Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces

Chapitre III: Les éléments de la théorie projective des courbes gauches

In: Guido Fubini (author); Eduard Čech (author): Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces. (French). Paris: Gauthier-Villars & Cie, 1931. pp. [21]--33.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402560

CHAPITRE III.

LES ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES COURBES GAUCHES.

8. **Les courbes gauches.** — Soient x, y, z, t les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à trois dimensions (si $t = 1$, les x, y, z sont non homogènes). Dans ce qui suit nous ferons usage de notations tout à fait analogues aux précédentes. Si les x, y, z, t sont fonctions d'un paramètre u, et si la matrice (x, x_u) est différente de zéro, le point x engendrera une courbe C. Si le déterminant

$$(1) \qquad \varepsilon\Delta^2 = (x, x_u, x_{uu}, x_{uuu})$$

$$(1_1) \qquad [\text{où } \varepsilon = \operatorname{sgn}(x, x_u, x_{uu}, x_{uuu})]$$

est identiquement nul, la courbe se réduit à une courbe plane : nous excluons ce cas, que nous avons déjà étudié.

Si cela n'arrive pas, les points où $\Delta = 0$ sont les points à plan osculateur stationnaire, que nous considérons comme singuliers et excluons de notre étude.

La (1) définit Δ à moins du signe, de manière que nous pourrions supposer par exemple $\Delta > 0$.

Le plan osculateur ξ est défini par les équations

$$(2) \qquad S\xi x = S\xi x_u = S\xi x_{uu} = 0 \qquad \text{ou} \qquad S\xi x = S\xi\, dx = S\xi\, d^2x = 0.$$

Nous en déduisons

$$(3) \qquad \xi = \rho\varepsilon(x, x_u, x_{uu}),$$

où $\rho \neq 0$ est un facteur arbitraire.

En différentiant les équations (2), on trouve

$$(2_1) \qquad S\xi x = S\xi_u x = S x\xi_{uu} = 0 \qquad \text{ou} \qquad S\xi x = Sx\, d\xi = Sx\, d^2\xi = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(3_1) \qquad x = \sigma(\xi, \xi_u, \xi_{uu}),$$

où σ est un facteur qu'il s'agit de déterminer.

D'après (1) et (2) on a

$$S\xi x_{uuu} = \rho\Delta^2.$$

En différentiant les équations (2_1), on en déduit

$$(2_2) \qquad S\xi x_{uuu} = -S\xi_u x_{uu} = S\xi_{uu} x_u = -S x \xi_{uuu} = \rho\Delta^2.$$

Et, d'après (3_1) on en déduira

$$(1_2) \qquad \rho\Delta^2 = -\sigma(\xi, \xi_u, \xi_{uu}, \xi_{uuu}).$$

Mais, d'après les équations précédentes et la règle de multiplication des déterminants, on trouve :

$$(x, x_u, x_{uu}, x_{uuu})(\xi, \xi_u, \xi_{uu}, \xi_{uuu}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & Sx\xi_{uuu} \\ 0 & 0 & Sx_u\xi_{uu} & A \\ 0 & S\xi_u x_{uu} & B & C \\ S\xi x_{uuu} & D & E & F \end{vmatrix},$$

où les valeurs de A, B, ..., F ne nous intéressent pas. On en déduit

$$(x, x_u, x_{uu}, x_{uuu})(\xi, \xi_u, \xi_{uu}, \xi_{uuu}) = (S\xi x_{uuu})^4 = \rho^4\Delta^8$$

ou

$$-\sigma(\xi, \xi_u, \xi_{uu}, \xi_{uuu}) = \rho\Delta^2 = -\sigma\rho^4\varepsilon\Delta^6$$

ou

$$-\varepsilon\sigma\rho^3\Delta^4 = 1.$$

Si nous choisissons ρ égal à Δ^{-1}, on trouvera $\sigma = -\varepsilon\rho$, et les équations (3) et (3_1) se réduiront à

$$(3_2) \qquad \xi = \varepsilon\rho(x, x_u, x_{uu}), \qquad x = -\varepsilon\rho(\xi, \xi_u, \xi_{uu}) \qquad (\text{où } \rho = \Delta^{-1}).$$

