Capitolo VIII. Superficie non rigate che ammettono un gruppo continuo di deformazioni proiettive in sè

In: Guido Fubini (author); Eduard Čech (author); Georges Tzitzeica (author); Alessandro Terracini (author); Enrico Bompiani (author): Geometria proiettiva differenziale. II. (Italian). , 1927. pp. [389]–456.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402546

Capitolo VIII.

SUPERFICIE NON RIGATE CHE AMMETTONO UN GRUPPO CONTINUO DI DEFORMAZIONI PROIETTIVE IN SÈ.

§ 71. — Superficie con ∞^2 deformazioni proiettive (o collineazioni) in sè.

A) Preliminari.

Volendo ricercare tutte le superficie che ammettono un gruppo continuo di deformazioni proiettive o collineazioni in sè, possiamo escludere le superficie rigate; infatti, per le rigate il problema è già stato risoluto al Cap. IV § 40. Ricordiamo anche dal Cap. II § 20 *A)* che una trasformazione

$$\bar{u} = \bar{u}(u, v) \quad , \quad \bar{v} = \bar{v}(u, v)$$

di una superficie non rigata S in sè è deformazione proiettiva o semplice proiettività (*) allora ed allora soltanto che essa muta in sè l'elemento lineare proiettivo $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$ di S (o ciò che è lo stesso,

(*) Siamo nel caso di una proiettività se anche la terza forma di S è mutata in sè.

le forme intere φ_2 e φ_3). Ora al Cap. VI §§ 61 e 62 abbiamo visto che una forma $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$ può essere cambiata in sè tutt' al più per ∞^2 trasformazioni distinte, sicchè possiamo subito enunciare il teorema: *Se una superficie non rigata* S *ammette un gruppo* G *di deformazioni o collineazioni in sè, allora* G *ha uno o due parametri.* Inoltre segue dal Cap. VI § 62 che *condizioni necessarie e sufficienti affinchè* S *possegga un gruppo a due parametri* G_2 *di deformazioni proiettive o collineazioni in sè sono*

$$\Phi = \text{cost.} \quad , \quad \Psi = \text{cost.} \tag{1}$$

Ora noi sappiamo [Cap. VI § 60 (5)] che le (1) possono scriversi anche

$$H = 0 \ , \ K = -\frac{1}{9}\Phi \ , \ \Theta = -\frac{1}{3}\Psi \ , \ \Theta' = -\frac{1}{3}\Psi'. \tag{1$_{\text{bis}}$}$$

In particolare, per le nostre superficie valgono le

$$H = 0 \quad , \quad K = \text{cost.}$$

sicchè esse son tutte contenute fra quelle già determinate al Cap. VII § 69 (*). Basta esaminare gli invarianti Φ e Ψ (o Ψ') delle superficie ivi trovate. Distinguiamo tre casi: *a)* $K = 0$, *b)* $K + 2 = 0$, *c)* $K(K+2) \neq 0$.

B) Il primo caso $K = 0$.

I valori di Φ e Ψ' sono stati calcolati a pag. 365. Essi sono evidentemente costanti allora ed allora soltanto che $U' = V' = 0$. Senza ledere la generalità possiamo supporre $U = V = 1$, ossia

$$\beta = \gamma = 1. \tag{2}$$

(*) Si vede che le superficie cercate si distribuiscono in famiglie composte da ∞^1 superficie proiettivamente applicabili fra loro.

Le (7) del Cap. VII § 69 *C)* dànno

$$(2)_{\text{bis}} \qquad \tau_1 = Av + B \quad , \quad \tau_2 = Au + C .$$

Le nostre superficie sono identiche alle superficie di coincidenza studiate al Cap. III § 27. Le deformazioni del gruppo G_2 sono evidentemente

$$(2)_{\text{ter}} \qquad \bar{u} = u + a \quad , \quad \bar{v} = v + b .$$

Esse sono proiettività se $A = 0$ (allora possiamo determinare le equazioni in termini finiti di S; cfr. Cap. III § 27). Se invece $A \neq 0$, *nessuna* delle $(2)_{\text{ter}}$ si riduce ad una proiettività.

C) Il caso $K \neq 0$.

Sia adesso $K \neq 0$, dove per ora può essere $K + 2 = 0$ o $\neq 0$. I valori di Φ e Ψ' sono scritti al § 69 *D*. È evidente che essi son costanti se $U' = V' = 0$. Per mostrare che non vi è nessun caso essenzialmente più generale, osserviamo che la seconda delle $(1)_{\text{bis}}$ dà

$$(u - v) \frac{U'}{U} \frac{V'}{V} + 6 \left(\frac{U'}{U} - \frac{V'}{V} \right) = 0.$$

Se p. es. $U' = 0$, è quindi anche $V' = 0$. Se invece $U'V' \gtrless 0$ si deduce

$$u - v + 6 \left(\frac{V}{V'} - \frac{U}{U'} \right) = 0 ,$$

$$\frac{U'}{U} = \frac{6}{u - a} \quad , \quad \frac{V'}{V} = \frac{6}{v - a} , \quad (a = \text{cost.})$$

$$U = c_1 (u - a)^6 \quad , \quad V = c_2 (v - a)^6 .$$

Scegliendo $\dfrac{1}{u - a}$ e $\dfrac{1}{v - a}$ a nuove variabili indipendenti, U e V si riducono a costanti.

D) **Secondo caso** $K+2=0$.

Sia $K+2=0$. U e V son costanti arbitrarie, ma basta supporre

$$U=\alpha^2 \quad , \quad V=1 \ (*).$$

Le (9) del Cap. VII § 69 *D)* dànno

$$(3) \qquad \beta=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{u-v} \quad , \quad \gamma=-\alpha\frac{1}{u-v}.$$

Le (12) e (14) del cit. § dànno poi

$$(3)_{\text{bis}} \qquad \begin{aligned} \tau_1 &= (Av^2+Bv+C)(u-v)-\frac{3}{2\alpha}\frac{1}{u-v}, \\ \tau_2 &= (Au^2+Bu+C)(v-u)-\frac{3\alpha}{2}\frac{1}{v-u}. \end{aligned}$$

Il gruppo G_2 è dato dalle

$$(3)_{\text{ter}} \qquad \bar{u}=au+b \quad , \quad \bar{v}=av+b.$$

Se $A=B=C=0$, tutte le $(3)_{\text{ter}}$ sono delle semplici proiettività. Se $A=B=0$, $C\neq 0$, quelle soltanto per cui $a^2=1$ sono proiettività. Se non è $A=B=0$, tutte le trasformazioni $(3)_{\text{ter}}$ sono deformazioni proprie.

E) **Terzo caso** $K(K+2)\neq 0$.

Sia $K<0$. Le (11) del Cap. VII § 69 *D)* mostrano che $U=V$; si può supporre $U=V=1$, sicchè le (9) del citato § dànno

$$(4) \qquad \beta=\sqrt{\frac{2}{|K|}}\frac{1}{u-v} \quad , \quad \gamma=-\sqrt{\frac{2}{|K|}}\frac{1}{u-v}.$$

(*) Basta supporre $\alpha^2 \geqq 1$.

Le (12), (15) e (17) del cit. § dànno poi

$$(4)_{\text{bis}} \qquad \begin{aligned} \tau_1 &= -\sqrt{\frac{2}{|K|}}\left[\frac{3}{2}\,\frac{1}{u-v} + (u-v)(Av^2+Bv+C)\right], \\ \tau_2 &= \sqrt{\frac{2}{|K|}}\left[\frac{3}{2}\,\frac{1}{u-v} + (u-v)(Au^2+Bu+C)\right]. \end{aligned}$$

Le deformazioni in sè sono anche qui date dalle $(3)_{\text{bis}}$ e la riduzione alle proiettività avviene negli stessi casi di prima. Il caso $K>0$ si trova facilmente impossibile per superficie reali, anche se le asintotiche fossero immaginarie.

F) Quadro delle forme fondamentali delle superficie con ∞^2 deformazioni proiettive in sè.

1.° $$\varphi_2 = 2\,du\,dv \quad , \quad \varphi_3 = du^3 + dv^3 \, ,$$

$$\Sigma \tau_i\, du_i = (Av+B)\,du + (Au+C)\,dv \, .$$

Deformazioni in sè:

$$\bar{u} = u + a \quad , \quad \bar{v} = v + b \, .$$

2.° $$\varphi_2 = -\frac{2}{(u-v)^2}\,du\,dv \, ,$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{(u-v)^3}\left(\frac{1}{\alpha^3}\,du^3 - \alpha^3\,dv^3\right),$$

$$\Sigma \tau_i\, du_i = \left[(Av^2+Bv+C)(u-v) - \frac{3}{2\alpha}\,\frac{1}{u-v}\right]du +$$

$$+\left[(Au^2+Bu+C)(v-u) - \frac{3\alpha}{2}\,\frac{1}{v-u}\right]dv \, .$$

Deformazioni in sè:

$$\bar{u} = au + b \quad , \quad \bar{v} = av + c .$$

3.° $$\varphi_2 = -\frac{2\alpha^2}{(u-v)^2}\, du\, dv \quad , \quad \varphi_3 = \frac{\alpha^3}{(u-v)^3}(du^3 - dv^3) ,$$

$$\Sigma \tau_i\, du_i = -\alpha \left[(Av^2 + Bv + C)(u-v) + \frac{3}{2}\frac{1}{u-v} \right] du +$$

$$+ \alpha \left[(Au^2 + Bu + C)(u-v) + \frac{3}{2}\frac{1}{u-v} \right] dv .$$

Deformazioni in sè:

$$\bar{u} = au + b \quad , \quad \bar{v} = av + c .$$

§ 72. — Nuova deduzione dei precedenti risultati.

A) Metodo di Fubini.

Indicheremo rapidamente anche il metodo inizialmente adoperato dal Fubini per trattare questi problemi: metodi che egli estese anche agli iperspazi (*).

Ogni deformazione proiettiva infinitesima della superficie in sè stessa dovendo trasformare in sè stesse le asintotiche è del tipo $\xi \frac{\partial}{\partial u} + \eta \frac{\partial}{\partial v}$, ove ξ è funzione della sola u, ed η della sola v. Essa dovrà trasformare in sè stesse le forme φ_2 e φ_3. D'altra parte una deformazione proiettiva di una superficie non rigata in sè stessa è completamente determinata se si dà il punto (u_1, v_1) ove essa porta un punto generico prefissato (u_0, v_0). Infatti essa

(*) Cfr. G. Fubini: *Fondamenti di Geometria proiettivo-differenziale* (Rend. del Circolo Matem. di Palermo; Tomo 43, Marzo 1919).

deve portare le *tre* direzioni di Darboux $\varphi_3 = 0$ (o quelle di Segre) uscenti da (u_0, v_0) nelle omologhe uscenti da (u_1, v_1). Resta così determinata per ogni direzione uscente da (u_0, v_0) l'omologa uscente da (u_1, v_1) per il fatto che il birapporto che essa forma con le tre direzioni di Darboux è un invariante. Pertanto il gruppo dipende al più da due parametri e due sue trasformazioni infinitesime distinte hanno traiettorie distinte.

Se ne conclude che sono possibili i soli casi seguenti:

1°) Il gruppo dipende da un solo parametro; la sua trasformazione infinitesima sarà, con un cambiamento di parametri u, v delle asintotiche, riducibile o al tipo $\frac{\partial}{\partial u}$ (se $\eta = 0$) oppure $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$. Se fosse invece $\xi = 0$, basterebbe, per ritornare al primo sottocaso, scambiare le u, v.

2°) Il gruppo dipende da due parametri, e le sue trasformazioni infinitesime sono permutabili. Una di esse X si potrà, come sopra, ridurre al tipo $\frac{\partial}{\partial u} + \alpha \frac{\partial}{\partial v}$, ove $\alpha = 0$, oppure $\alpha = 1$. Se un'altra trasformazione Y indipendente è $\xi \frac{\partial}{\partial u} + \eta \frac{\partial}{\partial v}$, dovrà essere per la supposta permutabilità

$$\xi_u \frac{\partial}{\partial u} + \alpha \eta_v \frac{\partial}{\partial v} = 0 .$$

Quindi $\xi =$ cost., $\alpha\eta_v = 0$, e perciò se $\alpha = 1$, sarà $\eta =$ cost.

Se $\alpha = 0$, si potrà pure rendere $\eta = 1$, cambiando il parametro v. In ogni caso, sostituendo alle X, Y loro combinazioni lineari a coefficienti costanti, ciò che non muta il gruppo da esse generato, le potremo supporre ridotte al tipo

$$\frac{\partial}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial v} .$$

3°) Il gruppo ha due parametri, e le sue trasformazioni infinitesime X, Y non sono permutabili: potremo allora, come è noto, supporre $(XY) = X$.

Se X è riducibile alla forma $\frac{\partial}{\partial u}$, allora Y sarà del tipo $u\frac{\partial}{\partial u} + \eta\frac{\partial}{\partial v}$, ove, mutando il parametro v, potremo rendere $\eta = v$.

Se X è riducibile alla forma $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$, di nuovo Y sarà riducibile al precedente tipo.

In conclusione dunque vi sono i seguenti tipi possibili:

$$\text{A)}\ \frac{\partial}{\partial u}\ ;\quad \text{B)}\ \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\ ;\quad \text{C)}\ \frac{\partial}{\partial u}\,,\ \frac{\partial}{\partial v}\ ;$$

$$\text{D)}\ \frac{\partial}{\partial u}\,,\ u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}\ ;\quad \text{E)}\ \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\,,\ u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}.$$

Nel caso A) β e γ sono funzioni della sola v.
» B) β e γ sono funzioni della sola $u - v$.
» C) β e γ sono costanti.
» D) β e γ sono del tipo $\frac{h}{v}$, $\frac{k}{v}$ $(h\,, k = \text{cost.})$.
» E) β e γ sono del tipo $\frac{h}{u-v}$, $\frac{k}{u-v}$ $(h\,, k = \text{cost.})$

Affinchè non si tratti di un caso *virtuale,* ma ad esso *corrisponda effettivamente* una superficie, bisogna che le equazioni (14) e (15) del § 16 *D* in L, M siano integrabili. Lasciando ad un altro § lo studio dei tipi A, B di gruppi a un solo parametro, osserviamo che i tipi C, E si riducono a quelli studiati al precedente §. Quanto al caso D, le citate equazioni diventano:

$$L_v = 0 \qquad M_u = \frac{3hk}{v^3}$$

$$\frac{h}{v}M_v - 2\frac{h}{v^2}M - 6\frac{h}{v^4} = \frac{k}{v}L_u$$

che si riconoscono immediatamente non integrabili. Questo caso D) è perciò puramente *virtuale,* e nell' attuale teoria è quindi da trascurarsi.

Nè è difficile riconoscere quando *il gruppo trovato di deformazioni proiettive è un gruppo di pure collineazioni della superficie in sè stessa.* Basta vedere quando tale gruppo oltre a trasformare in sè stesse le forme φ_2, φ_3 trasforma in sè anche la terza forma $q_{11}du^2 + q_{22}dv^2$, ossia, posto $\theta = \log \beta\gamma$, la forma:

$$\left(\theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - L\right)du^2 + \left(\theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 - M\right)dv^2;$$

ciò che si riduce a un semplicissimo calcolo.

Metodi simili si applicano anche alle superficie rigate.

B) Metodo di Lie per i gruppi di collineazioni.

Per le superficie che ammettono un gruppo continuo di collineazioni in sè stesse sarà bene ricordare anche il classico metodo, col quale Sophus Lie risolvette il problema di trovare le superficie che ammettono un gruppo di collineazioni in sè ad almeno 3 parametri, indicando anche come, con calcoli però molto lunghi, si sarebbero potute determinare le superficie trasformate in sè da un gruppo di collineazioni a soli due parametri. Partendo da teoremi generali sui gruppi proiettivi, egli studia anzitutto le curve che ammettono un gruppo di trasformazioni in sè stesse. Si volge poi allo studio del *piano,* che ammette ∞^{12} collineazioni dello spazio in sè, dei *coni,* e delle *superficie sviluppabili,* lo studio delle quali equivale allo studio analogo per le curve, che ne sono lo spigolo di regresso. Prescindendo da questi casi elementari, una superficie, che sia trasformata in sè da un gruppo ad $r > 3$ parametri, avrà per asintotiche delle linee ciascuna delle quali è trasformata in sè da un gruppo ad $r - 1 \geqq 3$ parametri, e che quindi sono o cubiche sghembe, o curve piane (e perciò rette). Poichè un punto della superficie è trasformato in sè da un gruppo ad $r - 2 \geqq 2$ parametri, il quale dovrebbe trasformare in sè stessa la coppia delle due asintotiche uscenti da tale punto, S. Lie, studiando il gruppo proiettivo che trasforma una cubica sghemba in sè stessa, deduce che ciò è impossibile anche se una sola delle citate asintotiche è una cubica. Nel caso considerato perciò tutte le asintotiche sono rette, e la superficie è una *quadrica.*

Se la superficie ammette un gruppo ad $r = 3$ parametri, S. Lie deduce di nuovo che le asintotiche sono o cubiche sghembe o rette. La figura formata dalle due asintotiche uscenti da un punto della superficie sarà trasformata in sè da un gruppo ad almeno un parametro ($1 = r - 2$). Da ciò S. Lie deduce come sopra che, se le asintotiche non sono entrambe rette (caso già studiato delle *quadriche*), allora le asintotiche di un sistema sono rette, le asintotiche dell'altro sistema cubiche sghembe. Col calcolo effettivo deduce così che *l'unica superficie non sviluppabile che ammetta un gruppo a tre parametri di collineazioni in sè stessa è la rigata di Cayley.*

Per le superficie che ammettono un gruppo a soli due parametri di collineazioni in sè, S. Lie si limita a ridurne la ricerca a quella dei gruppi proiettivi a due parametri, le cui trasformazioni infinitesime non sono proporzionali, ossia hanno traiettorie distinte.

§ 73. — Superficie con ∞^1 deformazioni proiettive in sè. Specie A.

$A)$ Loro determinazione.

La determinazione di tutte le superficie S non rigate con un gruppo continuo G_1 ad un parametro di deformazioni proiettive (*) in sè richiede, come vedremo nei futuri §§, lunghi calcoli. Vi è però un caso particolare in cui i calcoli si semplificano assai, quello dove le *traiettorie del gruppo* G_1 (le curve di S trasformate in sè dalle deformazioni del gruppo) *sono asintotiche di* S. Diremo in tal caso che S è di specie A. Nel presente § determineremo tutte le superficie di questa specie. Riferiamo S alle asintotiche e supponiamo, per fissare le idee, che le traiettorie di G_1 siano le $v = \text{cost.}$

(*) Il caso di collineazioni è così triviale che non ne parleremo neanche.

