Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces

Chapitre II: Les éléments de la théorie projective des courbes planes

In: Guido Fubini (author); Eduard Čech (author): Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces. (French). Paris: Gauthier-Villars & Cie, 1931. pp. [8]--20.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402559

CHAPITRE II.

LES ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE PROJECTIVE DES COURBES PLANES.

4. Les courbes planes. — Soient x, y, z les coordonnées homogènes d'un point x mobile sur un plan donné et ξ, η, ζ les coordonnées homogènes d'une droite du même plan. L'équation

$$S\xi x = \xi x + \eta y + \zeta z = 0$$

nous donne la condition pour que le point et la droite s'appartiennent. Nous avons déjà remarqué que l'on ne change pas le point x (ou la droite ξ) en multipliant ses coordonnées homogènes par un même facteur $\rho \neq 0$. Les x, y, z (de même que les ξ, η, ζ) ne peuvent pas être nulles toutes les trois. Si par exemple $z \neq 0$, les $x' = x : z$, $y' = y : z$ sont les coordonnées non homogènes du point x (ou x'). Si x_1, x_2, x_3 sont trois points du plan, nous indiquons par (x_1, x_2) les compléments algébriques de x_3, y_3, z_3 dans le déterminant (x_1, x_2, x_3). Ils sont les coordonnées de la droite (x_1, x_2) qui joint les points x_1 et x_2. De même les (ξ_1, ξ_2) sont les coordonnées du point intersection des droites ξ_1 et ξ_2.

Si x, y, z sont fonctions d'un paramètre u, et si la matrice (x, x_u) n'est pas identiquement nulle, le point x engendre une courbe C. [Si la matrice (x, x_u) était nulle, les rapports $x : y : z$ seraient des constantes et le point x ne dépendrait pas du paramètre u.] Nous supposons que les $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ possèdent finies et continues toutes les dérivées, que nous introduirons dans nos calculs.

La droite

$$\xi = \rho(x, x_u), \tag{1}$$

où $\rho \neq 0$ est un facteur arbitraire, est la droite tangente en (x) à la courbe C. On aura

$$\xi_u = \rho_u(x, x_u) + \rho(x, x_{uu}), \tag{1$_2$}$$

$$(\xi, \xi_u) = \rho^2[(x, x_u), (x, x_{uu})] = \rho^2 (x, x_u, x_{uu}) x. \tag{1$_3$}$$

Si

$$(2) \qquad \rho^3(x, x_u, x_{uu}) = 1, \qquad \text{ou} \qquad \rho = (x, x_u, x_{uu})^{-\frac{1}{3}},$$

alors

$$(2_1) \qquad x = \rho(\xi, \xi_u).$$

Cette équation est tout à fait analogue à l'équation (1). Nous donnerons en conséquence au facteur ρ toujours la valeur définie par l'équation (2); ce qui est possible, si l'on suppose que

$$(2_2) \qquad \Delta^3 = (x, x_u, x_{uu}) \neq 0.$$

Si cette condition n'est pas satisfaite, les points x, x_u, x_{uu} sont en ligne droite. Si cela arrive pour toutes les valeurs de u, la courbe C est une ligne droite : et nous ne considérerons pas ce cas élémentaire. Si au contraire (x, x_u, x_{uu}) est nul seulement pour quelque valeur de u, par exemple pour $u = u_0$, alors le point $x = x(u_0)$ est un point d'inflexion pour la courbe C. Nous négligeons ces points, que nous considérons comme des points singuliers.

Si nous multiplions les x, y, z *par un même facteur* $\sigma(u) \neq 0$, *les* ξ *définies par les équations* (1) *et* (2) *restent multipliées par le même facteur. Si nous changeons le paramètre* u, *en posant* $u = u(v)$, où v est un nouveau paramètre, *les* ξ, η, ζ *restent inaltérées;* c'est-à-dire

$$(x, x_u, x_{uu})^{-\frac{1}{3}}(x, x_u) = (x, x_v, x_{vv})^{-\frac{1}{3}}(x, x_v).$$

On le vérifie très simplement en remarquant que

$$x_v = x_u u', \qquad x_{vv} = x_u u'' + x_{uu} u'^2$$

$\left(\text{où } u' = \frac{du}{dv}, \; u'' = \frac{d^2u}{dv^2}\right)$.