On aura aussi, d'après les équations (1) et (1_2),

$$(3_3) \qquad (x, x_u, x_{uu}, x_{uuu}) = (\xi, \xi_u, \xi_{uu}, \xi_{uuu}).$$

Les ξ, ainsi normalisées selon la définition de M. Čech, seront appelées les coordonnées du plan osculateur *correspondant* aux coordonnées x de point. (Il va sans dire que cette correspondance ne dépend pas du choix du paramètre u; et, puisque Δ est défini à moins du signe, même les ξ auront une indétermination de signe.) Aux coordonnées σx (où $\sigma \neq 0$ est un facteur arbitraire) correspondront les $\sigma\xi$. On aura encore

$$\begin{aligned} S\xi x_{uuuu} &= \varepsilon\rho(x, x_u, x_{uu}, x_{uuuu}) = \varepsilon\rho(x, x_u, x_{uu}, x_{uuu})_u \\ &= 2\varepsilon^2\rho\Delta\Delta_u = 2\Delta_u. \end{aligned}$$

Et, en différentiant les équations (2_2), où l'on a posé $\rho = \Delta^{-1}$, on trouvera

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} S\xi x_{uuuu} &= -S x\xi_{uuuu} = 2\Delta_u,\\ -S\xi_u x_{uuu} &= S x_u \xi_{uuu} = \Delta_u,\\ S\xi_{uu} x_{uu} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Par conséquent,

$$(4_1)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= S\, d^2x\, d^2\xi = S(\xi\, d^3x + x\, d^3\xi)\\ &= S(\xi\, d^4x + x\, d^4\xi) = S(d\xi\, d^3x + dx\, d^3\xi),\\ \Delta\, du^3 &= \frac{1}{2} S(\xi\, d^3x - x\, d^3\xi) = \frac{1}{2} S(dx\, d^2\xi - d\xi\, d^2x). \end{aligned}\right.$$

Les équations analogues joueront un rôle fondamental dans la théorie des surfaces.

Remarquons encore une identité, qui nous sera utile plus loin. Des équations précédentes, en remarquant que

$$d^3x = x_u\, d^3u + 3x_{uu}\, du\, d^2u + x_{uuu}\, du^3,$$

on déduit

$$(5)\qquad S\, d^3x\, d^3\xi = (S x_{uuu}\xi_{uuu})\, du^6.$$

En substituant aux x et aux ξ les coordonnées correspondantes σx et $\sigma\xi$ (où $\sigma \neq 0$), nous trouvons

$$(5_1)\qquad S\, d^3(\sigma x)\, d^3(\sigma\xi) = \sigma^2 (S x_{uuu}\xi_{uuu})\, du^6 = \sigma^2 S\, d^3x\, d^3\xi.$$

Puisque nous avons supposé $(x, x_u, x_{uu}, x_{uuu}) \neq 0$, nous pourrons trouver des fonctions a, b, c, f de la u de manière que

$$(6)\qquad x_{uuuu} + f x_{uuu} + a x_{uu} + b x_u + c x = 0.$$

On a sous-entendu, comme à l'ordinaire, les équations semblables pour les y, z, t.

9. **Les coordonnées normales et l'arc projectif.** — Nous pouvons répéter pour l'équation (6) ce que nous avons dit pour les équations (6_1) et (6_2) (*cf.* § 5). L'équation (6) définit une courbe C, et toutes les courbes, que l'on peut en déduire par une transformation homographique. Au contraire, une courbe C ne définit pas complètement l'équation (6) correspondante. Pour éviter cette indétermination, nous commencerons par une première remarque. Des équations (2_2),

