Topologické prostory. S dodatky: J. Novák, Konstrukce některých význačných topologických prostorů; M. Katětov, Plně normální prostory

§9. Metrisovatelné prostory

In: Eduard Čech (author); Josef Novák (author); Miroslav Katětov (author): Topologické prostory. S dodatky: J. Novák, Konstrukce některých význačných topologických prostorů; M. Katětov, Plně normální prostory. (Czech). Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1959. pp. 214--264.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402600

Terms of use:

© Nakladatelství Československé akademie věd

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

§ 9. METRISOVATELNÉ PROSTORY

9.1. Základní vlastnosti metrisovatelných prostorů

Definice **9.1.1.** Budiž P libovolná množina. *Odchylkou* v množině P nazveme funkci ϱ v oboru $P \times P$, která vyhovuje těmto dvěma axiomům (ve kterých $x \in P$, $y \in P$):

($\mathrm{I}\varrho$) $\varrho(x, x) = 0$.

($\mathrm{II}\varrho$) $x \neq y \Rightarrow \varrho(x, y) > 0$.

Prvky $x \in P$ budeme zvát *body*.

Definice **9.1.2.** Budiž ϱ odchylka v množině P a budiž $a \in P$. Je-li ε kladné číslo, nazveme množinu $\mathscr{E}_x\,[\varrho(a, x) < \varepsilon]$ *(ϱ, ε)-okolím* bodu a; *ϱ-okolím* bodu a nazveme každou množinu, která při nějakém $\varepsilon > 0$ je (ϱ, ε)-okolím bodu a.

Je-li ϱ odchylka v množině P a znamená-li $\mathfrak{U}(a)$ pro každý $a \in P$ soustavu všech ϱ-okolí bodu a, jsou splněny axiomy ($\mathrm{I}\mathfrak{U}$) až ($\mathrm{IV}\mathfrak{U}$), neboť axiomy ($\mathrm{I}\mathfrak{U}$) a ($\mathrm{IV}\mathfrak{U}$) jsou zřejmé a jest: ($\mathrm{I}\varrho$) $\Rightarrow$ ($\mathrm{II}\mathfrak{U}$), ($\mathrm{II}\varrho$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ($\mathrm{III}\mathfrak{U}$). Jestliže tedy pro každý $a \in P$ pokládáme $\mathfrak{U}(a)$ za soustavu definujících okolí bodu a, vznikne podle **4.3.3** topologie v množině P.

Definice **9.1.3.** O právě popsané topologii v P pravíme, že je *vytvořena odchylkou* ϱ.

9.1.1. Budiž Q vnořen do P. Je-li topologie prostoru P vytvořena odchylkou ϱ, pak topologie prostoru Q je vytvořena odchylkou $\varrho \mid Q \times Q$.

9.1.2. Jestliže topologie prostoru P je vytvořena odchylkou, je v P splněn první axiom spočetnosti. Neboť (ϱ, n^{-1})-okolí ($n = 1, 2, 3, \ldots$) bodu a tvoří úplnou soustavu okolí bodu a.

Definice **9.1.4.** Dvě odchylky ϱ_1, ϱ_2 v množině P nazveme *ekvivalentní*, jestliže obě vytvářejí touž topologii.

9.1.3. Aby odchylky ϱ_1, ϱ_2 v množině P byly ekvivalentní, k tomu je nutné a stačí, aby každému bodu $a \in P$ a každému číslu $\varepsilon > 0$ bylo lze přiřadit taková kladná čísla $\delta_1 = \delta_1(a, \varepsilon)$, $\delta_2 = \delta_2(a, \varepsilon)$, že

$$x \in P\,, \quad \varrho_1(a, x) < \delta_1 \Rightarrow \varrho_2(a, x) < \varepsilon\,,$$
$$x \in P\,, \quad \varrho_2(a, x) < \delta_2 \Rightarrow \varrho_1(a, x) < \varepsilon\,.$$

Definice **9.1.5.** Odchylku ϱ v množině P nazveme *symetrickou*, je-li pro $x \in P$, $y \in P$ splněn axiom

(IIIϱ) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$.

Definice **9.1.6.** *Metrika* v množině P je symetrická odchylka ϱ, která pro $x \in P$, $y \in P$, $z \in P$ splňuje tzv. *trojúhelníkový axiom*

(IVϱ) $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geqq \varrho(x, z)$.

9.1.4. Budiž Q vnořen do P. Je-li topologie prostoru P vytvořena metrikou ϱ, je topologie prostoru Q vytvořena metrikou $\varrho \mid Q \times Q$.

9.1.5. Nechť topologie prostoru P je vytvořena metrikou ϱ. Pak P je FHL-prostor. Aby bylo $\lim a_n = a$, k tomu je nutné a stačí, aby bylo lze každému $\varepsilon > 0$ přiřadit takový index k, že $n > k \Rightarrow \varrho(a, a_n) < \varepsilon$.

Důkaz. I. Je-li $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$, jest $\varrho(a, b) > 0$. Množina $U = \mathscr{E}_x\,[2\varrho(a, x) < \varrho(a, b)]$ je okolí bodu a; podle (IIIϱ) je množina $V = \mathscr{E}_x\,[2\varrho(x, b) < \varrho(a, b)]$ okolí bodu b; podle (IVϱ) je $U \cap V = \emptyset$. Tudíž P je H-prostor.

II. Je-li $\lim a_n = a$ a je-li $\varepsilon > 0$, jest $\mathscr{E}_x\,[\varrho(a, x) < \varepsilon]$ okolí bodu a, takže existuje takový index k, že $n > k \Rightarrow \varrho(a, a_n) < \varepsilon$.

III. Každému $\varepsilon > 0$ budiž přiřazen takový index $k(\varepsilon)$, že $n > k(\varepsilon) \Rightarrow \varrho(a, a_n) < \varepsilon$. Je-li U okolí bodu a, existuje takové $\varepsilon > 0$, že $\varrho(a, x) < \varepsilon \Rightarrow x \in U$; pak je $n > k(\varepsilon) \Rightarrow a_n \in U$. Tudíž $\lim a_n = a$ podle I a **6.3.5.**

IV. Budiž $a \in \overline{M}$. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ je $\mathscr{E}_x\,[\varrho(a, x) < n^{-1}]$ okolí bodu a; podle **4.2.9** tudíž existuje takový $a_n \in M$, že $\varrho(a, a_n) < n^{-1}$. Podle III je $\lim a_n = a$. Tudíž P je L-prostor.

V. Budiž $a \in \overline{\overline{M}}$. Podle **4.2.9** existuje nejprve takový $b_n \in \overline{M}$, že $\varrho(a, b_n) < n^{-1}$ a potom takový $a_n \in M$, že $\varrho(b_n, a_n) < n^{-1}$. Podle axiomu (IV$\varrho$) je $\varrho(a, a_n) < 2 \,.\, n^{-1}$. Tudíž $\lim a_n = a$ podle III, takže $a \in \overline{M}$ podle **6.3.7**; tedy P je F-prostor.

Definice **9.1.7.** Prostor P nazýváme *metrisovatelný*, jestliže jeho topologii lze vytvořit metrikou. Jestliže je dána určitá vytvářející metrika ϱ, pravíme, že P je *metrický prostor*; je-li $a \in P$, $b \in P$, pak číslo $\varrho(a, b)$ se nazývá *vzdáleností bodů a, b* v metrickém prostoru P.

Definice **9.1.8.** Budiž P metrický prostor s metrikou ϱ. Budiž $\emptyset \neq M \subset P$, $a \in P$. Infimum množiny čísel $\varrho(a, x)$ $(x \in M)$, značka $d(a, M)$, nazveme *vzdáleností bodu a od množiny M* (v metrickém prostoru P). Je tudíž $d(a, M) = \varrho(a, b)$, jestliže $M = (b)$ je jednobodová množina.

9.1.6. Budiž P metrický prostor; budiž $\varepsilon > 0$ a budiž S (ϱ, ε)-okolí bodu a. Pak S je otevřená množina.

Důkaz. Je-li $x_0 \in S$, jest $\varrho(a, x_0) < \varepsilon$. Existuje takové $\delta > 0$, že $\varrho(a, x_0) + \delta < \varepsilon$. Je-li $\varrho(x_0, x) < \delta$, jest $x \in S$ podle trojúhelníkové nerovnosti. Tudíž S je okolí bodu x_0, takže množina S je otevřená podle **4.2.8** a **4.4.12.**

9.1.7. Budiž P metrický prostor. Je-li $a \in P$, $\emptyset \neq M \subset P$, jest $0 \leqq d(a, M) < \infty$. Jest $\overline{M} = \mathscr{E}_x\,[d(x, M) = 0]$. Jest $d(a, M) = d(a, \overline{M})$. Je-li ještě $b \in M$, jest $|d(a, M) - d(b, M)| \leqq \varrho(a, b)$. Je-li $x \in P \Rightarrow f(x) = d(x, M)$, je f spojitá funkce v oboru P.

Důkaz. I. Že $0 \leqq d(a, M) < \infty$, je zřejmé.

II. Aby bylo $x_0 \in P - \overline{M}$, k tomu podle **4.3.2** je nutné a stačí, aby při vhodném $\varepsilon > 0$ bylo $\varrho(x_0, x) < \varepsilon \Rightarrow x \in P - M$. Z toho plyne, že $\overline{M} = \mathscr{E}_x\,[d(x, M) = 0]$.

III. Protože $M \subset \overline{M}$, je zřejmě $d(a, M) \geqq d(a, \overline{M})$. Kdyby bylo $d(a, M) > d(a, \overline{M})$, pak by existoval takový bod $x_1 \in \overline{M}$, že $\varrho(a, x_1) < d(a, M)$. Existovalo by takové $\varepsilon > 0$, že $\varrho(a, x_1) + \varepsilon < d(a, M)$. Protože $x_1 \in \overline{M}$, existoval by podle II takový bod $x_2 \in M$, že $\varrho(x_1, x_2) <$

$< \varepsilon$. Potom by však bylo $\varrho(a, x_2) \leqq \varrho(a, x_1) + \varrho(x_1, x_2) < d(a, M)$ a to je spor, neboť $x_2 \in M$.

IV. Pro $x \in M$ je $d(a, M) \leqq \varrho(a, x) \leqq \varrho(a, b) + \varrho(b, x)$ neboli $\varrho(b, x) \geqq$ $\geqq d(a, M) - \varrho(a, b)$. Tudíž $d(b, M) \geqq d(a, M) - \varrho(a, b)$ a podobně také $d(a, M) \geqq d(b, M) - \varrho(a, b)$, takže $|d(a, M) - d(b, M)| \leqq \varrho(a, b)$.

V. Budiž $f(x) = d(x, M)$ pro $x \in P$. Je-li $\varepsilon > 0$, budiž $U(\varepsilon)$ (ϱ, ε)-okolí bodu $a \in P$. Podle IV je $x \in U(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqq \varepsilon$, takže funkce f je spojitá podle **7.1.3**.

9.1.8. Metrisovatelný prostor P je dědičně normální. Podle **9.1.4** stačí dokázat, že P je normální. P je F-prostor podle **9.1.5**. Buďtež F_1, F_2 disjunktní uzavřené množiny; máme dokázat, že F_1, F_2 jsou H-oddělené. Budiž $F_1 \neq \emptyset \neq F_2$, neboť jinak je věc triviální. Pro $x \in P$ budiž $f(x) = d(x, F_1) - d(x, F_2)$. Podle **7.1.32** a **9.1.7** je f spojitá funkce v oboru P. Mimo to plyne z **9.1.7**, že $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$, kde $G_1 =$ $= \mathscr{E}_x\,[f(x) < 0]$, $G_2 = \mathscr{E}_x\,[f(x) > 0]$. Zřejmě $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ a množiny G_1, G_2 jsou otevřené podle **7.1.14**. Tudíž F_1, F_2 jsou H-oddělené podle **5.1.15**.