Nous dirons que les ξ, η, ζ sont les coordonnées de la droite tangente, *correspondant* aux coordonnées x selon la définition de M. Čech. On a évidemment, en vertu de l'équation (1),

$$(3) \qquad S\xi x = S\xi x_u = 0.$$

En les différentiant, et en se rappelant les équations (2) et (2_2), on trouve

$$(3_1) \qquad \begin{cases} S\xi_u x = 0, \\ Sx\xi_{uu} = -Sx_u\xi_u = S\xi x_{uu} = \rho(x, x_u, x_{uu}) = \Delta^2. \end{cases}$$

D'après la règle de multiplications des déterminants, on déduira

$$(x, x_u, x_{uu}) \cdot (\xi, \xi_u, \xi_{uu}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & S\xi\, x_{uu} \\ 0 & S\xi_u\, x_u & S\xi_u\, x_{uu} \\ S\xi_{uu}x & S\xi_{uu}x_u & S\xi_{uu}x_{uu} \end{vmatrix} = [S\xi x_{uu}]^3 = \Delta^6.$$

Cette équation démontre l'identité de M. Čech

$$(4) \qquad (x, x_u, x_{uu}) = (\xi, \xi_u, \xi_{uu}) = \Delta^3,$$

que nous pouvons transformer. On en déduit en effet

$$(5) \qquad 3\Delta^2\Delta_u = (x, x_u, x_{uuu}) = (\xi, \xi_u, \xi_{uuu})$$

et en conséquence

$$(5_1) \qquad S\xi x_{uuu} = S x\xi_{uuu} = \rho(x, x_u, x_{uuu}) = 3\Delta\Delta_u.$$

En différentiant les équations (3_1) on en déduit

$$(5_2) \qquad S\xi_u x_{uu} = S x_u \xi_{uu} = -\Delta\Delta_u.$$

En différentiant les équations (5_2) et (5_1) on trouve

$$(5_3) \qquad S x_u \xi_{uuu} = S\xi_u x_{uuu}, \qquad S\xi x_{uuuu} = S x \xi_{uuuu}.$$

Des équations (4) et (5) on déduit aussi

$$(6) \qquad 0 = (x, x_u, 3x_{uu}\Delta_u - \Delta x_{uuu}) = (\xi, \xi_u, 3\xi_{uu}\Delta_u - \Delta\xi_{uuu}).$$

On pourra en conséquence déterminer quatre fonctions a, b, α, β de u de manière que

$$(6_1) \qquad \Delta x_{uuu} - 3\Delta_u x_{uu} + a x_u + b x = 0,$$

$$(6_2) \qquad \Delta\xi_{uuu} - 3\Delta_u \xi_{uu} + \alpha\, \xi_u + \beta\xi = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} &\Delta S\, \xi_u x_{uuu} - 3\Delta_u S\, \xi_u x_{uu} + a S x_u \xi_u \\ &= \Delta S x_u\, \xi_{uuu} - 3\Delta_u S x_u\, \xi_{uu} + \alpha\, S x_u \xi_u = 0, \end{aligned}$$

ou, d'après les équations précédentes,

$$(6_3) \qquad a = \alpha = \frac{1}{\Delta^2}[\Delta S\xi_u x_{uuu} - 3\Delta_u S\xi_u x_{uu}].$$

5. Les coordonnées normales et l'arc projectif. — Les équations (6_1) et (6_2) jouent un rôle fondamental dans la théorie des courbes planes. Occupons-nous par exemple de la première, à laquelle satisfont les x, y, z. Si nous considérons trois solutions indépendantes x', y', z' quelconques de la même équation, nous savons qu'elles sont des combinaisons linéaires à coefficients constants de x, y, z. La courbe lieu du point x', y', z' est donc *une transformée homographique* de la courbe C, lieu du point x, y, z.