(4), (6) on déduit [d'après les équations (2)]

$$(7) \qquad \begin{aligned} 2\Delta_u + f\Delta &= S\xi x_{uuuu} + fS\xi x_{uuu} \\ &= -aS\xi x_{uu} - bS\xi x_u - c\xi = 0. \end{aligned}$$

Choisissons un nouveau paramètre v, défini par la

$$dv^3 = \Delta\, du^3 = S\xi\, d^3 x$$

ou

$$dv^6 = \varepsilon(x,\ dx,\ d^2x,\ d^3x);$$

alors la nouvelle valeur Δ' de Δ sera donnée par la

$$\Delta'^2 = \varepsilon(x,\ x_v,\ x_{vv},\ x_{vvv}) = \varepsilon\frac{(x,\ dx,\ d^2x,\ d^3x)}{dv^6} = 1,$$

de manière que $\Delta' = \pm 1$. Nous dirons que *ce paramètre* v (défini à moins d'une constante additive et à moins du signe) *est le paramètre correspondant aux coordonnées homogènes* x, ξ. Si nous l'appelons u (en changeant les notations), nous trouvons que $\Delta = \pm 1$, et qu'en conséquence $\Delta_u = 0$, et, d'après l'équation (7), que aussi $f = 0$. Et il est très simple de démontrer qu'aux coordonnées $x' = \sigma x$ et $\xi' = \sigma\xi$, où $\sigma \neq 0$ est un facteur arbitraire, correspond le paramètre u' défini par l'équation $du' = \sigma^{\frac{2}{3}} du$.

Dans nos hypothèses, on peut poser $\Delta = \pm 1$; supposons par exemple avoir choisi $\rho = \Delta^{-1} = 1$. On aura alors, d'après (6), où l'on pose $f = 0$:

$$\xi = \varepsilon(x,\ x_u,\ x_{uu}), \qquad \xi_u = \varepsilon(x,\ x_u,\ x_{uuu}),$$

$$\begin{aligned} \xi_{uu} &= \varepsilon(x,\ x_{uu},\ x_{uuu}) + \varepsilon(x,\ x_u,\ x_{uuuu}) \\ &= \varepsilon(x,\ x_{uu},\ x_{uuu}) - \varepsilon a(x,\ x_u,\ x_{uu}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\xi_{uu} + a\xi = \varepsilon(x,\ x_{uu},\ x_{uuu}),$$

$$\begin{aligned} \xi_{uuu} + (a\xi)_u &= \varepsilon(x_u,\ x_{uu},\ x_{uuu}) + \varepsilon(x,\ x_{uu},\ x_{uuuu}) \\ &= \varepsilon(x_u,\ x_{uu},\ x_{uuu}) + \varepsilon b(x,\ x_u,\ x_{uu}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\xi_{uuu} + (a\xi)_u - b\xi = \varepsilon(x_u,\ x_{uu},\ x_{uuu}), \\ &\xi_{uuuu} + (a\xi)_{uu} - (b\xi)_u = \varepsilon(x_u,\ x_{uu},\ x_{uuuu}) = -\varepsilon c(x,\ x_u,\ x_{uu}) \end{aligned}$$

ou

$$(6_1) \qquad \xi_{uuuu} + (a\xi)_{uu} - (b\xi)_u + c\xi = 0.$$

Les ξ *satisfont donc à l'équation* (6_1) *adjointe de l'équation* (6) *(où* $f=0$*), à laquelle satisfont les* x.

Remarquons que, si nous substituons dans l'équation (5) la valeur de ξ_{uuu} que nous avons trouvée maintenant, on trouve d'après (4), en se rappelant que $\Delta_u = 0$:

$$(5_2)\qquad \begin{aligned} \mathrm{S}\, d^3x\, d^3\xi &= [-a\mathrm{S}\,\xi_u x_{uuu} + (b-a_u)\mathrm{S}\,\xi x_{uuu}]\, du^6 \\ &= (b-a_u)\, du^6. \end{aligned}$$

