} > -1$$

a mimo to $-\log y > 0$ podle cvič. 44, takže zase $y - 1 > \log y$ neboli $y > 1 + \log y$.

Věta 40. Pro každé reálné x je

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \tag{15·13}$$

Důkaz. Pro $x = 0$ je vztah (15·13) zřejmý. Budiž tedy $x \neq 0$. Položme $y = 1 + \frac{x}{n}$. Pro $n > |x|$ je $y > 0$, takže symbol $\log y$ má význam, a jest

$$\frac{\log y}{y - 1} = \frac{n}{x} \log \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Když celé n roste do nekonečna, pak y se blíží jedné (a pro $n > |x|$ je $y > 0$, $y \neq 1$); tedy podle (15·12) je

*) Viz poznámku na str. 43.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} \log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1$$

takže

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = x.$$

Podle vět 25 a 31 je tedy

$$\lim_{n\to\infty} e^{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = e^x.$$

Tím je (15·13) dokázáno, neboť

$$e^{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

podle definice levé strany.

Cvičení 73. Je-li $0 < u < v$, jest

$$\frac{1}{v} < \frac{\log v - \log u}{v - u} < \frac{1}{u}.$$

Je-li $0 > u > v$, jest

$$\frac{1}{v} > \frac{\log |v| - \log |u|}{v - u} > \frac{1}{u}.$$

[Ve větě 39 volte jednak $y = \frac{v}{u}$, jednak $y = \frac{u}{v}$.]

Věta 41. Pro každé $y \neq 0$ je

$$(\log |y|)' = \frac{1}{y}.$$

To plyne snadno ze cvič. 73.

Cvičení 74. Je-li $r < s$, je

$$e^r < \frac{e^s - e^r}{s - r} < e^s.$$

[Ve cvič. 73 volte $u = e^r$, $v = e^s$.]

Věta 41a. Pro každé reálné x je

$$(e^x)' = e^x.$$

Cvičení 75. Budiž $u > 0$. Pro každé reálné x je

$$(u^x)' = u^x \log u.$$

[Jest $u^x = e^{x \log u}$.]

Věta 42. Budiž s libovolné reálné číslo. Pro každé reálné x je

$$(x^s)' = s x^{s-1}. \tag{15·14}$$

Důkaz. Jest $x = e^{\log x}$ podle definice pravé strany, tedy $x^s = e^{s \log x}$ podle cvič. 59. Vzorec (15·14) plyne tedy z vět 41 a 41a podle pravidla o derivování složené funkce (viz VM, odst. 17).

Můžeme si odvoditi vzorec (15·14) také bez pravidla o derivování složené funkce. Budiž nejprve $s > 1$. Je-li $0 < x < y$, pak je podle cvič. 60

$$0 < \frac{y}{x} < \left(\frac{y}{x}\right)^s$$

a podle cvič. 61

$$0 < \left(\frac{x}{y}\right)^s < \frac{x}{y}.$$

Tedy podle cvič. 72 je

$$\frac{\frac{y}{x} - 1}{\log \frac{y}{x}} < \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^s - 1}{\log \left(\frac{y}{x}\right)^s},$$

$$\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^s - 1}{\log \left(\frac{x}{y}\right)^s} < \frac{\frac{x}{y} - 1}{\log \frac{x}{y}}.$$

Podle (12·2) můžeme tyto nerovnosti psáti ve tvaru

$$\frac{\frac{y}{x} - 1}{\log \frac{y}{x}} < \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^s - 1}{s \log \frac{y}{x}}, \tag{15·15}$$

$$\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^s - 1}{s \log \frac{x}{y}} < \frac{\frac{x}{y} - 1}{\log \frac{x}{y}}. \tag{15·16}$$

V nerovnosti (15·15) násobme na obou stranách kladným číslem $\log \frac{y}{x}$, a týmž kladným číslem $\log \frac{y}{x} = -\log \frac{x}{y}$ násobme také obě strany nerovnosti (15·16). Vyjde

$$\frac{y}{x} - 1 < \frac{1}{s}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^s - 1\right], \tag{15·17}$$

$$\frac{1}{s}\left[1 - \left(\frac{x}{y}\right)^s\right] < 1 - \frac{x}{y}. \tag{15·18}$$