Osservando che le trasformazioni di G_1 mutano in sè l'equazione differenziale $du = 0$, possiamo evidentemente scegliere il parametro u in modo che le equazioni di G_1 siano

$$\bar{u} = u + t \quad , \quad \bar{v} = v .$$

Se ne deduce immediatamente che β e γ son funzioni della sola v. Scegliendo anche v opportunamente, possiamo pertanto supporre

$$\beta = 1 \quad , \quad \gamma = \gamma(v). \tag{1}$$

Per trovare effettivamente le nostre superficie, basta esaminare le condizioni d'integrabilità, che scriviamo nella forma (Cap. II, § 16 D)

$$\begin{gathered} L_v = -2\beta\gamma_u - \gamma\beta_u \quad , \quad M_u = -2\gamma\beta_v - \beta\gamma_v , \\ \beta M_v + 2\beta_v M + \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2\gamma_u L + \gamma_{uuu} . \end{gathered} \tag{2}$$

Notiamo che la terza forma fondamentale si determina dalle L e M secondo le equazioni

$$\begin{gathered} \gamma\tau_1 = -M + \theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 , \\ \beta\tau_2 = -L + \theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 , \\ \theta = \log|\beta\gamma| . \end{gathered} \tag{3}$$

Sostituendo nelle (2) i valori (1), si deduce

$$L_v = 0 \quad , \quad M_u = -\gamma' \quad , \quad M_v = \gamma L_u .$$

Le prime due dànno

$$L = U \quad , \quad M = -\gamma' u + V ,$$

con U funzione della sola u e V funzione della sola v. Sostituendo nella terza si ricava

$$-\gamma'' u + V' = \gamma U'.$$

Dando qui a v un valor costante, si deduce (essendo $\gamma \neq 0$)

$$U = au^2 + bu + c$$

sicchè

$$-\gamma'' u + V' = \gamma(2au + b)$$

ossia

$$\gamma'' = -2a\gamma \quad , \quad V' = b\gamma .$$

Sia in primo luogo $a = 0$. Sarà $\gamma'' = 0$, $\gamma = ev + f$. Ora si noti che i parametri u, v non sono stati fissati che a meno di una sostituzione della forma

$$\bar{u} = \alpha u + \beta \quad , \quad \bar{v} = \alpha^2 v + \gamma . \tag{4}$$

Si può quindi supporre $\gamma = 1$ oppure $\gamma = v$. Così otteniamo i due casi

$$\beta = \gamma = 1 \quad , \quad L = au + b \quad , \quad M = av + c ; \tag{5}$$

$$\beta = 1 \quad , \quad \gamma = v \quad , \quad L = 2au + b \quad , \quad M = -u + av^2 + c \tag{6}$$

In secondo luogo sia $a = \frac{A^2}{2} > 0$. Sarà $\gamma'' = -A^2\gamma$, $\gamma = e \sin(Av + f)$. Facendo uso delle (4) possiamo supporre $e = 1$, $f = 0$, ed otteniamo

$$\left.\begin{aligned} &\beta = 1 \quad , \quad \gamma = \sin Av \quad , \quad L = \frac{A^2}{2}u^2 + Aau + b , \\ &M = -(Au + a)\cos Av + c \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Sia infine $a = -\frac{A^2}{2}$. Sarà $\gamma'' = A^2\gamma$, $\gamma = d_1 e^{Av} + d_2 e^{-Av}$. Facendo uso delle (4) vediamo che basta far assumere a γ uno dei valori $\operatorname{senh} Av$, $\cosh Av$, e^v, e^{-v}. Otteniamo pertanto

$$(8)\qquad \begin{cases} \beta = 1 \quad , \quad \gamma = \operatorname{senh} Av \, , \\ L = -\dfrac{A^2}{2} u^2 + Aau + b \, , \\ M = -(Au - a)\cosh Av + c \, ; \end{cases}$$

$$(9)\qquad \begin{cases} \beta = 1 \quad , \quad \gamma = \cosh Av \, , \\ L = -\dfrac{A^2}{2} u^2 + Aau + b \, , \\ M = -(Au - a)\operatorname{senh} Av + c \, ; \end{cases}$$

$$(10)\qquad \begin{cases} \beta = 1 \quad , \quad \gamma = e^v \, , \\ L = -\dfrac{1}{2} u^2 + au + b \, , \\ M = (a - u) e^v + c \, ; \end{cases}$$

$$(11)\qquad \begin{cases} \beta = 1 \quad , \quad \gamma = e^{-v} \, , \\ L = -\dfrac{1}{2} u^2 + au + b \, , \\ M = (u - a) e^{-v} + c \, . \end{cases}$$

Un quadro riassuntivo delle quantità β, γ, L, M si trova alla fine del Capitolo (*). Vi è omesso il caso (5); le superficie corrispondenti ammettono infatti ∞^2 (e non soltanto ∞^1) deformazioni proiettive (o collineazioni in sè). Tale circostanza non accade per

(*) Si noti che le equazioni precedenti contengono una costante inessenziale [b in (6), a in (7), (8), (9), (10), (11)] potendosi scrivere $u +$ cost. al posto di u. Nel quadro citato tale costante è fissata ($b = 0$, risp. $a = 0$).

gli altri tipi trovati giacchè $\Psi = \frac{\gamma'^3}{\gamma^5}$ non è per essi costante [cfr. § 71, (1)]. Si noti anche che le deformazioni proiettive di G_1 non si riducono mai a proiettività (eccettuato (5) con $a = 0$); infatti si vede facilmente che nel caso opposto L ed M dovrebbero essere indipendenti da u.

B) Altri metodi di calcolo.

Invece di supporre scelti i parametri u e v secondo le (1), si può sceglierli p. es. in modo che sia

$$\beta = \beta(v) \quad , \quad \gamma = 1 .$$

Sarà un esercizio utile per il lettore il fare di calcoli in tale ipotesi; per comodità indico i risultati

1° $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $L = au + b$, $M = av + c$;

2° $\beta = \pm v$, $\gamma = 1$, $L = -2u^2 + 2bu + c$,

$$M = \mp 2u + \frac{a}{v^2} \pm b ;$$

3° $\beta = \sqrt[3]{v}$, $\gamma = 1$, $L = 4bu + c$,

$$M = \left(a - \frac{2}{3} u\right) v^{-\frac{2}{3}} + 3bv^{\frac{2}{3}} + \frac{5}{18} v^{-2} ;$$

4° $\beta = \varphi(v)$, $\gamma = 1$, dove φ si determina dalla

$$v = \int_0^{\varphi(v)} \frac{x \cdot dx}{\sqrt{A \pm x^4}} ,$$

$$L = \mp 2u^2 \pm 2au + c ,$$

$$M = -2\varphi' u + \frac{5}{2} \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} + a\varphi' + \frac{b}{\varphi^2}.$$

È chiaro che queste formole sono trasformabili nelle precedenti; è raccomandabile al lettore di effettuare la trasformazione nel modo esposto al Cap. VI § 62.

Avremmo pure potuto scegliere i parametri u, v in modo che sia

$$\beta = \beta(v) \quad , \quad \beta\gamma = 1 \; ;$$

anzi, procedendo in questo modo, avremmo trovato le soluzioni più rapidamente. Infatti, β e γ essendo funzioni della sola v, è

$$\frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u \, \partial v} = \frac{\partial^2 \log(\beta : \gamma)}{\partial u \, \partial v} = 0$$

ossia $H = K = 0$. Ora tutte le superficie con $H = K = 0$ sono enumerate al Cap. VII § 69 e precisamente abbiamo ivi scelto i parametri u, v in modo che sia $\beta\gamma = 1$. Basta prendere quelle in cui β è funzione della sola v. Lascio al lettore la verifica che le superficie cui s' arriva nel modo ora indicato sono identiche a quelle precedentemente trovate.

§ 74. — Risoluzione di un' equazione ausiliaria.

A) Preliminari.

Prima di proseguire la nostra ricerca, studieremo in questo § un' equazione funzionale che si troverà al § seguente importantissima per il nostro problema. L' equazione che andiamo a studiare è

$$\text{(E)} \qquad \varphi_1 U_1 + \varphi_2 V_1 = \psi$$

$\varphi_1, \varphi_2, U_1, V_1, \psi$ essendo funzioni di due variabili indipendenti u e v e precisamente: U_1 è funzione della sola u, V_1 della sola v, φ_1 e φ_2 son funzioni della sola $u - v$, ψ della sola $u + v$. *Non cercheremo che le soluzioni per cui* $\varphi_1 \varphi_2 \neq 0$. Troveremo nel campo reale dieci gruppi di soluzioni della (E) soddisfacenti a $\varphi_1 \varphi_2 \neq 0$; il risultato riassuntivo si trova alla fine del §.

Mediante le operazioni $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial v}$, $\frac{\partial^2}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}$ e $\frac{\partial^3}{\partial u^2 \partial v} - \frac{\partial^3}{\partial u \partial v^2}$ si ricava dalla (E) (*)

$$
(1) \quad \begin{aligned}
&\varphi_1 U_1' + \varphi_1' U_1 + \varphi_2' V_1 = \psi', \\
&\varphi_2 V_1' - \varphi_1' U_1 - \varphi_2' V_1 = \psi', \\
&\varphi_1 U_1'' + 2\varphi_1' U_1' + \varphi_1'' U_1 + \varphi_2'' V_1 = \psi'', \\
&\varphi_2 V_1'' - 2\varphi_2' V_1' + \varphi_1'' U_1 + \varphi_2'' V_1 = \psi'', \\
&\varphi_1' U_1' - \varphi_2' V_1' + \varphi_1'' U_1 + \varphi_2'' V_1 = -\psi'', \\
&\varphi_1' U_1'' + \varphi_2' V_1'' + 3\varphi_1'' U_1' - 3\varphi_2'' V_1' + 2\varphi_1''' U_1 + 2\varphi_2''' V_1 = 0.
\end{aligned}
$$

Dalle sette equazioni (E) e (1) possiamo eliminare U_1, V_1, U_1', V_1', U_1'', V_1''. Si ottiene

$$
(2) \quad \begin{vmatrix}
\varphi_1 & \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi \\
\varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & \psi' \\
-\varphi_1' & -\varphi_2' & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \psi' \\
\varphi_1'' & \varphi_2'' & 2\varphi_1' & 0 & \varphi_1 & 0 & \psi'' \\
\varphi_1'' & \varphi_2'' & 0 & -2\varphi_2' & 0 & \varphi_2 & \psi'' \\
\varphi_1'' & \varphi_2'' & \varphi_1' & -\varphi_2' & 0 & 0 & -\psi'' \\
2\varphi_1''' & 2\varphi_2''' & 3\varphi_1'' & -3\varphi_2'' & \varphi_1' & \varphi_2' & 0
\end{vmatrix} = 0.
$$

Quest' equazione ha la forma

$$
(2)_{\text{bis}} \qquad \tau_2 \psi'' + \tau_1 \psi' + \tau_0 \psi = 0
$$

(*) Poniamo p. es. $U_1' = \frac{dU_1}{du}$, $\varphi_1' = \frac{d\varphi_1}{d(u-v)}$, $\psi'' = \frac{d^2\psi}{d(u+v)^2}$.

dove τ_0, τ_1, τ_2 non dipendono che da $u - v$. *Escludiamo per ora la possibilità che le funzioni* φ_1, φ_2 *siano tali che sia identicamente* $\tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = 0$. Allora, dando a $u - v$ un valor costante, si deduce che esiste almeno un sistema di due costanti a, b tali che sia identicamente

$$4\psi'' + 2a\psi' + b\psi = 0. \tag{3}$$

Ora, operando sulla (E) ripetutamente con $\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial v}$, si ricava:

$$\begin{aligned} &\varphi_1 U_1' + \varphi_2 V_1' = 2\psi' \\ &\varphi_1 U_1'' + \varphi_2 V_1'' = 4\psi'', \end{aligned} \tag{4}$$

e da (E) e dalle (4) si deduce, per la (3),

$$\varphi_1 (U_1'' + aU_1' + bU_1) + \varphi_2 (V_1'' + aV_1' + bV_1) = 0. \tag{5}$$

B) **Primo modo di soddisfare alla** (5).

Cominciamo coll'esaminare l'ipotesi che sia identicamente

$$\begin{aligned} &U_1'' + aU_1' + bU_1 = 0 \\ &V_1'' + aV_1' + bV_1 = 0; \end{aligned} \tag{6}$$

l'equazione (5) è allora soddisfatta. Se le radici $x_1 = 2A$, $x_2 = 2B$ di $x^2 + ax + b = 0$ son distinte (reali o complesse coniugate), dalle (3) e (6) si ricava:

$$\begin{aligned} &U_1 = a_1 e^{2Au} + a_2 e^{2Bu}, \\ &V_1 = b_1 e^{2Av} + b_2 e^{2Bv}, \qquad A \neq B \\ &\psi = c_1 e^{A(u+v)} + c_2 e^{B(u+v)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Occorre ancora cercare la forma possibile per le funzioni φ_1, φ_2. *In generale* possiamo trovare φ_1 e φ_2 considerandole come incognite nella (E) e la prima delle (4). Ma vi è il caso eccezionale $U_1 V_1' - U_1' V_1 = 0$. Ora dalle (7) si calcola

$$U_1 V_1' - U_1' V_1 = 2(A - B)\left[a_2 b_1 e^{2(Bu+Av)} - a_1 b_2 e^{2(Au+Bv)}\right].$$

Supponiamo dapprima che sia $U_1 V_1' - U_1' V_1 = 0$ ossia, per la nostra ipotesi, che $A \neq B$, $a_2 b_1 = a_1 b_2 = 0$. Ma *basta supporre che* $a_2 = b_2 = 0$. Infatti l'ipotesi $a_1 = b_1 = 0$ non ne differisce che inessenzialmente (giacchè è lecito scambiare A con B) e, se fosse p. es. $b_1 = b_2 = 0$, (*) la (E) diventerebbe:

$$\varphi_1 (a_1 e^{2Au} + a_2 e^{2Bu}) = c_1 e^{A(u+v)} + c_2 e^{B(u+v)}.$$

Dividendo per U_1 ed operando con $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$ si troverebbe:

$$(A - B)\left[a_1 c_2 e^{(2A+B)u+Bv} - a_2 c_1 e^{(A+2B)u+Av}\right] = 0$$

sicchè $a_1 c_2 = a_2 c_1 = 0$ (essendo $A \neq B$). Se non vogliamo supporre nè $a_1 = b_1 = 0$, nè $a_2 = b_2 = 0$, non ci resta pertanto che l'ipotesi $c_1 = c_2 = 0$; ma anche questa è impossibile giacchè essa richiederebbe $\varphi_1 = 0$, mentre noi non cerchiamo che quelle soluzioni per cui $\varphi_1 \varphi_2 \neq 0$. Sia dunque $a_2 = b_2 = 0$. La (E) diventa, dividendola per $e^{A(u+v)}$

$$\varphi_1 a_1 e^{A(u-v)} + \varphi_2 b_1 e^{-A(u-v)} = c_1 + c_2 e^{(B-A)(u+v)}.$$

Il primo membro essendo funzione della sola $u - v$, è necessariamente $c_2 = 0$,

$$\varphi_1 a_1 e^{A(u-v)} + \varphi_2 b_1 e^{-A(u-v)} = c_1.$$

Supponendo successivamente $a_1 = b_1 = 0$; $a_1 = 0$, $b_1 \neq 0$; $b_1 = 0$, $a_1 \neq 0$; $a_1 b_1 \neq 0$ arriviamo, ricordando le (7) e $a_2 = b_2 = 0$, alle seguenti soluzioni di (E):

$$\varphi_1 \text{ arbitraria}\quad,\quad \varphi_2 \text{ arbitraria}\quad,\quad U_1 = V_1 = \psi = 0\,;$$

(*) Analogamente si procede nell'ipotesi $a_1 = a_2 = 0$.

$$\varphi_1 \text{ arbitraria}, \quad \varphi_2 = \frac{c_1}{b_1} e^{A(u-v)}, \quad U_1 = 0, \quad V_1 = b_1 e^{2Av}, \quad \psi = c_1 e^{A(u+v)};$$

$$\varphi_1 = \frac{c_1}{a_1} e^{-A(u-v)}, \quad \varphi_2 \text{ arbitraria}, \quad U_1 = a_1 e^{2Au}, \quad V_1 = 0, \quad \psi = c_1 e^{A(u+v)};$$

$$\varphi_1 \text{ arbitraria}, \quad \varphi_2 = \frac{c_1}{b_1} e^{A(u-v)} - \frac{a_1}{b_1} e^{2A(u-v)} - \frac{a_1}{b_1} e^{2A(u-v)} \varphi_1,$$

$$U_1 = a_1 e^{2Au}, \quad V_1 = b_1 e^{2Av}, \quad \psi = c_1 e^{2Av}.$$

Tali sono quindi quelle soluzioni di (E) per cui valgono le (6) ed inoltre è $U_1 V_1' - U_1' V_1 = 0$. Esse si trovano, con qualche cambiamento di notazioni, nel quadro alla fine del §, come le soluzioni (E_0), (E_1), (E_1'), (E_2).

Per trovare le ulteriori soluzioni di (E) per cui valgono le (6), dobbiamo supporre che $U_1 V_1' - U_1' V_1 \neq 0$. Dalla (E) e dalla prima delle (4) si deduce

$$\varphi_1 = \frac{\psi V_1' - 2\psi' V_1}{U_1 V_1' - U_1' V_1}, \quad \varphi_2 = -\frac{\psi U_1' - 2\psi' U_1}{U_1 V_1' - U_1' V_1}. \tag{8}$$

Sostituendovi i valori (7), troviamo

$$\text{(7) bis} \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{b_1 c_2 e^{-A(u-v)} - b_2 c_1 e^{-B(u-v)}}{a_2 b_1 e^{(B-A)(u-v)} - a_1 b_2 e^{(A-B)(u-v)}}, \\ \varphi_2 &= \frac{-a_1 c_2 e^{A(u-v)} + a_2 c_1 e^{B(u-v)}}{a_2 b_1 e^{(B-A)(u-v)} - a_1 b_2 e^{(A-B)(u-v)}}, \end{aligned}$$

valori che non dipendono che da $u - v$, comunque si scelgano le costanti nelle (7). La soluzione rappresentata dalle (7) e (7) bis si trova come (E_3) nel quadro alla fine del §. Con (E_3') è indicata in forma reale quella soluzione che si ottiene dalla (E_3) se A e B hanno valori complessi coniugati.