Les équations (6) et (6_1) *coïncident seulement si* $a_u - b = 0$, c'est-à-dire *si* $\mathrm{S}\, d^3x\, d^3\xi = 0$. Dans ce cas, les ξ seront des combinaisons linéaires à coefficients constants des x; c'est-à-dire il y aura une corrélation qui porte chaque point x de la courbe dans le plan osculateur correspondant ξ, et les points x_u, x_{uu}, x_{uuu} dans les plans ξ_u, ξ_{uu}, ξ_{uuu}. Si nous nous rappelons que $\mathrm{S}x\xi = \mathrm{S}x_u\xi_u = \mathrm{S}x_{uu}\xi_{uu} = 0$ et que, d'après (5_1), $\mathrm{S}x_{uuu}\xi_{uuu} = 0$, nous en déduirons que cette corrélation porte un point quelconque A dans un plan α passant par A. Elle est donc *un système nul;* à une tangente (x, x_u) correspond la droite (ξ, ξ_u), qui, d'après les $\mathrm{S}\xi x = \mathrm{S}\xi x_u = \mathrm{S}\xi_u x = \mathrm{S}\xi_u x_u = 0$, coïncide avec la tangente (x, x_u). Donc *les tangentes à la courbe* (si $a_u = b$) *appartiennent au complexe linéaire* (déterminé par le système nul). Et l'on pourrait démontrer que *la condition* $a_u = b$ *n'est pas seulement suffisante, mais est encore nécessaire pour que les tangentes de* C *appartiennent à un complexe linéaire* (ou, comme on dit plus simplement, pour que la courbe C appartienne à un complexe linéaire).

Nous ne poursuivrons pas l'étude des courbes d'un complexe linéaire et, pour une courbe quelconque C, nous regarderons comme singuliers et négligerons les points où $a_u = b$, c'est-à-dire les points où $\mathrm{S}\, d^3x\, d^3\xi = 0$. Substituons aux x, ξ les $x' = \sigma x$, $\xi' = \sigma\xi$, et au paramètre u le paramètre u' correspondant aux nouvelles coordonnées $\left(du' = \sigma^{\frac{2}{3}}\, du\right)$. Nous trouverons une autre équation

$$\frac{d^4x'}{du'^4} + a'\frac{d^2x'}{du'^2} + b'\frac{dx'}{du'} + c'x' = 0$$

et d'après (5_1) et (5_2), on a l'identité suivante, que l'on peut facilement vérifier directement :

$$\left(b' - \frac{da'}{du'}\right) du'^3 = \left(b - \frac{da}{du}\right) du^3$$

On vérifie de cette manière que la condition $b - a_u = 0$ est invaviante; mais, de plus, nous avons obtenu le résultat que $(b - a_u)\,du^3$ est invariant; de manière que nous trouvons tout à fait naturel de choisir comme nouveau paramètre le paramètre v défini par la

$$dv^3 = (b - a_u)\,du^3,$$

et que nous appellerons le *paramètre normal*, ou *l'arc projectif* de la courbe. Si u était déjà ce paramètre, alors $b - a_u = 1$; et *les coordonnées x, ξ correspondantes seront appelées les coordonnées normales*. Nous pouvons répéter pour elles des considérations semblables à celles que nous avons développées dans le cas des courbes planes.

En coordonnées normales, les équations (6) et (6_1), deviennent :

$$(6_2) \qquad x_{uuuu} + a x_{uu} + (a_u + 1) x_u + c x = 0,$$

$$(6_3) \qquad \xi_{uuuu} + a\,\xi_{uu} + (a_u - 1) x_u + c\,\xi = 0.$$

Nous appellerons les a, c les courbures projectives de la courbe C. Nous pourrons dire : *une courbe* C, *qui n'est pas plane et n'appartient pas à un complexe linéaire, est déterminée par la connaissance des courbures projectives comme fonctions de l'arc projectif u*. Et, à son tour, *la courbe* C *détermine complètement ces courbures* (qui ne changent pas, même si l'on change le signe de du). *Les courbes d'un complexe linéaire sont caractérisées par la* $S\,d^3x\,d^3\xi = 0$ (ou $a_u = b$).

