# XII

# IMAGINÁRNÍ ELEMENTY

**88.** KOMPLEXNÍ ČÍSLA. V této knize jsme dosud užívali skoro výhradně (až na články 42, 43, 64 až 68 prvého svazku) pouze *reálných* čísel. V algebře se však, jak známo, velmi často užívá obecnějších *komplexních* čísel. Hlavním důvodem toho je ta okolnost, že algebraická rovnice s reálnými koeficienty (na př. rovnice $x^2 + 1 = 0$) nemusí v oboru reálných čísel mít žádný kořen, kdežto v oboru komplexních čísel platí t. zv. *základní věta algebry*, podle níž každá algebraická rovnice má aspoň jeden kořen.

Nyní bude účelné shrnout si známé základní definice z nauky o komplexních číslech. V následujícím bude někdy účelné označit $\mathfrak{R}$ množinu všech reálných čísel, $\mathfrak{R}(i)$ množinu všech komplexních čísel. Při výkladu základních definic bude účelné značit reálná čísla latinskými písmeny, komplexní čísla pak zpravidla řeckými písmeny.

Komplexní číslo $\alpha$ je podle definice uspořádaná dvojice $(a_1, a_2)$ reálných čísel, z nichž prvé $a_1$ se jmenuje *reálná část*, druhé $a_2$ *imaginární část* komplexního čísla $\alpha$; označení:

$$a_1 = \mathrm{Re}.\alpha , \qquad a_2 = \mathrm{Im}.\alpha .$$

Při tom se činí dohoda, že komplexní číslo $(a_1, 0)$, jehož imaginární část je rovna nule, se *ztotožňuje s reálným číslem* $a_1$. Naproti tomu komplexní číslo $\alpha = (a_1, a_2)$, jehož imaginární část $a_2$ je různá od nuly, se jmenuje *imaginární číslo*. Tedy v naší terminologii množina komplexních čísel se rozpadá na dvě množiny bez společného prvku: na množinu čísel reálných a na množinu čísel imaginárních. Budiž pro jasnost připomenuto, že výše definovaná imaginární část $a_2$ komplexního čísla $\alpha = (a_1, a_2)$ není imaginárním číslem, nýbrž právě naopak reálným číslem.

Komplexní číslo $(0, a_2)$, jehož reálná část je rovna nule, se azývá často *ryze imaginárním číslem*, avšak většina autorů se vzpírá tomu, počítat mezi ryze imaginární čísla také dvojici (0, 0), kterou podle předcházejícího je třeba ztotožnit s reálným číslem 0. Nezáleží na tom mnoho, protože pojem ryze imaginárního čísla nemá žádnou zásadní důležitost.

Tak jako u reálných čísel, máme i u komplexních čísel dva *základní početní výkony*: sčítání a násobení. Podle staré tradice je zvykem mluvit o čtyřech základních početních výkonech: sčítání, odčítání, násobení a dělení. Toto stanovisko, stále ještě velmi účelné pro národní školu, málo vyhovuje dnešnímu stavu algebry jakožto vědy, ježto odčítání je definovatelné pomocí sčítání, dělení je definovatelné pomocí násobení, a je trochu archaické počítat odčítání a dělení mezi *základní* početní výkony.

Připomeňme si formální definice sčítání a násobení. Jsou-li

$$\alpha = (a_1, a_2); \qquad \beta = (b_1, b_2)$$

dvě komplexní čísla, je jejich *součtem* komplexní číslo

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \tag{88.1}$$

jejich součinem pak je komplexní číslo

$$\alpha\beta = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1). \tag{88.2}$$

Uvědoměme si, že jestliže $\alpha$, $\beta$ jsou reálná čísla, t. j. jestliže $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, je součet $\alpha + \beta$ nově definovaný nalevo v (88.1) totožný se součtem napravo známým z theorie reálných čísel a že stejná situace je i se součinem $\alpha\beta$ v (88.2) v případě, že obě čísla $\alpha$, $\beta$ jsou reálná.

Základní vlastnosti sčítání a násobení komplexních čísel se dají shrnout v následující pravidla:

Sčítání komplexních čísel je výkon *asociativní*, t. j.

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \tag{88.3}$$

a výkon *komutativní*, t. j.

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha. \tag{88.4}$$

Rovněž tak i násobení komplexních čísel je výkon *asociativní*, t. j.

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \tag{88.5}$$

a výkon *komutativní*, t. j.

$$\alpha\beta = \beta\alpha \,. \tag{88.6}$$

Dále je reálné číslo $0 = (0\,,\,0)$ *neutrálním při sčítání*, t. j.

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha\,; \tag{88.7}$$

podobně je reálné číslo $1 = (1\,,\,0)$ *neutrálním při násobení*, t. j.

$$\alpha 1 = 1\alpha = \alpha\,. \tag{88.8.}$$

Další vlastnost sčítání je, že ke každému komplexnímu číslu $\alpha = (a_1\,,\,a_2)$ máme právě jedno *opačné číslo* $-\alpha$ charakterisované tím, že

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0\,,$$

totiž číslo $-\alpha = (-a_1\,,\,-a_2)$. Příslušná vlastnost násobení je, že ke každému komplexnímu číslu $\alpha = (a_1\,,\,a_2)$ s jedinou výjimkou čísla 0 máme právě jedno *převrácené číslo* $\alpha^{-1}$ charakterisované tím, že

$$\alpha\,.\,\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\,.\,\alpha = 1\,,$$

totiž číslo

$$\alpha^{-1} = \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}\,,\,-\frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2}\right).$$

Dosud připomenuté vlastnosti se týkaly zvlášť sčítání a zvlášť násobení. T. zv. *distributivní* zákon praví, že

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \tag{88.9}$$

jakož i že

$$\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta\,; \tag{88.9'}$$

oba tvary (88.9) a (88.9') distributivního zákona jsou ovšem navzájem ekvivalentní v důsledku (88.6).

Právě vyjmenované vlastnosti sčítání a násobení komplexních čísel se v algebře vyjadřují tím, že souhrn všech komplexních čísel tvoří *těleso*. Rovněž tak souhrn všech reálných čísel tvoří těleso.

U tělesa reálných čísel máme přirozené uspořádání definované vztahem „menší než“ $(a < b)$. Tento vztah má, jak známo, následující dvě vlastnosti:

1. *Zákon monotonie sčítání.* Jsou-li $a$, $b$, $c$ reálná čísla a je-li $a < b$, je také $a + c < b + c$.

2. *Zákon monotonie násobení.* Jsou-li $a$, $b$, $c$ reálná čísla a je-li $a < b$, $c > 0$, je také $ac < bc$.

Vzhledem k těmto dvěma vlastnostem se v algebře říká, že reálná čísla tvoří *uspořádané těleso.* Naproti tomu komplexní čísla netvoří uspořádané těleso. Nicméně důležitý pojem *absolutní velikosti* (nebo absolutní hodnoty) se dá rozšířit i na čísla komplexní. Absolutní velikostí komplexního čísla $\alpha = (a_1, a_2)$ rozumíme reálné číslo $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, které značíme $|\alpha|$. Je-li $a_2 = 0$, t. j. je-li $\alpha$ reálné, je ovšem $|\alpha| = a_1$ pro $a_1 \geqq 0$, $|\alpha| = -a_1$ pro $a_1 < 0$.

Základní vlastnosti absolutní velikosti jsou, jak známo, tyto:

1. $|0| = 0$, ale pro $\alpha \neq 0$ je $|\alpha| > 0$.
2. $|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|$.
3. $|\alpha\beta| = |\alpha| . |\beta|$.

Velkou důležitost má pojem *komplexně sdruženého čísla* ke komplexnímu číslu $\alpha = (a_1, a_2)$, které označíme $\alpha^*$. Jak známo, je $\alpha^* = (a_1, -a_2)$, takže:

$$\alpha = \alpha^*, \textit{ právě když } \alpha \textit{ je reálné.}$$

Základní vlastnosti tohoto pojmu jsou, jak známo:

$$(\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^*, \tag{88.10}$$

$$(\alpha\beta)^* = \alpha^*\beta^*, \tag{88.11}$$

$$(\alpha^*)^* = \alpha. \tag{88.12}$$

Vlastnosti (88.10) a (88.11) je v algebře zvykem vyjadřovat tak, že pravíme, že přechod od komplexního čísla $\alpha$ ke komplexně sdruženému číslu $\alpha^*$ je *automorfismus* tělesa komplexních čísel. Důsledkem rovnic (88.10) a (88.11) jsou rovnice

$$(-\alpha)^* = -(\alpha^*), \tag{88.13}$$

$$(\alpha^{-1})^* = (\alpha^*)^{-1}, \tag{88.14}$$

kde v (88.14) ovšem $\alpha \neq 0$.