Ma in ciò che precede abbiamo supposto che le radici di $x^2 + ax + b = 0$ siano distinte. Se invece quest'equazione ha una soluzione $x = 2A$ doppia, dalla (3) e (6) si ottiene

$$(9) \qquad \begin{gathered} U_1 = (a_1 u + a_2) e^{2Au} \quad , \quad V_1 = (b_1 v + b_2) e^{2Av} \, , \\ \psi = [c_1 (u + v) + c_2] \, e^{A(u+v)} \, . \end{gathered}$$

Come sopra, calcoliamo anche qui $U_1 V_1' - U_1' V_1$. Otteniamo

$$U_1 V_1' - U_1' V_1 = [a_1 b_1 (u - v) - a_1 b_2 + a_2 b_1] \, e^{2A(u+v)} .$$

Mostriamo che l'ipotesi $U_1 V_1' - U_1' V_1 = 0$ non conduce a niente di nuovo. Infatti allora sarebbe

$$a_1 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

e quindi o 1°: $b_1 = b_2 = 0$, oppure 2°: $a_1 = a_2 = 0$, od infine 3°: $a_1 = b_1 = 0$. Se $b_1 = b_2 = 0$, la (E) diventa dividendola per $e^{A(u+v)}$

$$\varphi_1 e^{A(u-v)} (a_1 u + a_2) = c_1 (u + v) + c_2$$

donde segue $a_1 = 0$, cosicchè si ricade nelle soluzioni (E_0) e (E_1') già trovate. Similmente se $a_1 = a_2 = 0$. Se $a_1 = b_1 = 0$, la (E) diventa

$$a_2 \varphi_1 e^{2Au} + b_2 \varphi_2 e^{2Av} = c_1 (u + v) e^{A(u+v)}$$

donde si vede subito che $c_1 = 0$ e si ricade nella (E_2). Possiamo quindi supporre $U_1 V_1' - U_1' V_1 \neq 0$ sicchè si applica la (8). Sostituendovi i valori (9), troviamo

$$(9)_{\text{bis}} \qquad \begin{gathered} \varphi_1 = e^{-A(u-v)} \frac{b_1 c_1 (u - v) + b_1 c_2 - 2 b_2 c_1}{a_1 b_1 (u - v) - a_1 b_2 + a_2 b_1} \, , \\ \varphi_2 = e^{A(u-v)} \frac{a_1 c_1 (u - v) - a_1 c_2 + 2 a_2 c_1}{a_1 b_1 (u - v) - a_1 b_2 + a_2 b_1} . \end{gathered}$$

I valori $(9)_{\text{bis}}$ non dipendendo che da $u - v$, comunque si scelgano le costanti nelle (9), le (9) e $(9)_{\text{bis}}$ ci forniscono un'ulteriore soluzione della nostra equazione, che è la soluzione (E_4) del quadro alla fine del §.

C) **Secondo modo di soddisfare alla** (5).

Osserviamo che, se una delle (6) è soddisfatta, lo è anche l'altra; altrimenti la (5) darebbe $\varphi_1\varphi_2 = 0$, contro l'ipotesi. Pertanto, se non valgono le (6), dalla (5) si deduce

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = -\frac{V_1'' + aV_1' + bV_1}{U_1'' + aU_1' + bU_1} \tag{10}$$

Operandovi con $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$ si trova subito che il valore comune dei due membri della (10) ha la forma (*)

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = ce^{\alpha(u-v)} \tag{10 bis}$$

sicchè la (E) diventa, dividendola per $e^{-\alpha v}\varphi_2$

$$ce^{\alpha u}\,U_1 + e^{\alpha v}\,V_1 = \frac{\psi}{\varphi_2}e^{\alpha v}, \tag{11}$$

donde si deduce tosto che

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\psi}{\varphi_2}e^{\alpha v}\right) = 0,$$

ossia

$$(\psi'' + \alpha\psi')\frac{1}{\varphi_2} - \left[\left(\frac{1}{\varphi_2}\right)'' - \alpha\left(\frac{1}{\varphi_2}\right)'\right]\psi = 0.$$

Se fosse $\psi = 0$, la (11) mostra subito che non si otterrebbe che quel caso particolare di (E_2) in cui $c_1 = 0$, sicchè possiamo supporre $\psi \neq 0$,

(*) È importante osservare che nel seguito del nostro ragionamento facciamo uso *soltanto* di (10) bis.

$$\frac{\psi'' + \alpha\psi'}{\psi} = \varphi_2 \left[\left(\frac{1}{\varphi_2} \right)'' - \alpha \left(\frac{1}{\varphi_2} \right)' \right] = -\beta$$

dove β evidentemente è costante, ossia

$$(12) \qquad \begin{cases} \psi'' + \alpha\psi' + \beta\psi = 0 \\ \left(\dfrac{1}{\varphi_2} \right)'' - \alpha \left(\dfrac{1}{\varphi_2} \right)' + \beta \dfrac{1}{\varphi_2} = 0 . \end{cases}$$

Supponiamo dapprima che l'equazione $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ abbia due radici distinte (reali o complesse coniugate) $x_1 = A$, $x_2 = B$. Dalle (12) si deduce:

$$(13) \qquad \begin{cases} \psi = c_1 e^{A(u+v)} + c_2 e^{B(u+v)} , \\ \dfrac{1}{\varphi_2} = b_1 e^{-A(u-v)} + b_2 e^{-B(u-v)} ; \end{cases}$$

inoltre è $\alpha = -(A + B)$ sicchè la $(10)_{\text{bis}}$ dà

$$(13)_{\text{bis}} \qquad \frac{1}{\varphi_1} = \frac{b_1}{c} e^{B(u-v)} + \frac{b_2}{c} e^{A(u-v)} .$$

Sostituendo nella (E) o, ciò che è lo stesso, nella (11), si trova

$$ce^{-(A+B)u} U_1 + e^{-(A+B)v} V_1 =$$

$$= b_2 c_1 e^{(A-B)u} + c_2 b_1 e^{-(A-B)u} + b_1 c_1 e^{(A-B)v} + b_2 c_2 e^{-(A-B)v} ,$$

cosicchè (h costante arbitraria)

$$(13)_{\text{ter}} \qquad \begin{cases} U_1 = \dfrac{b_2 c_1}{c} e^{2Au} + \dfrac{b_1 c_2}{c} e^{2Bu} + he^{(A+B)u} , \\ V_1 = b_1 c_1 e^{2Av} + b_2 c_2 e^{2Bv} - hce^{(A+B)v} . \end{cases}$$

La soluzione di (E) rappresentata dalle (13), $(13)_{\text{bis}}$ e $(13)_{\text{ter}}$ è identica, a meno di un piccolo cambiamento di notazioni, alla (E_5)

del quadro alla fine del Capitolo. Se A, B sono complesse coniugate, otteniamo, scrivendo la soluzione in forma reale, la (E_5') del quadro.

Resta ancora l' ipotesi che l' equazione $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ dove le α, β sono le costanti che compaiono nelle (12) abbia una radice doppia $x = A$. Dalle (12) si deduce:

$$\begin{aligned} \psi &= [b_1(u+v) + b_2]\, e^{A(u+v)}\,, \\ \frac{1}{\varphi_2} &= [a_1(u-v) + a_2]\, e^{-A(u-v)}\,; \end{aligned} \tag{14}$$

inoltre è $\alpha = -2A$, cosicchè la $(10)_{\text{bis}}$ dà

$$\frac{1}{\varphi_1} = \frac{1}{c}[a_1(u-v) + a_2]\, e^{A(u-v)}\,. \tag{14 bis}$$

Sostituendo nella (11) si ricava:

$$ce^{-2Au}\,U_1 + e^{-2Av}\,V_1 = [a_1 b_1 (u^2 - v^2) + (a_2 b_1 + a_1 b_2)u + \\ + (a_2 b_1 - a_1 b_2)v + a_2 b_2]\,,$$

donde si deduce:

$$\begin{aligned} U_1 &= \left(\frac{a_1 b_1}{c} u^2 + \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{c} u + \frac{a_2 b_2}{2c} + h\right) e^{2Au}\,, \\ V_1 &= -\left[a_1 b_1 v^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)v - \frac{a_2 b_2}{2} + ch\right] e^{2Av}\,. \end{aligned} \tag{14 ter}$$

La soluzione di (E) rappresentata dalle (14), $(14)_{\text{bis}}$ e $(14)_{\text{ter}}$ è identica alla (E_6) del quadro alla fine del §.

D) **Non esistenza di ulteriori soluzioni di (E).**

Completiamo lo studio dell'equazione (E) dimostrando che essa non possiede altre soluzioni, diverse da quelle finora trovate. Basta evidentemente far vedere che non si può arrivare a nessuna nuova soluzione supponendo che sia in $(2)_{\text{bis}}$ $\tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = 0$. Ora dalla (2) si calcola senza difficoltà (non ci occorre conoscere il valore di τ_0)

$$\tau_1 = 2\varphi_1\varphi_2(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1')(\varphi_2\varphi_1''' - \varphi_1\varphi_2''') +$$
$$+ 3\varphi_1\varphi_2(\varphi_1\varphi_2'' - \varphi_2\varphi_1'')^2 - 6\varphi_1\varphi_2(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1')(\varphi_1'\varphi_2'' - \varphi_2'\varphi_1'') -$$
$$- (\varphi_1^2\varphi_2'^2 - \varphi_2^2\varphi_1'^2)(\varphi_1\varphi_2'' - \varphi_2\varphi_1'') + 4\varphi_1'\varphi_2'(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1')^2,$$

$$\tau_2 = 2\varphi_1^2\varphi_2^2(\varphi_1\varphi_2''' - \varphi_2\varphi_1''') - 3\varphi_1\varphi_2(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1')(\varphi_1\varphi_2'' + \varphi_2\varphi_1'') +$$
$$+ 2\varphi_1\varphi_2(\varphi_1\varphi_2' + \varphi_2\varphi_1')(\varphi_2\varphi_1'' - \varphi_1\varphi_2'') +$$
$$+ (3\varphi_1^2\varphi_1'^2 + 2\varphi_1\varphi_2\varphi_1'\varphi_2' + 3\varphi_2^2\varphi_1'^2)(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1').$$

Posto per un momento

$$\frac{\varphi_1'}{\varphi_1} = f_1 \quad , \quad \frac{\varphi_2'}{\varphi_2} = f_2 \, ,$$

si ha pertanto

$$\tau_1 : \varphi_1^3\varphi_2^3 = (f_2 - f_1)\,[2(f_1'' - f_2'') + (f_1 + f_2)(f_1' - f_2') + 3(f_1' - f_2')^2]\,,$$

$$\tau_2 : \varphi_1^3\varphi_2^3 = -2(f_1'' - f_2'') - (f_1 + f_2)(f_1' - f_2')\,,$$

$$[\tau_1 + (f_2 - f_1)\tau_2] : \varphi_1^3\varphi_2^3 = 3(f_1' - f_2')^2(f_2 - f_1)\,.$$

Le equazioni $\tau_1 = \tau_2 = 0$ equivalgono dunque alla sola

$$f_1' - f_2' = 0 \tag{15}$$

sicchè basta provare che non esistono delle nuove soluzioni della (E) per cui fosse soddisfatta la (15). Ma dalla (15) si deduce:

$$
(16)\qquad \frac{\varphi_1'}{\varphi_1} - \frac{\varphi_2'}{\varphi_2} = \alpha\,, \qquad \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = ce^{\alpha(u-v)}\,.
$$

Ora la (16) è identica alla $(10)_{\text{bis}}$. Se si osserva che, nel ragionamento che ci condusse alle soluzioni (E_5), (E_5') e (E_6), abbiamo fatto uso *soltanto* della $(10)_{\text{bis}}$ (*) vediamo che non vi sono infatti altre soluzioni delle (E) con $\varphi_1 \varphi_2 \neq 0$ oltre quelle che abbiamo trovate.

E) Quadro di soluzioni dell' equazione.

$$
(E) \qquad \varphi_1(u-v)\, U_1(u) + \varphi_2(u-v)\, V_1(v) = \psi(u+v)\,,
$$

$$
\text{dove } \varphi_1 \varphi_2 \neq 0\,.
$$

$$
(E_0) \qquad \varphi_1 \text{ arbitraria}\,, \quad \varphi_2 \text{ arbitraria}\,, \qquad U_1 = V_1 = \psi = 0\,;
$$

$$
(E_1) \qquad \varphi_1 \text{ arbitraria}\,, \quad \varphi_2 = ae^{A(u-v)}\,, \qquad U_1 = 0\,, \quad V_1 = be^{2Av}\,, \quad \psi = abe^{A(u+v)}\,, \qquad a \neq 0\,;
$$

$$
(E_1') \qquad \varphi_1 = ae^{-A(u-v)}\,, \quad \varphi_2 \text{ arbitraria}\,, \qquad U_1 = be^{2Au}\,, \quad V_1 = 0\,, \quad \psi = abe^{A(u+v)}\,,
$$

(*) Cfr. l' ultima nota a piè di pag.

$$a \neq 0\,;$$

$$\varphi_1 \text{ arbitraria} \quad , \quad \varphi_2 = ae^{2A(u-v)} \cdot \varphi_1 + be^{A(u-v)} \,,$$

$$(\mathrm{E}_2) \qquad U_1 = -ace^{2Au} \quad , \quad V_1 = ce^{2Av} \quad , \quad \psi = bce^{A(u+v)} \,,$$

$$a \neq 0\,;$$

$$(\mathrm{E}_3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi_1 = \frac{b_1 c_2 e^{-A(u-v)} - b_2 c_1 e^{-B(u-v)}}{a_2 b_1 e^{-(A-B)(u-v)} - a_1 b_2 e^{(A-B)(u-v)}} \,, \\ &\varphi_2 = \frac{-a_1 c_2 e^{A(u-v)} + a_2 c_1 e^{B(u-v)}}{a_2 b_1 e^{-(A-B)(u-v)} - a_1 b_2 e^{(A-B)(u-v)}} \,, \\ &U_1 = a_1 e^{2Au} + a_2 e^{2Bu} \quad , \quad V_1 = b_1 e^{2Av} + b_2 e^{2Bv} \,, \\ &\psi = c_1 e^{A(u+v)} + c_2 e^{B(u+v)} \,; \quad A \neq B\,; \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{E}'_3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi_1 = \frac{c}{a} e^{-A(u-v)} \frac{\sin[\alpha(u-v) + l - k]}{\sin[2\alpha(u-v) + h - k]} \,, \\ &\varphi_2 = \frac{c}{b} e^{A(u-v)} \frac{\sin[\alpha(u-v) + h - l]}{\sin[2\alpha(u-v) + h - k]} \,, \\ &U_1 = ae^{2Au} \sin(2\alpha u + h) \,, \quad V_1 = be^{2Av} \sin(2\alpha v + k) \,, \\ &\psi = ce^{A(u+v)} \sin[\alpha(u+v) + l] \,, \quad abc\alpha \neq 0\,; \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{E}_4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi_1 = e^{-A(u-v)} \frac{b_1 c_1 (u-v) + b_1 c_2 - 2b_2 c_1}{a_1 b_1 (u-v) - a_1 b_2 + a_2 b_1} \,, \\ &\varphi_2 = e^{A(u-v)} \frac{a_1 c_1 (u-v) - a_1 c_2 + 2a_2 c_1}{a_1 b_1 (u-v) - a_1 b_2 + a_2 b_1} \,, \\ &U_1 = (a_1 u + a_2) e^{2Au} \quad , \quad V_1 = (b_1 v + b_2) e^{2Av} \,, \\ &\psi = [c_1 (u+v) + c_2] e^{A(u+v)} \,; \end{aligned} \right.$$

$$
(\mathrm{E}_5)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi_1 = \frac{1}{ca_1 e^{A(u-v)} + ca_2 e^{B(u-v)}}, \qquad A \neq B\\
&\varphi_2 = \frac{1}{a_2 e^{-A(u-v)} + a_1 e^{-B(u-v)}},\\
&U_1 = a_1 b_1 ce^{2Au} + a_2 b_2 ce^{2Bu} + hce^{(A+B)u},\\
&V_1 = a_2 b_1 e^{2Av} + a_1 b_2 e^{2Bv} - he^{(A+B)v},\\
&\psi = b_1 e^{A(u+v)} + b_2 e^{B(u+v)};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(\mathrm{E}_5')\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi_1 = \frac{ae^{-A(u-v)}}{\sin[\alpha(u-v)+h]},\\
&\varphi_2 = \frac{be^{A(u-v)}}{\sin[\alpha(u-v)+h]},\\
&U_1 = -\frac{1}{2b} e^{2Au} \cos(2\alpha u + h + k) + bce^{2Au},\\
&V_1 = \frac{a}{2b^2} e^{2Av} \cos(2\alpha v - h + k) - ace^{2Av},\\
&\psi = \frac{a}{b} e^{A(u+v)} \sin[\alpha(u+v)+k], \quad \alpha \neq 0;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(\mathrm{E}_6)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi_1 = \frac{ce^{-A(u-v)}}{a_1(u-v)+a_2}, \quad \varphi_2 = \frac{e^{A(u-v)}}{a_1(u-v)+a_2},\\
&U_1 = \left[a_1 b_1 u^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) u + \frac{a_2 b_2}{2} + h\right] e^{2Au},\\
&V_1 = -c\left[a_1 b_1 v^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) v - \frac{a_2 b_2}{2} + h\right] e^{2Av},\\
&\psi = c[b_1(u+v) + b_2]\, e^{A(u+v)}.
\end{aligned}
\right.
$$

§ 75. — Superficie con ∞^1 deformazioni proiettive in sè. Riduzione del problema all'equazione studiata al § precedente.

Dopo la digressione sull'equazione (E), ritorniamo alla ricerca di superficie S non rigate con un G_1 di deformazioni proiettive in sè. *Riferita* S *alle asintotiche,* sia

$$\xi(u, v)\frac{\partial}{\partial u} + \eta(u, v)\frac{\partial}{\partial v}$$

il simbolo della trasformazione infinitesima di G_1. Le equazioni differenziali $du = 0$ e $dv = 0$ essendo invarianti per G_1 è $\frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\partial \eta}{\partial u} = 0$. Inoltre l'ipotesi $\xi\eta = 0$ ci ricondurrebbe alle superficie della specie A già determinate. Scegliendo opportunamente i parametri u, v delle asintotiche possiamo pertanto supporre $\xi = \eta = 1$ sicchè le *traiettorie di* G_1 *sono le curve* $u - v =$ *cost.*, e le equazioni di G_1 sono

$$\bar{u} = u + t \quad , \quad \bar{v} = v + t. \tag{1}$$

È importante notare che i nostri parametri u, v non sono fissati che a meno di una trasformazione della forma

$$u = au + b \quad , \quad \bar{v} = av + c, \tag{2}$$

oppure

$$\bar{u} = av + c \quad , \quad \bar{v} = au + b. \tag{2bis}$$

Affinchè le forme φ_2 e φ_3 siano invarianti per G occorre e basta che β e γ *siano funzioni della sola* u — v. Le condizioni d'integrabilità (2) del § 73 diventano pertanto

$$L_v = -2\beta\gamma' - \gamma\beta' \quad , \quad M_u = 2\gamma\beta' + \beta\gamma' ,$$
(3)
$$\beta M_v - 2\beta' M - \beta''' = \gamma L_u + 2\gamma' L + \gamma'''.$$

Dobbiamo quindi studiare il sistema (3). Noi lo ridurremo all'equazione (E) studiata al § precedente. A tale scopo indichiamo con F_1 e F_2 funzioni della sola $u - v$ soddisfacenti alle

(4) $$F_1' = 2\beta\gamma' + \gamma\beta' \quad , \quad F_2' = 2\gamma\beta' + \beta\gamma'.$$

Dalle prime due delle (3) e dalle (4) si deduce

(5) $$L = F_1 + U \quad , \quad M = F_2 + V.$$

Sostituendo i valori (5) nell' ultima delle (3), si ottiene

(6) $$\beta V' - 2\beta' V - \beta F_2' - 2\beta' F_2 - \beta''' =$$
$$= \gamma U' + 2\gamma' U + \gamma F_1' + 2\gamma' F_1 + \gamma'''.$$

Operando sulla (6) con $\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial v}$ si ricava:

$$\beta V'' - 2\beta' V = \gamma U'' + 2\gamma' U ;$$

e ciò può scriversi

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)(\gamma U' + \beta V') = 0,$$

oppure

(7) $$\gamma U' + \beta V' = \psi ,$$

ψ essendo funzione della sola $u + v$. Ora la (7) non è che la (E) del § precedente, se vi si pone

(8) $$\varphi_1 = \gamma \quad , \quad \varphi_2 = \beta \quad , \quad U_1 = U' \quad , \quad V_1 = V'.$$

Risulta che, per trovare le superficie cercate, ossia per risolvere il sistema (3), occorre: 1° sostituire a β, γ, U, V i valori determinati secondo la (8) da una soluzione (E_i) della (E); 2° dare alle costanti (o funzioni) arbitrarie che compaiono in (E_i) valori tali che la (6) sia identicamente soddisfatta. Dal modo come abbiamo dedotto la (7) risulta che, in ogni caso, nell'equazione che si ottiene da (6) nel modo ora descritto non comparirà che la sola variabile $u-v$.