En résumant : *Deux courbes sont projectivement identiques si les coordonnées homogènes de leurs points satisfont à une même équation* (6_1).

Le théorème réciproque n'est pas vrai; en effet à la courbe C (ou à ses transformées homographiques) correspond une classe d'équations; on déduit toutes ces équations de l'équation (6_1) par les transformations suivantes :

α. En changeant le paramètre u;

β. En substituant à l'inconnue x une autre fonction $x' = \tau x$, où $\tau \neq 0$ est une fonction arbitraire du paramètre.

Nous pouvons éviter ces indéterminations. Si l'on a choisi les x, ξ selon les définitions précédentes, nous pouvons choisir un paramètre correspondant v (fonction de u) de manière que $(x, x_v, x_{vv}) = 1$. En effet

$$x_u = x_v \frac{dv}{du}, \qquad x_{uu} = x_v \frac{d^2 v}{du^2} + x_{vv} \left(\frac{dv}{du}\right)^2,$$

$$\Delta^3 = (x, x_u, x_{uu}) = (x, x_v, x_{vv}) \left(\frac{dv}{du}\right)^3.$$

Il suffit de poser

$$v = \int \Delta\, du.$$

Si nous changeons les notations, et appelons encore u le nouveau paramètre, nous obtenons le résultat que, si nous avons choisi les x, ξ, on peut déterminer le paramètre u de manière que $\Delta = 1$. (Ce paramètre est défini à moins d'une constante additive.) Naturellement, si l'on change les x, ξ en les multipliant par un *même* facteur $\sigma(u) \neq 0$, on devra changer aussi le paramètre correspondant u. En effet, de l'équation $(x, x_u, x_{uu}) = 1$ on déduit

$$[\sigma x, (\sigma x)_u, (\sigma x)_{uu}] = \sigma^3 (x, x_u, x_{uu}) = \sigma^3.$$

Si l'on pose $x' = \sigma x$, on aura

$$(x', x'_v, x'_{vv}) = 1 \qquad \text{si } v = \int \sigma\, du.$$

Si $\Delta = 1$, nos équations deviennent plus simples :

$$(4_1) \qquad (x, x_u, x_{uu}) = (\xi, \xi_u, \xi_{uu}) = 1,$$

$$(5_4) \qquad (x, x_u, x_{uuu}) = (\xi, \xi_u, \xi_{uuu}) = S\xi x_{uuu} = Sx\xi_{uuu} = S\xi_u x_{uu} = Sx_u \xi_{uu} = 0,$$

$$(6_4) \qquad a = \alpha = S\xi_u x_{uuu} = Sx_u \xi_{uuu} = S(\xi_u x_{uu})_u - S\xi_{uu} x_{uu} = -S\xi_{uu} x_{uu},$$

$$(6_5) \qquad x_{uuu} + a x_u + b x = 0,$$

$$(6_6) \qquad \xi_{uuu} + a\,\xi_u + \beta\,\xi = 0.$$

On peut facilement calculer β. En effet,

$$\xi = (x, x_u), \qquad \xi_u = (x, x_{uu}),$$

$$\xi_{uu} = (x_u, x_{uu}) + (x, x_{uuu}) = (x_u, x_{uu}) - a\xi,$$

$$\xi_{uuu} = (x_u, x_{uuu}) - (a\xi)_u,$$

c'est-à-dire

$$(6_7) \qquad \xi_{uuu} + (a\xi)_u - b\xi = 0,$$

qui doit être identique à l'équation (6_6). On en déduit que $\beta = a_u - b$ et que *l'équation satisfaite par les ξ est l'adjointe de l'équation satisfaite par les x.*