Zbývá přejít k obvyklému způsobu psaní komplexních čísel. Je zvykem psát

$$(0, 1) = \mathrm{i}, \tag{88.15}$$

takže podle (88.2) je $\mathrm{i}^2 = -1$. V důsledku (88.1), (88.2) a (88.15) můžeme komplexní číslo $\alpha = (a_1, a_2)$ psát v obvyklém tvaru $a_1 + a_2\mathrm{i}$.

**89.** KOMPLEXNÍ VEKTORY. Budiž nyní dán vektorový prostor $\mathbf{V}$ ve smyslu článku 10; jeho vektory, které budeme jako dosud značit $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a pod., nazveme *reálné vektory* a zavedeme nový pojem *komplexního vektoru* (který při výkladě základních definic pro jasnost vyznačíme vodorovným pruhem nahoře) takto. Komplexní vektor $\bar{\mathbf{u}}$ je uspořádaná dvojice $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ reálných vektorů, z nichž prvý $\mathbf{u}_1$ se jmenuje *reálná část*, druhý $\mathbf{u}_2$ *imaginární část* komplexního vektoru $\bar{\mathbf{u}}$; označení:

$$\mathbf{u}_1 = \mathrm{Re}.\bar{\mathbf{u}}\,; \qquad \mathbf{u}_2 = \mathrm{Im}.\bar{\mathbf{u}}\,.$$

Při tom se činí dohoda, že komplexní vektor $(\mathbf{u}_1, \mathbf{o})$, jehož imaginární částí je nulový vektor, se ztotožňuje s reálným vektorem $\mathbf{u}_1$. Naproti tomu komplexní vektor $\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, jehož imaginární část $\mathbf{u}_2$ je nenulový vektor, se jmenuje *imaginární vektor*. Tedy množina všech komplexních vektorů, kterou označíme $\mathbf{V}(\mathrm{i})$, se rozpadá na množinu všech reálných vektorů a na množinu všech imaginárních vektorů.

Jsou-li

$$\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\,, \qquad \bar{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

dva komplexní vektory, nazveme jejich *součtem* a označíme $\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}$ komplexní vektor

$$\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2)\,. \tag{89.1}$$

Jestliže $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{v}}$ jsou reálné vektory, t. j. jestliže $\mathbf{u}_2 = \mathbf{o}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{o}$, je součet $\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}$ nově definovaný nalevo v (89.1) totožný se součtem ve smyslu sčítání v prostoru $\mathbf{V}$.

Je-li $\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ komplexní vektor a je-li $\alpha = (a_1, a_2)$ komplexní číslo, nazveme jejich *součinem* a označíme $\alpha\bar{\mathbf{u}}$ nebo $\alpha \,.\, \bar{\mathbf{u}}$ komplexní vektor

$$\alpha\bar{\mathbf{u}} = (a_1\mathbf{u}_1 - a_2\mathbf{u}_2, a_1\mathbf{u}_2 + a_2\mathbf{u}_1)\,. \tag{89.2}$$

Je-li $\bar{\mathbf{u}}$ reálný vektor a je-li $\alpha$ reálné číslo, t. j. je-li $\mathbf{u}_2 = \mathbf{o}$, $a_2 = 0$, je součin $\alpha\mathbf{u}$ nově definovaný nalevo v (89.2) totožný se součinem původně definovaným ve $\mathbf{V}$.

V důsledku (89.1), (89.2) a (88.15) můžeme komplexní vektor $\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ psát v obvyklém tvaru $\mathbf{u}_1 + \mathrm{i}\mathbf{u}_2$, neboť $\mathbf{u}_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{o})$, $\mathbf{u}_2 = (\mathbf{u}_2, \mathbf{o})$.

Ke komplexnímu vektoru $\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ neboli $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_1 + \mathrm{i}\mathbf{u}_2$ je *komplexně sdruženým* komplexní vektor $(\mathbf{u}_1, -\mathbf{u}_2)$ neboli $\mathbf{u}_1 - i\mathbf{u}_2$, který označíme $\bar{\mathbf{u}}^*$. Je $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}^*$, *právě když* $\bar{\mathbf{u}}$ *je reálný vektor*. Mimo to

$$(\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}})^* = \bar{\mathbf{u}}^* + \bar{\mathbf{v}}^*, \tag{89.3}$$

$$(\alpha\bar{\mathbf{u}})^* = \alpha^* . \bar{\mathbf{u}}^*, \tag{89.4}$$

$$(\bar{\mathbf{u}}^*)^* = \bar{\mathbf{u}} . \tag{89.5}$$

Jsou-li $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{v}}$, $\bar{\mathbf{w}}$ komplexní vektory a jsou-li $\alpha$, $\beta$ komplexní čísla, potom podle předcházejících definic je:

$$\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{u}} ; \tag{89.6}$$

$$(\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}) + \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{w}}) ; \tag{89.7}$$

$$0 . \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{o} ; \tag{89.8}$$

$$\alpha(\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}) = \alpha\bar{\mathbf{u}} + \alpha\bar{\mathbf{v}} ; \tag{89.9}$$

$$(\alpha + \beta)\bar{\mathbf{u}} = \alpha\bar{\mathbf{u}} + \beta\bar{\mathbf{u}} ; \tag{89.10}$$

$$\alpha(\beta\bar{\mathbf{u}}) = (\alpha\beta)\bar{\mathbf{u}} ; \tag{89.11}$$

$$1 . \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} . \tag{89.12}$$

Vlastnosti (89.6) až (89.12) se liší od vlastností (10.1) až (10.7) pouze tím, že místo *reálných* čísel $a$, $b$ máme nyní *komplexní* čísla $\alpha$, $\beta$.

V článku 10 jsme nazvali vektorovým prostorem množinu jakýchkoli matematických objektů (zvaných vektory), je-li definováno sčítání vektorů (součet je vektor) a násobení reálného čísla s vektorem (součin je vektor) tak, že platí pravidla (10.1) až (10.7); místo názvu vektorový prostor užijme nyní určitějšího názvu *vektorový prostor nad* $\mathfrak{R}$, kde $\mathfrak{R}$, jak jsme se dohodli na str. 74, znamená množinu všech reálných čísel. Budeme mluvit o *vektorovém prostoru nad* $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ v případě, že vedle sčítání vektorů je definováno násobení komplexního čísla vektorem (součin je zase vektor) tak, že platí pravidla (10.1) až (10.7), při čemž však nyní písmena $a$, $b$ v (10.4) až (10.6) znamenají komplexní čísla. Ježto reálná čísla jsou zvláštním případem komplexních čísel, je patrné, že *každý vektorový prostor nad* $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ *je zároveň též vektorovým prostorem nad* $\mathfrak{R}$.

Z předcházejícího je patrné, že je-li $\mathbf{V}$ libovolný vektorový prostor nad $\mathfrak{R}$ (jehož prvky jsme nazvali reálnými vektory), potom množina $\mathbf{V}(\mathrm{i})$ komplexních vektorů (které jsme definovali jako dvojice reálných vektorů) tvoří vektorový prostor nad $\Re(\mathrm{i})$. Pravíme, že $\boldsymbol{V}(\mathrm{i})$ je *komplexní rozšíření* prostoru $\boldsymbol{V}$.

O vektorových prostorech nad $\Re$ jsme v prvém svazku odvodili řadu vět, z nichž většina se opírá pouze o to, že $\Re$ je těleso, takže zůstává v platnosti (při záměně reálných čísel komplexními) i pro vektorové prostory nad $\Re(\mathrm{i})$. Je především zcela jasné, že (10.8) až (10.18) platí i pro vektorové prostory nad $\Re(\mathrm{i})$, jestliže $a$, $b$, $a_1, \ldots, a_k$ jsou čísla komplexní.