Occorre pertanto esaminare l'una dopo l'altra le soluzioni di (E). Possiamo omettere la soluzione (E_0); essa infatti dà $U'=V'=0$, sicchè le (5) mostrano che L ed M sono funzioni della sola $u-v$, donde si vede che anchè la terza forma $\Sigma\tau_i du_i$ ammetterebbe il gruppo G_1 che sarebbe un gruppo di *collineazioni* di S in sè; caso triviale già escluso al § 73.

Diremo che *S è di specie* B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 rispettivamente nel caso delle soluzioni (E_1) o (E_1'), (E_2), (E_3) o (E_3'), (E_4), (E_5) o (E_5'), (E_6) dell'equazione (E). Un quadro completo delle quantità β, γ, L, M per tutte le superficie delle varie specie si trova alla fine del Capitolo, come abbiamo già avvertito al § 73.

§ 76. Verifiche per le specie B_1 e B_2.

A) Superficie della specie B_1.

1. *Vi sono due tipi distinti di superficie della specie* B_1 *dipendenti rispettivamente da cinque e quattro costanti arbitrarie.*

Basta esaminare (E_1). Infatti (E_1') si riduce ad (E_1) scambiando u con v. Supponiamo dapprima $A \neq 0$. La (8) del § 75 dà

$$\beta = ae^{A(u-v)} \quad , \quad U = d_1 \quad , \quad V = be^{2Av} + d_2 \, .$$

Facendo uso delle (2) del § 75 possiamo supporre $a = A = 1$, $b = 1$ (*), ossia

(*) Se fosse $b=0$, le trasformazioni di G_1 sarebbero collineazioni.

$$(1) \qquad \beta = e^{u-v} \quad , \quad U = d_1 \quad , \quad V = e^{2v} + d_2 \, .$$

Dalle (4) del § 75 si deduce:

$$F_1' = e^{u-v}(2\gamma' + \gamma) \quad , \quad F_2' = e^{u-v}(\gamma' + 2\gamma) \, ,$$

sicchè possiamo prendere:

$$F_1 + F_2 = 3e^{u-v}\gamma \, .$$

Eliminando γ si trova:

$$F_1' - 2F_2' + F_1 + F_2 = 0 \, .$$

Se ne deduce tosto che possiamo esprimere F_1, F_2 e γ mediante una sola funzione F della $u - v$ secondo le formole

$$(1)_{\text{bis}} \qquad \gamma = e^{v-u}F' \quad , \quad F_1 = 2F' - F \quad , \quad F_2 = F' + F \, .$$

Infine sostituendo i valori (1) e $(1)_{\text{bis}}$ nella (6) del § 75 troviamo che F deve soddisfare all'equazione differenziale del quarto ordine (*)

$$(1)_{\text{ter}} \quad e^{2(u-v)}(F'' + 3F' + 2F + 1) + 2(F'' - F')(2F' - F + d_1) + \\ + F'(2F'' - F') + F'''' - 3F''' + 3F'' - F' = 0 \, .$$

Se invece in (E_1) $A = 0$, la (8) del § 75 dà

$$\beta = a \quad , \quad U = d_1 \quad , \quad V = bv + d_2 \quad , \quad ab \neq 0 \, .$$

Dalle (4) del § 75 si deduce:

$$F_1' = 2a\gamma' \quad , \quad F_2' = a\gamma' \, ,$$

sicchè possiamo prendere:

$$F_1 = 2a\gamma \quad , \quad F_2 = a\gamma \, .$$

(*) Abbiamo posto $d_2 = 0$. Si vede subito che ciò non restringe la generalità.

Sostituendo i valori trovati per β, U, V, F_1, F_2 nella (6) del § 5 si ottiene:

$$\gamma''' + 6a\gamma\gamma' + (2d_1 + a^2)\gamma' - ab = 0,$$

onde

$$\gamma'' + 3a\gamma^2 + (2d_1 + a^2)\gamma - ab(u - v) = c.$$

Facendo uso delle (2) del § 75 possiamo limitarci a supporre $a = 1$, $d_2 = 0$, $c = 0$, cosicchè:

$$\beta = 1 \quad , \quad U = d_1 \quad , \quad V = bv \quad , \quad ab \neq 0$$

(2) $$F_1 = 2\gamma \quad , \quad F_2 = \gamma ,$$

$$\gamma'' + 3\gamma^2 + (2d_1 + 1)\gamma - b(u - v) = 0 .$$

B) Superficie della specie B_2.

Vi sono tre tipi di superficie della specie B_2*, dipendenti rispettivamente da sei, cinque e due costanti arbitrarie.*

Supponiamo dapprima che in (E_2) $A \neq 0$. La (8) del § 75 dà (*)

$$\beta = a\gamma e^{2A(u-v)} + 2be^{A(u-v)}$$

$$ac \neq 0$$

$$U = -ace^{2Au} + d_1 \quad , \quad V = ce^{2Av} + d_2 .$$

Dalle (2) del § 75 si vede che si può supporre $a = A = 1$, $c = 1$ ossia:

(2) $$\beta = e^{2(u-v)}\gamma + 2be^{u-v},$$

$(2)_{\text{bis}}$ $$U = -e^{2u} + d_1 \quad , \quad V = e^{2v} + d_2 \quad , \quad c \neq 0 .$$

(*) Abbiamo scritto $2Ac$ al posto di c e $2b$ al posto di b. Se fosse $a = 0$, si tornerebbe a (E_1). Se fosse $c = 0$, U e V sarebbero costanti e il gruppo G_4 si comporrebbe di collineazioni.

Dalla (2) si vede che esiste una funzione F della sola $u-v$ tale che sia

$$(2)_{\text{ter}} \qquad \beta = e^{u-v}(\sqrt{F'} + b) \quad , \quad \gamma = e^{v-u}(\sqrt{F'} - b)$$

Sostituendo nelle (4) del § 75 vediamo che si può prendere

$$(2)_{\text{quater}} \qquad \begin{aligned} F_1 &= \frac{3}{2} F' + b\sqrt{F'} - F + b^2(u-v) \, , \\ F_2 &= \frac{3}{2} F' - b\sqrt{F'} + F - b^2(u-v) \, . \end{aligned}$$

Infine sostituendo nella (6) del § 75 otteniamo che F deve soddisfare all'equazione differenziale del quarto ordine

$$\begin{aligned} & e^{u-v}\Big[\frac{1}{2} F'''' - \frac{3}{4} F'^{-1} F'' F''' + \frac{3}{2} F''' + \frac{3}{8} F'^{-2} F''^3 - \\ & - \frac{3}{4} F'^{-1} F''^2 + 3F'F'' + \Big(F + d_2 - \frac{b^2}{2} - b^2(u-v) + \frac{3}{2}\Big) F'' + 4F'^2 + \\ & + 2bF'^{\frac{3}{2}} + \Big(2F + 2d_2 - 3b^2 - 2b^2(u-v) + 1\Big) F' + 2bFF'^{\frac{1}{2}} - \\ & - \Big(2b^3(u-v) - 2bd_2 + b^3 - b\Big) F'^{\frac{1}{2}}\Big] + e^{v-u}\Big[\frac{1}{2} F'''' - \\ & \frac{3}{4} F'^{-1} F'' F''' - \frac{3}{2} F''' + \frac{3}{8} F'^{-2} F''^3 + \frac{3}{4} F'^{-1} F''^2 + 3F'F'' - \Big(F - \\ & - d_1 + \frac{b^2}{2} - b^2(u-v) + \frac{3}{2}\Big) F'' + 4F'^2 + 2bF'^{\frac{3}{2}} + (2F - 2d_1 + \\ & + 3b^2 - 2b^2(u-v) - 1) F' - 2bFF'^{\frac{1}{2}} + (2b^3(u-v) + 2bd_1 - b^3 + \\ & + b) F'^{\frac{1}{2}}\Big] = 0 \, . \qquad (2)_{\text{quinquies}} \end{aligned}$$

Notiamo che si può supporre $d_1 = d_2$ senza ledere la generalità. Così facciamo nel quadro alla fine del Capitolo.

Sia invece in (E_2) $A = 0$. La (8) del § 75 dà

$$(3) \qquad \beta = a\gamma + b \; , \; U = -acu + d_1 \; , \; V = cv + d_2 \; , \; ac \neq 0 \, .$$

Dalle (4) del § 75 si ottiene pertanto:

$$F'_1 = 3a\gamma\gamma' + 2b\gamma' \quad , \quad F'_2 = 3a\gamma\gamma' + b\gamma' \, ,$$

sicchè si può prendere:

$$(3)_{\text{bis}} \qquad F_1 = \frac{3a}{2}\gamma^2 + 2b\gamma \quad , \quad F_2 = \frac{3a}{2}\gamma^2 + b\gamma \, .$$

Sostituendo tali valori nella (6) del § 75 si deduce che γ deve soddisfare all'equazione differenziale *in generale* del terzo ordine

$$(3)_{\text{ter}} \qquad (1+a)\gamma''' + 6a(1+a)\gamma^2\gamma' + 6b(1+a)\gamma\gamma' -$$
$$- 2ac(u-v)\gamma' + (2ad_2 + 2d_1 + b^2)\gamma' - 2ac\gamma - bc = 0 \, .$$

Le (2) del § 75 mostrano che non si restringe la generalità supponendo $d_2 = 0$, $d_1 = -\dfrac{b^2}{2}$, $c = 1$.

Ma la forma dell'equazione $(3)_{\text{ter}}$ prova che il caso $a + 1 = 0$ deve essere trattato a parte. (*) Le equazioni precedenti diventano allora, posto $d_2 = 0$, $d_1 = -\dfrac{b^2}{2}$, $c = 1$,

$$(4) \quad \beta = -\gamma + b \; , \; U = u - \frac{b^2}{2} \; , \; V = v \; , \; F_1 = -\frac{3}{2}\gamma^2 + 2b\gamma \, ,$$

$$F_2 = -\frac{3}{2}\gamma^2 + b\gamma \quad , \quad 2(u-v)\gamma' + 2\gamma - b = 0 \, .$$

(*) Per mettere in evidenza tale circostanza, scriviamo $\dfrac{1}{a}$ al posto di $1+a$ nel quadro alla fine del Capitolo.

Se ne deduce:

$$(u-v)(2\gamma-b)=2h=\text{cost.},$$

$$\beta=-\frac{h}{u-v}+\frac{b}{2} \quad , \quad \gamma=\frac{h}{u-v}+\frac{b}{2} \tag{5}$$

$$L=u-\frac{3}{2}\frac{h^2}{(u-v)^2}+\frac{1}{2}\frac{bh}{u-v}+\frac{1}{2}b^2,$$

$$(5)_{\text{bis}}$$

$$M=v-\frac{3}{2}\frac{h^2}{(u-v)^2}-\frac{1}{2}\frac{bh}{u-v}+\frac{1}{8}b^2.$$

Dobbiamo supporre $hb \neq 0$ perchè altrimenti la superficie ammetterebbe ∞^2 deformazioni proiettive in sè.

§ 77. Verifiche per la specie B_3.

1. Questo caso è il più difficile. Vi sono quindici tipi di superficie della specie B_3 distinti anche nel campo complesso, sei tipi dipendendo da due costanti arbitrarie, gli altri da tre costanti ciascuno. Nel campo reale il numero di tipi distinti è ancor più grande.

Le equazioni (E_3) e (8) § 75 dànno:

$$\beta=\frac{-a_1c_2e^{A(u-v)}+a_2c_1e^{B(u-v)}}{a_2b_1e^{-(A-B)(u-v)}-a_1b_2e^{(A-B)(u-v)}},$$

(1)

$$\gamma=\frac{b_1c_2e^{-A(u-v)}-b_2c_1e^{-B(u-v)}}{a_2b_1e^{-(A-B)(u-v)}-a_1b_2e^{(A-B)(u-v)}},$$

$$U=\frac{a_1}{2A}e^{2Au}+\frac{a_2}{2B}e^{2Bu}+d_1,$$

(2)

$$V=\frac{b_1}{2A}e^{2Av}+\frac{b_2}{2B}e^{2Bv}+d_2,$$

convenendo di sostituire u e v rispettivamente a

$\frac{1}{2B} e^{2Bu}$ ed a $\frac{1}{2B} e^{2Bv}$ se $B=0$, e similmente se $A=0$.

Le equazioni (4) del § 75 possono scriversi:

$$F_1+F_2=3\beta\gamma \quad , \quad F'_1-F'_2=\beta\gamma'-\gamma\beta' .$$

Posto per brevità

(3) $$z=e^{(A-B)(u-v)},$$

si deduce dalle (1):

$$\beta\gamma'-\gamma\beta'=\frac{-(A+B)c_1c_2(a_1b_2z+a_2b_1z^{-1})+2Aa_1b_1c_2^2+2Ba_2b_2c_1^2}{(a_1b_2z-a_2b_1z^{-1})^2},$$

$$F_1-F_2=$$

$$=\frac{1}{A-B}\int\frac{-(A+B)c_1c_2(a_1b_2z^2+a_2b_1)+2(Aa_1b_1c_2^2+Ba_2b_2c_1^2)}{(a_1b_2z^2-a_2b_1z)^2}\,dz.$$

Osserviamo che *si può supporre* $a_1b_2\neq 0$. Infatti non può essere simultaneamente $a_1b_2=a_2b_1=0$; d'altra parte, il caso $a_1b_2=0$, $a_2b_1\neq 0$ si riduce ad $a_1b_2\neq 0$ scambiando le lettere A e B. Sia pertanto $a_1b_2\neq 0$. Allora si deduce dalla precedente

$$F_1-F_2=\frac{1}{A-B}\,\frac{(A+B)c_1c_2z-\left(A\frac{b_1}{b_2}c_2^2+B\frac{a_2}{a_1}c_1^2\right)}{a_1b_2z^2-a_2b_1}.$$

Ricordando che

$$F_1+F_2=3\beta\gamma=3\,\frac{c_1c_2(a_1b_2z^2+a_2b_1)-z(a_1b_2c_2^2+a_2b_2c_1^2)}{(a_1b_2z^2-a_2b_1)^2},$$

si trova:

$$F_1=\frac{1}{2(A-B)}(a_1b_2z^2-a_2b_1)^{-2}\Big[2(2A-B)a_1b_2c_1c_2z^3+$$

(4) $$+\{(-4A+3B)a_1b_1c_2^2+(-3A+2B)a_2b_2c_1^2\}z^2+$$

$$+2(A-2B)a_2b_1c_1c_2z+\frac{a_2b_1}{a_1b_2}(Aa_1b_1c_2^2+Ba_2b_2c_1^2)\Big],$$

$$F_2 = \frac{1}{2(A-B)}(a_1 b_2 z^2 - a_2 b_1)^{-2}\Big[2(A-2B)a_1 b_2 c_1 c_2 z^3 +$$

$$(4)_{bis} \quad + \{(-2A+3B)a_1 b_1 c_2^2 + (-3A+4B)a_2 b_2 c_1^2\} z^2 +$$

$$+ 2(2A-B)a_2 b_1 c_1 c_2 z - \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}(A a_1 b_1 c_2^2 + B a_2 b_2 c_1^2)\Big] .$$

Basta sostituire i valori ora trovati nell'equazione (6) del § 75; dopo un calcolo piuttosto lungo si trova

$$\eta + z^{\frac{A+B}{A-B}}\Big\{-B(A-B)(B^2+2d_2)a_1^4 b_2^3 c_2 z^7 +$$

$$+ a_1^3 b_2^2 c_1(A-2B)\Big[c_2^2(A-3B) - a_2 b_2(A-B)\{(A-2B)^2 +$$

$$+ 2d_2\}\Big] z^6 + a_1^2 b_2 c_2\Big[(a_1 b_1 c_2^2 + 3a_2 b_2 c_1^2)(2A-3B)(-A+2B) +$$

$$+ a_1 a_2 b_1 b_2(A-B)(8A^3 - 36A^2B + 54AB^2 - 23B^3 +$$

$$+ 2d_2(2A+B))\Big] z^5 + a_1 a_2 b_2 c_1\Big[a_1 b_1 c_2^2(17A^2 - 44AB +$$

$$+ 24B^2) + a_2 b_2 c_1^2(2A-3B)(3A-4B) + a_1 a_2 b_1 b_2(A-$$

(5)

$$-B)(-23A^3 + 84A^2B - 96AB^2 + 32B^3 + 2d_2(A-4B))\Big] z^4 +$$

$$+ a_1 a_2 b_1 c_2\Big[-2(a_1 b_1 c_2^2 + 3a_2 b_2 c_1^2)(2A-B)(2A-3B) +$$

$$+ a_1 a_2 b_1 b_2(A-B)(32A^3 - 96A^2B + 84AB^2 - 23B^3 +$$

$$+ 2d_2(-4A+B))\Big] z^3 + a_2^2 b_1 c_1\Big[a_1 b_1 c_2^2(17A^2 - 23AB +$$

$$6B^2) + 2a_2 b_2 c_1^2 A(3A-4B) + a_1 a_2 b_1 b_2(A-B)(-23A^3 +$$

$$+54A^2B-36AB^2+8B^3)+2d_2(A+2B))\Big]z^2+$$

$$+\frac{a_2^2b_1^2c_2}{b_2}(-2A+B)\Big[(a_1b_1c_2^2+3a_2b_2c_1^2)A-a_1a_2b_1b_2(A-$$

$$-B)((2A-B)^2+2d_2)\Big]z+$$

$$+\frac{a_2^3b_1^2c_1}{a_1b_2}A\Big[a_1b_1c_2^2A+a_2b_2c_1^2B-a_1a_2b_1b_2(A-B)(A^2+2d_2)\Big]=$$

(5)

$$=-A(A-B)(A^2+2d_1)a_1^3b_2^4c_1z^7+$$

$$+a_1^2b_2^3c_2(2A-B)\Big[-c_1^2(3A-B)+a_1b_1(A-B)((2A-B)^2+$$

$$+2d_1)\Big]z^6+a_1b_2^2c_1\Big[(3a_1b_1c_2^2+a_2b_2c_1^2)(3A-2B)(2A-B)-$$

$$-a_1a_2b_1b_2(A-B)(23A^3-54A^2B+36AB^2-8B^3-$$

$$-2d_1(A+2B))\Big]z^5+a_1b_1b_2c_2\Big[-a_1b_1c_2^2(4A-3B)(3A-$$

$$-2B)-a_2b_2c_1^2(24A^2-44AB+17B^2)+a_1a_2b_1b_2(A-$$

$$-B)(32A^3-96A^2B+84AB^2-23B^3-2d_1(4A-B))\Big]z^4+$$

$$+a_2b_1b_2c_1\Big[2(3a_1b_1c_2^2+a_2b_2c_1^2)(A-2B)(3A-2B)-$$

$$-a_1a_2b_1b_2(A-B)(23A^3-84A^2B+96AB^2-32B^3-$$

$$-2d_1(A-4B))\Big]z^3+a_2b_1^2c_2\Big[2a_1b_1c_2^2B(4A-3B)-$$

$$-a_2b_2c_1^2(6A^2-23AB+17B^2)+a_1a_2b_1b_2(A-B)(8A^3-$$

$$-36A^2B+54AB^2-23B^3+2d_1(2A+B))\Big]z^2+$$

$$+\frac{a_2^2 b_1^2 c_1}{a_1}(-A+2B)\Big[(3a_1 b_1 c_2^2 + a_2 b_2 c_1^2)B + a_1 a_2 b_1 b_2 (A-$$

$$-B)((-A+2B)^2+2d_1)\Big]z+$$

$$+\frac{a_2^2 b_1^3 c_2}{a_1 b_2}B\Big[-a_1 b_1 c_2^2 A - a_2 b_2 c_1^2 B - a_1 a_2 b_1 b_2 (A-$$

$$-B)(B^2+2d_1)\Big] .$$

In quest'equazione $\eta = 0$ se $AB \neq 0$; se invece $B = 0$, è:

$$\eta = A(a_1 b_2 z^2 - a_2 b_1)^2 \Big[a_1^2 b_2^2 c_2 z^4 - 2a_1 a_2 b_2^2 c_1 z^3 + 2a_2^2 b_1 b_2 c_1 z -$$

$$-a_2^2 b_1^2 c_2 + 2a_2 b_2 A(u-v)z(a_1 b_2 c_1 z^2 - 2a_1 b_1 c_2 z + a_2 b_1 c_1)\Big]$$

e, se $A = 0$, è:

$$\eta = Bz^{-1}(a_1 b_2 z^2 - a_2 b_1)^2 \Big[a_1^2 b_2^2 c_1 z^4 - 2a_1^2 b_1 b_2 c_2 z^3 + 2a_1 a_2 b_1^2 c_2 z -$$

$$-a_2^2 b_1^2 c_1 - 2a_1 b_1 B(u-v)z(a_1 b_2 c_2 z^2 - 2a_2 b_2 c_1 z + a_2 b_1 c_2)\Big] .$$

Osserviamo che, appena conosciuta una scelta di costanti A B, a_1, b_2,... tale che l'equazione (5) sia identicamente soddisfatta, se ne deduce un'altra (che può coincidere con la prima) mediante la sostituzione

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & b_1, & b_2, & c_1, & c_2, & A, & B, & d_1, & d_2 \\ -b_2, & -b_1, & -a_2, & -a_1, & -c_2, & -c_1, & -B, & -A, & d_2, & d_1 \end{pmatrix} .$$

Ora tale sostituzione equivale allo scambio di u con v e non dà pertanto niente di essenzialmente nuovo. Quindi non scriveremo che una di due tali soluzioni equivalenti.