Ces deux équations se réduiront à une seulement si $b = \beta = a_u - b$, c'est-à-dire si $a_u - 2b = 0$. Si cela arrive, les ξ seront des combinaisons linéaires des x à coefficients constants. Il y a par conséquent une corrélation qui porte chaque point de la courbe C dans la tangente correspondante. En conséquence la courbe C *est une conique, et cette corrélation est la polarité définie par elle.* Si nous posons $x' = \sigma x$, $dv = \sigma\, du$, l'équation (6_5) devient

$$x'_{vvv} + a' x'_v + b' x' = 0.$$

On vérifie facilement que

$$(a'_v - 2b')\, dv^3 = (a_u - 2b)\, du^3.$$

Nous en déduisons que, si $a_u - 2b = 0$, alors $a'_v - 2b'$ est encore nul; comme nous pouvions prévoir d'après ce que nous avons trouvé plus haut. En excluant les coniques, c'est-à-dire en supposant

$$\frac{a_u}{2} - b \neq 0,$$

il est bien naturel de choisir le facteur σ de manière que

$$\frac{a'_v}{2} - b' = 1.$$

(Naturellement nous excluons même les points où $a_u - 2b = 0$, que nous regardons comme singuliers; ils sont les points où la conique osculatrice a un contact au moins du cinquième ordre avec la courbe donnée.)

En changeant les notations et en écrivant x et u au lieu de x' et de v, en posant $a = 2q$, $a_u - 2b = 2$, c'est-à-dire $b = q_u - 1$, on aura

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_{uuu} + 2qx_u + (q_u - 1)x = 0, \\ \xi_{uuu} + 2q\,\xi_u + (q_u + 1)\,\xi = 0. \end{array} \right.$$

Nous dirons que les x, ξ du point et de la droite tangente sont les coordonnées *normales* ou *normalisées*, que u est l'arc projectif, q la courbure projective de la courbe. *Une courbe plane* C, qui n'est ni une droite, ni une conique, *est définie projectivement par la connaissance de la courbure projective comme fonction de l'arc projectif.*

Si une homographie porte une courbe C dans une autre courbe C′, c'est-à-dire si les courbes C, C′ sont projectivement identiques, alors la correspondance entre les points de C, C′ conserve la courbure projective et l'arc projectif (si l'on a choisi sur les deux courbes comme origine de l'arc projectif deux points correspondants). (Il faut cependant remarquer que, si l'on considère aussi des courbes, et des variables imaginaires, la différentielle de l'arc projectif n'est pas complètement définie : sa différentielle est définie seulement à moins d'un facteur, racine cubique de l'unité.)

De même les coordonnées *normales* x d'un point de C sont des combinaisons linéaires à coefficients *constants* (indépendants de u) des coordonnées normales x' du point correspondant de C′. L'homographie qui porte C en C′ porte la droite (x, x_u) tangent en x à C dans la tangente correspondante (x', x'_u) à C′. Mais elle porte aussi la droite (x, x_{uu}) dans la droite (x', x'_{uu}). Nous disons que (x, x_{uu})

est la *normale projective* à C en x (naturellement on a supposé que les x sont les coordonnées normales).

Cette définition a quelque analogie avec celle que l'on peut donner pour la normale métrique, dont les cosinus directeurs sont x_{uu}, y_{uu}, si x, y sont les coordonnées rectangulaires d'un point de C, et u est l'arc métrique.

En coordonnées normales, la *normale projective* est la droite ξ_u; et l'on pourrait dire que x_u est le point *normal*.