Dans le cas général, la droite (x, x_{uu}) pourrait être appelée la normale principale projective; et l'on pourrait même définir une binormale projective.

10. Les coordonnées locales [1]. — Soient x, ξ les coordonnées correspondantes, qui peuvent aussi n'être pas les coordonnées normales, et soit u le paramètre correspondant. Soit $u = u_0$ un point O de la courbe C et soient a, b, x, ξ, x_u, ξ_u, etc. les valeurs en O de ces quantités. Si x' est un point quelconque de l'espace, nous pourrons déterminer des quantités l, m, n, p de manière que

$$(8) \qquad x' = l x + m x_u + n x_{uu} + p x_{uuu}$$

---

[1] On pourra lire les derniers paragraphes de ce chapitre, seulement quand on les trouvera cités dans les chapitres suivants.

(en sous-entendant les équations semblables pour y', z', t'). Et pour chaque plan ξ' nous pourrons déterminer les λ, μ, ν, ρ de manière que

$$(8_1) \qquad \xi' = \lambda\xi + \mu\xi_u + \nu\xi_{uu} + \pi\xi_{uuu}.$$

Nous appellerons les l, m, n, p, λ, μ, ν, π les coordonnées *locales* du point x', ou du plan ξ' (par rapport au point O et à la courbe C). En se rappelant les équations (6) et (6_1), où l'on a posé $f = 0$, et en remarquant que [1]

$$\begin{aligned} Sx_{uu}\xi_{uuu} &= (Sx_u\xi_{uuu})_u - Sx_u\xi_{uuuu} \\ &= -Sx_u\xi_{uuuu} = Sx_u(a\xi_{uu} + b\xi_u + c\xi) = a, \end{aligned}$$

on trouve que la condition $S\xi'x' = 0$, pour que le point x' et le plan ξ' s'appartiennent, devient

$$(8_2) \qquad p\lambda - l\pi + m\nu + \mu n + a(n\pi - p\nu) + (b - a_u)p\rho = 0$$

ou

$$(8_3) \qquad Ll + Mm + Nn + Pp = 0,$$

où l'on a posé

$$(8_4) \quad L = -\pi, \qquad M = \nu, \qquad N = -\mu + a\pi, \qquad P = \lambda - a\nu + (b - a_u)\pi.$$

L'équation (8_3) est l'équation du plan (λ, μ, ν, ρ) en coordonnées locales de point.

La corrélation définie par les $\lambda = l$, $\mu = m$, $\nu = n$, $\pi = p$ fait correspondre au point l, m, n, p le plan (8_3), où

$$L = -p, \qquad M = n, \qquad N = -m + ap, \qquad P = l - an + (b - a_u)p;$$

on peut facilement démontrer que cette corrélation est complètement définie par la courbe C et le point O et est indépendante du choix des coordonnées x, ξ. De la remarque qu'elle se réduit à un système nul seulement si $b - a_u = 0$, on pourrait déduire une nouvelle démonstration que, si $b = a_u$, la courbe C appartient à un complexe linéaire.

Nous nous bornerons à remarquer que la correspondance définie par les équations :

$$(9) \qquad L = -p, \qquad M = n, \qquad N = -m + ap, \qquad P = l - an$$

---

[1] Il faut se rappeler que, d'après (4), on a $Sx_u\xi_{uuu} = \Delta_u = 0$.

ou

$$(9_1)\qquad \pi = p, \quad \nu = n, \quad \mu = m, \quad \lambda = l + (a_u - b)p$$

est le *système nul osculateur en* O à C, que l'on pourrait définir en partant de la cubique rationnelle gauche osculatrice en O à C. Mais nous nous arrêtons ici, en renvoyant pour des développements plus amples à la *G. P. D.* (¹).