Je-li $\boldsymbol{V}$ vektorový prostor nad $\Re$, definovali jsme v článku 11 pojem lineární soustavy $\boldsymbol{W}$ obsažené ve $\boldsymbol{V}$, kterou můžeme nazvat určitěji *lineární soustavou nad* $\Re$. Je-li $\boldsymbol{V}$ vektorový prostor nad $\Re(\mathrm{i})$, máme vedle tohoto pojmu ještě další pojem *lineární soustavy nad* $\Re(\mathrm{i})$ charakterisované opět vlastnostmi ($a$) a ($b$) ze str. 31 prvého svazku s tím rozdílem, že v ($b$) znamená $x$ libovolné *komplexní* číslo. Zcela stejně je tomu i s dalšími pojmy zavedenými v článku 11; mluvme nyní určitěji o *lineárních kombinacích nad* $\Re$ a o *lineární závislosti nad* $\Re$; je zřejmé, co je rozumět pod *lineárními kombinacemi nad* $\Re(\mathrm{i})$ a pod *lineární závislostí nad* $\Re(\mathrm{i})$. I pro tyto nové pojmy platí věty 11.1 až 11.5. Jako v článku 11 budiž

(89.13) $$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$$

množina všech lineárních kombinací nad $\Re$ vektorů

(89.14) $$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k,$$

kdežto množinu všech lineárních kombinací nad $\Re(\mathrm{i})$ týchž vektorů (89.14) označíme

(89.15) $$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}_{\mathrm{i}}.$$

Jsou-li (89.14) reálné vektory a znamená-li $\boldsymbol{W}$ lineární soustavu nad $\Re$ (89.13), potom zřejmě (89.15) je její komplexní rozšíření $\boldsymbol{W}(\mathrm{i})$.

Jestliže vektory (89.14) jsou lineárně nezávislé nad $\Re(\mathrm{i})$, jsou zřejmě též lineárně nezávislé nad $\Re$. Opak neplatí, neboť je-li $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$, dokáže se snadno, že vektory $\boldsymbol{u}$, $\mathrm{i}\boldsymbol{u}$ jsou lineárně nezávislé nad $\Re$, avšak lineárně závislé nad $\Re(\mathrm{i})$. Jestliže však (89.14) jsou reálné vektory, které jsou lineárně nezávislé nad $\Re$, potom (89.14) jsou také lineárně nezávislé nad $\Re(\mathrm{i})$. Neboť je-li

$$(a_1 + \mathrm{i}b_1)\boldsymbol{u}_1 + \ldots + (a_k + \mathrm{i}b_k)\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{o},$$

dostaneme porovnáním reálných a imaginárních částí

$$a_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + a_k \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{o}\,; \qquad b_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + b_k \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{o}\,.$$

Je tudíž $a_1 = \ldots = a_k = 0$, $b_1 = \ldots = b_k = 0$ a tedy též $a_1 + ib_1 = \ldots = a_k + ib_k = 0$.

Čtenář sám už si podrobně promyslí podobné změny definic a vět z článků 12 až 14. U lineární soustavy $\boldsymbol{W}$ nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ musíme rozlišovat mezi basí nad $\mathfrak{R}$ a basí nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$; je-li (89.14) base nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ pro $\boldsymbol{W}$, potom

$$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \qquad \mathrm{i}\boldsymbol{u}_1, \ldots, \mathrm{i}\boldsymbol{u}_k$$

je base nad $\mathfrak{R}$. Jestliže tedy $\boldsymbol{W}$ má dimensi nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ rovnou $m$, potom $\boldsymbol{W}$ má dimensi nad $\mathfrak{R}$ rovnou $2m$.

Je-li $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ base (nad $\mathfrak{R}$) lineární soustavy $\boldsymbol{V}$ nad $\mathfrak{R}$, je zároveň $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ base nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ lineární soustavy $\boldsymbol{V}(\mathrm{i})$ nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$, takže dimense $\boldsymbol{V}$ nad $\mathfrak{R}$ je rovna dimensi $\boldsymbol{V}(\mathrm{i})$ nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$.

Pokud se týče pojmu isomorfismu, poznamenejme toto: Jsou-li $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{V}'$ vektorové prostory nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$, potom isomorfismus mezi $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{V}'$ nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ je zároveň isomorfismem nad $\mathfrak{R}$; opak ovšem neplatí. Jsou-li však $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{V}'$ isomorfní vektorové prostory nad $\mathfrak{R}$ a je-li dán určitý isomorfismus $f$ nad $\mathfrak{R}$ mezi $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{V}'$, lze $f$ rozšířit, a to právě jedním způsobem, v isomorfismus $\varphi$ nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ mezi $\boldsymbol{V}(\mathrm{i})$ a $\boldsymbol{V}'(\mathrm{i})$. Takový isomorfismus $\varphi$ nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ mezi $\boldsymbol{V}(\mathrm{i})$ a $\boldsymbol{V}'(\mathrm{i})$, při kterém $\boldsymbol{V}$ přejde ve $\boldsymbol{V}'$, nazveme *reálným isomorfismem* mezi $\boldsymbol{V}(\mathrm{i})$ a $\boldsymbol{V}'(\mathrm{i})$. Pro každý komplexní vektor $\boldsymbol{u}$ je potom zřejmě

$$\varphi(\boldsymbol{u}^*) = [\varphi(\boldsymbol{u})]^*,$$

kde * znamená komplexně sdružený vektor.

Vzpomeňme ještě pojmu dvojice duálně sdružených vektorových prostorů $\boldsymbol{V}$, $\tilde{\boldsymbol{V}}$ zavedeného v článku 49[1]) pomocí vlastností (49.1) až (49.6), při čemž $a$ ve (49.3) a (49.4) znamená libovolné reálné číslo. To byla *duální sdruženost nad* $\mathfrak{R}$. Jestliže $\boldsymbol{V}$, $\tilde{\boldsymbol{V}}$ jsou vektorové prostory nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$, definujeme jejich *duální sdruženost nad* $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ docela stejně až na to, že nyní $a$ znamená libovolné komplexní číslo. Věty 49.1 až 49.6 se týkaly duální sdruženosti nad $\mathfrak{R}$; stejně znějící věty platí také nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$.

---

[1]) Stejně jako v článku 74 a v řadě dalších článků užijeme i zde vlnitého pruhu místo vodorovného pruhu, kterého jsme užili v článku 49.

Buďtež $\mathbf{V}$, $\tilde{\mathbf{V}}$ dva vektorové prostory nad $\mathfrak{R}$, duálně sdružené nad $\mathfrak{R}$ pomocí relace $d(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}})$. Zřejmě lze relaci $d$ právě jedním způsobem rozšířit v duální sdruženost nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ mezi $\mathbf{V}(\mathrm{i})$ a $\tilde{\mathbf{V}}(\mathrm{i})$ : stačí položit

$$d(\mathbf{u}_1 + \mathrm{i}\mathbf{u}_2, \tilde{\mathbf{u}}_1 + \mathrm{i}\tilde{\mathbf{u}}_2) = \\ = d(\mathbf{u}_1, \tilde{\mathbf{u}}_1) - d(\mathbf{u}_2, \tilde{\mathbf{u}}_2) + \mathrm{i}[d(\mathbf{u}_1, \tilde{\mathbf{u}}_2) + d(\mathbf{u}_2, \tilde{\mathbf{u}}_1)] .$$

Pro takto vzniklou duální sdruženost nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ máme zřejmě

(89.16) $$d(\mathbf{u}^*, \tilde{\mathbf{u}}^*) = [d(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}})]^*.$$

Dále platí v tomto případě: Je-li $\mathbf{W}$ *lineární soustava nad* $\mathfrak{R}$ *obsažená ve* $\mathbf{V}$ *a je-li* $\tilde{\mathbf{W}}$ *její duální obraz nad* $\mathfrak{R}$ *ve* $\tilde{\mathbf{V}}$, *potom duální soustava* $\mathbf{W}(\mathrm{i})$ nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ *obsažená ve* $\mathbf{V}(\mathrm{i})$ má $\tilde{\mathbf{W}}(\mathrm{i})$ za duální obraz nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ ve $\tilde{\mathbf{V}}(\mathrm{i})$ .