Si $z = 1$, c'est-à-dire si les x, y sont des coordonnées projectives non homogènes, et si $y = \varphi(x)$ est l'équation de C, le paramètre v correspondant à ces coordonnées est défini par la $(x, x_v, x_{vv}) = 1$, c'est-à-dire par la $dv = \Delta\, dx$, où

$$\Delta^3 = (x, x_x, x_{xx}) = \begin{vmatrix} x & \varphi(x) & 1 \\ 1 & \varphi'(x) & 0 \\ 0 & \varphi''(x) & 0 \end{vmatrix} = \varphi''(x).$$

Alors les x, x_v, x_{vv}, x_{vvv} et par conséquent même les coefficients a, b, de l'équation (6_5), dépendent de φ et de ses dérivées jusqu'à celles du quatrième ordre; l'arc projectif u dépend en conséquence de φ et de ses dérivées jusqu'à celles du cinquième ordre. La normale projective (x, x_{uu}) dépend en conséquence des dérivées de φ d'ordre non supérieur au sixième. On peut donc énoncer le théorème de Terracini [14] (¹). *Si une homographie transforme en lui-même un point d'une courbe* C *et son voisinage du sixième ordre*, *elle transforme aussi en elle-même la normale projective.*

M. Terracini a trouvé aussi (*loc. cit.*) des théorèmes analogues (même pour les surfaces) pour les géométries métriques et affines; et il a démontré que la propriété énoncée caractérise la normale.

6. **Les coordonnées locales.** — Dans ce qui suit, nous ferons usage de coordonnées homogènes x et ξ correspondantes quelconques (de manière que $\mathrm{S}\, d\xi\, d^2x = \mathrm{S}\, dx\, d^2\xi$) et d'un paramètre u choisi à volonté. Si $u = u_0$ est un point A de la courbe C, nous écrirons x, x_u, x_{uu}, etc., au lieu d'écrire $x(u_0)$, $x_u(u_0)$, etc. Si x_1 est un point quelconque du plan, nous pourrons choisir les l, m, n de manière

(¹) Les nombres entre crochets se rapportent à l'index bibliographique à la fin du volume.

que

$$x_1 = lx + mx_u + nx_{uu} \qquad (u = u_0). \tag{7}$$

(Les équations analogues pour y_1 et z_1 sont sous-entendues.) En effet, on peut résoudre les (7), puisque $(x, x_u, x_{uu}) \neq 0$. D'une manière analogue, si ξ_1 est une droite quelconque du plan, on pourra déterminer les λ, μ, ν de manière que

$$\xi_1 = \lambda\xi + \mu\xi_u + \nu\xi_{uu}. \tag{7_1}$$

Nous appellerons les l, m, n et les λ, μ, ν les *coordonnées locales* du point x_1, et de la droite ξ_1 par rapport au point $u = u_0$ de la courbe C. La condition $S\xi_1 x_1 = 0$ pour que ce point et cette droite s'appartiennent devient, d'après les équations du paragraphe 4,

$$\left\{\begin{array}{l} (l\nu + n\lambda - m\mu)\Delta^2 - (m\nu + \mu n)\Delta\Delta_u + A n\nu = 0 \\ \qquad (\text{où } A = Sx_{uu}\xi_{uu}) \qquad (u = u_0). \end{array}\right. \tag{8}$$

L'équation de la droite ξ_1 en coordonnées locales de point est en conséquence

$$Ll + Mm + Nn = 0, \tag{8_1}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} L = \Delta^2\nu, \\ M = \mu\Delta^2 - \nu\Delta\Delta_u, \\ N = \lambda\Delta^2 - \mu\Delta\Delta_u + \nu A. \end{array}\right. \tag{8_2}$$

Étudions la corrélation qui fait correspondre à un point l_1, m_1, n_1 (c'est-à-dire au point $l_1 x + m_1 x_u + n_1 x_{uu}$) la droite $l_1\xi + m_1\xi_u + n_1\xi_{uu}$, qui, en coordonnées locales de point, aura [en vertu des équations (8)] l'équation

$$(ln_1 + nl_1 - mm_1)\Delta^2 - (mn_1 + m_1 n)\Delta\Delta_u + A nn_1 = 0.$$

On pourra donc définir cette corrélation, en disant qu'elle est la polarité par rapport à la conique

$$(2ln - m^2)\Delta^2 - 2mn\Delta\Delta_u + A n^2 = 0. \tag{9}$$

On pourrait reconnaître directement avec la plus grande facilité que la précédente corrélation ne dépend pas du paramètre u, et reste inaltérée même si l'on change le facteur de proportionnalité des coordonnées (homogènes) x, ξ. En conséquence *la conique* (9) *est com-*

plètement définie par la courbe C *et son point* $u=u_0$. En effet nous pouvons démontrer que cette conique est la conique osculatrice en $u=u_0$ à la courbe C. Pour le démontrer, nous pouvons supposer $\Delta=1$ (¹).