2. È facile vedere che, se $AB = 0$, è impossibile trovare dei valori di a_1, a_2.... tali che la (5) sia soddisfatta identicamente

e che sia $\beta\gamma \neq 0$. Invece se $AB \neq 0$, l'equazione (5) possiede quattordici soluzioni distinte. Il lettore può vedere il calcolo relativo nella Memoria di Čech.: *Sur les surfaces qui admettent* ∞^1 *déformations projectives en elles mêmes* (*). Rinviando a tale Memoria scriviamo qui senza dimostrazione le diverse soluzioni di (5) per cui $\beta\gamma \neq 0$. Esse sono:

$(\alpha)_1$ $\quad c_2=0,\ c_1^2=4a_1b_1(A-B)^2,\ 2d_1=-A^2,\ 2d_2=-(A-2B)^2;$

$(\alpha)_2$ $\quad c_1^2=a_1b_1(A-B)^2,\ c_2^2=a_2b_2(A-B)^2,\ 2d_1=-A^2,\ 2d_2=-B^2,$

$(\beta)_1$
$$B=-A,\quad c_1^2=4a_1b_1A^2,\quad c_2^2=4a_2b_2A^2,$$
$$2d_1=-A^2+ha_1c_2,\quad 2d_2=-A^2-hb_2c_1;$$

$(\beta)_2$ $\quad B=-A,\ b_1=\mu a_1,\ a_2=\mu b_2,\ c_1=\nu a_1,\ c_1=-\nu b_2,\ d_1=d_2;$

$(\beta)_3$
$$B=-A,\quad a_2=\frac{(a_1c_2+c_1b_2)^2}{16A^2a_1^2b_2},\quad b_1=\frac{(a_1c_2+c_1b_2)^2}{16A^2a_1b_2^2},$$
$$2d_1=-A^2+8a_1c_2\frac{b_2c_1-a_1c_2}{(a_1c_2+b_2c_1)^2}A^2,$$
$$2d_2=-A^2-8b_2c_1\frac{b_2c_1-a_1c_2}{(a_1c_2+b_2c_1)^2}A^2;$$

$(\gamma)_1$
$$A=3B,\quad b_1=h^3a_1,\quad a_2=\frac{b_2}{h},\quad c_1=hka_1,\quad c_2=-\frac{k}{h}b_2,$$
$$2d_1=-B^2-\frac{2k^2}{h},\quad 2d_2=-B^2;$$

$(\gamma)_2$
$$A=3B,\quad b_1=\lambda^6a_1,\quad b_2=\lambda^2a_2,\quad B=\frac{\lambda^2a_1c_2+a_2c_1}{4\lambda^3a_1a_2},$$

(*) Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, 1924, no 40. Brno, Cecoslovacchia.

$$2d_1 = -B^2 - \frac{3\lambda^4 a_1^2 c_2^2 + a_2^2 c_1^2}{2\lambda^6 a_1^2 a_2^2}, \quad 2d_2 = -B^2 ;$$

$(\delta)_1$
$$A = 2B, \quad c_2 = 0, \quad b_1 = h^2 a_1, \quad b_2 = h a_2,$$
$$c_1^2 = 2h^2 a_1^2 (d_2 - d_1) ;$$

$(\delta)_2$
$$A = 2B, \quad c_2 = 0, \quad c_1^2 = 4 a_1 b_1 B^2, d_2 = \frac{a_1 b_2^2}{a_2^2 b_1}(2B^2 + d_1);$$

$(\delta)_3$
$$A = 2B, \quad b_1 = h^2 a_1, \quad b_2 = h a_2,$$
$$2d_1 = -B^2 - \frac{2c_2^2}{h a_2^2} - \frac{c_1^2}{h^2 a_1^2}, \quad 2d_2 = -B^2 ;$$

$(\varepsilon)_1$
$$A = 3\alpha, \quad B = 2\alpha, \quad a_2^3 b_1^2 = a_1^2 b_2^3,$$
$$c_2 = 0, \quad 2c_1^2 = -a_1 b_1 (\alpha^2 + 2d_1), \quad 2d_2 = -\alpha^2 ;$$

$(\varepsilon)_2$
$$A = 3\alpha, \quad B = 2\alpha, \quad a_2^3 b_1^2 = a_1^2 b_2^3,$$
$$c_1 = 0, \quad 3c_2^2 = -a_2 b_2 (4\alpha^2 + 2d_1), \quad 2d_2 = -4\alpha^2;$$

$(\varepsilon)_3$
$$A = 3\alpha, \quad B = 2\alpha, \quad a_2^3 b_1^2 = a_1^2 b_2^3,$$
$$c_2^2 = a_2 b_2 \alpha^2, \quad 2c_1^2 = -a_1 b_1 (7\alpha^2 + 2d_1), \quad 2d_2 = -4\alpha^2 ;$$

(ζ)
$$A = 4\alpha, \quad B = 3\alpha, \quad c_2 = 0, \quad 3c_1^2 = -a_1 b_1 (4\alpha^2 + 2d_1),$$
$$a_1^3 b_2^4 - a_2^4 b_1^3 = 0, \quad 2d_2 = -4\alpha^2 .$$

Calcoliamo ora nei diversi casi i valori di β, γ, L, M, semplificando mediante un'opportuna sostituzione della forma (2) del § 75.

Nel caso $(\alpha)_1$ possiamo supporre $A = \alpha + 1$, $B = \alpha - 1$ $(\alpha^2 \neq 1)$, $a_1 = \varepsilon_1 a_2$, $b_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 b_2$, $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$. Si ottiene (*)

(*) Il radicale $\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}$ può essere positivo o negativo, ma $\sqrt{\frac{a_1}{b_1}} \cdot \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} = +1$.

$$\beta = 4\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\,\frac{e^{(\alpha+1)u-v)}}{1-\varepsilon_2 e^{4(u-v)}}\,,\quad \gamma = 4\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}\,\frac{e^{-(\alpha+1)(u-v)}}{1-\varepsilon_2 e^{-4(u-v)}}\,,$$

$$L = \frac{a_1}{2(\alpha+1)}e^{2(\alpha+1)u} + \frac{\varepsilon_1 a_1}{2(\alpha-1)}e^{2(\alpha-1)u} - \frac{(\alpha+1)^2}{2} +$$

$$+\frac{4\left[-\varepsilon_2(\alpha+5)e^{4(u-v)}+\alpha-1\right]}{(1-\varepsilon_2 e^{4(u-v)})^2}\,,$$

$$M = \frac{b_1}{2(\alpha+1)}e^{2(\alpha+1)v} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 b_1}{2(\alpha-1)}e^{2(\alpha-1)v} - \frac{(\alpha-3)^2}{2} +$$

$$+\frac{4\left[\varepsilon_2(\alpha-7)e^{4(u-v)}-\alpha+1\right]}{(1-\varepsilon_2 e^{4(u-v)})^2}\,.$$

Nel caso $(\alpha)_2$ possiamo supporre $A=\alpha+1$, $B=\alpha-1$ $(\alpha^2 \neq 1)$ $a_2=\varepsilon_1 a_1$, $b_2=\varepsilon_1 b_1$, $\varepsilon_1^2=1$. Posto $\varepsilon=\pm 1$ si ottiene (*)

$$\beta = 2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\,\frac{e^{(\alpha+1)(u-v)}-\varepsilon e^{(\alpha+3)(u-v)}}{1-e^{4(u-v)}}\,,$$

$$\gamma = -2\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}\,\frac{e^{-(\alpha-3)(u-v)}-\varepsilon e^{-(\alpha-1)(u-v)}}{1-e^{4(u-v)}}\,,$$

$$L = \frac{a_1}{2(\alpha+1)}e^{2(\alpha+1)u} + \frac{\varepsilon_1 a_1}{2(\alpha-1)}e^{2(\alpha-1)u} - \frac{(\alpha+1)^2}{2} +$$

$$+\frac{2\left[\varepsilon(\alpha+3)e^{6(u-v)}-(\alpha+6)e^{4(u-v)}-\varepsilon(\alpha-3)e^{2(u-v)}+1\right]}{(1-e^{4(u-v)})^2}\,,$$

$$M = \frac{b_1}{2(\alpha+1)}e^{2(\alpha+1)v} + \frac{\varepsilon_1 b_1}{2(\alpha-1)}e^{2(\alpha-1)v} - \frac{(\alpha-1)^2}{2} +$$

(*) I due casi $\varepsilon=1$ e $\varepsilon=-1$ sono distinti anche nel campo complesso; sui radicali $\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}$ e $\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}$ v. a nota precedente. Queste due osservazioni valgono anche per $(\beta)_1$.

$$+\frac{2\left[-\varepsilon(\alpha-3)e^{6(u-v)}+(\alpha-6)e^{4(u-v)}+\varepsilon(\alpha+3)e^{2(u-v)}-1\right]}{(1-e^{4(u-v)})^2}\,.$$

Nel caso $(\beta)_1$ possiamo supporre $A=1$, $a_2=\varepsilon_1 a_1$, $b_2=$ $=\varepsilon_1 b_1$, $\varepsilon_1^2=1$. Posto $\varepsilon=\pm 1$, si ottiene:

$$\beta=2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\,\frac{e^{u-v}}{1+\varepsilon e^{2(u-v)}}\,,\quad \gamma=2\varepsilon\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}\,\frac{e^{u-v}}{1+\varepsilon e^{2(u-v)}}\,,$$

$$L=\frac{a_1}{2}e^{2u}-\frac{\varepsilon_1 a_1}{2}e^{-2u}-\frac{1}{2}+\varepsilon_1\varepsilon h a_1^2\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}+\frac{6\varepsilon e^{2(u-v)}}{(1+\varepsilon e^{2(u-v)})^2}\,,$$

$$M=\frac{b_1}{2}e^{2v}-\frac{\varepsilon_1 b_1}{2}e^{-2v}-\frac{1}{2}-\varepsilon_1 h b_1^2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}+\frac{6\varepsilon e^{2(u-v)}}{(1+\varepsilon e^{2(u-v)})^2}\,.$$

Nel caso $(\beta)_2$ possiamo supporre $A=1$, $\mu=\varepsilon_1$, $a_1=\varepsilon_1\varepsilon_2 b_2$, $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2^2=1$. (*) Si ottiene:

$$\beta=\frac{\nu}{\varepsilon_1 e^{v-u}-e^{u-v}}\,,\quad \gamma=-\frac{\nu}{\varepsilon_1 e^{v-u}-e^{u-v}}\,,$$

$$L=\frac{a_1}{2}e^{2u}-\frac{\varepsilon_2 a_1}{2}e^{-2u}+d_1-\frac{3\nu^2}{2}\,\frac{1}{(\varepsilon_1 e^{v-u}-e^{u-v})^2}\,,$$

$$M=\varepsilon_1\left(\frac{a_1}{2}e^{2v}-\frac{\varepsilon_2 a_1}{2}e^{-2v}\right)+d_1-\frac{3\nu^2}{2}\,\frac{1}{(\varepsilon_1 e^{v-u}-e^{u-v})^2}\,.$$

Nel caso $(\beta)_3$ possiamo supporre $A=1$, $a_1 c_2+c_1 b_2=$ $=4\varepsilon_1 a_1 b_2$, $c_1=\varepsilon_2 c_2$, $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2^2=1$. Si ottiene:

$$\beta=\frac{4\varepsilon_1}{\varepsilon_2 a_1+b_2}\,\frac{b_2 e^{v-u}-\varepsilon_2 a_1 e^{u-v}}{e^{2(v-u)}-e^{2(u-v)}}\,,\ \gamma=\frac{4\varepsilon_1}{\varepsilon_2 a_1+b_2}\,\frac{\varepsilon_2 a_1 e^{v-u}-b_2 e^{u-v}}{e^{2(v-u)}-e^{2(u-v)}}\,,$$

$$L=\frac{a_1}{2}e^{2u}-\frac{b_2}{2}e^{-2u}-\frac{1}{2}-4\,\frac{\varepsilon_2 a_1(\varepsilon_2 a_1-b_2)}{(\varepsilon_2 a_1+b_2)^2}+$$

(*) Se fosse $\mu=0$, la superficie ammetterebbe ∞^2 deformazioni proiettive in sè.

$$+\frac{4}{(\varepsilon_2 a_1+b_2)^2}\frac{\left[6\varepsilon_2 a_1 b_2 e^{6(u-v)}-(7a_1^2+5b_2^2)e^{4(u-v)}+6\varepsilon_2 a_1 b_2 e^{2(u-v)}+a_1^2-b_2^2\right]}{(e^{4(u-v)}-1)^2},$$

$$M=\frac{a_1}{2}e^{2v}-\frac{b_2}{2}e^{-2v}-\frac{1}{2}+4\frac{b_2(\varepsilon_2 a_1-b_2)}{(\varepsilon_2 a_1+b_2)^2}+$$

$$+\frac{4}{(\varepsilon_2 a_1+b_2)^2}\frac{\left[6\varepsilon_2 a_1 b_2 e^{6(u-v)}-(5a_1^2+7b_2^2)e^{4(u-v)}+6\varepsilon_2 a_1 b_2 e^{2(u-v)}-a_1^2+b_2^2\right]}{(e^{4(u-v)}-1)^2}.$$

Nel caso $(\gamma)_1$ possiamo supporre $B=1$, $h=\varepsilon_1$, $c_2=-$ $-\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2^2=1$. Si ottiene:

$$\beta=\frac{\varepsilon_1}{b_2}\frac{e^{3(u-v)}}{1-\varepsilon_1 e^{2(u-v)}},\quad \gamma=-\frac{1}{b_2}\frac{e^{u-v}}{1-\varepsilon_1 e^{2(u-v)}},$$

$$L=\frac{a_1}{6}e^{6u}+\frac{\varepsilon_1 b_2}{2}e^{2u}-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon_1}{b^2}-\frac{1}{2b_2^2}\frac{5e^{2(u-v)}-2\varepsilon_1}{(e^{2(u-v)}-\varepsilon_1)^2},$$

$$M=\frac{\varepsilon_1 a_1}{6}e^{6v}+\frac{b_2}{2}e^{2v}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2b_2^2}\frac{e^{2(u-v)}+2\varepsilon_1}{(e^{2(u-v)}-\varepsilon_1)^2}.$$

Nel caso $(\gamma)_2$ possiamo supporre $B=1$, $\lambda=\varepsilon_1$, $b_2=\varepsilon_2 a_1$, $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2^2=1$. Posto $c_1-\varepsilon_2 c_2=4c$ si ottiene:

$$\beta=2e^{3(u-v)}\left(\frac{\varepsilon_1}{1+e^{2(u-v)}}+\frac{c}{a_1}\frac{1}{1-e^{2(u-v)}}\right),$$

$$\gamma=2e^{v-u}\left(\frac{\varepsilon_1}{1+e^{2(u-v)}}-\frac{c}{a_1}\frac{1}{1+e^{2(u-v)}}\right),$$

$$L=\frac{a_1}{6}e^{6u}+\frac{\varepsilon_2 a_1}{2}e^{2u}-\frac{1}{2}-4\frac{a_1^2-\varepsilon_1 a_1 c+c^2}{a_1^2}+$$

$$+\frac{2}{a_1^2}\times$$

$$\times\frac{5(a_1^2-c^2)e^{6(u-v)}-2(4a_1^2-\varepsilon_1 a_1 c+4c^2)e^{4(u-v)}+(a_1^2-c^2)e^{2(u-v)}+2(a_1^2-\varepsilon_1 a_1 c+c^2)}{(1-e^{4(u-v)})^2},$$

$$M = \frac{a_1}{6} e^{6v} + \frac{\varepsilon_2 a_1}{2} e^{2v} - \frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{2}{a_1^2} \times$$

$$\times \frac{(a_1^2 - c^2) e^{6(u-v)} - 2(2a_1^2 + \varepsilon_1 a_1 c + 2c^2) e^{4(u-v)} + 5(a_1^2 - c^2) e^{2(u-v)} - 2(a_1^2 - \varepsilon_1 a_1 c + c^2)}{(1 - e^{4(u-v)})^2} .$$