9.1.9. V metrisovatelném prostoru je každá uzavřená množina G_δ-množinou a každá otevřená množina je F_σ-množinou. Podle **4.4.19** stačí dokázat, že uzavřená množina F je G_δ-množinou. Triviální případ $F = \emptyset$ můžeme vyloučit. Podle **9.1.7** je $F =$ $= \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde $G_n = \mathscr{E}_x\,[d(x, F) < n^{-1}]$. Množiny G_n jsou otevřené podle **7.1.14** a **9.1.7**.

Poznámka. Podle **9.1.8** a **9.1.9** metrický prostor je dokonale normální.

9.1.10. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$ nejvýš spočetná množina. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $P(z)$ metrisovatelný prostor. Budiž $R = \mathfrak{P} P(z)$ $(z \in \mathbf{C})$. Pak R je metrisovatelný prostor.

Důkaz. I. Je-li ϱ_i metrika v prostoru P_i $(1 \leqq i \leqq m)$ a je-li $R =$ $= \mathfrak{P}_{i=1}^{m} P_i$, zjistíme snadno, že ϱ je metrika v prostoru R, jestliže $\varrho(x, y) =$ $= \sum_{i=1}^{m} \varrho_i(x_i, y_i)$, kde x_i (y_i) jsou souřadnice bodu $x \in P$ $(y \in P)$.

II. Je-li $R = \mathop{\mathfrak{P}}\limits_{i=1}^{\infty} P_i$ a je-li ϱ_i metrika v prostoru P_i, položme $\varrho(x, y) = = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varrho_i^*(x_i, y_i)$, kde x_i (y_i) jsou souřadnice bodu $x \in P$ $(y \in P)$ a $\varrho_i^*(x_i, y_i) = \min [\varrho_i(x_i, y_i), 2^{-i}]$. Snadno zjistíme, že ϱ je metrika v prostoru R.

9.1.11. Totální charakter metrisovatelného prostoru P je roven nejmenší možné mohutnosti husté bodové množiny. Je-li P konečný, plyne tvrzení ze **4.1.6** a **4.12.17.** Je-li P nekonečný, je totální charakter $\chi^t(P)$ nekonečný podle **4.12.17.** Ze **4.12.21** plyne, že stačí dokázat, že mohutnost každé husté množiny je $\geqq \chi^t(P)$. Budiž naopak $H \subset P$ hustá, moh $H = \mathfrak{h} < \chi^t(P)$. Ze **4.1.6** plyne, že mohutnost $\mathfrak{h}$ je nekonečná. Pro $y \in H$, $n \in \mathbf{N}$ budiž $S_n(y) = \mathscr{E}_x[\varrho(x, y) < n^{-1}]$; množiny $S_n(y)$ jsou otevřené podle **9.1.6.** Budiž $\mathfrak{S}$ soustava všech množin $S_n(y)$ $(y \in H, n \in \mathbf{N})$; ze **3.7.10** plyne, že moh $\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{h}$, tedy moh $\mathfrak{S} < \chi^t(P)$. Je-li však U okolí bodu $a \in P$, existuje takové $n \in \mathbf{N}$, že $\varrho(a, x) < n^{-1} \Rightarrow x \in U$. Podle **4.9.4** existuje takový $y \in H$, že $\varrho(a, y) < < (2n)^{-1}$. Jest $a \in S_{2n}(y)$ a z trojúhelníkové nerovnosti plyne $S_{2n}(y) \subset U$. Tudíž $\mathfrak{S}$ je podle **4.5.17** otevřená base prostoru P a to je spor, neboť moh $\mathfrak{S} < \chi^t(P)$.

9.1.12. Aby metrisovatelný prostor P splňoval druhý axiom spočetnosti, k tomu je nutné a stačí, aby v něm existovala nejvýš spočetná hustá množina.

Definice **9.1.9.** Budiž P metrický prostor. Je-li $\varepsilon > 0$, pak *ε-síť* v prostoru P je taková bodová množina M, že předně $x \in M$, $y \in M$, $x \neq y \Rightarrow \varrho(x, y) > \varepsilon$ a že za druhé ke každému $z \in P$ existuje takový $x \in M$, že $\varrho(x, z) \leqq \varepsilon$.

9.1.13. V metrickém prostoru P pro každé $\varepsilon > 0$ existuje ε-síť. Označme $\mathfrak{M}$ soustavu všech těch bodových množin M, pro které

$$x \in M\,, \quad y \in M\,, \quad x \neq y \Rightarrow \varrho(x, y) > \varepsilon\,.$$

Zřejmě $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, neboť $\emptyset \in \mathfrak{M}$. Mimo to je zřejmé, že pro každou neprázdnou monotonní $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$ také sjednocení všech $M \in \mathfrak{M}_0$ náleží do $\mathfrak{M}$. Z toho plyne podle **3.9.2**, že existuje taková $A \in \mathfrak{M}$, pro kterou neexistuje $M \in \mathfrak{M}$, $A \subset M \neq A$. Zřejmě A je ε-síť.

9.1.14. Budiž P metrický prostor; budiž $\varepsilon > 0$; budiž M ε-síť v prostoru P. Pak je moh $M \leqq \chi^t(P)$. Existuje taková otevřená base $\mathfrak{B}$, že moh $\mathfrak{B} = \chi^t(P)$. Podle **4.5.17** můžeme každému $x \in M$ přiřadit množinu $\varphi(x) \in \mathfrak{B}$ tak, že předně $x \in \varphi(x)$ a za druhé $z \in \varphi(x) \Rightarrow \varrho(x, z) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Je-li $x \in M$, $y \in M$, $z \in \varphi(x) \cap \varphi(y)$, jest $\varrho(x,z) < < \frac{1}{2}\varepsilon$, $\varrho(z, y) < \frac{1}{2}\varepsilon$, a tedy podle trojúhelníkové nerovnosti $\varrho(x, y) < \varepsilon$, takže $x = y$ podle definice ε-sítě. Z toho plyne, že φ je prosté zobrazení množiny M do $\mathfrak{B}$, takže moh $M \leqq$ moh $\mathfrak{B} = \chi^t(P)$.

9.1.15. Budiž P hustě rozložený metrisovatelný prostor. Pak existuje taková $A \subset P$, že obě množiny A, $P - A$ jsou husté.

Důkaz. I. Zavedeme rekurentně posloupnost bodových množin $\{M_n\}$ takto. M_1 budiž 1-síť v prostoru P (viz **9.1.13**). Je-li M_n už určena, budiž M_{n+1} $(n + 1)^{-1}$-síť ve vnořeném prostoru $P - \bigcup_{i=1}^{n} M_i$ (viz **9.1.4** a **9.1.13**).

II. Pro $z \in P$, $\varepsilon > 0$ budiž $S(z, \varepsilon) = \mathcal{E}_x [\varrho(z, x) < \varepsilon]$. Budiž U okolí bodu $a \in P$. Existuje takový index k, že $S(a, k^{-1}) \subset U$. Množina $V = = S[a, (4k)^{-1}]$ je nekonečná podle **4.2.11** a **4.7.6.** Je-li $x_1 \in V$, $x_2 \in V$, jest $\varrho(x_1, x_2) < (2k)^{-1}$ podle trojúhelníkové nerovnosti, takže pro $1 \leqq n \leqq 2k$ nemůže do V náležet víc než jeden bod množiny M_n; tudíž existuje bod $z \in V - \bigcup_{i=1}^{2k} M_i$. K bodu z musí existovat takový $y \in M_{2k+1}$, že $\varrho(y, z) \leqq (2k + 1)^{-1}$. Protože $z \in V$, jest $\varrho(z, a) < (4k)^{-1}$; z trojúhelníkové nerovnosti tudíž plyne, že $\varrho(y, a) < k^{-1}$, takže $y \in U \cap \cap M_{2k+1} \subset U \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{2n-1}$. Množina $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{2n-1}$ je tedy hustá podle **4.9.3.** Podobně se dokáže, že také $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{2n}$ je hustá. Zřejmě $A \cap \cap B = \emptyset$, takže $P - A$ je hustá podle **4.9.1.**

9.1.16. Budiž P metrisovatelný prostor; budiž $Q \subset P$. Aby existovala funkce f v oboru P, jejíž množinou bodů spojitosti je Q, k tomu je nutné a stačí, aby předně každý isolovaný bod prostoru P náležel do Q a aby za druhé Q byla G_δ-množina.

Důkaz. I. Podmínka je nutná podle **7.1.2** a **7.3.6.** Předpokládejme tedy, že je splněna. Podle **4.4.19** je $P - Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, kde množiny F_n jsou uzavřené a neobsahují žádný isolovaný bod prostoru P. Budiž $A_1 = F_1$, $A_n = F_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i$, takže $P - Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ a množiny A_n ($n \in \mathbf{N}$) jsou disjunktní.

II. Podle **4.7.10** můžeme položit $A_n = B_n \cup C_n$, kde $B_n \cap C_n = \emptyset$, B_n je relativně uzavřená v A_n, B_n je buďto prázdná nebo hustě rozložená a C_n je řídce rozložená. Podle **9.1.15** existují takové dvě množiny H_n, K_n, že $H_n \cap K_n = \emptyset$, $H_n \cup K_n = B_n$ a každá z obou množin H_n, K_n je hustá v B_n.

III. Každý bod $x \in P$ náleží do právě jedné z množin

$$Q,\ H_n,\ K_n,\ C_n \quad (n \in \mathbf{N}) .$$

Proto můžeme definovat funkci f v oboru P takto:

$$x \in Q \cup H_n \Rightarrow f(x) = 0\,, \quad x \in K_n \cup C_n \Rightarrow f(x) = n^{-1}\,.$$

Máme dokázat, že množina všech bodů spojitosti funkce f splyne s množinou Q. Je-li nejprve $a \in Q$, tedy $f(a) = 0$, a je-li $\varepsilon > 0$, pak existuje takové $n \in \mathbf{N}$, že $n\,.\,\varepsilon > 1$. Množina $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \subset P - Q$ je uzavřená podle **4.4.6**, takže podle **4.4.13** je $U = P - \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ okolí bodu a. Zřejmě $x \in U \Rightarrow |f(x) - f(a)| < n^{-1} < \varepsilon$, takže a je bod spojitosti funkce f podle **7.1.3.**

IV. Je-li $a \in P - Q$, pak existuje takové $n \in \mathbf{N}$, že buďto $a \in B_n$ nebo $a \in C_n$. Je-li $a \in B_n$ a je-li U okolí bodu a, pak jelikož H_n i K_n je hustá v B_n, soudíme ze **4.9.4**, že existují dva body $x_1 \in U \cap H_n$, $x_2 \in U \cap K_n$. Jest $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = n^{-1}$; mimo to je buďto $f(a) = 0$ nebo $f(a) = n^{-1}$. Proto implikace $x \in U \Rightarrow |f(x) - f(a)| < n^{-1}$ je nesprávná, takže podle **7.1.3** není a bod spojitosti funkce f.

V. Posléze nechť $a \in C_n$; budiž U okolí bodu a. Protože $B_n = A_n - C_n$ je relativně uzavřená v A_n, je C_n podle **4.4.13** relativním okolím bodu a ve vnořeném prostoru A_n, takže podle **4.6.2** v prostoru P existuje takové okolí V bodu a, že $A_n \cap V = C_n$. Podle **4.2.5** je $U \cap V$ okolí bodu a. Protože P je F-prostor (viz **9.1.5**), existuje podle **4.4.13** a **4.5.6** taková otevřená množina G, že $a \in G \subset U \cap V$. Je tedy $G \cap \cap C_n \neq \emptyset$; jelikož C_n je řídce rozložená, existuje isolovaný bod b množiny $G \cap C_n$; množina (b) je tedy relativně otevřená v $G \cap C_n$, takže podle **4.6.13** existuje v prostoru P taková otevřená Γ, že $C_n \cap \cap \Gamma \cap G = (b)$. Podle **4.4.11** a **4.4.13** je $\Gamma \cap G$ okolí bodu b. Protože $b \in C_n \subset P - Q$, není b isolovaný bod prostoru P, takže podle **4.7.1** existuje bod $c \in \Gamma \cap G$, $c \neq b$. Protože $C_n \cap \Gamma \cap G = (b)$, $G \subset V$, $A_n \cap V = C_n$, jest $c \in P - A_n$, a tedy $f(c) \neq n^{-1} = f(a)$, takže $|f(c) - - f(a)| \geqq n^{-1} - (n + 1)^{-1}$. Protože $c \in U$, je implikace $x \in U \Rightarrow \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ jistě tehdy nesprávná, jestliže $0 < \varepsilon < n^{-1} - - (n + 1)^{-1}$. Tudíž podle **7.1.3** a není bodem spojitosti funkce f.