De l'équation (6_5) on déduit

$$x_{uuu}=\mathrm{A}x_u-bx,$$
$$x_{uuuu}=\mathrm{A}x_{uu}+(\mathrm{A}_u-b)x_u-b_u x.$$

En indiquant par A, b, etc. les valeurs de ces quantités dans le point $u=u_0$, on aura

$$\begin{aligned}x(u_0+du)&=x+x_u\,du+\frac{1}{2}x_{uu}\,du^2\\&+\frac{1}{6}(\mathrm{A}x_u-bx)\,du^3\\&+\frac{1}{24}[\mathrm{A}x_{uu}+(\mathrm{A}_u-b)x_u-b_u x]du^4+\ldots\\&=lx+mx_u+nx_{uu},\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}l&=1-\frac{1}{6}b\,du^3-\frac{1}{24}b_u\,du^4+\ldots,\\m&=du+\frac{1}{6}\mathrm{A}\,du^3+\frac{1}{24}(\mathrm{A}_u-b)\,du^4+\ldots,\\n&=\frac{1}{2}du^2+\frac{1}{24}\mathrm{A}\,du^4+\ldots.\end{aligned}$$

Et, en substituant ces valeurs dans l'équation (9), on reconnaît que son premier membre s'annule au moins du cinquième ordre.

C. Q. F. D.

Soient $x=x(u)$, $y=y(u)$, $z=z(u)$ les équations d'une courbe, et le paramètre u soit choisi à volonté. Si u était le paramètre correspondant aux coordonnées x, y, z, c'est-à-dire si (x, x_u, x_{uu}) était égal à 1, alors la polaire du point $x_u+\lambda x$ (où $u=u_0$) par rapport à la conique osculatrice à C dans le point $u=u_0$ serait la droite $(x, x_{uu})+\lambda(x, x_u)$. Dans le cas général, soit $(x, x_u, x_{uu})=\varphi(u)$. Posons $x'=\rho x$; on aura

$$(x', x'_u, x'_{uu})=\rho^3\varphi(u)=1 \qquad \text{si } \rho=[\varphi(u)]^{-\frac{1}{3}}.$$

(¹) L'équation (6_4) démontre que, si $\Delta=1$, alors

$$\mathrm{A}=-a=-\alpha=\mathrm{S}\xi_{uu}x_{uu}=-\mathrm{S}\xi_u x_{uuu}=-\mathrm{S}x_u\xi_{uuu}.$$

Le paramètre u correspond aux coordonnées x'. Le point $x_u + \lambda x$ est (dans les coordonnées nouvelles x') le point $x'_u + \mu x'$, où

$$\mu = \lambda + \frac{1}{3}\frac{\varphi_u}{\varphi} \qquad (u = u_0),$$

dont la polaire par rapport à la conique osculatrice est la droite $(x', x'_{uu} + \mu x'_u)$, qui, dans le premier système de coordonnées x, est la droite

$$(x, x_{uu}) + \left(\lambda - \frac{1}{3}\frac{\varphi_u}{\varphi}\right)(x, x_u).$$

Prenons un autre point $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ qui n'appartient pas au plan $t = 0$ de la courbe C, et dont les coordonnées sont des constantes. Les déterminants $\varphi = (x, x_u, x_{uu})$ du troisième ordre, et $\psi = (x, x_u, x_{uu}, \bar{x})$ du quatrième ordre satisfont à l'équation $\varphi_u : \varphi = \psi_u : \psi$. On pourra donc dire que *la droite polaire du point $x_u + \lambda x$* (où $u = u_0$) *par rapport à la conique osculatrice à* C *dans le point $u = u_0$ est la droite*

$$(x, x_{uu}) + \left(\lambda - \frac{1}{3}\frac{\psi_u}{\psi}\right)(x, x_u),$$

où $\psi = (x, x_u, x_{uu}, \bar{x})$, les $\bar{x}$ sont des constantes et le point $\bar{x}$ n'appartient pas au plan de la courbe C.