**90.** KOMPLEXNÍ BODY. Budiž dán eukleidovský prostor $\mathbf{E}_m$ dimense $m$, který nazveme určitěji *eukleidovský prostor nad* $\mathfrak{R}$ ; jeho body nazveme *reálné body*. Budiž $\mathbf{V}_m$ zaměření prostoru $\mathbf{E}_m$, t. j. množina všech vektorů prostoru $\mathbf{E}_m$, které budeme nazývat *reálnými vektory*. Komplexní vektor je potom podle článku 89 dvojice $\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ reálných vektorů, při čemž dvojici $(\mathbf{u}_1, \mathbf{o})$ považujeme za totožnou s reálným vektorem $\mathbf{u}_1$ .

Zavedeme nyní pojem *komplexního bodu* takto. Komplexní bod je uspořádaná dvojice $(A, \mathbf{u})$ složená z reálného bodu $A$ a z reálného vektoru $\mathbf{u}$ . Je-li $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, považujeme komplexní bod $(A, \mathbf{u})$ za totožný s reálným bodem $A$ . Je-li však $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, máme *imaginární bod* $(A, \mathbf{u})$, který není totožný s žádným reálným bodem. Množinu všech komplexních bodů označíme $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ a nazveme ji *komplexním rozšířením* prostoru $\mathbf{E}_m$ ; pravíme, že $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ je eukleidovský prostor nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ . Prostor $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ obsahuje jednak reálné body, které tvoří reálný prostor $\mathbf{E}_m$, jednak imaginární body. Stejně jako u čísel a u vektorů v naší terminologii i u bodů název komplexní je shrnutím obou názvů: reálný a imaginární.

Reálný bod $A$ nazveme *reálnou částí* a reálný vektor $\mathbf{u}$ *imaginární částí* komplexního bodu $(A, \mathbf{u})$ ; označení:

$$A = \mathrm{Re.}(A, \mathbf{u}) ; \qquad \mathbf{u} = \mathrm{Im.}(A, \mathbf{u}) .$$

Tedy imaginární část komplexního bodu není bod, nýbrž vektor.

Jsou-li $(A, \mathbf{u})$ ; $(B, \mathbf{v})$ dva komplexní body, nazveme jejich *rozdílem* a označíme

$$(90.1) \qquad (B\,,\mathbf{v}) - (A\,,\mathbf{u})$$

komplexní vektor

AB

$$(90.2) \qquad (B - A\,,\mathbf{v} - \mathbf{u})\,.$$

Jsou-li dané body reálné, t. j. je-li $\mathbf{u} = \mathbf{o}\,,\ \mathbf{v} = \mathbf{o}$, jsou komplexní body $(A\,,\mathbf{u})\,,\ (B\,,\mathbf{v})$ podle dohody učiněné v tomto článku totožné s reálnými body $A\,,B$ ; to je v souhlase s tím, že ježto nyní $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{o}$, podle dohody učiněné v článku 89 komplexní vektor (90.2) je v uvažovaném případě totožný s reálným vektorem $B - A$ .

*Součtem* komplexního bodu $(A\,,\mathbf{u})$ a komplexního vektoru $(\mathbf{w}_1\,,\mathbf{w}_2)$ nazveme komplexní bod

$$(90.3) \qquad (A + \mathbf{w}_1\,, \mathbf{u} + \mathbf{w}_2)\,.$$

Je-li bod $(A\,,\mathbf{u})$ reálný a je-li také vektor $(\mathbf{w}_1\,,\mathbf{w}_2)$ reálný, t. j. je-li $\mathbf{u} = \mathbf{o}\,,\ \mathbf{w}_2 = \mathbf{o}$, potom podle učiněných dohod je bod $(A\,,\mathbf{u})$ totožný s reálným bodem $A$ , vektor $(\mathbf{w}_1\,,\mathbf{w}_2)$ totožný s reálným vektorem $\mathbf{w}_1$ v souhlase s tím, že ježto $\mathbf{u} + \mathbf{w}_2 = \mathbf{o}$, je v uvažovaném případě součet (90.3) totožný s dříve definovaným součtem $A + \mathbf{w}_1$ .

Z právě vyslovených definic plyne, že jsou-li $(A\,,\mathbf{u})\,,\ (B\,,\mathbf{v})$ komplexní body a je-li $(\mathbf{w}_1\,,\mathbf{w}_2)$ komplexní vektor, potom rovnice

$$(90.4) \qquad (B\,,\mathbf{v}) - (A\,,\mathbf{u}) = (\mathbf{w}_1\,,\mathbf{w}_2)$$

znamená totéž jako rovnice

$$(90.5) \qquad (A\,,\mathbf{u}) + (\mathbf{w}_1\,,\mathbf{w}_2) = (B\,,\mathbf{v})\,.$$

Zobecněme na komplexní body pojem *středu dvojice bodů*, zavedený pro reálné body už v článku 4. Jsou-li $(A\,,\mathbf{u})\,,\ (B\,,\mathbf{v})$ libovolné dva komplexní body, nazveme středem dvojice $(A\,,\mathbf{u})\,;\ (B\,,\mathbf{v})$ komplexní bod

$$[\tfrac{1}{2}(A + B),\ \tfrac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})]\,,$$

což v případě reálných bodů, t. j. pro $\mathbf{u} = \mathbf{o}\,,\ \mathbf{v} = \mathbf{o}$ je v souhlase s definicí článku 4. Dále přeneseme na komplexní případ pojem *umístění vektoru*, zavedený pro reálný případ v článku 5. O uspořádané dvojici komplexních bodů

$$(90.6) \qquad (A\,,\mathbf{u})\,; \qquad (B\,,\mathbf{v})$$

pravíme, že *určuje* komplexní vektor (90.4); také pravíme, že dvojice (90.6) je *umístěním* tohoto vektoru; bod $(A, \mathbf{u})$ se jmenuje *počáteční bod*, $(B, \mathbf{v})$ *koncový bod* tohoto umístění. Libovolně daný komplexní vektor $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ má právě jedno umístění, při kterém libovolně daný komplexní bod $(A, \mathbf{u})$ je počátečním bodem; koncový bod tohoto umístění je (90.5). Jako v reálném případě platí, že dvojice komplexních bodů (90.6) určuje týž komplexní vektor jako dvojice

$$(A', \mathbf{u}')\,; \qquad (B', \mathbf{v}')\,,$$

právě když dvojice

$$(A, \mathbf{u})\,; \qquad (B', \mathbf{v}')$$

má týž střed jako dvojice

$$(A', \mathbf{u}')\,; \qquad (B, \mathbf{v})\,.$$

Ke komplexnímu bodu $(A, \mathbf{u})$ *komplexně sdruženým bodem* je bod $(A, -\mathbf{u})$, který označíme $(A, \mathbf{u})^*$. Je

$$(A, \mathbf{u}) = (A, \mathbf{u})^*,$$

právě když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, t. j. právě když $(A, \mathbf{u})$ je reálný bod. Vždy je

$$(A, \mathbf{u})^{**} = (A, \mathbf{u})\,.$$

K rozdílu (90.4) dvou komplexních bodů $(A, \mathbf{u})$ ; $(B, \mathbf{v})$ je komplexně sdružený rozdíl

$$(A, \mathbf{u})^* - (B, \mathbf{v})^*.$$

K součtu (90.5) komplexního bodu $(A, \mathbf{u})$ a komplexního vektoru $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ je komplexně sdružený součet

$$(A, \mathbf{u})^* + (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)^*.$$

Ke středu dvojice komplexních bodů $(A, \mathbf{u})$ ; $(B, \mathbf{v})$ je komplexně sdružený střed dvojice $(A, \mathbf{u})^*$; $(B, \mathbf{v})^*$.