Definice **9.1.10.** Metrický prostor P nazveme *totálně omezený*, jestliže v něm pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť.

9.1.17. Je-li metrický prostor P totálně omezený, pak P splňuje druhý axiom spočetnosti. Existuje taková posloupnost $\{A_n\}$ konečných bodových množin, že každá A_n je n^{-1}-síť v prostoru P. Množina $Q = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ je nejvýš spočetná. Je-li U okolí bodu $a \in P$, existuje takové $n \in \mathbf{N}$, že $\varrho(a, x) \leqq n^{-1} \Rightarrow x \in U$. Protože A_n je n^{-1}-síť, existuje $x \in A_n$, $\varrho(a, x) \leqq n^{-1}$, tedy $x \in Q \cap U$. Tudíž Q je hustá podle **4.9.3** a P splňuje druhý axiom spočetnosti podle **9.1.12.**

9.1.18. S-kompaktní metrisovatelný prostor P je totálně omezený při každé volbě vytvářející metriky ϱ. Budiž $\varepsilon > 0$. Podle **9.1.13** existuje ε-síť M v prostoru P. Stačí ukázat, že M je konečná množina. Je-li M nekonečná, pak podle **8.2.6** existuje hromadný bod $a \in P$ množiny M. Množina $U = \mathscr{E}_x\, [\varrho(a, x) < \frac{1}{2}\varepsilon]$ je okolí bodu a. Podle **4.2.11** existují body $x_1 \in U \cap M$, $x_2 \in U \cap M$, $x_1 \neq x_2$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne $\varrho(x_1, x_2) < \varepsilon$ a to je nemožné.

9.1.19. S-kompaktní metrisovatelný prostor splňuje druhý axiom spočetnosti. Viz **9.1.17** a **9.1.18.**

9.1.20. S-kompaktní metrisovatelný prostor je kompaktní. Viz **8.3.5** a **9.1.19.**

9.1.21. Metrický prostor P (s metrikou ϱ) budiž totálně omezený. Budiž $Q \subset P$. Pak také Q (s metrikou $\varrho \mid Q \times Q$) je totálně omezený. Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje konečná množina A, která je $\frac{1}{2}\varepsilon$-sítí v prostoru P. Podle **9.1.13** existuje ε-síť M v prostoru Q. Stačí ukázat, že množina M je konečná. Nechť naopak M je nekonečná. Ke každému $z \in M$ existuje takový $x \in A$, že $\varrho(z, x) \leqq \frac{1}{2}\varepsilon$. Protože M je nekonečná a A je konečná, existují takové body $z_1 \in M$, $z_2 \in M$, $x \in A$, že $z_1 \neq z_2$, $\varrho(z_1, x) \leqq \frac{1}{2}\varepsilon$, $\varrho(x, z_2) \leqq \frac{1}{2}\varepsilon$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne $\varrho(z_1, z_2) \leqq \varepsilon$ a to je nemožné.

9.1.22. Prostor $\mathbf{E}_n$ je metrisovatelný. Je-li $\varrho(x, y) = |x - y|$ pro $x \in \mathbf{E}_1$, $y \in \mathbf{E}_1$, je zřejmé, že ϱ je metrika v $\mathbf{E}_1$. Tudíž $\mathbf{E}_n$ je metrisovatelný podle **9.1.10.**

9.1.23. Základní kvádr Q dimense $\mathfrak{m}$ je právě tehdy metrisovatelný, jestliže $\mathfrak{m} \leqq \aleph_0$.

Důkaz. I. Interval $\mathscr{E}_t\,[0 \leqq t \leqq 1]$ je metrisovatelný podle **9.1.4** a **9.12.2.** Tudíž pro $\mathfrak{m} \leqq \aleph_0$ je Q metrisovatelný podle **9.1.10.**

II. Je-li $\mathfrak{m} > \aleph_0$, $a \in Q$, jest $\chi(a) = \mathfrak{m}$ podle **6.2.14**, takže Q podle **9.1.2** není metrisovatelný.

9.1.24. FR-prostor P s druhým axiomem spočetnosti je metrisovatelný. P je normální podle **8.1.11**, tedy úplně regulární podle **8.4.3.** Tudíž z **8.4.6** plyne (pro nekonečný P a je zřejmé pro konečný P), že P je homeomorfní s podmnožinou základního kvádru Q dimense $\aleph_0$. Tudíž P je metrisovatelný podle **9.1.4** a **9.1.23.** Jiný důkaz poznáme v článku **9.2.**

9.1.25. Nechť topologie prostoru P je vytvořena metrikou ϱ_1. Jestliže P splňuje druhý axiom spočetnosti, lze najít metriku ϱ_2 ekvivalentní s ϱ_1, vzhledem k níž P je totálně omezený. Podle předcházejícího důkazu existuje homeomorfní zobrazení f prostoru P do základního kvádru Q dimense $\aleph_0$. Q je metrisovatelný; budiž ϱ vytvořující metrika prostoru Q. Podle **8.3.3** a **8.4.5** je Q S-kompaktní, tedy totálně omezený podle **9.1.18.** Z **9.1.21** plyne snadno, že stačí položit $\varrho_2(x, y) = \varrho[f(x), f(y)]$ pro $x \in P$, $y \in P$.

9.2.1. Topologie prostoru P budiž vytvořena symetrickou odchylkou ϱ. Pro $x \in P$, $y \in P$, $z \in P$ budiž

(1) $$\varrho(x, z) \leqq 2 \max\,[\varrho(x, y), \varrho(y, z)]\,.$$

Pak P je metrisovatelný prostor.

Důkaz. I. Nejprve dokážeme, že pro každou konečnou bodovou posloupnost $\{x_i\}_1^n$ $(n \geqq 3)$ jest

(2) $$\varrho(x_1, x_n) \leqq 4 \sum_{i=1}^{n-1} \varrho(x_i, x_{i+1}) - 2\varrho(x_1, x_2) - 2\varrho(x_{n-1}, x_n)\,.$$

To je triviální pro $n = 3$; můžeme tedy předpokládat, že při určitém $k \geqq 4$ platí (2) pro $3 \leqq n \leqq k - 1$ a máme dokázat, že (2) platí též pro $n = k$. Budiž naopak

(3) $$\varrho(a_1, a_k) > 4 \sum_{i=1}^{k-1} \varrho(a_i, a_{i+1}) - 2\varrho(a_1, a_2) - 2\varrho(a_{k-1}, a_k)\,.$$

Protože $\varrho(x, y) \geqq 0$, plyne ze (3), že

(4) $$\varrho(a_1, a_k) > 2\varrho(a_1, a_2)\,, \quad \varrho(a_1, a_k) > 2\varrho(a_{k-1}, a_k)\,.$$

Podle (1) plyne ze (4_1), že $\varrho(a_1, a_k) \leqq 2\varrho(a_2, a_k)$; porovnáme-li se (4_2), vidíme, že existuje takový index h $(2 \leqq h \leqq k - 2)$, že sice $\varrho(a_1, a_k) \leqq$ $\leqq 2\varrho(a_h, a_k)$, avšak $\varrho(a_1, a_k) > 2\varrho(a_{h+1}, a_k)$, a tedy podle (1) $\varrho(a_1, a_k) \leqq$ $\leqq 2\varrho(a_1, a_{h+1})$. Tudíž

(5) $$\varrho(a_1, a_k) \leqq \varrho(a_h, a_k) + \varrho(a_1, a_{h+1})\,.$$

Protože $2 \leqq h \leqq k - 2$ a protože (2) platí pro $3 \leqq n \leqq k - 1$, jest

(6) $$\varrho(a_1, a_{h+1}) \leqq 4 \sum_{i=1}^{h} \varrho(a_i, a_{i+1}) - 2\varrho(a_1, a_2) - 2\varrho(a_h, a_{h+1})\,,$$

(7) $$\varrho(a_h, a_k) \leqq 4 \sum_{i=h}^{k-1} \varrho(a_i, a_{i+1}) - 2\varrho(a_h, a_{h+1}) - 2\varrho(a_{k-1}, a_k)\,.$$

Z (5), (6) a (7) vyjde sečtením spor proti (3).

II. Pro $x \in P$, $y \in P$ budiž $\sigma(x, y)$ infimum množiny všech čísel $\sum_{i=1}^{n-1} \varrho(x_i, x_{i+1})$, kde $\{x_i\}_1^n$ probíhá všecky takové konečné bodové posloupnosti, pro které $n \geqq 2$, $x_1 = x$, $x_n = y$. Zřejmě $0 \leqq \sigma(x, y) \leqq \varrho(x, y)$, $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ a mimo to z I plyne $\varrho(x, y) \leqq 4\sigma(x, y)$. Proto je σ symetrická odchylka v množině P, která podle **9.1.3** je ekvivalentní s ϱ. Zbývá zjistit, že σ splňuje trojúhelníkovou nerovnost. Pro každé $\varepsilon > 0$ můžeme každé trojici bodů (x, y, z) přiřadit takové dvě konečné posloupnosti $\{x_i\}_1^n$, $\{x_i\}_n^{n+m}$, že předně $x_1 = x$, $x_n = y$, $x_{n+m} = z$ a za druhé

$$\sum_{i=1}^{n-1} \varrho(x_i, x_{i+1}) < \sigma(x, y) + \varepsilon ,$$

$$\sum_{i=n}^{n+m-1} \varrho(x_i, x_{i+1}) < \sigma(y, z) + \varepsilon .$$

Potom jest

$$\sigma(x, z) \leqq \sum_{i=1}^{n+m-1} \varrho(x_i, x_{i+1}) < \sigma(x, y) + \sigma(y, z) + 2\varepsilon$$

a protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, splňuje σ trojúhelníkovou nerovnost.

9.2.2. Aby prostor P byl metrisovatelný, k tomu je nutné a stačí, aby existovala posloupnost $\{\mathfrak{A}_n\}_1^\infty$ neprázdných soustav bodových množin s těmito vlastnostmi:

A. Pro každé n je $P = \bigcup X$ $(X \in \mathfrak{A}_n)$.

B. Je-li $X_1 \in \mathfrak{A}_{n+1}$, $X_2 \in \mathfrak{A}_{n+1}$, $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, pak existuje taková $X \in \mathfrak{A}_n$, že $X_1 \cup X_2 \subset X$.

C. Pro $a \in P$ budiž $W_n(a) = \bigcup X$ $(X \in \mathfrak{A}_n,\ a \in X)$. Pak členy posloupnosti $\{W_n(a)\}_1^\infty$ tvoří úplnou soustavu okolí bodu a.

Důkaz. I. Nechť topologie prostoru P je vytvořena metrikou ϱ. Pro každý bod $a \in P$ a pro každé $n \geqq 1$ budiž $U_n(a)$ $(\varrho, 2^{-n})$-okolí bodu a. Budiž $\mathfrak{A}_n$ soustava všech množin $U_n(x)$ $(x \in P)$. Protože $x \in U_n(x)$, platí A. Je-li $a \in U_{n+1}(x_1) \cap U_{n+1}(x_2)$ a je-li $x \in U_{n+1}(x_1)$, jest $\varrho(a, x_1) < 2^{-n-1}$, $\varrho(x, x_1) < 2^{-n-1}$, a tudíž $\varrho(x, a) \leqq \varrho(x, x_1) + \varrho(x_1, a) < 2^{-n}$. Tedy $U_{n+1}(x_1) \subset U_n(a)$ a stejně se dokáže též $U_{n+1}(x_2) \subset U_n(a)$, takže platí B. Pro $a \in P$ je $U_n(a) \subset W_n(a)$ a podle právě řečeného je $W_{n+1}(a) \subset U_n(a)$; tedy platí C.