Naturellement ce résultat est encore vrai si la courbe C n'appartient pas au plan $t = 0$, mais est une courbe plane quelconque.

7. **L'invariant de contact de Smith, Mehmke et Segre.** — Soient

$$x = x(u), \qquad x = X(v)$$

les équations de deux courbes C, Γ. Nous supposerons qu'elles ont un contact du premier ordre dans le point $u = v = 0$. On pourra changer les paramètres et les coordonnées homogènes de manière que

$$x(0) = X(0), \qquad x_u(0) = X_v(0),$$

où, comme à l'ordinaire, les équations analogues pour les y, z sont sous-entendues. Si nous posons $x' = \rho x$ et $u = \varphi(u_1)$ pour la première courbe, $X' = \sigma X$ et $v = \psi(v_1)$ pour la deuxième, nous pourrons choisir les x' et les X' comme nouvelles coordonnées des points de C et Γ, et u_1, qui est fonction de u (que nous supposerons nulle pour $u = 0$) comme nouveau paramètre de C, v_1 qui est une fonction de v (que nous supposerons nulle pour $v = 0$) comme nouveau paramètre de Γ. On aura

$$x' = \rho x = \sigma X = X',$$
$$(\rho x)_{u_1} = (\sigma X)_{v_1} \qquad \text{pour } u_1 = v_1 = 0,$$

seulement si pour $u_1 = v_1 = 0$ l'on a $\rho = \sigma$ et $u'(u_1) = v'(v_1)$. On aura alors (toujours pour $u_1 = v_1 = 0$)

$$\frac{(x', x'_{u_1}, x'_{u_1 u_1})}{(X', X'_{v_1}, X'_{v_1 v_1})} = \frac{(x, x_u, x_{uu})\,\rho^3[u'(u_1)]^3}{(X, X_v, X_{vv})\,\sigma^3[v'(v_1)]^3} = \frac{(x, x_u, x_{uu})}{(X, X_v, X_{vv})}.$$

De plus ce dernier rapport ne change pas si l'on soumet les coordonnées homogènes à une transformation linéaire à coefficients constants et à déterminant égal à 1. Ce rapport est donc un invariant projectif j; et, puisque $x = X$, $x_u = X_v$ (si $u = v = 0$), on aura

$$(x, x_u, x_{uu} - jX_{vv}) = 0;$$

c'est-à-dire cet invariant est le nombre j tel que $x_{uu} - jX_{vv}$ appartienne à la tangente

$$(x, x_u) = (X, X_v).$$

Si par exemple $z = Z = 1$, $x = u$, $X = v$, les x, y et X, Y seront des coordonnées non homogènes. Si les deux courbes se touchent dans un point O, nous aurons dans ce point

$$x = X, \qquad x_u = X_v = 1; \qquad y = Y, \qquad y_u = y_x = Y_X = Y_v.$$

L'invariant j se réduit à

$$\frac{d^2y}{dx^2} : \frac{d^2Y}{dX^2},$$

qui est le rapport des courbures euclidiennes des courbes C et Γ dans le point de contact. Ce rapport est donc (Smith [1] et Mehmke [1], [2]) un invariant projectif. C. Segre [2] en a donné une très élégante interprétation géométrique. Supposons que le point O de contact soit le point $x = y = X = Y = 0$, et que la droite $y = Y = 0$ soit la tangente en O. Les équations des courbes C et Γ, dans le voisinage de O, seront

$$y = ax^2 + \ldots, \qquad Y = AX^2 + \ldots,$$

où les termes négligés sont au moins du troisième ordre en x, X.