Zbývá provést přechod k obvyklému tvaru zápisu komplexního bodu. Podle definice součtu komplexního bodu s komplexním vektorem je

$$(A, \mathbf{u}) = (A, \mathbf{o}) + (\mathbf{o}, \mathbf{u})\,,$$

avšak podle předcházejícího je $(A, \mathbf{o}) = A$ ; $(\mathbf{o}, \mathbf{u}) = \mathrm{i}\mathbf{u}$. Tedy

$$(A, \mathbf{u}) = A + \mathrm{i}\mathbf{u}\,. \tag{90.7}$$

Definice součtu komplexního bodu s komplexním vektorem a definice rozdílu dvou komplexních bodů mají v obvyklém označení tvar:

$$(90.8)\quad (A + \mathrm{i}\mathbf{u}) + (\mathbf{w}_1 + \mathrm{i}\mathbf{w}_2) = (A + \mathbf{w}_1) + \mathrm{i}(\mathbf{u} + \mathbf{w}_2)\,,$$

$$(90.9)\quad (B + \mathrm{i}\mathbf{v}) - (A + \mathrm{i}\mathbf{u}) = (B - A) + \mathrm{i}(\mathbf{v} - \mathbf{u})\,.$$

Dosavadní definice podávají exaktní základ k přenesení *affiní geometrie* eukleidovského prostoru z reálného případu, podrobně studovaného v prvém svazku, na příklad komplexní. Důkazy v komplexním případě jsou skoro doslova stejné jako v reálném případě, takže stačí jenom stručně shrnout hlavní výsledky, což bude provedeno v následujícím článku. K přenesení *metrické geometrie* eukleidovského prostoru na komplexní případ je třeba především definovat v komplexním oboru pojem skalárního součinu. To odložíme až do kapitoly XIII.

V tomto článku si ještě přeneseme na komplexní případ pojem *lineární soustavy souřadnic*; ježto metrické úvahy zatím odkládáme, nebudeme si na tomto místě všímat kartézské soustavy. Víme z článku 16, že lineární soustava souřadnic

$$(90.10)\qquad \langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\rangle$$

v prostoru $\mathbf{E}_m$ je dána, zvolíme-li libovolně v prostoru $\mathbf{E}_m$ jednak bod $P$, zvaný *počátkem* soustavy, jednak *basi* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$, t. j. basi pro zaměření $\mathbf{V}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$. Víme, že každý vektor $\mathbf{u}$ prostoru $\mathbf{E}_m$ lze právě jedním způsobem psát ve tvaru

$$(90.11)\qquad \mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + \ldots + u_m\mathbf{e}_m\,;$$

reálná čísla $u_1, \ldots, u_m$ jsou souřadnicemi vektoru $\mathbf{u}$ a píšeme

$$(90.12)\qquad \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)\,.$$

Podobně každý bod $X$ prostoru $\mathbf{E}_m$ lze psát právě jedním způsobem ve tvaru

$$(90.13)\qquad X = P + x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_m\mathbf{e}_m\,;$$

reálná čísla $x_1, \ldots, x_m$ jsou souřadnicemi bodu $X$ a píšeme

$$(90.14)\qquad X = [x_1, \ldots, x_m]\,.$$

Zřejmě však obecněji každý komplexní vektor $\mathbf{u}$ lze psát právě jedním způsobem ve tvaru (90.11) a každý komplexní bod $X$ ve tvaru (90.13), při čemž ovšem koeficienty $u_1, \dots, u_m$ v (90.11) a koeficienty $x_1, \dots$ $\dots, x_m$ v (90.13) budou komplexní čísla; rozšíříme proto označení (90.12) a (90.14) i na komplexní případ. Základní početní výkony s vektory a body jsou vyjádřeny formulemi

$$\begin{aligned}
&(u_1, \bullet) + (v_1, \bullet) = (u_1 + v_1, \bullet),\\
&a \,.\, (u_1, \bullet) = (au_1, \bullet),\\
&[x_1, \bullet] + (u_1, \bullet) = [x_1 + u_1, \bullet]\\
&[y_1, \bullet] - [x_1, \bullet] = (y_1 - x_1, \bullet).
\end{aligned}$$

Uveďme ještě, že střed dvojice bodů $[x_1, \bullet]$; $[y_1, \bullet]$ je dán výrazem $[\frac{1}{2}(x_1 + y_1), \bullet]$.

Všecky tyto formule zůstávají správné i v komplexním případě. K nim přistupují ještě formule

$$\begin{aligned}
(u_1, \bullet)^* &= (u_1^*, \bullet),\\
[x_1, \bullet]^* &= (x_1^*, \bullet],
\end{aligned}$$

vyjadřující přechod ke komplexně sdruženým elementům.

**91.** LINEÁRNÍ PODPROSTORY PROSTORU $\mathbf{E}_m$(i). Budiž dán $m$-rozměrný eukleidovský prostor $\mathbf{E}_m$ nad $\mathfrak{R}$. V článku 18 jsme zkoumali, které $k$-rozměrné eukleidovské prostory $\mathbf{E}_k$ nad $\mathfrak{R}$ jsou vnořeny do $\mathbf{E}_m$, t. j. jsou obsaženy v $\mathbf{E}_m$ jako část, při čemž vzdálenost kterýchkoli dvou bodů prostoru $\mathbf{E}_k$ v tomto prostoru je rovna vzdálenosti týchž dvou bodů, počítané v prostoru $\mathbf{E}_m$. Poznali jsme především, že musí být $k \leqq m$, při čemž pro $k = m$ máme pouze tu možnost, že $\mathbf{E}_k$ splyne s celým $\mathbf{E}_m$.

Eukleidovské prostory $\mathbf{E}_k$ vnořené do $\mathbf{E}_m$ jsme také nazvali lineárními podprostory prostoru $\mathbf{E}_m$. Na citovaném místě jsme poznali, že je-li $\mathbf{E}_k$ vnořen do $\mathbf{E}_m$, potom zaměření prostoru $\mathbf{E}_k$, t. j. množina všech vektorů ležících v $\mathbf{E}_k$, tvoří $k$-směr $\mathbf{V}_k$, t. j. lineární soustavu dimense $k$ obsaženou v zaměření $\mathbf{V}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$. Obráceně, je-li dán v prostoru $\mathbf{E}_m$ libovolný bod $A$ a libovolný $k$-směr $\mathbf{V}_k$, potom bodem $A$ prochází právě jeden $\mathbf{E}_k$ se zaměřením $\mathbf{V}_k$, který jsme označili

(91.1) $$\mathbf{E}_k = \{A; \mathbf{V}_k\}$$

nebo

(91.2) $$\mathbf{E}_k = \{A; \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\},$$

je-li $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ kterákoli base $k$-směru $\mathbf{V}_k$.

Budiž nyní $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ komplexní rozšíření prostoru $\mathbf{E}_m$, $\mathbf{E}_k(\mathrm{i})$ komplexní rozšíření prostoru $\mathbf{E}_k$. Platí-li (91.2), potom zřejmě $\mathbf{E}_k(\mathrm{i})$ je množina všech bodů tvaru

$$A + x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_k\mathbf{u}_k\,, \tag{91.3}$$

kde $x_1, \ldots, x_k$ jsou libovolná komplexní čísla. Platí-li (91.1) nebo (91.2), pišme

$$\mathbf{E}_k(\mathrm{i}) = \{A\,;\,\mathbf{V}_k(\mathrm{i})\}_1\,,$$
$$\mathbf{E}_k(\mathrm{i}) = \{A\,;\,\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}_1\,.$$

Pravíme, že $\mathbf{E}_k(\mathrm{i})$ je *reálný lineární podprostor dimense* $k$ prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$. Takový reálný lineární podprostor eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ se tedy skládá jednak z reálných bodů, které tvoří lineární podprostor $\mathbf{E}_k$ téže dimense $k$ prostoru $\mathbf{E}_m$, jednak z dalších imaginárních bodů.