II. Nechť posloupnost $\{\mathfrak{A}_n\}$ má vlastnosti A, B, C. Pro $x \in P$, $y \in P$ definujme číslo $\varrho(x, y)$ takto. Předně budiž $\varrho(x, x) = 0$. Je-li za druhé

$x \neq y$, pak z C plyne podle **4.2.6**, že existuje takové $k \in \mathbf{N}$, že žádná $X \in \mathfrak{A}_k$ neobsahuje současně oba body x, y; podle B potom platí totéž i pro $X \in \mathfrak{A}_n$, $n > k$; je-li m nejmenší takový index, že žádná $X \in \mathfrak{A}_m$ neobsahuje současně oba body x, y, budiž $\varrho(x, y) = 2^{-m}$. Snadno se zjistí, že ϱ je symetrická odchylka v množině P. Dokážeme, že pro $x \in P$, $y \in P$, $z \in P$ je buďto $\varrho(x, z) \leqq 2\varrho(x, y)$ nebo $\varrho(x, z) \leqq 2\varrho(y, z)$. To je zřejmé pro $y = x$ i pro $y = z$. Budiž tedy $x \neq y \neq z$, $\varrho(x, y) = 2^{-m}$, $\varrho(y, z) = 2^{-n}$. Protože odchylka ϱ je symetrická, stačí dokázat: $m \leqq \leqq n \Rightarrow \varrho(x, z) \leqq 2\varrho(x, y)$. Je však jistě $\varrho(x, z) \leqq 2^{-1}$; je-li tedy $m \leqq 2$, je jistě $\varrho(x, z) \leqq 2\varrho(x, y)$. Je-li však $m \geqq 3$, pak protože $\varrho(x, y) = = 2^{-m}$, existuje taková $X_1 \in \mathfrak{A}_{m-1}$, že $x \in X_1$, $y \in X_1$, a protože $\varrho(y, z) \leqq \leqq 2^{-m}$, existuje taková $X_2 \in \mathfrak{A}_{m-1}$, že $y \in X_2$, $z \in X_2$. Protože $y \in X_1 \cap \cap X_2$, plyne z B, že existuje taková $X \in \mathfrak{A}_{m-2}$, že $X_1 \cup X_2 \subset X$. Potom je $x \in X$, $z \in X$, $X \in \mathfrak{A}_{m-2}$, takže $\varrho(x, z) \leqq 2^{-(m-1)} = 2\varrho(x, y)$. Nyní z **9.2.1** plyne, že ϱ vytvořuje metrisovatelný prostor. Zbývá dokázat, že původní topologie u prostoru P splyne s topologií v, která je vytvořena odchylkou ϱ. To je však zřejmé, neboť z definice množiny $W_n(a)$ a z definice ϱ plyne, že $W_n(a) = \mathscr{E}_x\,[\varrho(a, x) < 2^{-n}]$, takže množiny $W_n(a)$, které podle C tvoří při topologii u úplnou soustavu okolí bodu a, tvoří takovou soustavu i při topologii v.

9.2.3. Budiž P metrisovatelný prostor. Pro každý $x \in P$ budiž $\mathfrak{U}(x)$ úplná soustava okolí bodu x. Pak pro každý $x \in P$ existuje taková posloupnost $\{U_n(x)\}$, že $U_n(x) \in \mathfrak{U}(x)$, $U_{n+1}(x) \subset \subset U_n(x)$, že členy posloupnosti $\{U_n(x)\}$ tvoří úplnou soustavu okolí bodu x, a že každému $x \in P$ a každému indexu n lze přiřadit takový index $\varphi(x, n) > n$, že

$$x \in P\,, \quad y \in P\,, \quad m = \varphi(x, n)\,, \quad U_m(x) \cup U_m(y) \neq \emptyset \Rightarrow U_m(y) \subset U_n(x)\,.$$

Budiž ϱ metrika prostoru P a pro $\varepsilon > 0$ budiž $S(x, \varepsilon)$ (ϱ, ε)-okolí bodu $x \in P$. Zvolme $U_1(x) \in \mathfrak{U}(x)$ tak, že $U_1(x) \subset S(x, 1)$. Je-li už určena $U_n(x) \in \mathfrak{U}(x)$, pak podle **4.2.5** je $U_n(x) \cap S(x, 3^{-n})$ okolí bodu x, takže existuje taková $U_{n+1}(x) \in \mathfrak{U}(x)$, že $U_{n+1}(x) \subset U_n(x) \cap S(x, 3^{-n})$. Máme tedy $U_n(x) \subset S(x, 3^{-n+1})$ pro všecka n, takže množiny $U_n(x)$ $(n \in \mathbf{N})$ tvoří takovou úplnou soustavu okolí bodu x, že $U_{n+1}(x) \subset U_n(x) \subset \subset S(x, 3^{-n+1})$ pro $n \in \mathbf{N}$. Při daných x, n je $U_n(x)$ okolí bodu x, takže existuje takový index $m = \varphi(x, n) > n$, že $S(x, 3^{-m+2}) \subset U_n(x)$. Je-li nyní $x \in P$, $y \in P$, $m = \varphi(x, n)$, $a \in U_m(x) \cap U_m(y)$ a je-li $z \in U_m(y)$, pak všecka tři čísla $\varrho(x, a)$, $\varrho(a, y)$, $\varrho(y, z)$ jsou menší než 3^{-m+1}, takže trojúhelníková neronost dá $\varrho(x, z) < 3^{-m+2}$ a z toho plyne, že $z \in U_n(x)$, tj. máme $U_m(y) \subset U_n(x)$.

9.2.4. Každému bodu x prostoru P budiž přiřazena posloupnost $\{U_n(x)\}$, jejíž členy tvoří úplnou soustavu okolí bodu x. Pro každou dvojici $x \in P$, $n \in \mathbf{N}$ nechť existuje takový index $\varphi(x, n) > n$, že

$$x \in P\,, \quad y \in P\,, \quad m = \varphi(x, n)\,, \quad U_m(x) \cap U_m(y) \neq \emptyset \Rightarrow U_m(y) \subset U_n(x)\,. \tag{8}$$

Pak P je metrisovatelný prostor.

Důkaz. I. Můžeme předpokládat, že $U_{n+1}(x) \subset U_n(x)$, neboť jinak by stačilo místo $U_n(x)$ vzít $U_n^*(x) = \bigcap_{i=1}^{n} U_i(x)$ a místo $\varphi(x, n)$ takový index $\varphi^*(x, n)$, pro který

$$1 \leqq i \leqq n \Rightarrow \varphi^*(x, n) > \varphi(x, i)\,.$$

II. Definujme rekurentně posloupnost indexů $\{r_n(x)\}$: $r_1(x) = 1$, $r_{n+1}(x) = \varphi[x, r_n(x)]$. Položme $V_n(x) = U_r(x)$, kde $r = r_n(x)$ a označme $\mathfrak{A}_n$ soustavu množin $V_n(x)$ $(x \in P)$. Stačí dokázat, že posloupnost $\{\mathfrak{A}_n\}$ má vlastnosti A, B, C vyslovené v **9.2.2.** Vlastnost A je zřejmá, neboť podle **4.2.3** je $x \in U_i(x)$.

III. K důkazu vlastnosti B předpokládejme, že $V_{n+1}(x_1) \cap \cap V_{n+1}(x_2) \neq \emptyset$. Nechť nejprve $p \leqq q$, kde $p = r_{n+1}(x_1)$, $q = r_{n+1}(x_2)$. Máme tedy $U_p(x_1) \cap U_q(x_2) \neq \emptyset$, $p \leqq q$, takže podle I $U_p(x_1) \cap \cap U_p(x_2) \neq \emptyset$. Avšak $p = \varphi[x_1, r_n(x_1)]$, takže podle (8) $U_p(x_2) \subset V_n(x_1)$ a tím spíše $U_q(x_2) \subset V_n(x_1)$. Protože $p > r_n(x_1)$, máme též $U_p(x_1) \subset \subset V_n(x_1)$. Tudíž $V_{n+1}(x_1) \cup V_{n+1}(x_2) \subset V_n(x_1)$, jestliže $r_{n+1}(x_1) \leqq r_{n+1}(x_2)$. Podobně vyjde $V_{n+1}(x_1) \cup V_{n+1}(x_2) \subset V_n(x_2)$, jestliže $r_{n+1}(x_2) \leqq r_{n+1}(x_1)$. Vlastnost B je tedy splněna.

IV. Budiž $W_n(a) = \bigcup V_n(x)$ $[a \in V_n(x)]$. Máme dokázat, že množiny $W_n(a)$ $(n \in \mathbf{N})$ tvoří úplnou soustavu okolí bodu a. Podle **4.2.4** jsou množiny $W_n(a)$ okolími bodu a, neboť $W_n(a) \supset V_n(a) = U_r(a)$, kde $r = r_n(a)$. Je-li H libovolné okolí bodu a, existuje takové n, že $U_n(a) \subset \subset H$. Budiž $m = \varphi(n, a)$; stačí dokázat, že $W_m(a) \subset U_n(a)$. Je-li $z \in$

$\in W_m(a)$, pak existuje takový $x \in P$, že $a \in V_m(x)$, $z \in V_m(x)$. Jest $V_m(x) = U_r(x)$, kde $r = r_m(x) \geqq m$; podle I je tedy $V_m(x) \subset U_m(x)$, tudíž $a \in U_m(x)$, $z \in U_m(x)$. Protože také $a \in U_m(a)$, jest $U_m(a) \cap \cap U_m(x) \neq \emptyset$; avšak $m = \varphi(n, a)$, takže podle (8) $U_m(x) \subset U_n(a)$. Tudíž $z \in U_n(a)$, tj. $W_m(a) \subset U_n(a)$.

9.2.5. Topologie prostoru P budiž určena odchylkou ϱ. Nechť každé dvojici $x \in P$, $\varepsilon \in \mathbf{E}_1$, $\varepsilon > 0$ lze přiřadit číslo $\delta(x, \varepsilon) > 0$ tak, že pro $x_1 \in P$, $x_2 \in P$, $x_3 \in P$, $\delta = \delta(x, \varepsilon)$ jest

$$\varrho(x, x_1) < \delta\,, \quad \varrho(x_2, x_1) < \delta\,, \quad \varrho(x_2, x_3) < \delta \Rightarrow \varrho(x, x_3) < \varepsilon\,.$$

Pak P je metrisovatelný. Pro $a \in P$, $n \in \mathbf{N}$ budiž $U_n(a) = \mathscr{E}_x [\varrho(a, x) < n^{-1}]$. Pro $x \in P$, $n \in \mathbf{N}$ zvolme $\varphi(x, n) > [\delta(x, n^{-1})]^{-1}$, $\varphi(x, n) > n$. Snadno se zjistí, že jsou splněny předpoklady věty **9.2.4**, takže P je metrisovatelný.

9.2.6. Topologie prostoru P budiž určena symetrickou odchylkou ϱ. Nechť pro každou dvojici $x \in P$, $\varepsilon \in \mathbf{E}_1$, $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\alpha(x, \varepsilon) > 0$, že pro $x \in P$, $y \in P$, $z \in P$, $\alpha = \alpha(x, \varepsilon)$ jest

$$\varrho(x, y) < \alpha\,, \quad \varrho(y, z) < \alpha \Rightarrow \varrho(x, z) < \varepsilon\,.$$

Pak P je metrisovatelný.

Podáme nyní nový důkaz věty **9.1.24**, opřený o **9.2.4.** Dřívější důkaz se opíral o věty **7.3.10** a **8.1.11**, kterých se v novém důkaze nepoužívá.

Druhý důkaz věty **9.1.24.** Existuje posloupnost $\{G_n\}$ otevřených množin, jejichž členy tvoří otevřenou basi prostoru P. Budiž $x \in P$. Ze **4.2.5**, **4.4.13** a **4.5.17** plyne, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ existuje okolí $U_n(x)$ bodu x s těmito vlastnostmi:

[1] Existuje takový index h, že $U_n(x) = G_h$.