Si $(\mu c, c)$ est un point A quelconque qui n'appartient pas à la tangente $y = 0$, c'est-à-dire si $c \neq 0$, une droite passant par A aura une équation

$$x - \mu y - \varepsilon(y - c) = 0,$$

où ε est une constante arbitraire. Cette droite rencontrera la tangente $y = 0$ et les deux courbes C, Γ en trois points E, O', O'', dont la *première* coordonnée est donnée par les formules

$$x = -c\varepsilon,$$

$$x' = -c\varepsilon + a\mu c^2\varepsilon^2 + \ldots, \qquad x'' = -c\varepsilon + A\mu c^2\varepsilon^2 + \ldots$$

(où les termes négligés sont au moins du troisième ordre en ε). Le birapport (A, E, O', O'')

$$\frac{a\mu c^2\varepsilon^2 + \ldots}{A\mu c^2\varepsilon^2 + \ldots} : \frac{\mu c + c\varepsilon - a\mu c^2\varepsilon^2 + \ldots}{\mu c + c\varepsilon + A\mu c^2\varepsilon^2 + \ldots}$$

a (pour $\varepsilon = 0$) *la limite* $\frac{a}{A}$, qui ne dépend ni de μ, ni de c, mais est la valeur en O de $y_{xx} : Y_{XX}$; en résumant, *l'invariant j de Smith-Mehmke est la limite d'un birapport* (C. Segre [2]).

Remarque. — Naturellement on peut généraliser les considérations de C. Segre. Si par exemple les courbes C et Γ ont en O $(x = y = 0)$ un contact d'ordre $n - 1$ (avec $n > 1$), ou pourra écrire

$$y = ax^n + \ldots, \qquad Y = AX^n + \ldots,$$

en négligeant les termes au moins d'ordre $n + 1$ en x, et étudier l'invariant

$$a : A = \frac{d^n y}{dx^n} : \frac{d^n Y}{dX^n} \qquad (\text{pour } x = X = 0).$$

Remarque. — Tout à fait récemment, M. B. Segre [7] a trouvé des interprétations géométriques très intéressantes du précédent invariant, en démontrant aussi qu'il est un invariant d'un groupe infini de transformations bien plus général que le groupe des transformations projectives. Mais il a donné aussi une très simple interprétation projective.

Considérons les deux coniques, qui passent par un point A arbitraire et y ont une droite tangente t choisie à volonté, et qui sont osculatrices en O ($x = y = 0$) aux courbes $y = ax^2 + \ldots$, $y = Ax^2 + \ldots$. Elles ont un invariant (le birapport de ces deux coniques bitangentes et des deux coniques de leur faisceau, qui se réduisent à une couple de droites). On démontre que cet invariant ne dépend ni du point A, ni de la droite t et qu'il se réduit à l'invariant, que nous avons étudié ici.

Pour l'étude systématique des courbes planes nous renvoyons le lecteur aux traités de M. Wilczynski (Chap. II, p. 58-91) et de M. Čech (Chap. III, p. 214-237). *Voir* aussi Halphen [2], Study [1], Pick [1], Berwald [1], Sannia [4], Kawaguchi [2], [6], ainsi que notre *Geometria proiettiva diffevenvuiale* (§ 8). Pour des questions particulières, *voir* encore Lie [1], [2] (courbes W), Denton [1] (quartique osculatrice), Nyberg [1] (cubiques rationnelles), Reaves [1] (courbes W), Rabut [1] (invariants de contact), Harding [1] (courbes covariantes), Kurosu [1] (courbes covariantes), Wilczynski [29], [30] (arc projectif), Wirtinger [1] (cubiques elliptiques), Bompiani [28] (invariants de contact) et [33] (points singuliers), Kawaguchi [10] (normale projective), Cartan [10] (développement de la conique osculatrice, extrémales de l'arc projectif), Palozzi [1] (points singuliers).