Nel caso $(\delta)_1$ possiamo supporre $B = 1$, $h = \varepsilon_1$, $b_2 = \varepsilon_2 a_1$, $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 0$. Si ottiene:

$$\beta = \frac{\sqrt{2(d_2 - d_1)}}{e^{2(v-u)} - \varepsilon_1}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{2(d_2 - d_1)}}{e^{2(u-v)} - \varepsilon_1},$$

$$L = \frac{a_1}{4} e^{4u} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 a_1}{2} e^{2u} + d_1 + (d_1 - d_2) \frac{4 \varepsilon_1 e^{2(u-v)} - 1}{(e^{2(u-v)} - \varepsilon_1)^2},$$

$$M = \varepsilon_2 \left(\frac{\varepsilon_1 a_1}{4} e^{4v} + \frac{a_1}{2} \right) e^{2v} + d_2 + (d_1 - d_2) \frac{2 \varepsilon_1 e^{2(u-v)} + 1}{(e^{2(u-v)} - \varepsilon_1)^2} .$$

Nel caso $(\delta)_2$ possiamo supporre $B = 1$, $c_1 = 2\varepsilon_1$, $a_2 b_1 = \varepsilon_2 a_1 b_2$, $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$. Si ottiene:

$$\beta = \frac{2\varepsilon_1 a_1}{e^{2(v-u)} - \varepsilon_2}, \quad \gamma = \frac{2\varepsilon_1}{a_1} \frac{1}{e^{2(u-v)} - \varepsilon_2},$$

$$L = \frac{a_1}{4} e^{4u} + \frac{\varepsilon_2 a_1^2 b_2}{2} e^{2u} + d_1 - 2 \frac{4 \varepsilon_2 e^{2(u-v)} - 1}{(e^{2(u-v)} - \varepsilon_2)^2},$$

$$M = \frac{1}{4 a_1} e^{4v} + \frac{b_2}{2} e^{2v} + \frac{d_1 + 2}{a_1^2} - 2 \frac{2\varepsilon_2 e^{2(u-v)} + 1}{(e^{2(u-v)} - \varepsilon_2)^2} .$$

Nel caso $(\delta)_3$ possiamo supporre $B = 1$, $h = \varepsilon_1$, $a_2 = \varepsilon_2 a_1$, $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$. Si ottiene:

$$\beta = \frac{1}{a_1} \frac{e^{2(u-v)} (c_1 - \varepsilon_2 c_2 e^{u-v})}{1 - \varepsilon_1 e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = \frac{1}{a_1} \frac{e^{2(v-u)} (c_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 c_2 e^{2(v-u)})}{1 - \varepsilon_1 e^{2(v-u)}},$$

$$L = \frac{a_1}{4} e^{4u} + \frac{\varepsilon_2 a_1}{2} e^{2u} - \frac{1}{2} - \varepsilon_1 \frac{c_2^2}{a_1^2} - \frac{1}{2} \frac{c_1^2}{a_1^2} +$$

$$+ \frac{1}{2a_1^2} \frac{6\varepsilon_1 \varepsilon_2 c_1 c_2 e^{3(u-v)} - (4\varepsilon_1 c_1^2 + 5c_2^2) e^{2(u-v)} + c_1^2 + 2\varepsilon_1 c_2^2}{(1 - \varepsilon_1 e^{2(u-v)})^2},$$

$$M = \frac{a_1}{4} e^{4v} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 a_1}{2} e^{2v} - \frac{1}{2} -$$

$$- \frac{1}{2 a_1^2} \frac{(2\varepsilon_1 c_1^2 + c_2^2) e^{2(u-v)} - 6\varepsilon_2 c_1 c_2 e^{u-v} + c_1^2 + 2\varepsilon_1 c_2^2}{(1 - \varepsilon_1 e^{2(u-v)})^2}.$$

Nel caso $(\varepsilon)_1$ possiamo supporre $\alpha = 1$, $a_2 = \varepsilon_1 a_1$, $b_1 = \varepsilon_2 a_1$, $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$. Si ottiene:

$$\beta = \frac{\varepsilon_2 c_1}{a_1} \frac{e^{3(u-v)}}{1 - \varepsilon_2 e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = \frac{c_1}{a_1} \frac{e^{3(v-u)}}{1 - \varepsilon_1 e^{2(v-u)}},$$

$$L = \frac{a_1}{6} e^{6u} + \frac{\varepsilon_1 a_1}{4} e^{4u} - \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_2 c_1^2}{a_1^2} - \frac{c_1^2}{2a_1^2} \frac{5e^{2(u-v)} - 2\varepsilon_2}{(1 - \varepsilon_2 e^{2(u-v)})^2},$$

$$M = \frac{\varepsilon_2 a_1}{6} e^{6v} + \frac{\varepsilon_1 a_1}{4} e^{4v} - \frac{1}{2} - \frac{c_1^2}{2 a_1^2} \frac{e^{2(u-v)} + 2 \varepsilon_2}{(1 - \varepsilon_2 e^{2(u-v)})^2}.$$

Nel caso $(\varepsilon)_2$ la superficie ammette ∞^2 deformazioni proiettive in sè, come si verifica facilmente.

Nel caso $(\varepsilon)_3$ possiamo supporre $\alpha = 1$, $a_2 = \varepsilon_1 a_1$, $b_1 = \varepsilon_2 a_1$, $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$. Posto $\varepsilon = \pm 1$, si ottiene:

$$\beta = \frac{e^{3(u-v)} \left(\frac{c_1}{a_1} - \varepsilon e^{u-v} \right)}{\varepsilon_2 - e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = \frac{e^{3(v-u)} \left(\frac{c_1}{a_1} - \varepsilon \varepsilon_2 e^{v-u} \right)}{1 - \varepsilon_2 e^{2(v-u)}},$$

$$L = \frac{a_1}{6} e^{6u} + \frac{\varepsilon_1 a_1}{4} e^{4u} - \frac{7}{2} - \frac{\varepsilon_2 c_1^2}{a_1^2} +$$

$$+ \frac{1}{2a_1^2} \frac{8\varepsilon a_1 c_1 e^{3(u-v)} - (6\varepsilon_2 a_1^2 + 5c_1^2) e^{2(u-v)} - 2\varepsilon\varepsilon_2 a_1 c_1 e^{u-v} + 3a_1^2 + 2\varepsilon_2 c_1^2}{(\varepsilon_2 - e^{2(u-v)})^2},$$

$$M = \frac{\varepsilon_2 a_1}{6} e^{6v} + \frac{\varepsilon_1 a_1}{4} e^{4v} - 2 -$$

$$- \frac{1}{2a_1^2} \frac{2\varepsilon a_1 c_1 e^{3(u-v)} - 2 c_1^2 e^{2(u-v)} - 8 \varepsilon \varepsilon_2 e^{u-v} + 3a_1^2 + 2 \varepsilon_2 c_1^2}{(\varepsilon_2 - e^{2(u-v)})^2} .$$

Nel caso (ζ) si vede facilmente che la superficie ammette ∞^2 deformazioni proiettive in sè.

4. È inutile esaminare direttamente la soluzione (E_3') dell'equazione (E) che nasce da (E_3) ponendo per A e B una coppia di quantità complesse coniugate. É evidente che soltanto i casi $(\alpha)_2$, $(\beta)_1$, $(\beta)_2$, $(\beta)_3$ possono dare superficie reali. Ora le quantità d_1, d_2 devono essere reali, come si vede subito, sicchè nel caso $(\alpha)_2$ A deve essere puramente immaginario; ma allora $A + B = 0$ e $(\alpha)_2$ è un caso particolare di $(\beta)_1$. Non restano pertanto che i casi $(\beta)_1$, $(\beta)_2$ e $(\beta)_3$. Nel caso $(\beta)_1$ si può supporre $A = i$, $a_2 = a_1$, $b_2 = b_1 = -\lambda^2 a_1$ (a_1 reale) e si ottiene:

$$\beta = -\frac{1}{\lambda} \frac{1}{\cos(u-v)} , \quad \gamma = \lambda \frac{1}{\cos(u-v)} ,$$

$$L = a_1 \sin 2u + \frac{1}{2} + h \lambda a_1^2 - \frac{3}{2} \frac{1}{\cos^2(u-v)} .$$

$$M = -\lambda^2 a_1 \sin 2v + \frac{1}{2} + h \lambda^3 a_1^2 - \frac{3}{2} \frac{1}{\cos^2(u-v)} .$$

Nel caso $(\beta)_2$ possiamo supporre $A = i$, $\mu = 1$, $b_2 = a_1$, $\nu = -\lambda i$. Si ottiene:

$$\beta = \frac{\lambda}{\sin(u-v)} , \quad \gamma = - \frac{\lambda}{\sin(u-v)} ,$$

$$L = a_1 \sin 2u + d_1 - \frac{3\lambda^2}{2} \frac{1}{\sin^2(u-v)} ,$$

$$M = a_1 \sin 2v + d_1 - \frac{3\lambda^2}{2} \frac{1}{\sin^2(u-v)} .$$

Il caso $(\beta)_3$ non conduce più a nessuna superficie reale come si vede facilmente.

§ 78. — Verifiche per le specie B_4, B_5, B_6.

$A)$ Specie B_4

1. *Vi sono due tipi distinti di superficie della specie* B_4 *dipendenti ciascuno da due costanti arbitrarie.*

Supponiamo dapprima $a_1 b_1 \neq 0$ in (E_4) e poniamo per brevità

$$(1) \qquad z = a_1 b_1 (u - v) - a_1 b_2 + a_2 b_1 \,, \quad m = a_1 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_1 - - a_1 b_1 c_2 \,.$$

Le equazioni (E_3) e le (8) del § 75 dànno

$$(2) \qquad \beta = e^{A(u-v)} \frac{c_1 z + m}{b_1 z} \,, \quad \gamma = e^{-A(u-v)} \frac{c_1 z - m}{a_1 z} \,,$$

$$(3) \qquad U = \frac{1}{2A} e^{2Au} \left(a_1 u + a_2 - \frac{a_1}{2A} \right) + d_1 \,,$$

$$V = \frac{1}{2A} e^{2Av} \left(b_1 v + b_2 - \frac{b_1}{2A} \right) + d_2 \,.$$

Se $A = 0$, le equazioni (3) devono sostituirsi con

$$(3)_{\text{bis}} \qquad U = \frac{a_1}{2} u^2 + a_2 u + d_1 \,, \quad V = \frac{b_1}{2} v^2 + b_2 v + d_2 \,.$$

Le equazioni (4) del § 75 dànno

$$F_1 + F_2 = 3 \beta\gamma = 3 \frac{c_1^2 z^2 - m^2}{a_1 b_1 z^2} \,, \quad F_1' - F_2' = \beta\gamma' - \gamma\beta' .$$

Ora dalle (2) si deduce

$$\beta\gamma' - \beta'\gamma = - \frac{2 A c_1^2}{a_1 b_1} + \frac{2 c_1 m}{z^2} + \frac{2 A m^2}{a_1 b_1 z^2}$$

sicchè possiamo prendere

$$F_1 - F_2 = -\frac{2Ac_1^2 z}{a_1^2 b_1^2} - \frac{2c_1 m}{a_1 b_1 z} - \frac{2Am^2}{a_1^2 b_1^2 z} .$$

Se ne deduce:

$$(4)\quad \begin{aligned} F_1 &= -\frac{A}{a_1^2 b_1^2}\left(c_1^2 z + \frac{m^2}{z}\right) + \frac{1}{2a_1 b_1}\left(3c_1^2 - \frac{2c_1 m}{z} - \frac{3m^2}{z^2}\right), \\ F_2 &= \frac{A}{a_1^2 b_1^2}\left(c_1^2 z + \frac{m^2}{z}\right) + \frac{1}{2a_1 b_1}\left(3c_1^2 + \frac{2c_1 m}{z} - \frac{3m^2}{z^2}\right). \end{aligned}$$

Ora dobbiamo sostituire i valori trovati nell'equazione (6) del § 75. Se $A \neq 0$, si ottiene dopo un calcolo un po' lungo

$$(5)\quad \begin{aligned} & e^{A(u-v)}\left[-\frac{A^3}{b_1}\left(c_1 + \frac{m}{z}\right) - \frac{2A^2}{a_1^2 b_1^3}\left(c_1^3 z + c_1^2 m + \frac{c_1 m^2}{z} + \frac{m^3}{z^2}\right) + \right. \\ & + \frac{3A^2 a_1 m}{z^2} - \frac{2A}{a_1 b_1^2}\left(2c_1^3 + \frac{2c_1^2 m}{z} - \frac{c_1 m^2}{z^2} - \frac{3m^3}{z^3}\right) - \frac{6Aa_1^2 b_1 m}{z^3} + \\ & \left. + \frac{2m}{b_1}\left(\frac{2c_1^2}{z_2} - \frac{3m^2}{z^4}\right) + \frac{6a_1^3 b_1^2 m}{z^4} - 2d_2\left(\frac{Ac_1}{b_1} + \frac{Am}{b_1 z} - \frac{a_1 m}{z^2}\right)\right] = \\ & = e^{-A(u-v)}\left[-\frac{A^3}{a_1}\left(c_1 - \frac{m}{z}\right) + \frac{2A^2}{a_1^3 b_1^2}\left(c_1^3 z - c_1^2 m + \frac{c_1 m^2}{z} - \frac{m^3}{z^2}\right) + \right. \\ & + \frac{3A^2 b_1 m}{z^2} + \frac{2A}{a_1^2 b_1}\left(-2c_1^3 + \frac{2c_1^2 m}{z} + \frac{c_1 m^2}{z^2} - \frac{3m^3}{z^3}\right) + \frac{6Aa_1 b_1^2 m}{z^3} + \\ & \left. + \frac{2m}{a_1}\left(\frac{2c_1^2}{z_2} - \frac{3m^2}{z^4}\right) + \frac{6a_1^2 b_1^3 m}{z^4} - 2d_1\left(\frac{Ac_1}{a_1} - \frac{Am}{a_1 z} - \frac{b_1 m}{z^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Se invece $A = 0$ si ottiene:

$$6m^3\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{b_1}\right)\frac{1}{z^4}+6a_1^2b_1^2(a_1-b_1)m\frac{1}{z^4}-$$

$$(5)^{\text{bis}}\qquad -4c_1^2m\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{b_1}\right)\frac{1}{z^2}+2m(a_1d_2-b_1d_1)\frac{1}{z^2}+$$

$$+\frac{(a_2^2b_1^2-a_1^2b_2^2)m}{a_1b_1}\frac{1}{z^2}-\frac{c_1z}{a_1b_1}=0.$$

2. Consideriamo dapprima il caso $A \neq 0$. L'equazione (5) ha la forma

$$e^{A(u-v)}P=e^{-A(u-v)}Q,$$

P e Q essendo funzioni razionali di $u-v$. Deve essere quindi $P=0$ e $Q=0$. Annullando i coefficienti delle diverse potenze di z nelle espressioni P e Q si ottiene senza difficoltà l'unica soluzione di (5) per cui $\beta\gamma \neq 0$:

$$(\alpha)\qquad c_1=0\,,\quad c_2^2=a_1b_1\,,\quad 2d_1=2d_2=-A^2\,.$$

Consideriamo ora l'equazione $(5)_{\text{bis}}$. Si vede subito che vi sono due modi di soddisfarla senza fare $\beta\gamma=0$:

$$(\beta)_1\qquad A=0\,,\quad c_1=0\,,\quad b_1=a_1\,,\quad 2a(d_1-d_2)=a_2^2-b_2^2\,;$$

$$(\beta)_2\qquad A=0\,,\quad c_1=0\,,\quad c_2^2=a_1b_1\,,\quad 2a_1b_1(a_1d_2-b_1d_1)+$$

$$+a_2^2b_1^2-a_1^2b_2^2=0\,.$$

Nel caso (α) si può supporre $A=1$, $a_2=b_2=0$. Si ottiene:

$$\beta=\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\,e^{u-v}\frac{1}{u-v}\,,\quad \gamma=\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}\,e^{v-u}\frac{1}{v-u}\,,$$

$$L=\frac{a_1}{2}ue^{2u}-\frac{1}{2}-\frac{1}{u-v}-\frac{3}{2}\frac{1}{(u-v)^2}\,,$$

$$M = \frac{b_1}{2} v e^{2v} - \frac{1}{2} + \frac{1}{u-v} - \frac{3}{2} \frac{1}{(u-v)^2} \; .$$

I casi $(\beta)_1$ e $(\beta)_2$ conducono a superficie che ammettono ∞^2 deformazioni proiettive in sè.

3. In ciò che precede abbiamo supposto $a_1 b_1 \neq 0$. Non può essere simultaneamente $a_1 = b_1 = 0$; d'altra parte, il caso $a_1 = 0$, $b_1 \neq 0$ si riduce al caso $b_1 = 0$ scambiando u con v. Resta pertanto il caso $b_1 = 0$, $a_1 \neq 0$. Un calcolo che ometto prova che, se $A \neq 0$, non si ottiene niente di nuovo. Supponiamo dunque $A = b_1 = 0$. Supposto, com'è lecito, $a_1 c_2 - 2a_2 c_1 = 0$, le equazioni (E_4) dànno

$$\beta = -\frac{c_1}{b_2}(u-v) \, , \quad \gamma = \frac{2c_1}{a_1} \, ,$$

$$U = \frac{a_1}{2} u^2 + a_2 u + d_1 \, , \quad V = b_2 v + d_2 \, .$$

Dalle (4) del § 75 si deduce subito:

$$F_1 = -\frac{2c_1^2}{a_1 b_2}(u-v) \, , \quad F_2 = -\frac{4c_1^2}{a_1 b_2}(u-v) \, .$$

Sostituendo questi valori nella (6) del § 75 si deduce:

$$-c_1(u-v) - 2c_1 v - \frac{2c_1 d_2}{b_2} - \frac{12 c_1^3}{a_1 b_2^2}(u-v) = 2c_1 u + \frac{2c_1 a_2}{a_1} - \frac{4c_1^3}{a_1^2 b_2} \, .$$

Confrontando i diversi coefficienti si trova:

$$4c_1^2 = -a_1 b_2^2 \, , \quad d_2 = -\frac{(2a_2 + b_2) b_2}{2a_1} \, .$$

Si può supporre $2c_1 = a_1$, $a_2 = 0$. Si ottiene:

$$\beta = \frac{b_2}{2}(u - v), \quad \gamma = 1,$$

$$L = -\frac{b_2^2}{2}u^2 + b_2(u - v) + d_1, \quad M = b_2 u + \frac{1}{2}.$$

B) **Specie** B_5

Vi sono quattro tipi distinti di superficie della specie B_5 *dipendenti rispettivamente da* 4, 3, 3, 3 *costanti arbitrarie.*