[2] Je-li $i \leqq n$, $x \in G_i$, jest $U_n(x) \subset G_i$.

[3] Je-li $i \leqq n$, $x \in P - \overline{G}_i$, jest $U_n(x) \cap G_i = \emptyset$.

Ze [2] a **4.5.17** plyne, že množiny $U_n(x)$ $(n \in \mathbf{N})$ tvoří úplnou soustavu okolí bodu x. Budiž $U_n(x) = G_h$. Ze **4.5.17** a z fakta, že $x \in P$ je R-bod, soudíme, že existuje takový index k, že $x \in G_k$, $\overline{G}_k \subset G_h$. Zvolme index

$m = \varphi(x, n)$ tak, že $m > n$, $m \geqq h$, $m \geqq k$. Budiž $U_m(x) \cap U_m(y) \neq \emptyset$. Podle **9.2.4** stačí dokázat, že $U_m(y) \subset U_n(x)$. Protože $x \in G_k$, $k \leqq m$, je $U_m(x) \subset G_k$ podle [2]. Jelikož $U_m(x) \cap U_m(y) \neq \emptyset$, je tudíž $U_m(y) \cap \cap G_k \neq \emptyset$, takže podle [3] je $y \in \overline{G}_k$. Protože $\overline{G}_k \subset G_h$, $h \leqq m$, je podle [2] $U_m(y) \subset G_h$, tj. máme skutečně $U_m(y) \subset U_n(x)$.

9.3. Diskontinuum

Definice **9.3.1.** Nechť pro $n \in \boldsymbol{N}$ prostor $P_n \subset \mathbf{E}_1$ se skládá pouze ze dvou bodů 0, 1. Kartézský součin $\mathfrak{P}_{n=1}^{\infty} P_n$ se nazývá *diskontinuum.*

9.3.1. Diskontinuum je kompaktní metrisovatelný prostor. Viz **8.2.13**, **9.1.10** a **9.1.20**.

9.3.2. Budiž $P \neq \emptyset$ kompaktní metrisovatelný prostor. Pak existuje spojité zobrazení diskontinua D na prostor P.

Důkaz. I. Budiž ϱ metrika v prostoru P. Pro $x \in P$, $\varepsilon > 0$ budiž $S(x, \varepsilon)$ (ϱ, ε)-okolí bodu x v prostoru P. Z **8.3.3** a **9.1.18** plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje taková konečná bodová posloupnost $\{a_k\}_1^m$, že $\bigcup_{k=1}^{m} \overline{S(a_k, \varepsilon)} = P$. Zvolme $h \in \boldsymbol{N}$ tak, že $m \leqq 2^h$ (při tom můžeme h zvolit libovolně veliké) a položme $a_k = a_m$ pro $m + 1 \leqq k \leqq 2^h$. Pak jest $\bigcup_{k=1}^{2^h} \overline{S(a_k, \varepsilon)} = P$. Pro body a_k $(1 \leqq k \leqq 2^h)$ můžeme zavést označení $b_{i_1 i_2 \ldots i_h}$, kde každý z indexů $i_1, i_2, \ldots, i_h$ nabývá dvou hodnot 0, 1. Položme $\overline{S(b_{i_1 i_2 \ldots i_h}, \varepsilon)} = P_{i_1 i_2 \ldots i_h}$. Pak je $P = \bigcup P_{i_1 i_2 \ldots i_h}$, množina $P_{i_1 i_2 \ldots i_h} \neq \emptyset$ je uzavřená v prostoru P a tvoří kompaktní metrisovatelný prostor (viz **8.3.1** a **9.1.4**); mimo to

$$x \in P_{i_1 i_2 \ldots i_h}, \quad y \in P_{i_1 i_2 \ldots i_h} \Rightarrow \varrho(x, y) \leqq 2\varepsilon .$$

II. Vycházejíce z daného prostoru P provedeme konstrukci popsanou v I s volbou $\varepsilon = 2^{-2}$; příslušné číslo h označme h_1. Vycházejíce z každého z 2^{h_1} prostorů $P_{i_1 i_2 \ldots i_{h_1}}$, provedeme stejnou konstrukci s volbou $\varepsilon = 2^{-3}$; při tom můžeme předpokládat, že číslo h má ve všech 2^{h_1}

případech touž hodnotu, kterou označíme $h_2 - h_1$. Ke každému prostoru $P_{i_1 i_2 \dots i_{h_1}}$ obdržíme přitom $2^{h_2 - h_1}$ prostorů, které označíme $P_{i_1 i_2 \dots i_{h_2}}$. Vycházejíce z každého z 2^{h_2} nových prostorů, můžeme provést stejnou konstrukci s volbou $\varepsilon = 2^{-4}$ tak, aby číslo h mělo ve všech případech touž hodnotu $h_3 - h_2$. Pokračujíce stejně dále dostáváme celá kladná čísla $h_1 < h_2 < h_3 < \dots$ a takové neprázdné kompaktní $P_{i_1 i_2 \dots i_{h_n}} \subset P$ (kde každý z indexů $i_1, i_2, i_3 \dots$ nabývá hodnot 0, 1), že

(1) $x \in P_{i_1 i_2 \dots i_{h_n}},\ y \in P_{i_1 i_2 \dots i_{h_n}} \Rightarrow \varrho(x, y) \leqq 2^{-n}$,

(2) $P = \bigcup P_{i_1 i_2 \dots i_{h_1}}$,

(3) $P_{i_1 i_2 \dots i_{h_n}} = \bigcup P_{i_1 i_2 \dots i_{h_{n+1}}}$,

kde ve (3) napravo sjednocení má $2^{h_{n+1} - h_n}$ členů, odpovídajících volbám 0, 1 pro každý z indexů $i_{h_n+1}, i_{h_n+2}, \dots, i_{h_{n+1}}$.

III. Je-li dán bod $t \in D$, označme $i_1, i_2, i_3, \dots$ jeho souřadnice. Bodová množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_{i_1 i_2 \dots i_{h_n}} \subset P$ nemůže podle (1) obsahovat více než jeden bod, ale podle **8.3.10** není prázdná, takže obsahuje právě jeden bod, který označíme $f(t)$. Je tedy f zobrazení D do P; z (1), (2) a (3) plyne snadno, že f je zobrazení D na P.

IV. Budiž $t \in D$, $a = f(t) \in P$ a budiž V okolí bodu $a \in P$. Existuje takový index n, že: $\varrho(a, x) \leqq 2^{-n} \Rightarrow x \in V$. Buďtež $i_1, i_2, i_3, \dots$ souřadnice bodu t. Budiž T množina těch bodů prostoru D, jejichž prvních h_n souřadnic se shoduje s příslušnými souřadnicemi bodu t. Množina $T \subset D$ je podle **6.2.6** otevřená, takže podle **4.4.13** T je okolím bodu $t \in D$. Zřejmě $f^1(T) \subset P_{i_1 i_2 \dots i_{h_n}}$, takže podle (1) je $P_{i_1 i_2 \dots i_{h_n}} \subset V$. Tudíž $T \subset f^{-1}(V)$, takže množina $f^{-1}(V)$ je podle **4.2.4** okolím bodu $t \in D$ a zobrazení f je spojité podle **7.1.1.**

9.3.3. Budiž f spojité zobrazení kompaktního metrisovatelného prostoru P na H-prostor P_1. Pak také P_1 je kompaktní metrisovatelný prostor. Prostor P_1 je kompaktní podle **8.3.15.** Podle **8.3.3** a **9.1.19** P splňuje druhý axiom spočetnosti. Podle **8.3.23** zobrazení f je oboustranně spojité. Podle **9.1.5** P je FH-prostor, takže podle **8.3.19** P je normální; podle **7.2.20** také P_1 je normální, takže podle **5.3.4** a **5.4.5** P_1 je FH-prostor. Podle **8.3.27** splňuje P_1 druhý axiom spočetnosti, takže P_1 je metrisovatelný podle **9.1.24** (viz též **5.4.5**).

9.3.4. Budiž $P \neq \emptyset$ H-prostor. Aby existovalo spojité zobrazení diskontinua na prostor P, k tomu je nutné a stačí, aby P byl kompaktní a metrisovatelný.

9.3.5. Mohutnost diskontinua D je rovna $\exp \aleph_0$. Je-li $t \in D$, budiž $\varphi(t)$ množina těch $n \in \boldsymbol{N}$, pro něž n-tá souřadnice bodu t je rovna 1. Zřejmě φ je prosté zobrazení prostoru D na soustavu všech částí množiny $\boldsymbol{N}$.

9.4. Úplné prostory

Definice **9.4.1.** Budiž P metrický prostor s metrikou ϱ. *Cauchyovská posloupnost* je taková bodová posloupnost $\{a_n\}$, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takový index k, že

$$(1) \qquad m > k\,, \quad n > k \Rightarrow \varrho(a_m, a_n) < \varepsilon\,.$$

9.4.1. Posloupnost vybraná z Cauchyovské posloupnosti je Cauchyovská.

9.4.2. V metrickém prostoru každá konvergentní posloupnost je Cauchyovská. Budiž $\lim a_n = a$. Je-li $\varepsilon > 0$, pak podle **9.1.5** existuje takový index k, že: $n > k \Rightarrow \varrho(a_n, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne (1).

Definice **9.4.2.** *Metricky úplný prostor* je metrický prostor, ve kterém každá Cauchyovská posloupnost je konvergentní.

9.4.3. Pro $x \in \boldsymbol{E}_1$, $y \in \boldsymbol{E}_1$ budiž $\varrho(x, y) = |x - y|$. Pak $\boldsymbol{E}_1$ je metricky úplný prostor. To je známo z elementů matematické analysy.

9.4.4. Budiž $\boldsymbol{C} \neq \emptyset$ nejvýš spočetná množina. Pro každé $z \in \boldsymbol{C}$ budiž $P(z)$ metricky úplný prostor. Pak také prostor $R = \mathfrak{P}\, P(z)$ $(z \in \boldsymbol{C})$ při vhodné volbě vytvořující metriky je metricky úplný.

Důkaz. I. Budiž ϱ_i metrika metricky úplného prostoru P_i $(1 \leqq i \leqq \leqq m)$. Zvolme metriku ϱ prostoru $R = \mathfrak{P}_{i=1}^{m} P_i$ stejně jako v části I důkazu věty **9.1.10.** Budiž $\{a_n\}$ Cauchyovská posloupnost v prostoru R; a_{ni} $(1 \leqq i \leqq m)$ buďtež souřadnice bodu a_n. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takový index k, že $n_1 > k$, $n_2 > k \Rightarrow \varrho(a_{n_1}, a_{n_2}) < \varepsilon$. Protože

$$\varrho(a_{n_1}, a_{n_2}) = \sum_{i=1}^{m} \varrho_i(a_{n_1 i}, a_{n_2 i}) \geqq \varrho_i(a_{n_1 i}, a_{n_2 i}),$$

je $\{a_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyovská posloupnost v prostoru P_i $(1 \leqq i \leqq m)$. Protože P_i je metricky úplný, existuje takový bod $b_i \in P_i$, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{ni} = b_i$. Budiž $b \in P$ bod se souřadnicemi b_i $(1 \leqq i \leqq m)$. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje podle **9.1.5** takový index k_i, že $n > k_i \Rightarrow \varrho_i(a_{ni}, b_i) < \varepsilon \,.\, m^{-1}$. Zvolíme-li index h tak, že $1 \leqq i \leqq m \Rightarrow h \geqq k_i$, jest $n > h \Rightarrow \varrho(a_n, b) = \sum\limits_{i=1}^{m} \varrho_i(a_{ni}, b_i) < \varepsilon$. Tudíž $\lim a_n = b$ v prostoru P podle **9.1.5.**

II. Pro $i \in \mathbf{N}$ budiž ϱ_i metrika metricky úplného prostoru P_i. Zvolme metriku ϱ prostoru $R = \mathfrak{P}_{i=1}^{\infty} P_i$ stejně jako v části II důkazu věty **9.1.10**, tedy

$$\varrho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \varrho_i^*(x_i, y_i), \quad \varrho_i^*(x_i, y_i) = \min\,[\varrho_i(x_i, y_i), 2^{-1}].$$