Encore une remarque. Projetons la courbe C engendrée par le point $x(u)$ d'un point $\bar{x}$ (on suppose $\bar{x} = \text{const.}$) de l'espace sur le plan $\xi(u_0)$ osculateur à C dans le point $O(u = u_0)$. Cette projection est la courbe plane C_1 engendrée par le point

$$x_1(u) = x(u) - \bar{x}\,\frac{S\,\xi(u_0)\,x(u)}{S\,\bar{x}\,\xi(u_0)}.$$

Pour $u = u_0$, on trouve :

$$x_1 = x, \qquad x_{1u} = x_u, \qquad x_{1uu} = x_{uu}.$$

Et en conséquence la polaire du point $x_u + \lambda x$ (où $u = u_0$) de la tangente à C en O par rapport à la conique osculatrice à C en O est (§ 6) la droite

$$(10)\qquad (x, x_{uu}) + \left(\lambda - \frac{1}{3}\frac{\psi_u}{\psi}\right)(x, x_u),$$

où

$$(10_1)\qquad \psi = (x_1, x_{1u}, x_{1uu}, \bar{x}) = (x, x_u, x_{uu}, \bar{x}),$$

11. Sur quelques invariants de contact de deux courbes tangentes. — Considérons les courbes engendrées par les deux points $x(u)$ et $X(v)$, et supposons qu'elles soient tangentes dans un point $O(u = u_0,\ v = v_0)$, où leur contact est d'ordre n. On pourra alors trouver deux fonctions $\rho(u)$ et $\varphi(u)$ du paramètre u de manière que, si l'on pose $x' = \rho X$, $v = \varphi(u)$, on ait

$$v_0 = \varphi(u_0)$$

et

$$x = x', \qquad \frac{d^r x}{du^r} = \frac{d^r x'}{du^r} \qquad (\text{pour } u = u_0,\ v = v_0)$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n).$$

(¹) Avec *G. P. D.* nous citerons dorénavant la *Geometria Proiettiva Differenziale* des mêmes auteurs (Bologna, Zanichelli).

Et alors, pour tout choix du facteur $\sigma(u) \neq 0$, les $\bar{x} = \sigma(u)x$, $\bar{x}' = \sigma x'$ satisferont à ces mêmes équations. Ces équations contiennent les valeurs en O des x, X et de leurs dérivées d'ordre $r \leqq n$, et les valeurs de ρ, φ et de leurs dérivées d'ordre $r \leqq n$ (pour $u = u_0$, $v = v_0$). (Si l'on regarde ces dernières comme des inconnues, les deux courbes auront le contact énoncé si ces équations sont compatibles.)

Nous dirons alors que le contact est *analytique d'ordre n par rapport à la correspondance définie par la* $v = \varphi(u)$; il sera analytique d'ordre n seulement par rapport aux correspondances $v = \psi(u)$, qui satisfont aux équations

$$\psi(u_0) = \varphi(u_0), \qquad \psi^{(r)}(u_0) = \varphi^{(r)}(u_0) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Si $\varphi(u) = u$, nous dirons simplement que le contact est *analytique*.

Si le contact est analytique d'ordre n par rapport à la correspondance $v = \varphi(u)$, nous rechercherons *s'il est un contact d'ordre supérieur;* alors il sera analytique par rapport à une correspondance $v = \varphi(u) + a(u - u_0)^{n+1}$, où $a = \text{const.}$ On peut définir cette correspondance en posant

$$v = \varphi(u_1),$$
$$u = u + \frac{b}{(n+1)!}(u - u_0)^{n+1} \qquad (b = \text{const.}).$$

Et, en supposant que les coordonnées soient non homogènes, de manière que l'on peut poser $\rho = 1$, on devra avoir (pour $u = u_0$, $v = v_0$) :

$$x = X, \qquad \frac{d^r x}{du^r} = \frac{d^r X}{du^r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n);$$
$$\frac{d^{n+1} x}{du^{n+1}} = \frac{d^{n+1} X}{du^{n+1}}.$$