Le equazioni (E_5) e le (8) del § 75 dànno, posto $c_1 = \frac{1}{k}$:

$$(6) \qquad \beta = \frac{1}{a_2 e^{-A(u-v)} + a_1 e^{-B(u-v)}}, \quad \gamma = \frac{k}{a_1 e^{A(u-v)} + a_2 e^{B(u-v)}},$$

$$(7) \qquad \begin{aligned} U &= \frac{1}{k}\left[\frac{a_1 b_1}{2A} e^{2Au} + \frac{a_2 b_2}{2B} e^{2Bu} + \frac{h}{A+B} e^{(A+B)u}\right] + d_1, \\ V &= \frac{a_2 b_1}{2A} e^{2Av} + \frac{a_1 b_2}{2B} e^{2Bv} - \frac{h}{A+B} e^{(A+B)v} + d_2, \end{aligned}$$

convenendo di sostituire u e v rispettivamente a $\frac{1}{2A} e^{2Au}$ ed a $\frac{1}{2A} e^{2Av}$, se $A=0$, e similmente se $B=0$ o se $A+B=0$. Osserviamo che non si restringe la generalità *supponendo* che $a_1 \neq 0$; infatti, se $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, basta scambiare A con B e non può essere simultaneamente $a_1 = a_2 = 0$. Supposto quindi $a_1 \neq 0$ si deduce senza difficoltà dalle (5) del § 75:

$$(8) \qquad \begin{aligned} 2F_1 &= \frac{k}{a_1 z + a_2}\left[\frac{3z}{a_1 z + a_2} + \frac{1}{a_1}\frac{A+B}{A-B}\right], \\ 2F_2 &= \frac{k}{a_1 z + a_2}\left[\frac{3z}{a_1 z + a_2} - \frac{1}{a_1}\frac{A+B}{A-B}\right], \end{aligned}$$

dove ho posto, come al § 77,

$$z = e^{(A-B)(u-v)}. \tag{9}$$

Sostituendo i valori trovati nella (6) del § 75 si trova con calcolo piuttosto lungo

$$\begin{aligned}
&\eta + z^{\frac{A+B}{A-B}} \Big\{ -a_1^3 B (B^2 + 2 d_2) z^3 + \\
&+ a_1 \left[-2(A+2B) a_1 a_2 d_2 + (A-2B) k + \left(\frac{A+B}{A-B} - 3 \right) Bk - \right. \\
&\left. - a_1 a_2 (A^3 - 6A^2 B + 12 AB^2 - 4B^3) \right] z^2 + \\
&+ a_2 \left[-2(2A+B) a_1 a_2 d_2 - (2A-B) k + \left(\frac{(A+B)^2}{A-B} - 3A \right) k + \right. \\
&\left. + a_1 a_2 (4A^3 - 12 A^2 B + 6AB^2 - B^3) \right] z + \\
&+ a_2^2 \left[-2 a_2 d_2 A + \frac{A}{a_1} \frac{A+B}{A-B} k - a_2 A^3 \right] \Big\} = \\
&= k \Big\{ - a_1^3 A (A^2 + 2 d_1) z^3 + \\
&+ a_1 \left[-2(2A+B) a_1 a_2 d_1 - (2A-B) k - \left(\frac{A+B}{A-B} + 3 \right) Ak + \right. \\
&\left. + a_1 a_2 (4A^3 - 12 A^2 B + 6AB^2 - B^3) \right] z^2 + \\
&+ a_2 \left[-2(A+2B) a_1 a_2 d_1 + (A-2B) k - \left(\frac{(A+B)^2}{A-B} + 3B \right) k - \right. \\
&\left. - a_1 a_2 (A^3 - 6A^2 B + 12 AB^2 - 4B^3) \right] z +
\end{aligned} \tag{10}$$

$$+ a_2^2 \left[-2a_2 d_1 B - \frac{B}{a_1} \frac{A+B}{A-B} k - a_2 B^3 \right] \Bigg\} .$$

In quest'equazione:

se $AB(A+B) \neq 0$, $\eta = 0$;

se $A + B = 0$, $\eta = 2h(a_2 + a_1 z)^2 [A(u-v)(a_1 z - a_2) - (a_2 + a_1 z)]$;

se $B = 0$, $\eta = b_2 (a_2 + a_1 z)^2 [2A a_1 a_2 (u-v) z + a_1 z - a_2]$;

se $A = 0$, $\eta = b_1 e^{B(u-v)} (a_2 + a_1 z)^2 [2 B a_1 a_2 (u-v) z - a_1 z + a_2]$.

Si vede facilmente che i casi $A + B = 0$, $B = 0$, $A = 0$ non dànno niente di nuovo. A tale scopo osserviamo che, se $h = 0$, oppure $B = b_2 = 0$, od infine $A = b_1 = 0$, le equazioni (E_5) sono soltanto un caso particolare di (E_3). Ora se $AB(A+B) = 0$ il coefficiente di $u - v$ nell'espressione η deve evidentemente svanire. Ora ciò dà, oltre le ipotesi $A + B = h = 0$, $B = b_2 = 0$, $A = b_1 = 0$ che possiamo omettere in virtù dell'osservazione ora fatta, soltanto $B = a_2 = 0$ oppure $A = a_2 = 0$; e si vede facilmente dalla (10) che allora sarebbe necessariamente $\gamma = 0$.

Possiamo quindi supporre $AB(A+B) \neq 0$ sicchè $\eta = 0$. L'equazione (10) possiede allora quattro soluzioni distinte. Rinviando alla Memoria di Čech citata al § precedente, accontentiamoci qui d'indicare senza dimostrazione le quattro soluzioni che sono

(α) $\qquad k = a_1 a_2 (A - B)^2, \quad 2d_1 = -A^2, \quad 2d_2 = -B^2$;

(β) $\quad A = 3B, \quad k = -\dfrac{a_2^3}{a_1^3}, \quad 2d_1 = -\dfrac{3a_2^2}{a_1} - B^2, \quad 2d_2 = -B^2$;

$(\gamma)_1$ $\quad A = 2B, \quad k = \dfrac{2a_2^3}{a_1^3}, \quad 2d_1 = -\dfrac{6a_2^2}{a_1^4} - B^2. \quad 2d_2 = -B^2$;

$(\gamma)_2$ $\qquad A = 2B, \quad a_2 = 0, \quad 2d_1 = -4B^2, \quad 2d_2 = -B^2$.

(5) Restano da calcolare i valori di β, γ, L, M, semplificandoli mediante un'opportuna sostituzione della forma (2) del § 75. Nel

caso (α) possiamo supporre $A=\alpha+1$, $B=\alpha-1$ $[\alpha(\alpha^2-1)\neq 0]$, $a_2=\varepsilon_1 a_1$, $h=4\varepsilon_2$, $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2^2=1$. Si ottiene:

$$\beta=\frac{1}{a_1}\frac{e^{(\alpha+1)(u-v)}}{\varepsilon_1+e^{2(u-v)}}, \quad \gamma=4a_1\frac{e^{(\alpha+1)(v-u)}}{\varepsilon_1+e^{2(v-u)}},$$

$$L=\frac{\varepsilon_1 b_1}{8a_1(\alpha+1)}e^{2(\alpha+1)u}+\frac{b_2}{8a_1(\alpha-1)}e^{2(\alpha-1)u}+\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2a_1^2\alpha}e^{2\alpha u}-\frac{(\alpha+1)^2}{2}+$$

$$+\frac{6\varepsilon_1 e^{2(u-v)}}{(\varepsilon_1+e^{2(u-v)})^2}+\frac{2\varepsilon_1\alpha}{\varepsilon_1+e^{2(u-v)}}.$$

$$M=\frac{\varepsilon_1 a_1 b_1}{2(\alpha+1)}e^{2(\alpha+1)v}+\frac{a_1 b_2}{2(\alpha-1)}e^{2(\alpha-1)v}-\frac{2\varepsilon_2}{\alpha}e^{2\alpha v}-\frac{(\alpha-1)^2}{2}+$$

$$+\frac{6\varepsilon_1 e^{2(u-v)}}{(\varepsilon_1+e^{2(u-v)})^2}-\frac{2\varepsilon_1\alpha}{\varepsilon_1+e^{2(u-v)}}.$$

Nel caso (β) possiamo supporre $B=1$, $a_2=\varepsilon_1 a_1$, $h=4\varepsilon_2$, $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2^2=1$. Si ottiene:

$$\beta=\frac{1}{a_1}\frac{e^{u-v}}{1+\varepsilon_1 e^{2(u-v)}}, \quad \gamma=-\frac{1}{a_1}\frac{e^{v-u}}{1+\varepsilon_1 e^{2(u-v)}},$$

$$L=-\frac{\varepsilon_1 a_1 b_1}{6}e^{6u}-\frac{a_1 b_2}{2}e^{2u}-\varepsilon_1\varepsilon_2 e^{4u}-2-$$

$$-\frac{3\varepsilon_1}{2a_1^2}\frac{e^{2(u-v)}}{(1+\varepsilon_1 e^{2(u-v)})^2}-\frac{1}{a_1^2}\frac{1}{1+\varepsilon_1 e^{2(u-v)}},$$

$$M=\frac{\varepsilon_1 a_1 b_1}{6}e^{6v}+\frac{a_1 b_2}{2}e^{2v}-\varepsilon_2 e^{4v}-\frac{1}{2}-\frac{3\varepsilon_1}{2a_1^2}\frac{e^{2(u-v)}}{(1+\varepsilon_1 e^{2(u-v)})^2}+$$

$$+\frac{1}{a_1^2}\frac{1}{1+\varepsilon_1 e^{2(u-v)}}.$$

Nel caso $(\gamma)_1$ possiamo supporre $B=1$, $a_2=\varepsilon_1 a_1$, $h=3\varepsilon_2$, $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2^2=1$. Si ottiene:

$$\beta = \frac{1}{a_1}\frac{e^{u-v}}{1+\varepsilon_1 e^{v-u}}\,, \quad \gamma = \frac{2}{a_1}\frac{e^{v-u}}{1+\varepsilon_1 e^{u-v}}\,,$$

$$L = \frac{\varepsilon_1 a_1 b_1}{8} e^{4u} + \frac{a_1 b_2}{4} e^{2u} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2} e^{3u} - \frac{3}{a_1^2} - \frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{3\varepsilon_1}{a_1^2}\frac{e^{u-v}}{(1+\varepsilon_1 e^{u-v})^2} + \frac{3}{a_1^2}\frac{1}{1+\varepsilon_1 e^{u-v}}\,,$$

$$M = \frac{\varepsilon_1 a_1 b_1}{4} e^{4v} + \frac{a_1 b_2}{2} e^{2v} - \varepsilon_2 e^{3v} - \frac{1}{2} + \frac{3\varepsilon_1}{a_1^2}\frac{e^{u-v}}{(1+\varepsilon_1 e^{u-v})^2} -$$

$$- \frac{3}{a_1^2}\frac{1}{1+\varepsilon_1 e^{u-v}}\,.$$

Nel caso $(\gamma)_2$ possiamo supporre $B=1$, $a_1=\varepsilon_1$, $h=3\varepsilon_2$, $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2^2=1$. Si ottiene:

$$\beta = \varepsilon_1 e^{u-v}, \quad \gamma = k\varepsilon_1 e^{2(v-u)},$$

$$L = \frac{\varepsilon_1 b_1}{4k} e^{4u} + \frac{\varepsilon_2}{k} e^{3u} - 2 + 3k e^{v-u}\,,$$

$$M = \frac{\varepsilon_1 b_2}{2} e^{2v} - \varepsilon_2 e^{3v} - \frac{1}{2}\,.$$

Dovremmo cercare ancora le superficie corrispondenti alla soluzione (E_4') ossia le superficie reali che si potessero ottenere supponendo che A e B siano complesse coniugate. È evidente che ciò non può accadere che nel caso (α). Ma neanche qui non si ottiene niente di nuovo. Infatti, d_1 e d_2 dovendo essere reali, A e B dovrebbero essere puramente immaginarie, sicchè $A+B=0$. Noi invece abbiamo visto che il caso $A+B=0$ non può dare nessuna superficie.

C) **Specie** B_6 .

Le superficie della specie B_6 *formano un sol tipo dipendente da tre costanti arbitrarie.*

Cominciamo coll'osservare che possiamo supporre $a_1 b_1 \neq 0$

nelle equazioni (E_6); infatti se $a_1=0$ oppure $b_1=0$ si ritrova un caso particolare di (E_4). Le equazioni (E_6) e le (8) del § 75 dànno:

$$(11)\qquad \beta=\frac{e^{A(u-v)}}{a_1(u-v)+a_2}\,,\quad \gamma=\frac{c\,e^{-A(u-v)}}{a_1(u-v)+a_2}\,,$$

$$(12)\quad \begin{aligned} U&=\frac{1}{2A}e^{2Au}\left[a_1b_1u^2+\left(a_1b_2+a_2b_1-\frac{a_1b_1}{A}\right)u+\frac{a_1b_1}{2A^2}-\right.\\ &\qquad\left.-\frac{a_1b_2+a_2b_1}{2A}+\frac{a_2b_2}{2}+h\right]+d_1,\\ V&=-\frac{c}{2A}e^{2Av}\left[a_1b_1v^2+\left(a_1b_2-a_2b_1-\frac{a_1b_1}{A}\right)v+\frac{a_1b_1}{2A^2}-\right.\\ &\qquad\left.-\frac{a_1b_2-a_2b_1}{2A}-\frac{a_2b_2}{2}+h\right]+d_2.\end{aligned}$$

Se $A=0$, le (12) devono sostituirsi con

$$(12)_{\text{bis}}\quad \begin{aligned} U&=\frac{a_1b_1}{3}u^3+\frac{a_1b_2+a_2b_1}{2}u^2+\left(\frac{a_2b_2}{2}+h\right)u+d_1,\\ V&=-c\left[\frac{a_1b_1}{3}v^3+\frac{a_1b_2-a_2b_1}{2}v^2+\left(-\frac{a_2b_2}{2}+h\right)v\right]+d_2.\end{aligned}$$

Dalle (11) e dalle (4) del § 75 si deduce facilmente:

$$(13)\quad F_1=c\left[\frac{A}{a_1}\frac{1}{z}+\frac{3}{2}\frac{1}{z^2}\right],\quad F_2=c\left[-\frac{A}{a_1}\frac{1}{z}+\frac{3}{2}\frac{1}{z^2}\right],$$

essendo

$$(14)\qquad z=a_1(u-v)+a_2\,.$$

Sostituendo nella (6) del § 5 si ricava

$$\eta+e^{A(u-v)}\left[\frac{6a_1(a_1^2+c)}{z^4}-\frac{6A(a_1^2+c)}{z^3}+\frac{2cA^2+a_1^2(3A^2+2d_2)}{a_1z^2}-\right.$$

$$(15)\quad - \left.\frac{A(A^2+2d_2)}{z}\right] + e^{-A(u-v)}\left[\frac{6a_1(a_1^2+c)}{z^4} + \frac{6A(a_1^2+c)}{z^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{2cA^2 + a_1^2(3A^2+2d_1)}{a_1 z^2} + \frac{A(A^2+2d_1)}{z}\right] = 0\,,$$

dove

$$\eta = 0 \quad \text{se} \quad A \neq 0\,,$$

$$\eta = \frac{cb_1}{a_1}\left(-\frac{1}{3}z + \frac{a_2^2}{z} - \frac{2}{3}\frac{a_2^3}{z^2} - \frac{2a_1a_2h}{b_1z^2}\right) \quad \text{se } A = 0\,.$$

È facile vedere che l'ipotesi $A = 0$ non dà nessuna soluzione nuova; infatti il coefficiente di z nel primo membro di (15) è allora $b_1 c$, che non può esser nullo. Se invece $A \neq 0$ si ottiene subito da (15)

$$c = -a_1^2\,,\quad 2d_1 = -A^2\,,\quad 2d_2 = -A^2\,.$$

Si può supporre $A = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = b_2$ e si ottiene:

$$\beta = \frac{1}{a_1}\frac{e^{u-v}}{u-v}\,,\quad \gamma = a_1\frac{e^{v-u}}{v-u}\,,$$

$$L = \frac{1}{2}e^{2u}(a_1b_1u^2 + h) - \frac{1}{2} - \frac{1}{u-v} - \frac{3}{2}\frac{1}{(u-v)^2}\,,$$

$$M = \frac{a_1^2}{2}e^{2v}(a_1b_1v^2 + h) - \frac{1}{2} + \frac{1}{u-v} - \frac{3}{2}\frac{1}{(u-v)^2}\,.$$

D) *Quadro delle quantità* β, γ, L, M, *relative alle superficie che ammettono un gruppo continuo ad un parametro di deformazioni proiettive in sè.*

Le trasformazioni del gruppo sono

$$\bar{u} = u + t\,,\quad \bar{v} = v$$

per le superficie della specie A, e

$$\bar{u} = u + t\,,\quad \bar{v} = v + t$$

per le altre specie. Le lettere ε, ε_1, ε_2 indicano ± 1; i casi $\varepsilon = +1$ ed $\varepsilon = -1$ sono distinti anche nel campo complesso; i casi $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$ sono distinti soltanto nel campo reale. Le altre lettere indicano costanti arbitrarie.

Specie A.

1° $$\beta = 1, \quad \gamma = v, \quad L = 2au, \quad M = -u + av^2 + b.$$

2° $$\beta = 1, \quad \gamma = \sin Av, \quad L = \frac{A^2}{2} u^2 + a, \quad M = -Au \cos Av + b.$$

3° $$\beta = 1, \quad \gamma = \frac{1}{2}(e^{Av} + \varepsilon_1 e^{-Av}),$$

$$L = -\frac{A^2}{2} u^2 + a, \quad M = -\frac{A}{2} u (e^{Av} - \varepsilon_1 e^{-Av}) + b.$$

4° $$\beta = 1, \quad \gamma = e^{\varepsilon_1 v},$$

$$L = -\frac{u^2}{2} + a, \quad M = -\varepsilon_1 u e^{\varepsilon_1 v} + b.$$

Specie B_1.

5° $$\beta = \epsilon^x, \quad \gamma = e^{-x} \frac{dF}{dx},$$

$$L = 2\frac{dF}{dx} - F + a, \quad M = \frac{dF}{dx} + F + e^{2v},$$

dove $x = u - v$ e F è soluzione dell'equazione differenziale del quarto ordine

$$\frac{d^4F}{dx_4} - 3\frac{d^3F}{dx^3} + 3\frac{d^2F}{dx^2} - \frac{dF}{dx} + e^{2x}\left(\frac{d^2F}{dx^2} + 3\frac{dF}{dz} + 2F + 1\right) +$$

$$+ 2\left(\frac{d^2F}{dx^2} - \frac{dF}{dx}\right)\left(2\frac{dF}{dx} - F + a\right) + \frac{dF}{dx}\left(2\frac{d^2F}{dx^2} - \frac{dF}{dx}\right) = 0.$$

6° $$\beta = 1, \quad \gamma = F, \quad L = 2F + a, \quad M = F + bv,$$

dove F è funzione di $x = u - v$ ed è soluzione dell'equazione differenziale del secondo ordine

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 3F^2 + (2a+1)F = bx .$$

Specie B_2.