Obecněji nazveme *lineárním podprostorem* dimense $k$ prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ množinu, kterou označíme

$$\{A\,;\,\mathbf{W}_k\}_1\,. \tag{91.4}$$

Při tom je $A$ libovolně zvolený (reálný nebo imaginární) bod prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$, $\mathbf{W}_k$ je libovolná lineární soustava dimense $k$ nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ obsažená ve $\mathbf{V}_m(\mathrm{i})$, při čemž se může, ale nemusí stát, že existuje lineární soustava $\mathbf{V}_k$ nad $\mathfrak{R}$ obsažená ve $\mathbf{V}_m$, pro kterou $\mathbf{W}_k = \mathbf{V}_k(\mathrm{i})$. Množina (91.4) se skládá ze všech komplexních bodů tvaru $A + \mathbf{w}$, kde $\mathbf{w}$ probíhá všecky komplexní vektory obsažené ve $\mathbf{W}_k$. Je-li $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ libovolná base nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ pro $\mathbf{W}_k$, potom (91.4) se skládá ze všech bodů tvaru (91.3), kde $x_1, \ldots, x_k$ jsou libovolná komplexní čísla a místo (91.4) píšeme též

$$\{A\,;\,\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}_1\,. \tag{91.5}$$

Všimněme si, že je-li $B$ libovolný komplexní bod náležející do (91.4), je

$$\{A\,;\,\mathbf{W}_k\}_1 = \{B\,;\,\mathbf{W}_k\}_1\,.$$

Existuje-li lineární podprostor $\mathbf{E}_k$ dimense $k$ prostoru $\mathbf{E}_m$, pro který platí

$$\{A\,;\,\mathbf{W}_k\}_1 = \mathbf{E}_k(\mathrm{i})\,,$$

pravíme, že (91.4) je *reálný*; v opačném případě (91.4) je *imaginární*. *Zaměřením* podprostoru (91.4) rozumíme $\mathbf{W}_k$; je to množina všech komplexních vektorů tvaru $Y - X$, kde $X$, $Y$ jsou libovolné dva body podprostoru (91.4); zaměření $\mathbf{W}_k$ se jmenují *reálné*, existuje-li $k$-směr $\mathbf{V}_k$ prostoru $\mathbf{E}_m$ tak, že $\mathbf{W}_k = \mathbf{V}_k(\mathrm{i})$; v opačném případě se $\mathbf{W}_k$ jmenuje *imaginární*. Zaměření reálného podprostoru (91.4) je reálné; obráceně, jestliže zaměření podprostoru (91.4) je reálné, potom podprostor (91.4) buďto je reálný nebo neobsahuje žádný reálný bod.

Pro $k = 1$ nazýváme (91.4) *přímkou* prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$, pro $k = 2$ *rovinou* prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$. Přímka nebo rovina prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ je buďto reálná nebo imaginární; je-li reálná, je komplexním rozšířením přímky nebo roviny prostoru $\mathbf{E}_m$. Dvěma různými body $A$, $B$ prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ prochází právě jedna přímka prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$, totiž přímka $\{A ; B—A\}_{\mathrm{i}}$; stručně mluvíme často prostě o přímce $AB$. Jsou-li body $A$, $B$ reálné, může arci vzniknout pochybnost, zda „přímka $AB$" znamená přímku prostoru $\mathbf{E}_m$ či přímku prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$; často na tom mnoho nezáleží, protože obě přímky určují jedna druhou jednoznačně: přímka prostoru $\mathbf{E}_m$ je množinou všech reálných bodů uvažované přímky prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$, přímka prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ je komplexním rozšířením přímky prostoru $\mathbf{E}_m$.

Budiž $A$ imaginární bod, tedy $A = A_0 + \mathrm{i}\mathbf{u}$, kde $A_0 = \mathrm{Re.}\,A$ je reálný bod, $\mathbf{u} = \mathrm{Im.}\,A$ je nenulový reálný vektor. Bodem $A$ prochází reálná přímka $\{A_0 ; \mathbf{u}\}_1$ a je to *jediná* reálná přímka procházející bodem $A$, neboť jestliže reálná přímka obsahuje imaginární bod $A$, obsahuje také komplexně sdružený bod $A^*$ a tedy splyne s přímkou $AA^*$. Tedy *imaginárním bodem $A$ prochází právě jedna reálná přímka, totiž přímka $AA^*$* neboli přímka $\{\mathrm{Re.}\,A ; \mathrm{Im.}A\}_1$.

Pojem rovnoběžnosti zavedený v článku 19 se přenese beze změny na lineární podprostory prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$; rovněž tak i úvahy o vzájemné poloze dvou lineárních podprostorů provedené v článcích 20 až 25. To platí i o úvahách článku 24, které se přenesou beze změny na lineární soustavy nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$.

Budiž $\mathbf{W}_k$ lineární soustava dimense $k$ nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ obsažená ve $\mathbf{V}_m(\mathrm{i})$; $\mathbf{W}_k$ je *reálná* v případě, že $\mathbf{W}_k = \mathbf{V}_k(\mathrm{i})$, kde $\mathbf{V}_k$ je lineární soustava dimense $k$ nad $\mathfrak{R}$ obsažená ve $\mathbf{V}_m$; neexistuje-li taková $\mathbf{V}_k$, je $\mathbf{W}_k$ *imaginární*. V každém případě množina všech vektorů komplexně sdružených s jednotlivými vektory náležejícími do $\mathbf{W}_k$ tvoří opět lineární soustavu dimense $k$ nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ obsaženou ve $\boldsymbol{V}_m(\mathrm{i})$, kterou nazveme *komplexně sdruženou* s $\boldsymbol{W}_k$ a označíme $\boldsymbol{W}_k^*$. Zřejmě $\boldsymbol{W}_k^{**} = \boldsymbol{W}_k$. Jestliže $\boldsymbol{W}_k$ je reálná, je $\boldsymbol{W}_k^* = \boldsymbol{W}_k$. Obráceně předpokládejme, že $\boldsymbol{W}_k^* = \boldsymbol{W}_k$; dokážeme, že $\boldsymbol{W}_k$ je reálná. Uvažme nejprve, že jestliže $\boldsymbol{W}_k$ obsahuje komplexní vektor $\boldsymbol{u} + \mathrm{i}\boldsymbol{v}$, potom $\boldsymbol{W}_k$ obsahuje také komplexně sdružený vektor $\boldsymbol{u} - \mathrm{i}\boldsymbol{v}$, a tudíž i oba reálné vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, neboť $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ lineárně závislé na $\boldsymbol{u} + \mathrm{i}\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} - \mathrm{i}\boldsymbol{v}$. Z toho plyne nejprve, že $\boldsymbol{W}_k$ obsahuje aspoň jeden nenulový reálný vektor. Obecněji nechť už víme, že $\boldsymbol{W}_k$ obsahuje $s$ mezi sebou lineárně nezávislých reálných vektorů

$$(91.6) \qquad \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_s .$$

Je-li $s < k$, obsahuje $\boldsymbol{W}_k$ vektor $\boldsymbol{u} + \mathrm{i}\boldsymbol{v}$, který není lineární kombinací nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ vektorů (91.6). Podle předcházejícího $\boldsymbol{W}_k$ obsahuje oba reálné vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, z nichž jistě (aspoň) jeden není lineární kombinací vektorů (91.6); připojíme-li jej k (91.6), dostaneme $s + 1$ mezi sebou lineárně nezávislých reálných vektorů. Z toho plyne indukcí, že $\boldsymbol{W}_k$ obsahuje $k$ mezi sebou lineárně nezávislých reálných vektorů $\boldsymbol{u}_1, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{u}_k$, takže $\boldsymbol{W}_k = \boldsymbol{V}_k(\mathrm{i})$, je-li $\boldsymbol{V}_k = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$.

Je-li (91.4) lineární podprostor dimense $k$ prostoru $\boldsymbol{E}_m(\mathrm{i})$, potom také množina $\{A^*; \boldsymbol{W}_k^*\}_\mathrm{i}$, kterou označíme též $\{A; \boldsymbol{W}_k\}_\mathrm{i}^*$ a která se skládá ze všech bodů komplexně sdružených s jednotlivými body z (91.4), tvoří lineární podprostor dimense $k$ prostoru $\boldsymbol{E}_m(\mathrm{i})$; nazveme jej *komplexně sdruženým* s (91.4). Zřejmě $\{A; \boldsymbol{W}_k\}_\mathrm{i}^{**} = \{A; \boldsymbol{W}_k\}$. Jestliže podprostor (91.4) je reálný, zřejmě splyne s podprostorem komplexně sdruženým. Obráceně předpokládejme, že (91.4) splyne s podprostorem komplexně sdruženým. Potom je především $\boldsymbol{W}_k = \boldsymbol{W}_k^*$, takže podle předchozího je $\boldsymbol{W}_k = \boldsymbol{V}_k(\mathrm{i})$, kde $\boldsymbol{V}_k$ je lineární soustava dimense $k$ nad $\mathfrak{R}$ obsažená ve $\boldsymbol{V}_m$. Dále však (91.4) vedle bodu $A = A_0 + \mathrm{i}\boldsymbol{u}$ obsahuje též bod $A^* = A_0 - \mathrm{i}\boldsymbol{u}$, a tudíž vektor $A - A^* = 2\mathrm{i}\boldsymbol{u}$ náleží do $\boldsymbol{W}_k$, takže (91.4) obsahuje reálný bod $A = A_0 - \mathrm{i}\boldsymbol{u}$; tudíž (91.4) se rovná

$$\{A_0; \boldsymbol{W}_k\}_\mathrm{i} = \boldsymbol{E}_k(\mathrm{i}), \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{E}_k = \{A_0; \boldsymbol{V}_k\}.$$