Násobíme-li ještě v (15·17) obě strany kladným číslem sx^s a v (15·18) obě strany kladným číslem sy^s, dostaneme, že pro $s > 1$, $0 < x < y$ je

$$sx^{s-1} < \frac{y^s - x^s}{y - x} < sy^{s-1}$$

a z toho plyne snadno (15·14) pro $s > 1$, protože funkce sx^{s-1} je pro $x > 0$ spojitá podle cvič. 65. Máme-li takto (15·14) dokázáno pro $s > 1$, můžeme dále usuzovati na př. takto. Platí-li (15·14) pro určité s, pak je podle pravidla o derivování podílu [viz VM, vzorec (18·3)]

$$(x^{s-1})' = \left(\frac{x^s}{x}\right)' = \frac{sx^{s-1} \,.\, x - x^s \,.\, 1}{x^2} = (s - 1)\, x^{s-2}$$

t. j. vzorec (15·14) zůstane v platnosti, zmenšíme-li s o jedničku. Proto vzorec (15·14) platný pro $s > 1$ zůstane v platnosti pro $s > 0$, pro $s > -1$, pro $s > -2$ atd., t. j. pro všecka reálná s vůbec.

Cvičení 76. Derivujte funkce

a) $\log(x^2 + 1)$; b) e^{x^2}; c) x^x;

d) $e^{\sqrt{x}}$; e) $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$, f) $(x^2 + 1)^{\frac{1}{x}}$.

16. Exponenciální řada. Když $|x| < 1$, jest

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

$$\log\frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right).$$

S pomocí těchto řad se dají velmi pohodlně počítati logaritmy. Ale o tom je řeč ve VM, odst. 30, a není důvodu, abychom se tím v této knížce zabývali znovu. Za to se v tomto odstavci seznámíme s jinou nekonečnou řadou, s pomocí které můžeme velmi snadno počítati nejen číslo e, nýbrž také hodnoty funkce e^x pro všecka reálná x.

Věta 43. Budiž

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots \tag{16·1}$$

posloupnost spojitých funkcí v intervalu $\langle r, s\rangle$. Pro všecka x uvnitř

$\langle r, s\rangle$ a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ budiž

$$f'_{n+1}(x) = f_n(x). \tag{16·2}$$

Pro $n \geqq 2$ budiž $f_n(r) = 0$. Je-li $f_1(x)$ stále kladná pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$, pak také pro $n \geqq 2$ je $f_n(x)$ stále kladná pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$.

Důkaz. Nechť při určitém n je $f_n(x) > 0$ pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$. Máme dokázati totéž o funkci $f_{n+1}(x)$. Funkce $f_{n+1}(x)$ je spojitá v intervalu $\langle r, s\rangle$ a uvnitř $\langle r, s\rangle$ má podle (16·2) stále kladnou derivaci. Funkce $f_{n+1}(x)$ tedy roste v intervalu $\langle r, s\rangle$ podle věty 34, takže pro x uvnitř $\langle r, s\rangle$ je $f_{n+1}(x) > f_{n+1}(r) = 0$.

Cvičení 77. Budiž (16·1) posloupnost spojitých funkcí v intervalu $\langle r, s\rangle$. Pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$ a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ nechť platí (16·2). Pro $n \geqq 2$ budiž $f_n(s) = 0$. Je-li $f_1(x)$ stále kladná pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$, pak pro $n \geqq 2$ je $f_n(x)$ pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$

a) stále kladná, je-li n liché; b) stále záporná, je-li n sudé.

Věta 44. Budiž (16·1) posloupnost spojitých funkcí v intervalu $\langle r, s\rangle$. Pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$ a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ nechť platí (16·2). Pro $n \geqq 2$ budiž $f_n(r) = 0$. Budiž $c > 0$ určité číslo; pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$ budiž $| f_1(x) | < c$. Pak pro $n \geqq 2$ je pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$

$$| f_n(x) | < c\,\frac{(x - r)^{n-1}}{(n - 1)!}.$$

Důkaz. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ budiž

$$F_n(x) = c\,\frac{(x - r)^{n-1}}{(n - 1)!} - f_n(x),$$

$$G_n(x) = c\,\frac{(x - r)^{n-1}}{(n - 1)!} + f_n(x),$$

zejména

$$F_1(x) = c - f_1(x),\ G_1(x) = c + f_1(x),$$

takže $F_1(x) > 0$, $G_1(x) > 0$ pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$. $F_n(x)$ a $G_n(x)$ jsou spojité v intervalu $\langle r, s\rangle$ a uvnitř $\langle r, s\rangle$ je