7° $$\beta = e^x \left(\sqrt{\frac{dF}{dx}} + a\right), \quad \gamma = e^{-x} \left(\sqrt{\frac{dF}{dx}} - a\right),$$

$$L = e^{-2u} + b + \frac{3}{2}\frac{dF}{dx} + a\sqrt{\frac{dF}{dx}} - F + a^2 x ,$$

$$M = e^{2v} + b + \frac{1}{2}\frac{dF}{dx} - a\sqrt{\frac{dF}{dx}} + F - a^2 x ;$$

anche qui $x = u - v$ ed F è soluzione dell'equazione differenziale del quarto ordine

$$(e^x + e^{-x}) \left[\frac{1}{2}\frac{d^4F}{dx^4} - \frac{3}{4}\left(\frac{dF}{dx}\right)^{-1} \frac{d^2F}{dx^2}\frac{d^3F}{dx^3} + \right.$$

$$+ \frac{3}{8}\left(\frac{dF}{dx}\right)^{-2} \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)^3 + 3\frac{dF}{dx}\frac{d^2F}{dx^2} + 4\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 +$$

$$+ 2a\left(\frac{dF}{dx}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2}{2}\frac{d^2F}{dx^2} + 2(F - a^2 x)\frac{dF}{dx} +$$

$$\left. + a(1-a^2)\left(\frac{dF}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} + b\frac{d^2F}{dx^2} + 2ab\left(\frac{dF}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] +$$

$$+ (e^x - e^{-x})\left[\frac{3}{2}\frac{d^3F}{dx^3} - \frac{3}{4}\left(\frac{dF}{dx}\right)^{-1}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)^2 + \right.$$

$$+ \left(F - a^2 x + \frac{3}{2}\right)\frac{d^2F}{dx^2} + (1 - 3a^2 + 2b)\frac{dF}{dx} +$$

$$+ 2aF\left(\frac{dF}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} - 2a^3x\left(\frac{dF}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg] = 0\,.$$

8°
$$\beta = (1-a)F + b\,, \quad \gamma = aF\,,$$

$$L = -au - \frac{b^2}{2} + \frac{3}{2}a(1-a)F^2 + 2abF\,,$$

$$M = v + \frac{3}{2}a(1-a)F^2 + abF\,;$$

F è funzione di $x = u - v$ ed è soluzione dell'equazione differenziale del terzo ordine

$$\frac{d^3F}{dx^3} + 6(1-a)F^2 + 6abF\frac{dF}{dx} - 2(1-a)x\frac{dF}{dx} -$$

$$- 2(1-a)F - b = 0\,.$$

9°
$$\beta = -\frac{a}{u-v} + b\,, \quad \gamma = \frac{a}{u-v} + b\,,$$

$$L = u - \frac{3}{2}\frac{a^2}{(u-v)^2} + \frac{ab}{u-v} + \frac{1}{2}b^2\,,$$

$$M = v - \frac{3}{2}\frac{a^2}{(u-v)^2} - \frac{ab}{u-v} + \frac{1}{2}b^2\,.$$

Specie B_3.

10°
$$\beta = 4a\frac{e^{(\alpha+1)(u-v)}}{1-\varepsilon_2 e^{4(u-v)}}\,, \quad \gamma = \frac{4}{a}\frac{e^{(\alpha+1)(v-u)}}{1-\varepsilon_2 e^{4(v-u)}}\,,$$

$$L = \frac{ab}{2(\alpha+1)}e^{2(\alpha+1)u} + \frac{\varepsilon_1 ab}{2(\alpha-1)}e^{2(\alpha-1)u} - \frac{(\alpha+1)^2}{2} +$$

$$+ \frac{4\left[-\varepsilon_2(\alpha+5)e^{4(u-v)} + \alpha - 1\right]}{(1-\varepsilon_2 e^{4(u-v)})^2}\,,$$

$$M = \frac{b}{2a(\alpha+1)} e^{2(\alpha+1)v} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 b}{2a(\alpha-1)} e^{2(\alpha-1)v} - \frac{(\alpha-3)^2}{2} +$$

$$+ \frac{4\left[\varepsilon_2(\alpha-7)e^{4(u-v)} - \alpha + 1\right]}{(1-\varepsilon_2 e^{4(u-v)})^2} .$$

11°
$$\beta = 2a \frac{e^{(\alpha+1)(u-v)} - \varepsilon e^{(\alpha+3)(u-v)}}{1-e^{4(u-v)}} ,$$

$$\gamma = -\frac{2}{a} \frac{e^{-(\alpha-3)(u-v)} - \varepsilon e^{-(\alpha-1)(u-v)}}{1-e^{4(u-v)}} ,$$

$$L = \frac{ab}{2(\alpha+1)} e^{2(\alpha+1)u} + \frac{\varepsilon_1 ab}{2(\alpha-1)} e^{2(\alpha-1)u} - \frac{(\alpha+1)^2}{2} +$$

$$+ \frac{2\left[\varepsilon(\alpha+3)e^{6(u-v)} - (\alpha+6)e^{4(u-v)} - \varepsilon(\alpha-3)e^{2(u-v)} + 1\right]}{(1-e^{4(u-v)})^2} ,$$

$$M = \frac{b}{2a(\alpha+1)} e^{2(\alpha+1)v} + \frac{\varepsilon_1 b}{2a(\alpha-1)} e^{2(\alpha-1)v} - \frac{(\alpha-1)^2}{2} +$$

$$+ \frac{2\left[-\varepsilon(\alpha-3)e^{6(u-v)} + (\alpha-6)e^{4(u-v)} + \varepsilon(\alpha-3)e^{2(u-v)} - 1\right]}{(1-e^{4(u-v)})^2} .$$

12°

$$\beta = 2a \frac{e^{u-v}}{1+\varepsilon e^{2(u-v)}} , \quad \gamma = \frac{2\varepsilon}{a} \frac{e^{u-v}}{1+\varepsilon e^{2(u-v)}} ,$$

$$L = \frac{ab}{2}(e^{2u} - \varepsilon_1 e^{-2u}) - \frac{1}{2} + \varepsilon\varepsilon_1 ac + \frac{6\varepsilon e^{2(u-v)}}{(1+\varepsilon e^{2(u-v)})^2} ,$$

$$M = \frac{a}{2b}(e^{2v} - \varepsilon_1 e^{-2v}) - \frac{1}{2} - \varepsilon_1 \frac{c}{a} + \frac{6\varepsilon e^{2(u-v)}}{(1+\varepsilon e^{2(u-v)})^2} .$$

13°

$$\beta = \frac{a}{\varepsilon_1 e^{v-u} - e^{u-v}} , \quad \gamma = \frac{a}{e^{u-v} - \varepsilon_1 e^{v-u}} ,$$

$$L = b\left(e^{2u} - \varepsilon_2 e^{-2u}\right) + c - \frac{3a^2}{2}\frac{1}{(e^{u-v} - \varepsilon_1 e^{v-u})^2},$$

$$M = \varepsilon_1 b\left(e^{2v} - \varepsilon_2 e^{-2v}\right) + c - \frac{3a^2}{2}\frac{1}{(e^{u-v} - \varepsilon_1 e^{v-u})^2}.$$

14°

$$\beta = \frac{4\varepsilon_1}{a+b}\frac{be^{v-u} - ae^{u-v}}{e^{2(v-u)} - e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = \frac{4\varepsilon_1}{a+b}\frac{ae^{v-u} - be^{u-v}}{e^{2(v-u)} - e^{2(u-v)}},$$

$$L = \varepsilon_2 ae^{2u} - be^{-2u} - \frac{1}{2} - \frac{4a(a-b)}{(a+b)^2} +$$

$$+ \frac{4}{(a+b)^2}\frac{\left[6abe^{6(u-v)} - (7a^2+5b^2)e^{4(u-v)} + 6abe^{2(u-v)} + a^2 - b^2\right]}{(1-e^{4(u-v)})^2},$$

$$M = \varepsilon_2 ae^{2v} - be^{-2v} - \frac{1}{2} + \frac{4b(a-b)}{(a+b)^2} +$$

$$+ \frac{4}{(a+b)^2}\frac{\left[6abe^{6(u-v)} - (5a^2+7b^2)e^{4(u-v)} + 6abe^{2(u-v)} - a^2 + b^2\right]}{(1-e^{4(u-v)})^2},$$

15°

$$\beta = \varepsilon_1 a\frac{e^{3(u-v)}}{1-\varepsilon_1 e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = -a\frac{e^{u-v}}{1-\varepsilon_1 e^{2(u-v)}},$$

$$L = be^{6u} + \frac{\varepsilon_1}{2a}e^{2u} - \frac{1}{2} - \varepsilon_1 a^2 - \frac{a^2}{2}\frac{5e^{2(u-v)} - 2\varepsilon_1}{(e^{2(u-v)} - \varepsilon_1)^2},$$

$$M = \varepsilon_1 be^{6v} + \frac{1}{2a}e^{2v} - \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2}\frac{e^{2(u-v)} + 2\varepsilon_1}{(e^{2(u-v)} - \varepsilon_1)^2}.$$

16°

$$\beta = 2e^{3(u-v)}\left(\frac{\varepsilon_1}{1+e^{2(u-v)}} + a\frac{1}{1-e^{2(u-v)}}\right),$$

$$\gamma = 2e^{v-u}\left(\frac{\varepsilon_1}{1+e^{2(u-v)}} - a\frac{1}{1-e^{2(u-v)}}\right),$$

$$L = b\left(e^{6u} + 3\varepsilon_2 e^{2u}\right) - \frac{1}{2} - 4\left(1 - \varepsilon_1 a + a^2\right) +$$

$$+2\,\frac{5\,(1-a^2)\,e^{6\,(u-v)}-2\,(4-\varepsilon_1 a+4a^2)e^{4\,(u-v)}+(1-a^2)e^{2(u-v)}+2(1-\varepsilon_1 a+a^2)}{(1-e^{4\,(u-v)})^2}\,,$$

$$M=b\,(e^{6v}+3\varepsilon_2\,e^{2v})-\frac{1}{2}+$$

$$+2\,\frac{(1-a^2)e^{6(u-v)}-2(2+\varepsilon_1 a+2a^2)e^{4(u-v)}+5(1-a^2)e^{2(u-v)}-2(1-\varepsilon_1 a+a^2)}{(1-e^{4(u-v)})^2}$$

17°

$$\beta=\frac{a}{e^{2(v-u)}-\varepsilon_1}\,,\quad \gamma=\frac{a}{e^{2(u-v)}-\varepsilon_1}\,,$$

$$L=b\,(e^{4u}+2\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,e^{2u})+c-\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}\,\frac{4\varepsilon_1\,e^{2(u-v)}-1}{(e^{2(u-v)}-\varepsilon_1)^2}\,,$$

$$M=\varepsilon_2\,b\,(\varepsilon_1\,e^{4v}+2e^{2v})+c+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}\,\frac{2\,\varepsilon_1\,e^{2(u-v)}+1}{(e^{2(u-v)}-\varepsilon_1)^2}\,.$$

18°

$$\beta=\frac{2a}{e^{2(v-u)}-\varepsilon_2}\,,\quad \gamma=\frac{2}{a}\,\frac{1}{e^{2(u-v)}-\varepsilon_2}\,,$$

$$L=\frac{\varepsilon_1 a}{4}\,e^{4u}+\varepsilon_2\,a\,b\,e^{2u}+c-2\,\frac{4\varepsilon_2\,e^{2(u-v)}-1}{(e^{2(u-v)}-\varepsilon_2)^2}\,,$$

$$M=\frac{\varepsilon_1}{4a}\,e^{4v}+\frac{b}{a}\,e^{2v}+\frac{c+2}{a^2}-2\,\frac{2\varepsilon_2\,e^{2(u-v)}+1}{(e^{2(u-v)}-\varepsilon_2)^2}\,.$$

19°

$$\beta=\frac{e^{2(u-v)}\,(a+be^{u-v})}{1-\varepsilon_1\,e^{2(u-v)}}\,,\quad \gamma=\frac{e^{2(v-u)}\,(a+\varepsilon_1\,be^{2(v-u)})}{1-\varepsilon_1\,e^{2(v-u)}}\,,$$

$$L=c\,(e^{4u}+2\varepsilon_2\,e^{2u})-\frac{a^2}{2}-\varepsilon_1\,b^2-\frac{1}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{6\varepsilon_1 abe^{3(u-v)}+(4\varepsilon_1 a^2+5b^2)\,e^{2(u-v)}-a^2-2\varepsilon_1 b^2}{(1-\varepsilon_1\,e^{2(u-v)})^2}\,,$$

$$M = c\,(e^{4v} + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 e^{2v}) - \frac{1}{2} -$$

$$-\frac{1}{2} \frac{(2\varepsilon_1 a^2 + b^2)\, e^{2(u-v)} + 6abe^{u-v} + a^2 + 2\varepsilon_1 b^2}{(1 - \varepsilon_1 e^{2(u-v)})^2} .$$

20°

$$\beta = \varepsilon_2 a \frac{e^{3(u-v)}}{1 - \varepsilon_2 e^{2(u-v)}} , \quad \gamma = a \frac{e^{3(v-u)}}{1 - \varepsilon_2 e^{2(u-v)}} ,$$

$$L = b\,(2e^{6u} + 3\varepsilon_1 e^{4u}) - \frac{1}{2} - \varepsilon_2 a^2 - \frac{a^2}{2} \frac{5e^{2(u-v)} - \varepsilon_2}{(1 - \varepsilon_2 e^{2(u-v)})^2} ,$$

$$M = b\,(2\varepsilon_2 e^{6v} + 3\varepsilon_1 e^{4v}) - \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2} \frac{e^{2(u-v)} + 2\varepsilon_2}{(1 - \varepsilon_2 e^{2(u-v)})^2} .$$

21°

$$\beta = \frac{e^{3(u-v)}\,(a - \varepsilon e^{u-v})}{\varepsilon_2 - e^{2(u-v)}} , \quad \gamma = \frac{e^{3(v-u)}\,(a - \varepsilon\varepsilon_2 e^{v-u})}{1 - \varepsilon_2 e^{2(v-u)}} ,$$

$$L = b(2e^{6u} + 3\varepsilon_1 e^{4u}) - \frac{7}{2} - \varepsilon_2 a^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{8\varepsilon a e^{3(u-v)} - (6\varepsilon_2 + 5a^2)\, e^{2(u-v)} - 2\varepsilon\varepsilon_2 a e^{u-v} + 3 + 2\varepsilon_2 a^2}{(\varepsilon_2 - e^{2(u-v)})^2} ,$$

$$M = b\,(2\varepsilon_2 e^{6v} + 3\varepsilon_1 e^{4v}) - 2 -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{2\varepsilon a\, e^{3(u-v)} - 2a^2 e^{2(u-v)} - 8\varepsilon\varepsilon_2 e^{u-v} + 3 + 2\varepsilon_2 a^2}{(\varepsilon_2 - e^{2(u-v)})^2} .$$

22°

$$\beta = a \frac{1}{\cos(u-v)} , \quad \gamma = -\frac{1}{a} \frac{1}{\cos(u-v)} ,$$

$$L = ab \sin 2u + \frac{1}{2} + ac - \frac{3}{2} \frac{1}{\cos^2(u-v)} ,$$

$$M = -\frac{b}{a} \sin 2v + \frac{1}{2} + \frac{c}{a} - \frac{3}{2} \frac{1}{\cos^2(u-v)} .$$

23°

$$\beta = \frac{a}{\sin(u-v)}\,, \quad \gamma = -\frac{a}{\sin(u-v)}\,,$$

$$L = b\sin 2u + c - \frac{3a^2}{2}\,\frac{1}{\sin^2(u-v)}\,,$$

$$M = b\sin 2v + c - \frac{3a^2}{2}\,\frac{1}{\sin^2(u-v)}\,.$$

Specie B_4

24°

$$\beta = \frac{a}{u-v}\,e^{u-v}, \quad \gamma = \frac{1}{a\,(v-u)}\,e^{v-u}\,,$$

$$L = abue^{2u} - \frac{1}{2} - \frac{1}{u-v} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{(u-v)^2}\,,$$

$$M = \frac{b}{a}\,ve^{2v} - \frac{1}{2} + \frac{1}{u-v} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{(u-v)^2}\,.$$

25°

$$\beta = a\,(u-v)\,, \quad \gamma = 1\,,$$

$$L = -2a^2u^2 + a\,(u-v) + b\,, \quad M = 2au + \frac{1}{2}\,.$$

Specie B_5

26°

$$\beta = \frac{1}{a}\,\frac{e^{(\alpha+1)(u-v)}}{\varepsilon_1 + e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = 4a\,\frac{e^{(\alpha+1)(v-u)}}{\varepsilon_1 + e^{2(v-u)}}\,,$$

$$L = \frac{b}{a(\alpha+1)}\,e^{2(\alpha+1)u} + \frac{c}{a(\alpha-1)}\,e^{2(\alpha-1)u} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2a^2\alpha}\,e^{2\alpha u} -$$

$$-\frac{(\alpha+1)^2}{2} + \frac{6\varepsilon_1 e^{2(u-v)}}{(\varepsilon_1 + e^{2(u-v)})^2} + \frac{2\varepsilon_1\alpha}{\varepsilon_1 + e^{2(u-v)}}\,,$$

$$M = \frac{4ab}{\alpha+1} e^{2(\alpha+1)v} + \frac{4ac}{\alpha-1} e^{2(\alpha-1)v} - \frac{2\varepsilon_2}{\alpha} e^{2\alpha v} -$$

$$- \frac{(\alpha-1)^2}{2} + \frac{6\varepsilon_1 e^{2(u-v)}}{(\varepsilon_1 + e^{2(u-v)})^2} - \frac{2\varepsilon_1 \alpha}{\varepsilon_1 + e^{2(u-v)}} .$$

27°

$$\beta = a \frac{e^{u-v}}{1+\varepsilon_1 e^{2(v-u)}} , \quad \gamma = -a \frac{e^{v-u}}{1+\varepsilon_1 e^{2(u-v)}} ,$$

$$L = b e^{6u} + c e^{2u} - \varepsilon_1 \varepsilon_2 e^{4u} - 2 - \frac{3\varepsilon_1 a^2}{2} \frac{e^{2(u-v)}}{(1+\varepsilon_1 e^{2(u-v)})^2} -$$

$$- a^2 \frac{1}{1+\varepsilon_1 e^{2(u-v)}} ,$$

$$M = - b e^{6v} - c e^{2v} - \varepsilon_2 e^{4v} - \frac{1}{2} - \frac{3\varepsilon_1 a^2}{2} \frac{e^{2(u-v)}}{(1+\varepsilon_1 e^{2(u-v)})^2} +$$

$$+ a^2 \frac{1}{1+\varepsilon_1 e^{2(u-v)}} .$$

28°

$$\beta = a \frac{e^{u-v}}{1+\varepsilon_1 e^{v-u}} , \quad \gamma = 2a \frac{e^{v-u}}{1+\varepsilon_1 e^{u-v}} ,$$

$$L = b e^{4u} + c e^{2u} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} e^{3u} - 3a^2 - \frac{1}{2} + 3\varepsilon_1 a^2 \frac{e^{u-v}}{(1+\varepsilon_1 e^{2(u-v)})^2} +$$

$$+ \frac{3a^2}{1+\varepsilon_1 e^{u-v}} ,$$

$$M = 2(b e^{4v} + c e^{2v}) - \varepsilon_2 e^{3v} - \frac{1}{2} + 3\varepsilon_1 a^2 \frac{e^{u-v}}{(1+\varepsilon_1 e^{2(u-v)})^2} -$$

$$- \frac{3a^2}{1+\varepsilon_1 e^{u-v}} .$$

29°

$$\beta = \varepsilon_1 e^{u-v}, \quad \gamma = a e^{2(v-u)},$$

$$L = b e^{4u} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{a} e^{3u} - 2 + 3\varepsilon_1 a e^{v-u},$$

$$M = c e^{4v} - \varepsilon_2 e^{3v} - \frac{1}{2}.$$

Specie B_6

30°

$$\beta = \frac{e^{u-v}}{u-v}, \quad \gamma = a \frac{e^{v-u}}{v-u},$$

$$L = (bu^2 + c) e^{2u} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{1}{(u-v)^2} - \frac{1}{u-v},$$

$$M = a^2 (bv^2 + c) e^{2v} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{1}{(u-v)^2} + \frac{1}{u-v}.$$