Imaginární lineární podprostory můžeme klasifikovat podle vzájemné polohy ke komplexně sdruženému podprostoru. Nejprve máme (viz článek 20) *trojí druh imaginárních přímek*: předně přímky reálného směru bez reálných bodů (rovnoběžné s přímkou komplexně sdruženou), za druhé přímky imaginárního směru s jediným reálným bodem (různoběžné s přímkou komplexně sdruženou), za třetí přímky imaginárního směru bez reálných bodů (mimoběžné s přímkou komplexně sdruženou). Poslední druh imaginárních přímek existuje pouze pro $m \geqq 3$. U prvých dvou druhů existuje jednoznačně určená reálná rovina obsahující obě navzájem komplexně sdružené přímky, u třetího druhu jsou obě obsaženy v jednoznačně určeném trojrozměrném reálném lineárním podprostoru. Dále si všimněme případu $k = m - 1$ *imaginární nadroviny*. Z článku 25 snadno plyne, že jsou *dva druhy imaginárních nadrovin*. Předně imaginární nadroviny bez reálných bodů, které mají vždy reálné zaměření. Za druhé imaginární nadroviny, jejichž reálné body vyplní $(m - 2)$-rozměrný lineární podprostor prostoru $\mathbf{E}_m$; zaměření takové imaginární nadroviny je vždy imaginární. Případ $1 < k < m - 1$ nechť vyšetří čtenář sám na základě výsledků článku 25.

Úvahy o lineárních funkcích vektoru z článku 46 a úvahy o lineárních funkcích bodu z článku 47 se snadno přenesou na komplexní případ. Je-li v $\mathbf{E}_m$ zavedena lineární soustava souřadnic

$$\langle P ; \mathbf{u}_1 , \ldots , \mathbf{u}_m \rangle ,$$

potom lineární funkce *vektoru* přiřazuje vektoru

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m$$

číslo

$$f(\mathbf{v}) = a_1x_1 + \ldots + a_mx_m .$$

Jestliže čísla $a_1 , \ldots , a_m$ jsou reálná, je $f(\mathbf{v})$ reálné pro každý reálný vektor $\mathbf{v}$ a pravíme, že $f$ je *reálná* lineární funkce vektoru; v opačném případě je $f$ *imaginární*. Lineární funkce *bodu* přiřazuje bodu

$$X = P + x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m$$

číslo

$$\varphi(X) = a_1x_1 + \ldots + a_mx_m + a_0 .$$

Jestliže čísla $a_1 , \ldots , a_m , a_0$ jsou reálná, je $\varphi(X)$ reálné pro každý reálný bod $X$ a pravíme, že $\varphi$ je reálná lineární funkce bodu; v opačném případě je $\varphi$ imaginární. Podrobné přenesení úvah z článků 46, 47 a 48 na komplexní případ budiž přenecháno čtenáři.

**92.** KOMPLEXNÍ PROJEKTIVNÍ PROSTOR. V předcházejícím článku jsme sledovali, jak se značná část afinní geometrie eukleidovského prostoru, studované v reálném případě, bez valných změn dá přenést na komplexní případ. Podobně tomu je i s projektivní geometrií, jejíž základy byly vyloženy v tomto svazku v kapitolách X a XI. Zde opět je přenesení značné části výsledků z reálného případu na případ komplexní tak jednoduché, že se můžeme omezit na stručný přehled. Pokud se týče kapitoly X, tu výsledky článků 69 až 75 se přenesou na komplexní případ bez jakékoli změny, kdežto v článku 76 na jednom místě je komplexní případ odlišný od reálného, jak o tom bude řeč v dalším. Naproti tomu v článcích 77 a 78 hrají důležitou roli nerovnosti, a přenesení výsledků těchto článků na komplexní případ je nemožné.

V článku 69 jsme uvažovali lineární kombinace (69.1) bodů eukleidovského prostoru $\boldsymbol{E}_m$ v případech (69.3) a (69.4), při čemž v případě (69.3) lineární kombinace znamenala vektor, v případě (69.3) pak bod. Přechod k prostoru $\boldsymbol{E}_m(\mathrm{i})$ je tak zřejmý, že jej můžeme plně přenechat čtenáři; koeficienty $c$, $c'$, ... lineární kombinace (69.1) jsou potom ovšem komplexní čísla. Totéž platí ovšem i o lineárních kombinacích (69.13) bodů a vektorů, splňujících opět podmínku (69.3) nebo (69.4).

Přenesení výsledků článku 70 na komplexní případ je rovněž velmi nasnadě. Stejně jako v prostoru $\boldsymbol{E}_m$ uvažujeme i v prostoru $\boldsymbol{E}_m(\mathrm{i})$ *vlastní a nevlastní ar. body*, při čemž nevlastní ar. bod je prostě nový název pro vektor, takže stačí odkaz na článek 89. Vlastní ar. bod prostoru $\boldsymbol{E}_m(\mathrm{i})$ je ovšem dvojice $(A, k)$ složená z bodů $A$ prostoru $\boldsymbol{E}_m(\mathrm{i})$, zvaného *polohou* ar. bodu $(A, k)$ a z komplexního čísla $k \neq 0$, zvaného *koeficientem* ar. bodu. Vl. ar. bod $(A, k)$ prostoru $\boldsymbol{E}_m(\mathrm{i})$ je reálný, je-li reálná jak jeho poloha $A$, tak i jeho koeficient $k$, jinak je imaginární. Pro imaginární vl. ar. body $(A, k)$ jsou tedy tři možnosti: (1) poloha $A$ reálná, ale koeficient $k$ imaginární; (2) koeficient $k$ reálný, ale poloha $A$ imaginární; (3) i poloha $A$ i koeficient $k$ imaginární. N. ar. bod $\boldsymbol{u}$ prostoru $\boldsymbol{E}_m(\mathrm{i})$ má koeficient rovný nule, tedy reálný; poloha $\{\boldsymbol{u}\}$ však může být reálná i tehdy, je-li $\boldsymbol{u}$ imaginární; to nastane v případě $\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{v}$, kde číslo $c$ je imaginární a vektor $\boldsymbol{v}$ je reálný.

V článku 71 jsme definovali $m$-rozměrný projektivní prostor $\boldsymbol{P}_m$, který můžeme určitěji nazvat *m-rozměrným projektivním prostorem nad* $\mathfrak{R}$. Obdobně se definuje *m-rozměrný projektivní prostor nad* $\mathfrak{R}(i)$, který označíme $\boldsymbol{P}_m(i)$; jeho ar. základem je $(m + 1)$-rozměrný vektorový prostor nad $\mathfrak{R}(i)$: $\boldsymbol{W}_{m+1}(i)$. Prvky $\boldsymbol{W}_{m+1}(i)$ jsou ar. body prostoru $\boldsymbol{P}_m(i)$ a dělí se na reálné a imaginární. Prvky prostoru $\boldsymbol{P}_m(i)$, zvané *komplexní g. body*, jsou totožné s jednorozměrnými lineárními soustavami nad $\mathfrak{R}(i)$ obsaženými ve $\boldsymbol{W}_{m+1}(i)$; opět se dělí na *reálné a imaginární*. G. bod je reálný, má-li reálného ar. zástupce, ale každý reálný g. bod má vedle reálných ar. zástupců také imaginární; naproti tomu u imaginárního g. bodu každý jeho ar. zástupce je imaginární. Reálný g. bod $\{A\}_i$ s reálným zástupcem $A$ považujeme za totožný s bodem $\{A\}$ prostoru $\boldsymbol{P}_m$, takže $\boldsymbol{P}_m$ je částí $\boldsymbol{P}_m(i)$. Prostor $\boldsymbol{P}_m(i)$ se jmenuje *komplexní rozšíření* prostoru $\boldsymbol{P}_m$. U komplexního g. bodu (na rozdíl od ar. bodů) nemá smysl pojem reálné a imaginární části. Ke každému komplexnímu bodu existuje s ním komplexně sdružený g. bod, který splyne s původním, právě když tento je reálný a jehož ar. zástupci jsou ar. body komplexně sdružené s ar. zástupci původního g. bodu. Je-li dán eukleidovský prostor nad $\mathfrak{R}$: $\boldsymbol{E}_m$, potom komplexní rozšíření $\bar{\boldsymbol{E}}_m(i)$ projektivního rozšíření $\bar{\boldsymbol{E}}_m$ prostoru $\boldsymbol{E}_m$ je projektivní prostor nad $\mathfrak{R}(i)$, který nazveme také *projektivním rozšířením komplexního rozšíření* $\boldsymbol{E}_m(i)$ prostoru $\boldsymbol{E}_m$. Úběžná nadrovina prostoru $\bar{\boldsymbol{E}}_m(i)$ je komplexním rozšířením úběžné nadroviny prostoru $\bar{\boldsymbol{E}}_m$.