$$F'_{n+1}(x) = F_n(x),\ G'_{n+1}(x) = G_n(x).$$

Pro $n \geqq 2$ je $F_n(r) = 0 = G_n(r)$. Podle věty 43 je pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$ $F_n(x) > 0$, $G_n(x) > 0$, tedy

$$c\frac{(x-r)^{n-1}}{(n-1)!} > |f_n(x)|.$$

Cvičení 78. Budiž (16·1) posloupnost spojitých funkcí v intervalu $\langle r, s\rangle$. Pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$ a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ nechť platí (16·2). Pro $n \geqq 2$ budiž $f_n(s) = 0$. Budiž c určité číslo; pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$ budiž $|f_1(x)| < c$. Pak pro $n \geqq 2$ je pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$

$$|f_n(x)| < c\frac{(s-x)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Cvičení 79. Pro každé reálné x je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$. $\left[\text{Pro dosti veliká } n \text{ je } \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leqq \frac{1}{2}\left|\frac{x^n}{n!}\right|.\right]$

Věta 45. Pro všecka záporná x a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ je

$$\left|e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)\right| < \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|.$$

Mimo to má diference $e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$ stejné znamení jako $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, je tedy kladná při lichém n a záporná při sudém n.

Důkaz. Zvolme $r > 0$ tak, že číslo $x < 0$, pro které chceme provésti důkaz, je uvnitř intervalu $\langle -r, 0\rangle$. Pro x v intervalu $\langle -r, 0\rangle$ a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ budiž

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) - e^x,$$

zejména $f_1(x) = 1 - e^x$. Pak jsou $f_n(x)$ spojité funkce v intervalu $\langle -r, 0\rangle$ a pro všecka n je $f_n(0) = 0$. Podle věty 41a je pro všecka x: $f'_{n+1}(x) = f_n(x)$. Konečně je $f_1(x) > 0$ uvnitř intervalu $\langle -r, 0\rangle$. Tedy podle cvič. 77 je uvnitř $\langle -r, 0\rangle$ stále

$$f_n(x) > 0 \text{ při lichém } n,\quad f_n(x) < 0 \text{ při sudém } n.$$

Z toho plyne tvrzení věty snadno. Je-li n liché, pak pro $-r < x < 0$ jest $f_n(x) > 0$, $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^n}{n!} < 0$, tedy $0 < f_n(x) < \left|\frac{x^n}{n!}\right|$.

Podobně při sudém n je: $f_n(x) < 0$, $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \dfrac{x^n}{n!} > 0$, tedy $0 > f_n(x) > \dfrac{x^n}{n!}$.

Věta 46. Pro všecka kladná x a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ je

$$0 < e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) \leqq (e^x - 1)\frac{x^n}{n!}.$$

Důkaz. Zřejmě stačí dokázati, že pro každé $r > x$ je

$$0 < e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) < (e^r - 1)\frac{x^n}{n!}. \tag{16·3}$$

Jest $r > 0$; dokážeme, že (16·3) platí pro všecka x uvnitř intervalu $\langle 0, r\rangle$. Za tím účelem položme

$$f_n(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right),$$

zejména $f_1(x) = e^x - 1$. Pak jsou $f_n(x)$ spojité funkce v intervalu $\langle 0, r\rangle$, jest $f_n(0) = 0$, $f'_{n+1}(x) = f_n(x)$. Pro x uvnitř r je $0 < f_1(x) < e^r - 1$. Tedy uvnitř $\langle 0, r\rangle$ je $f_n(x) > 0$ podle věty 43 a $f_n(x) < (e^r - 1)\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ podle věty 44. Píšeme-li $n + 1$ místo n, dostaneme (16·3).

Věta 47. Pro všecka reálná x je

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \text{ do nekonečna.}$$

Důkaz. To je zřejmé pro $x = 0$ a plyne pro $x < 0$ ze cvič. 79 a věty 45, pro $x > 0$ ze cvič. 79 a věty 46.

Cvičení 80. Vypočtěte

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots,$$
$$e^{-1} = 0{,}367\,879\,441\,117\ldots$$