Ces équations sont toutes satisfaites, la dernière exceptée, d'après nos hypothèses, car dans le point considéré

$$u = u_1, \qquad \frac{du}{du_1} = 1, \qquad \frac{d^s u}{du_1^s} = 0 \qquad (2 \leqq s \leqq n).$$

Pour étudier la dernière, remarquons que (pour $u = u_0$)

$$\frac{d^{n+1} X}{du^{n+1}} = \frac{d^{n+1} X}{du_1^{n+1}} + b\frac{dX}{du_1}.$$

On pourra donc satisfaire à la dernière condition par un choix convenable de la constante b seulement si (pour $u = u_1 = u_0$) les

$$\frac{d^{n+1}x}{du^{n+1}} - \frac{d^{n+1}X}{du_1^{n+1}}$$

sont proportionnelles aux dérivées $\frac{dX}{du_1}\cdot$ On a posé $v = \varphi(u_1)$. Nous écrirons de nouveau u au lieu de u_1 ; la précédente condition peut être énoncée en disant que les

$$\frac{d^{n+1}x}{du^{n+1}} - \frac{d^{n+1}X}{du^{n+1}} \qquad [v = \varphi(u)]$$

sont proportionnelles aux dérivées premières $x_u = X_u$, ou, en nous servant de nouveau de coordonnées homogènes, en disant que *les points*

$$x, \quad x_u, \quad \frac{d^{n+1}(x - X)}{du^{n+1}} \qquad [v = \varphi(u)]$$

sont en ligne droite. Si cette condition n'est pas satisfaite, le contact des deux courbes sera seulement d'ordre n, et les trois points précédents détermineront un plan [le plan *principal* de Halphen-Berzolari [1]], dont les points possèdent une propriété très remarquable.

Pour la démontrer, servons-nous de nouveau de coordonnées non homogènes x, y, z et X, Y, Z. Les courbes, lieux des points x, y, o et X, Y, o, seront les courbes obtenues en projetant les courbes données du point $x = y = t = 0$ sur le plan $z = 0$. On aura pour $u = u_0$, $v = v_0$

$$\begin{matrix} x = X, & x^{(s)} = X^{(s)} \\ y = Y, & y^{(s)} = Y^{(s)} \end{matrix} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Et le contact de ces projections sera d'ordre supérieur à n, seulement si l'on peut trouver une constante h de manière que

$$hx' + x^{(n+1)} - X^{(n+1)} = y^{(n+1)} - Y^{(n+1)} + hy' = 0,$$

c'est-à-dire si le centre $x = y = t = 0$ de projection appartient *au plan principal* en O.

Seulement les points A *du plan principal en* O *ont la propriété que les cônes obtenus en projetant de* A *les deux courbes données* (qui ont en O un contact d'ordre n) *ont un contact d'ordre supé-*

---

(1) Halphen [3], Berzolari [1].

rieur le long de la génératrice AO. *Si ce plan est indéterminé* $\left(\text{c'est-à-dire si les points } x, x_u, \frac{d^{n+1}(x-X)}{du^{n+1}} \text{ sont en ligne droite}\right)$, *alors les courbes données ont elles-mêmes un contact d'ordre supérieur.*

Pour trouver une autre propriété du plan principal, nous considérons maintenant un point x, qui engendre une surface S. Les coordonnées seront fonctions de deux paramètres v, w. Le plan ξ tangent à S en x sera défini par les équations

$$S\xi x = S\xi x_v = S\xi x_w = 0.$$

Supposons d'avoir sur S deux courbes sortant d'un point $O(v = w = 0)$ de S, ayant en O un contact d'ordre n. On pourra représenter ces deux courbes l'une par des équations

$$v = v(u), \qquad w = w(u) \qquad [v(u) = w(u) = 0 \text{ si } u = 0],$$

l'autre par des équations semblables

$$v = V(u), \qquad w = W(u) \qquad [V(u) = W(u) = 0 \text{ pour } u = 0],$$

de manière que dans le point $u = 0$

$$\frac{d^s v(u)}{du^s} = \frac{d^s V(u)}{du^s}, \qquad \frac{d^s w(u)}{du^s} = \frac{d^s W(u)}{du^s} \qquad (1 \leqq s \leqq n).$$