Budiž $\{a_n\}$ Cauchyovská posloupnost v prostoru R; a_{ni} $(i \in \mathbf{N})$ buďtež souřadnice bodu a_n. Protože $\varrho(a_m, a_n) \geqq \varrho_i^*(a_{mi}, a_{ni})$, musí při pevně zvoleném i ke každému takovému ε, že $0 < \varepsilon < 2^{-i}$, existovat index k s vlastností: $m > k$, $n > k \Rightarrow \varrho_i(a_m, a_n) < \varepsilon$. Potom však zřejmě ke každému $\varepsilon > 0$ vůbec existuje takový index k, takže z metrické úplnosti prostoru P_i plyne existence bodu $b_i \in P_i$, pro který $\lim\limits_{n\to\infty} a_{ni} = b_i$. Budiž $b \in P$ bod se souřadnicemi b_i $(i \in \mathbf{N})$. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje podle **9.1.5** takový index k_i, že: $n > k_i \Rightarrow \varrho_i(a_{ni}, b_i) < \varepsilon \,.\, 2^{-i-1}$. Existují takové indexy p, h, že $\sum\limits_{i=p+1}^{\infty} 2^{-i} < \frac{1}{2}\varepsilon$, $1 \leqq i \leqq p \Rightarrow h \geqq k_i$. Pro $n > h$ jest

$$\varrho(a_n, b) = \sum_{i=1}^{\infty} \varrho_i^*(a_{ni}, b_i) \leqq \sum_{i=1}^{p} \varrho_i(a_{ni}, b_i) + \sum_{i=p+1}^{\infty} 2^{-i} < \varepsilon,$$

takže $\lim a_n = b$ v prostoru P podle **9.1.5.**

9.4.5. Budiž P metrický prostor (s metrikou ϱ). Budiž $Q \subset P$ metricky úplný prostor (s metrikou $\varrho \mid Q \times Q$). Pak množina Q je uzavřená v prostoru P. Budiž $a \in \overline{Q}$; máme dokázat, že $a \in Q$. Podle **9.1.5** je P L-prostor, takže existuje taková posloupnost $\{a_n\}$, že $a_n \in Q$ pro všecka n, $\lim a_n = a$ v prostoru P. Podle **9.4.2** je $\{a_n\}$ Cauchyovská posloupnost v prostoru P a tudíž zřejmě též v prostoru Q. Protože Q je metricky úplný, je posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní v prostoru Q, takže $a \in Q$ podle **6.3.4.**

9.4.6. Budiž P metricky úplný prostor (s metrikou ϱ). Budiž $Q \subset P$ uzavřená množina. Pak také Q je metricky úplný prostor (s metrikou $\varrho \mid Q \times Q$). Budiž $\{a_n\}$ Cauchyovská posloupnost v prostoru Q. Zřejmě $\{a_n\}$ je Cauchyovská též v prostoru P; protože P je metricky úplný, existuje takový $a \in P$, že $\lim a_n = a$ v prostoru P. Podle **6.3.7** je $a \in Q$, takže posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní v prostoru Q podle **6.3.4.**

9.4.7. Budiž P metricky úplný prostor. Budiž $\{\delta_n\}$ taková posloupnost kladných čísel, že $\lim \delta_n = 0$. Buďtež $\{A_n\}$, $\{K_n\}$ dvě posloupnosti bodových množin. Budiž $A_n \neq \emptyset$, $A_n \supset \overline{A}_{n+1}$; $K_n \neq \emptyset$ budiž konečná množina; budiž: $x \in A_n \Rightarrow d(x, K_n) \leqq \delta_n$. Pak množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ je neprázdná a kompaktní.

Důkaz. I. Zvolíme $a_n \in A_n$ a dokážeme, že z posloupnosti $\{a_n\}$ lze vybrat konvergentní posloupnost. Pro každé n je $a_n \in A_1$; tudíž pro každé n existuje takový $x \in K_1$, že $\varrho(a_n, x) \leqq \delta_1$. Protože množina K_1 je konečná, existuje bod $x_1 \in K_1$ a taková posloupnost $\{a_{1n}\}$ vybraná z $\{a_n\}$, že $\varrho(a_{1n}, x_1) \leqq \delta_1$ pro všecka n; protože $a_n \in A_n$, $A_n \supset A_{n+1}$, je patrné, že $a_{1n} \in A_n$ pro všecka n. Předpokládejme nyní, že při určitém $i \in \mathbf{N}$ máme určen bod $x_i \in K_i$ a posloupnost $\{a_{in}\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že pro všecka n je $a_{in} \in A_n$, $\varrho(a_{in}, x_i) \leqq \delta_i$. (Tak tomu je pro $i = 1$.) Pro $n > i$ jest $a_{in} \in A_n \subset A_{i+1}$, takže ke každému $n > i$ existuje bod $x \in K_{i+1}$, pro který $\varrho(a_{in}, x) \leqq \delta_{i+1}$. Protože množina K_{i+1} je konečná, existuje bod $x_{i+1} \in K_{i+1}$ a taková posloupnost $\{a_{i+1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ vybraná z $\{a_{in}\}_{n=i+1}^{\infty}$, že $\varrho(a_{i+1,n}, x_{i+1}) \leqq \delta_{i+1}$ pro všecka n; zřejmě $a_{i+1,n} \in A_n$ pro všecka n. Nyní můžeme pokračovat dále berouce $i + 1$ místo i. Máme pak rekurentně určeny bodové posloupnosti $\{a_{in}\}_{n=1}^{\infty}$. Položme $b_n = a_{nn}$, takže posloupnost $\{b_n\}$ je vybrána z posloupnosti $\{a_n\}$. Naším cílem je dokázat, že $\{b_n\}$ je konvergentní; protože P je metricky úplný, stačí dokázat, že $\{b_n\}$ je Cauchyovská. Budiž $\varepsilon > 0$; existuje takové i, že $2\delta_i < \varepsilon$. Posloupnost $\{b_n\}_{n=i}^{\infty}$ je vybrána z $\{a_{in}\}_{n=1}^{\infty}$. Tudíž máme $n \geqq i \Rightarrow \varrho(b_n, x_i) \leqq \delta_i$ a v důsledku trojúhelníkové nerovnosti $m \geqq i$, $n \geqq i \Rightarrow \varrho(b_m, b_n) < \varepsilon$.

II. Podle I existuje konvergentní $\{b_n\}$, pro kterou $b_n \in A_n$ pro všecka n. Budiž $\lim b_n = b$. Při daném n máme $i > n \Rightarrow a_i \in A_{n+1}$, takže $b \in \overline{A}_{n+1} \subset A_n$ podle **6.3.3** a **6.3.7.** Tudíž $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$. Mimo to jsme dokázali, že z každé posloupnosti $\{a_n\}$, pro kterou platí $a_n \in A_n$ pro všecka n, lze vybrat konvergentní $\{b_n\}$ tak, že $\lim b_n \in C$. Budiž nyní $\{a_n\}$ bodová posloupnost obsažená v C. Pak je $a_n \in A_n$ pro všecka n, takže existuje bod $b \in C$ a taková $\{b_n\}$ vybraná z $\{a_n\}$, že $\lim b_n = b$ v prostoru P a tudíž podle **6.3.4** také v prostoru C. Prostor C je tedy kompaktní podle **8.2.7** a **8.3.20.**

9.4.8. Budiž P metrický úplný prostor. Budiž $\{\delta_n\}$ taková posloupnost kladných čísel, že $\lim \delta_n = 0$. Budiž $\{A_n\}$ taková posloupnost bodových množin, že $A_n \neq \emptyset$, $A_n \supset \overline{A}_{n+1}$ a že $x \in A_n$, $y \in A_n \Rightarrow \varrho(x, y) < \delta_n$. Pak množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ obsahuje právě jeden bod. Zvolíme $a_n \in A_n$, položíme $K_n = (a_n)$ a užijeme **9.4.7.** Dostaneme, že $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$. Je-li však $x \in C$, $y \in C$, je pro všecka n: $x \in A_n$, $y \in A_n$, a tedy $\varrho(x, y) < \delta_n$. Protože $\lim \delta_n = 0$, je $\varrho(x, y) = 0$, tudíž $x = y$.

9.4.9. Budiž P metrický prostor. Aby P byl totálně omezený, k tomu je nutné a stačí, aby z každé bodové posloupnosti bylo lze vybrat Cauchyovskou posloupnost.

Důkaz. I. Nechť podmínka je splněna. Budiž $\varepsilon > 0$. Podle **9.1.13** existuje ε-síť A v prostoru P. Stačí dokázat, že A je konečná množina. Předpokládáme-li opak, existuje v A prostá posloupnost $\{a_n\}$. Pak je $m \neq n \Rightarrow \varrho(a_m, a_n) > \varepsilon$, takže z $\{a_n\}$ nelze vybrat Cauchyovskou posloupnost. To je spor.

II. Nechť P je totálně omezený. Budiž $\{a_n\}$ bodová posloupnost. Existuje taková posloupnost $\{K_n\}$ konečných bodových množin, že K_n je n^{-1}-síť v prostoru P. Protože K_1 je 1-síť, existuje ke každému n takový $x \in K_1$, že $\varrho(a_n, x) \leqq 1$. Protože K_1 je konečná, existuje bod $x_1 \in K_1$ a taková posloupnost $\{a_{1n}\}$ vybraná z $\{a_n\}$, že $\varrho(a_{1n}, x_1) \leqq 1$. Obecněji předpokládejme, že při určitém $i \in \mathbf{N}$ je dána posloupnost $\{a_{in}\}_{n=1}^{\infty}$ vybraná z $\{a_n\}$. Protože K_{i+1} je $(i+1)^{-1}$-síť, existuje ke každému n takový $x \in K_{i+1}$, že $\varrho(a_{in}, x) \leqq (i+1)^{-1}$. Protože K_{i+1} je konečná, existuje bod $x_{i+1} \in K_{i+1}$ a taková posloupnost $\{a_{i+1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ vybraná z $\{a_{in}\}_{n=1}^{\infty}$, že $\varrho(a_{i+1,n}, x_{i+1}) \leqq (i+1)^{-1}$. Takto dostáváme rekurentně pro každé $i \in \mathbf{N}$ bod x_i a bodovou posloupnost $\{a_{in}\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $\{a_{1n}\}$ je vybrána z $\{a_n\}$, $\{a_{i+1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ je vybrána z $\{a_{in}\}_{n=1}^{\infty}$ a že $\varrho(a_{in}, x_i) \leqq$ $\leqq i^{-1}$ pro všecka n a i. Položme $b_n = a_{nn}$. Pak posloupnost $\{b_n\}$ je vybrána z $\{a_n\}$ a zbývá dokázat, že $\{b_n\}$ je Cauchyovská. Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje takové i, že $2 \,.\, i^{-1} < \varepsilon$. Protože $\{b_n\}_{n=i}^{\infty}$ je vybrána z $\{a_{in}\}_{n=1}^{\infty}$, máme $n \geqq i \Rightarrow \varrho(b_n, x_i) \leqq i^{-1}$ a trojúhelníková nerovnost dává $m \geqq i$, $n \geqq i \Rightarrow \varrho(b_m, b_n) < \varepsilon$.

9.4.10. Budiž P metrický prostor. Aby P byl kompaktní, k tomu je nutné a stačí, aby P byl totálně omezený a metricky úplný.