Úvahy článků 72 a 73 o lineárních podprostorech projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_m$ se přenesou beze změny na prostor $\boldsymbol{P}_m(i)$. Lineární podprostor prostoru $\boldsymbol{P}_m(i)$ je buďto *reálný* nebo je *imaginární*; je reálným, právě když je komplexním rozšířením lineárního podprostoru prostoru $\boldsymbol{P}_m$. Každý imaginární bod prostoru $\boldsymbol{P}_m(i)$ leží na jediné reálné přímce tohoto prostoru, která obsahuje také bod komplexně sdružený. Ke každému lineárními podprostoru prostoru $\boldsymbol{P}_m(i)$ existuje s ním *komplexně sdružený lineární podprostor*, který splyne s původním, právě když tento je reálný. (Viz obdobnou větu o $\boldsymbol{E}_m(i)$, podrobně odůvodněnou v článku 91 na str. 89). Imaginární lineární podprostory můžeme klasifikovat podle jejich vzájemné polohy s komplexně sdruženým podprostorem; množina reálných bodů imaginárního lineárního podprostoru je totožná s průnikem tohoto podprostoru a podprostoru s ním komplexně sdruženého. Zejména máme v komplexním projektivním prostoru dva druhy imaginárních přímek: imaginární přímka má buďto jediný nebo nemá žádný reálný bod, při čemž prvý případ nastane, právě když uvažovaná imaginární přímka spolu s komplexně sdruženou přímkou leží v téže rovině.

Princip duality uvažovaný v článku 74 pro reálný případ se přenese na komplexní případ bez jakékoli změny. Ke komplexnímu rozšíření $P_m(\mathrm{i})$ projektivního prostoru $P_m$ je *duální* komplexní rozšíření $\bar{P}_m(\mathrm{i})$ duálního prostoru $\bar{P}_m$. Rovněž tak výsledky článku 75 o lineárních podprostorech duálního prostoru platí pro $P_m(\mathrm{i})$ úplně stejně jako pro $P_m$.

Stejně i pojem dvojpoměru čtveřice bodů na reálné projektivní přímce $P_1$ se přenese zřejmým způsobem na čtveřice bodů na $P_1(\mathrm{i})$ a též na čtveřice bodů na imaginární projektivní přímce. Vzorce (76.23) a (76.24), ve kterých se vyskytují orientované vzdálenosti, nemají ovšem smyslu v komplexním případě. Mimo to zde máme ještě ten rozdíl, že rovnice (76.21), která nemá reálné kořeny, má dva kořeny imaginární:

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \lambda_2 = \tfrac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{92.1}$$

V důsledku toho v komplexním oboru vedle harmonických čtveřic jsou ještě jiné čtveřice s tou vlastností, že 24 různým pořadím bodů, ze kterých se skládá čtveřice, odpovídá méně než 6 různých hodnot dvojpoměru. Jsou to t. zv. *ekvianharmonické čtveřice*, u kterých je dvojpoměr při 12 pořadích roven jednomu a při zbylých dvanácti pořadích druhému z obou čísel (92.1). Jakmile dvojpoměr je při jednom pořadí roven některému z obou čísel (92.1), je čtveřice nutně ekvianharmonická. Snadno se dokáže, že je-li na př. $(ABCD) = \lambda_1$, je každý z 12 dvojpoměrů

$$\begin{array}{lll} (ABCD)\,, & (ACDB)\,, & (ADBC)\,, \\ (BADC)\,, & (BCAD)\,, & (BDCA)\,, \\ (CABD)\,, & (CBDA)\,, & (CDAB)\,, \\ (DACB)\,, & (DBAC)\,, & (DCBA) \end{array}$$

roven $\lambda_1$ a každý z 12 dvojpoměrů odpovídajících ostatním možných pořadím roven $\lambda_2$.

**93.** KOLINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ V KOMPLEXNÍM OBORU. V předcházejícím článku jsme stručně nastínili, jak se obsah kapitoly X přenese z reálného případu na komplexní. Úkolem tohoto článku je stručná diskuse obdobného přenosu obsahu kapitoly XI. Značná část takto formulovaného úkolu je tak nasnadě, že úplně postačí několik stručných poznámek. Kolineární zobrazení $K$ prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$ na prostor $\mathbf{P}'_m(\mathrm{i})$ vznikne z isomorfního zobrazení $L$ ar. základu $\mathbf{W}_{m+1}(\mathrm{i})$ prvého prostoru na ar. základ $\mathbf{W}'_{m+1}(\mathrm{i})$ druhého stejně, jak tomu bylo v reálném případě. Takové kolineární zobrazení se jmenuje *reálné*, jestliže obraz každého reálného bodu je reálný, a v opačném případě se jmenuje *imaginární*. Každé reálné kolineární zobrazení $K$ se dá vytvořit reálným isomorfismem $L$, je však zároveň vytvořeno též imaginárními isomorfismy tvaru $cL$, kde $c$ je imaginární. Reálné kolineární zobrazení $K$ prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$ na prostor $\mathbf{P}'_m(\mathrm{i})$ obsahuje kolineární zobrazení $K_0$ prostoru $\mathbf{P}_m$ na prostor $\mathbf{P}'_m$, a obráceně se dá každé kolineární zobrazení $\mathbf{P}_m$ na $\mathbf{P}'_m$ rozšířit, a to jediným způsobem, na kolineární zobrazení $K$ prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$ na $\mathbf{P}'_m(\mathrm{i})$, při čemž $K$ je nutně reálné. Vzhledem k této fundamentální vzájemně jednoznačné relaci mezi reálnými kolineárními zobrazeními $K$ prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$ na prostor $\mathbf{P}'_m(\mathrm{i})$ a kolineárními zobrazeními $K_0$ prostoru $\mathbf{P}_m$ na prostor $\mathbf{P}'_m$ budeme identifikovat $K$ s příslušným $K_0$ a budeme proto mluvit na př. o imaginárním samodružném bodě kolineace prostoru $\mathbf{P}_m$, čímž míníme ovšem samodružný bod příslušné kolineace prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$.

Výsledky článků 79 až 82 se přenesou na komplexní případ bezprostředně. V článku 83 v komplexním případě odpadne rozlišování přímých a nepřímých kolineací, které jsme měli v reálném případě pro lichá $m$. Články 84 až 86 se přenesou na komplexní případ v celém rozsahu.

V článku 87 se při přechodu ke komplexnímu oboru jeví především ten rozdíl, že rovnice (87.3) má v komplexním oboru vždycky řešení. Je-li tedy $K$ projektivita na přímce $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$, kterou opět předpokládejme různou od identické transformace, má $K$ vždy buďto jeden samodružný bod nebo dva; v prvém případě $K$ se jmenuje *parabolická*, ve druhém *neparabolická*. Toto rozlišování má platnost jak pro reálné, tak i pro imaginární projektivity. Jestliže projektivita $K$ je reálná, potom v parabolickém případě její samodružný bod je nutně reálný; ne-