Si nous indiquons par δ, d les différentielles *prises le long des deux courbes*, on aura alors

$$\frac{\delta^s x}{\delta u^s} = \frac{d^s x}{du^s}, \qquad \frac{\delta^s \xi}{\delta u^s} = \frac{d^s \xi}{du^s} \qquad (1 \leqq s \leqq n).$$

En différentiant n fois les identités

$$S\xi\, \delta x = S\xi\, dx = 0,$$

on en déduira que pour $u = 0$

$$S\xi(\delta^{n+1} x - d^{n+1} x) = 0;$$

c'est-à-dire le plan ξ passe par les points

$$x, \qquad \frac{\delta x}{\delta u} = \frac{dx}{du}, \qquad \frac{\delta^{n+1} x}{\delta u^{n+1}} - \frac{d^{n+1} x}{du^{n+1}};$$

il est donc le plan tangent à S en O et le plan principal des deux courbes : *Si deux courbes se touchent en* O, *chaque surface qui les contient et a en* O *un plan tangent bien déterminé, a en* O *comme plan tangent le plan principal des deux courbes.*

Étudions maintenant deux courbes gauches passant par un point O, où elles ont un contact de premier ordre. La première est engendrée par un point x, l'autre par un point X. Nous pourrons choisir les coordonnées homogènes et les paramètres u, U de manière qu'en O

$$x = X, \qquad x_u = X_U.$$

Soit h l'invariant de Smith-Mehmke pour les deux courbes planes obtenues en projetant les courbes données du point (0, 0, 0, 1) sur le plan $t = 0$.

On aura

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' - hX'' \\ y & y' & y'' - hY'' \\ z & z' & z'' - hZ'' \end{vmatrix} = 0 \qquad \left(x' = \frac{dx}{du},\ x'' = \frac{d^2x}{du^2},\ \ldots\right).$$

De même l'invariant h' des courbes obtenues en projetant les courbes données du point (0, 0, 1, 0) sur le plan $z = 0$ est donné par la

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' - h'X'' \\ y & y' & y'' - h'Y'' \\ t & t' & t'' - h'T'' \end{vmatrix} = 0.$$

On aura $h = h'$ seulement si $(x, x', x'', X'') = 0$, c'est-à-dire si les courbes ont le même plan osculateur. On en déduit facilement : *Si deux courbes gauches ont en* O *la même droite tangente, alors, seulement si elles ont en* O *le même plan osculateur, l'invariant de Smith-Mehmke des courbes planes obtenues en projetant les courbes données d'un point* P *sur un plan* π *calculé dans le point projection de* O, *ne dépend ni de* P, *ni de* π; *et on peut l'appeler l'invariant de contact en* O *des deux courbes gauches données.*

Pour l'étude systématique de courbes gauches, nous renvoyons le lecteur à la *G. P. D.* (Chap. I) et aux Traités de M. Wilczynski (Chap. XIII et XIV, p. 238-295) et de M. Čech (Chap. III, p. 237-292). *Voir* aussi Halphen [3], Sannia [6]. Pour les questions relatives au contact, *voir* le Traité de M. Čech (Chap. II, p. 96-211) ainsi que Bompiani [29], Čech [24], Konečný [1], Palozzi [2]. Pour d'autres questions particulières *voir* Čech [1] (l'élément du troisième ordre), Čech [2] (l'élément du quatrième ordre), Tzitzéica [12], [28] (classes particulières de courbes gauches). Pour les courbes des hyperespaces, *voir* Berzolari [1].

Les méthodes, que nous avons suivies ici, sont tout à fait équivalentes à celles de la *G. P. D.* (*loc. cit.*), où le lecteur pourra trouver d'autres développements et beaucoup de renseignements sur quelques questions géométriques, que nous avons ici négligées.