Důkaz. I. Nechť P je kompaktní. Podle **9.1.5** P je L-prostor, takže podle **8.2.8** a **8.3.3** lze z každé bodové posloupnosti vybrat konvergentní bodovou posloupnost. Tudíž P podle **9.4.2** a **9.4.9** je totálně omezený, což ostatně je obsaženo ve větě **9.1.18.** Je-li $\{a_n\}$ Cauchyovská posloupnost, vyberme z ní konvergentní $\{a_{i_n}\}$ a položme $\lim\limits_{n\to\infty} a_{i_n} = a$. Abychom zjistili, že P je metricky úplný, stačí dokázat, že $\lim a_n = a$. Budiž $\varepsilon > 0$. Protože $\{a_n\}$ je Cauchyovská, existuje takový index k, že: $m > k$, $n > k \Rightarrow \varrho(a_m, a_n) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Podle **9.1.5** existuje takový index p, že $i_p > k$ a $\varrho(a, a_{i_p}) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Pak jest: $n > k \Rightarrow \varrho(a, a_n) \leqq \varrho(a, a_{i_p}) +$ $+ \varrho(a_{i_p}, a_n) < \varepsilon$, takže $\lim a_n = a$ podle **9.1.5.**

II. Nechť P je totálně omezený a metricky úplný. Z libovolné posloupnosti $\{a_n\}$ lze podle **9.4.9** vybrat Cauchyovskou $\{a_{i_n}\}$; protože P je metricky úplný, je $\{a_{i_n}\}$ konvergentní a P je kompaktní podle **8.2.7** a **8.3.20.**

Definice **9.4.3.** Metrický prostor P se nazývá *úplným obalem* metrického prostoru Q, je-li množina $Q \subset P$ hustá a je-li P metricky úplný.

9.4.11. Ke každému metrickému prostoru Q existuje úplný obal.

Důkaz. I. Budiž ϱ metrika prostoru Q. Budiž M množina všech těch Cauchyovských posloupností prostoru Q, které v Q nejsou konvergentní. Je-li $\{a_n\} \in M$, $\{b_n\} \in M$, pak nechť $[\{a_n\}, \{b_n\}] \in \mathfrak{E}$ znamená, že $\lim \varrho(a_n, b_n) = 0$. Zřejmě $[\{a_n\}, \{a_n\}] \in \mathfrak{E}$ pro každou $\{a_n\} \in M$, $[\{a_n\}, \{b_n\}] \in \mathfrak{E} \Rightarrow [\{b_n\}, \{a_n\}] \in \mathfrak{E}$. Z trojúhelníkové nerovnosti snadno plyne

$$[\{a_n\}, \{b_n\}] \in \mathfrak{E}\,, \quad [\{b_n\}, \{c_n\}] \in \mathfrak{E} \Rightarrow [\{a_n\}, \{c_n\}] \in \mathfrak{E}\,.$$

Tudíž $\mathfrak{E}$ je vztah ekvivalence v množině M, který vytvořuje rozklad množiny M. Zvolme $T \subset M$ tak, aby T obsahovala právě jeden prvek z každého pásu tohoto rozkladu. Položme $P = Q \cup T$.

II. Pro přehlednost budeme značit prvky množiny Q malými latinskými a prvky množiny T malými řeckými písmeny. Definujme funkci ϱ_0 v oboru $P \times P$ následujícími předpisy [1], [2], [3].

[1] $a \in Q$, $b \in Q \Rightarrow \varrho_0(a, b) = \varrho(a, b)$.

[2] Je-li $\alpha = \{a_n\} \in T$, $b \in Q$, budiž $\varrho_0(\alpha, b) = \varrho_0(b, \alpha) = \lim \varrho(a_n, b)$. Aby tento předpis měl smysl, musíme dokázat, že číselná posloupnost $\{\varrho(a_n, b)\}$ je konvergentní. Budiž $\varepsilon > 0$. Protože $\{a_n\}$ je Cauchyovská posloupnost v prostoru Q, existuje takový index k, že $m > k$, $n > k \Rightarrow$ $\Rightarrow \varrho(a_m, a_n) < \varepsilon$. Je-li $m > k$, $n > k$, soudíme z trojúhelníkové nerovnosti, že $\varrho(a_m, b) \leqq \varrho(a_n, b) + \varrho(a_m, a_n) < \varrho(a_n, b) + \varepsilon$ a stejně vyjde $\varrho(a_n, b) < \varrho(a_m, b) + \varepsilon$. Tudíž: $m > k$, $n > k \Rightarrow |\varrho(a_m, b) - \varrho(a_n, b| <$ $< \varepsilon$ a posloupnost $\{\varrho(a_n, b)\}$ je konvergentní v $\mathbf{E}_1$ podle **9.4.3.**

[3] Je-li $\alpha = \{a_n\} \in T$, $\beta = \{b_n\} \in T$, budiž $\varrho_0(\alpha, \beta) = \lim \varrho(a_n, b_n)$. Opět musíme dokázat, že číselná posloupnost $\{\varrho(a_n, b_n)\}$ je konvergentní. Budiž $\varepsilon > 0$. Protože $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou Cauchyovské posloupnosti v prostoru Q, existuje takový index k, že $m > k$, $n > k \Rightarrow$ $\Rightarrow \varrho(a_m, a_n) < \frac{1}{2}\varepsilon$, $\varrho(b_m, b_n) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Je-li $m > k$, $n > k$, plyne z trojúhelníkové nerovnosti, že $\varrho(a_m, b_m) \leqq \varrho(a_m, a_n) + \varrho(a_n, b_n) + \varrho(b_n, b_m) <$ $< \varrho(a_n, b_n) + \varepsilon$ a podobně je též $\varrho(a_n, b_n) < \varrho(a_m, b_m) + \varepsilon$. Tudíž:

$m > k,\ n > k \Rightarrow |\varrho(a_m, b_m) - \varrho(a_n, b_n)| < \varepsilon$ a posloupnost $\{\varrho(a_n, b_n)\}$ je konvergentní v $\mathbf{E}_1$ podle **9.4.3.**

III. Dokážeme, že ϱ_0 je odchylka v množině P. Zřejmé je $\varrho_0(a, a) = 0$, $\varrho_0(\alpha, \alpha) = 0$ a rovněž: $a \neq b \Rightarrow \varrho_0(a, b) > 0$. Je-li $\alpha \neq \beta$, jest $\varrho_0(\alpha, \beta) = \lim \varrho(a_n, b_n) \neq 0$ (tedy > 0), neboť posloupnosti $\alpha = \{a_n\}$, $\beta = \{b_n\}$ podle definice množiny T nemohou být ekvivalentní. Posléze máme $\varrho_0(\alpha, b) = \varrho_0(b, \alpha) = \lim \varrho(a_n, b) \neq 0$ (tedy > 0), neboť jinak by bylo $\lim a_n = b$ podle **9.1.5**, ačkoli posloupnost $\alpha = \{a_n\} \in M$ není konvergentní v prostoru Q.

IV. Odchylka ϱ_0 je zřejmě symetrická. Abychom ukázali, že splňuje trojúhelníkovou nerovnost, označme α, β, γ libovolné tři prvky množiny P. Je-li $\alpha \in T$, existuje v Q taková posloupnost $\{a_n\}$, že $\alpha = \{a_n\}$; je-li $\alpha \in Q$, položme $a_n = \alpha$ pro všecka n. Podobně definujme posloupnosti $\{b_n\}$, $\{c_n\}$. Potom máme $\varrho_0(\alpha, \beta) = \lim \varrho(a_n, b_n)$ a podobné vztahy platí pro $\varrho_0(\beta, \gamma)$ i pro $\varrho_0(\alpha, \gamma)$. Protože $\varrho(a_n, b_n) + \varrho(b_n, c_n) \geqq \varrho(a_n, c_n)$ pro všecka n, jest $\varrho_0(\alpha, \beta) + \varrho_0(\beta, \gamma) \geqq \varrho_0(\alpha, \gamma)$. Zjistili jsme, že ϱ_0 je metrika v množině P, která v ní vytvořuje topologii. Protože $\varrho = \varrho_0 \mid Q \times Q$, je Q prostor vnořený do P.

V. Ukážeme, že množina Q je hustá v P. Budiž $\alpha = \{a_n\} \in T$; podle **6.3.7** stačí ukázat, že v prostoru P jest $\lim a_n = \alpha$. Budiž $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$, $\varepsilon > \varepsilon'$. Pak existuje takové k, že: $m > k,\ n > k \Rightarrow \varrho(a_m, a_n) < \varepsilon'$. Protože $\varrho_0(a_m, \alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} \varrho(a_m, a_n)$, jest: $m > k \Rightarrow \varrho(a_m, \alpha) \leqq \varepsilon' < \varepsilon$. Tudíž $\lim a_n = \alpha$ v prostoru P podle **9.1.5.**

VI. Zbývá ukázat, že prostor P je metricky úplný. Budiž $\{\alpha_n\}$ Cauchyovská posloupnost v prostoru P. Protože množina $Q \subset P$ je hustá, existuje podle **4.9.3** pro každé n takový $a_n \in Q$, že $\varrho_0(\alpha_n, a_n) < n^{-1}$. Je-li $\varepsilon > 0$, pak existuje takový index $k(\varepsilon)$, že $m > k(\varepsilon)$, $n > k(\varepsilon) \Rightarrow \varrho_0(\alpha_m, \alpha_n) < \frac{1}{3}\varepsilon$; můžeme předpokládat, že $\varepsilon \,.\, k(\varepsilon) > 3$. Pro $m > k(\varepsilon)$, $n > k(\varepsilon)$ máme $\varrho(a_m, a_n) \leqq \varrho_0(a_m, \alpha_m) + \varrho_0(\alpha_m, \alpha_n) + \varrho_0(\alpha_n, a_n) < m^{-1} + \frac{1}{3}\varepsilon + n^{-1} < \varepsilon$. Tudíž $\{a_n\}$ je Cauchyovská posloupnost v prostoru Q. Stačí dokázat, že $\{a_n\}$ je konvergentní v prostoru P, neboť je-li $\lim a_n = \beta$, pak podle **9.1.5** je též $\lim \alpha_n = \beta$, protože $\varrho_0(\alpha_n, \beta) \leqq \varrho_0(\alpha_n, a_n) + \varrho_0(a_n, \beta) < \varrho_0(a_n, \beta) + n^{-1}$. Je-li $\{a_n\}$ konvergentní v prostoru Q, jsme hotovi, neboť pak podle

9.1.5 je $\{a_n\}$ konvergentní též v prostoru P. Jestliže $\{a_n\}$ není konvergentní v prostoru Q, plyne z definice množiny T, že existuje taková posloupnost $\{b_n\} = \beta \in T$, že $\lim \varrho(a_n, b_n) = 0$. Jak jsme poznali v V, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ takový index k, že $m > k \Rightarrow \varrho_0(b_m, \beta) \leqq \varepsilon$, tj. máme $\lim \varrho_0(b_n, \beta) = 0$. Protože $0 \leqq \varrho_0(a_n, \beta) \leqq \varrho_0(a_n, b_n) + \varrho_0(b_n, \beta) = \varrho(a_n, b_n) + \varrho_0(b_n, \beta)$, jest $\lim \varrho_0(a_n, \beta) = 0$, a tedy $\lim a_n = \beta$ podle **9.1.5.**

9.4.12. Buďtež P_1, P_2 dva úplné obaly metrického prostoru Q. Pak existuje takové prosté zobrazení f prostoru P_1 na prostor P_2, že $x \in Q \Rightarrow f(x) = x$ a že $\varrho_2[f(x), f(y)] = \varrho_1(x, y)$ pro $x \in P_1$, $y \in P_1$, je-li ϱ_1 (ϱ_2) metrika prostoru P_1 (P_2).

Důkaz. I. Budiž ϱ metrika prostoru Q, takže $\varrho_1 \mid Q \times Q = \varrho = \varrho_2 \mid Q \times Q$. Podle **9.1.5** je P_1 L-prostor. Protože množina Q je hustá v prostoru P_1, existuje podle **6.3.8** ke každému $a \in P_1 - Q$ taková posloupnost $\{a_n\}$, že $a_n \in Q$ pro všecka n a že $\lim a_n = a$ v prostoru P_1. Pro každý bod $a \in P_1 - Q$ zvolme takovou posloupnost $\{a_n\} = \varphi(a)$. Podle **9.4.2** je pro $a \in P_1 - Q$ posloupnost $\{a_n\} = \varphi(a)$ Cauchyovská v prostoru P_1; zřejmě je $\{a_n\}$ Cauchyovská též v prostoru P_2; protože P_2 je metricky úplný, existuje takový bod $a^* \in P_2$, že $\lim a_n = a^*$ v prostoru P_2. Položme $f(a) = a^*$ pro $a \in P_1 - Q$; pro $a \in Q$ budiž $f(a) = a$. Je tedy f zobrazení prostoru P_1 do prostoru P_2 a jest $x \in Q \Rightarrow f(x) = x$.

II. Jestliže při libovolně daném $y \in P_1$ položíme $g(x) = \varrho_1(x, y)$ pro $x \in P_1$, jest g spojitá funkce v oboru P_1, jak plyne např. z věty **9.1.7**, vezmeme-li tam P_1 a (y) místo P a M. Podobný fakt platí ovšem i o prostoru P_2. Z toho se snadno odvodí, že

$$a \in P_1\,, \quad b \in P_1 \Rightarrow \varrho_2[f(a), f(b)] = \varrho_1(a, b)\,. \tag{2}$$

Neboť vztah (2) jistě platí pro $a \in Q$, $b \in Q$. Budiž $b \in Q$, $a \in P_1 - Q$, $\{a_n\} = \varphi(a)$. Pak je $\varrho_2[f(a_n), f(b)] = \varrho_1(a_n, b)$ a mimo to je $\lim a_n = a$, $\lim f(a_n) = f(a)$. Z toho plyne (2) podle **7.1.5.** Tudíž (2) platí pro $a \in P_1$, $b \in Q$. Je-li konečně $a \in P_1$, $b \in P_1 - Q$, $\{b_n\} = \varphi(b)$, jest $\varrho_2[f(a), f(b_n)] = \varrho_1(a, b)$, $\lim b_n = b$, $\lim f(b_n) = f(b)$, takže (2) opět plyne ze **7.1.5.** Vztah (2) je tudíž správný obecně.

III. Protože P_1 je metricky úplný prostor, plyne ze (2), že také $f^1(P_1) \subset P_2$ je metricky úplný prostor. Podle **9.4.5** je tedy množina

$f^1(P_1)$ uzavřená v prostoru P_2. Mimo to je podle **4.9.1** množina $f^1(P_1)$ také hustá v prostoru P_2, takže podle **4.9.2** je $f^1(P_1) = P_2$, tj. f je zobrazení prostoru P_1 na prostor P_2. Že f je prosté, je důsledek vztahu (2).

Definice **9.4.4.** Prostor Q nazveme *topologicky úplný,* existuje-li takový kompaktní FH-prostor P, že Q je G_δ-množina v P.

9.4.13. Topologicky úplný prostor je úplně regulární. Viz **8.4.7.**

9.4.14. Budiž Q vnořen do P. Je-li P topologicky úplný a je-li Q uzavřená množina v prostoru P, je také Q topologicky úplný prostor. Existuje takový kompaktní FH-prostor R, že P je G_δ-množina v R. Tudíž existují takové otevřené $G_n \subset R$, že $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Podle **4.6.13** existuje taková uzavřená $S \subset R$, že $Q = P \cap S$. Podle **4.6.10**, **5.2.1** a **8.3.1** je S kompaktní FH-prostor. Jest $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} (G_n \cap S)$ a množiny $G_n \cap S$ jsou podle **4.6.5** otevřené v prostoru S, takže Q je G_δ-množina v S.

9.4.15. Budiž Q vnořen do P. Je-li P topologicky úplný a je-li Q G_δ-množina v P, je také Q topologicky úplný prostor. Existuje kompaktní FH-prostor R a takové G_n otevřené v R, že $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Existují takové K_n otevřené v P, že $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Podle **4.6.13** existují takové H_n otevřené v R, že $K_n = P \cap H_n$. Pak je $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \cap \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$, takže Q je G_δ-množina v R.

9.4.16. Budiž $\beta(Q)$ kompaktní β-obal úplně regulárního prostoru Q. Aby Q byl topologicky úplný, k tomu je nutné a stačí, aby Q byla G_δ-množina prostoru $\beta(Q)$.

Důkaz. I. Je-li Q G_δ-množina prostoru $\beta(Q)$, je Q topologicky úplný prostor, neboť podle definice **8.4.3** je $\beta(Q)$ kompaktní FH-prostor.

II. Budiž Q topologicky úplný. Pak existuje takový kompaktní FH-prostor P, že Q je G_δ-množina v P. Budiž P_0 uzávěr množiny Q

v prostoru P. Podle **4.6.10**, **5.2.1** a **8.3.1** je P_0 kompaktní FH-prostor a podle **4.6.9** je Q G_δ-množina v P_0. Mimo to množina Q je hustá v P_0, takže podle **8.4.10** existuje takové spojité zobrazení h prostoru $\beta(Q)$ na prostor P_0, že $h^{-1}(Q) = Q$. Protože Q je G_δ-množina v P_0, existují takové v P_0 otevřené G_n, že $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Protože $Q = h^{-1}(Q)$, je $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} h^{-1}(G_n)$. Množiny $h^{-1}(G_n)$ jsou podle **7.1.14** otevřené v $\beta(Q)$. Tudíž Q je G_δ-množina v $\beta(Q)$.

9.4.17. Budiž P úplně regulární prostor. Budiž $Q \subset P$ topologicky úplný prostor. Pak existuje taková množina $T \subset P$, že T je G_δ-množina v P a že $Q = T \cap \overline{Q}$. Při tom $\overline{Q}$ znamená ovšem uzávěr množiny Q v prostoru P. Označme $\beta(Q)$, $\beta(P)$ kompaktní β-obaly prostorů Q, P (viz **8.4.9**). Budiž Q_0 uzávěr množiny Q v prostoru $\beta(P)$, takže $\overline{Q} = Q_0 \cap P$. Podle **4.6.10**, **5.2.1** a **8.3.1** je Q_0 kompaktní FH-prostor a množina Q je hustá v Q_0. Tudíž podle **8.4.10** existuje takové spojité zobrazení h prostoru $\beta(Q)$ do Q_0, že $h^1[\beta(Q) - Q] = Q_0 - Q$. Podle **4.4.19** a **9.4.16** existují v prostoru $\beta(Q)$ takové uzavřené F_n, že $\beta(Q) - Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Tudíž $Q_0 - Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} h^1(F_n)$ a podle **7.2.9** a **8.3.23** jsou množiny $h^1(F_n)$ uzavřené v prostoru Q_0. Podle **4.4.19** tedy existují takové H_n otevřené v prostoru Q_0, že $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$. Podle **4.6.13** existují v prostoru $\beta(P)$ takové otevřené G_n, že $H_n = Q_0 \cap G_n$. Budiž $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, $T = P \cap K$. Podle **4.6.9** je T G_δ-množina v P. Protože $\overline{Q} = Q_0 \cap P$, $Q = Q_0 \cap K \subset P$, je $Q = T \cap \overline{Q}$.

9.4.18. Budiž P topologicky úplný prostor a budiž Q vnořen do P. Aby Q byl topologicky úplný prostor, k tomu je nutné a stačí, aby Q byl průnik uzavřené množiny prostoru P s G_δ-množinou prostoru P.

Důkaz. I. Budiž $Q = F \cap H$, kde F je uzavřená a H je G_δ-množina prostoru P. Podle **9.4.15** je H topologicky úplný prostor. Množina Q je relativně uzavřená v H podle **4.6.4**, takže Q je topologicky úplný prostor.

II. Budiž Q topologicky úplný prostor. Podle **9.4.13** a **9.4.17** je $Q = T \cap \overline{Q}$, kde $\overline{Q}$ je uzavřená a T je G_δ-množina.

9.4.19. Budiž Q topologicky úplný prostor. Budiž A bodová množina první kategorie. Pak $Q - A$ je hustá množina.

Budiž $\beta(Q)$ kompaktní β-obal prostoru Q (viz **8.4.9**). Podle **5.4.5**, **8.3.3** a **8.3.19** je $\beta(Q)$ S-kompaktní FR-prostor, takže tvrzení plyne z **8.2.21** a **9.4.16.**

9.4.20. Budiž P metricky úplný prostor. Pak P je topologicky úplný.

Důkaz. I. Budiž ϱ metrika v P. Můžeme předpokládat, že $\varrho(x, y) \leqq 1$ pro $x \in P$, $y \in P$. Jinak by totiž stačilo nahradit ϱ ekvivalentní metrikou ϱ_0, kde

$$\varrho(x, y) \leqq 1 \Rightarrow \varrho_0(x, y) = \varrho(x, y)\,,$$
$$\varrho(x, y) > 1 \Rightarrow \varrho_0(x, y) = 1\,.$$

II. Prostor P je podle **8.4.3** a **9.1.8** úplně regulární, takže podle **8.4.9** existuje kompaktní β-obal $\beta(P)$. Budiž $a \in P$. Budiž: $x \in P \Rightarrow f_a(x) = \varrho(a, x) = d[x, (a)]$. Podle I a **9.1.7** je f_a omezená spojitá funkce v oboru P. Tudíž podle definice **8.4.3** existuje taková spojitá funkce φ_a v oboru $\beta(P)$, že: $x \in P \Rightarrow \varphi_a(x) = \varrho(a, x)$.

III. Je-li φ spojitá funkce v oboru $\beta(P)$, je-li množina U relativně otevřená v P a jestliže $x \in P$, $\varphi(x) < \varepsilon \Rightarrow x \in U$, pak $x \in \beta(P)$, $\varphi(x) < \varepsilon \Rightarrow x \in \overline{U}$. [Zde a v dalším je $\beta(P)$ základní prostor.] Neboť množina $W = \mathscr{E}_x\,[x \in \beta(P), \varphi(x) < \varepsilon]$ je podle **7.1.14** otevřená; protože P je hustá v $\beta(P)$, je $P \cap W$ hustá ve W podle **4.9.12**, tj. $\overline{P \cap W} \supset W$; na druhé straně je $P \cap W \subset U$, takže $W \subset \overline{U}$.

IV. Budiž $a \in P$, $b \in P$. Dokážeme, že $\varphi_a(x) + \varphi_b(x) \geqq \varrho(a, b)$ pro všecky $x \in \beta(P)$. Je-li $T = \mathscr{E}_x\,[\varphi_a(x) + \varphi_b(x) \geqq \varrho(a, b)]$, plyne z trojúhelníkové nerovnosti, že $P \subset T$, takže množina T je hustá podle **4.9.1.** Avšak ze **7.1.18** a **7.1.32** odvodíme snadno, že množina T je uzavřená. Tudíž $T = \beta(P)$ podle **4.9.2.**

V. Pro $a \in P$, $n \in \mathbf{N}$ budiž $\Gamma(a, n) = \mathscr{E}_x\,[x \in \beta(P), \varphi_a(x) < n^{-1}]$. Podle **7.1.14** je $\Gamma(a, n)$ otevřená, takže také $G_n = \bigcup \Gamma(x, n)$ $(x \in P)$ je podle **4.4.10** otevřená. Stačí tedy dokázat, že $P = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Protože

$a \in P \Rightarrow a \in \Gamma(a, n) \Rightarrow a \in G_n$, je $P \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Obráceně budiž $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$; máme dokázat, že $b \in P$. Z definice množiny G_n plyne, že pro každé n existuje takový bod $a_n \in P$, že

$$\varphi_{a_n}(b) < n^{-1} . \tag{3}$$

Ze IV nyní plyne

$$\varrho(a_m, a_n) \leqq \varphi_{a_m}(b) + \varphi_{a_n}(b) < m^{-1} + n^{-1} , \tag{4}$$

a z toho soudíme, že $\{a_n\}$ je Cauchyovská posloupnost prostoru P. Protože P je metricky úplný, existuje takový $a \in P$, že

$$\lim a_n = a . \tag{5}$$

Stačí dokázat, že $b = a$.

VI. Předpokládejme, že $b \neq a$. Podle **5.1.15** existují takové otevřené U, V, že $a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$. Podle **4.4.15** je $\overline{U} \cap V = \emptyset$. Podle **4.4.13** a **4.6.2** je $P \cap U$ relativní okolí bodu a v metrickém prostoru P. Tudíž existuje takový index k, že: $x \in P$, $\varrho(a, x) < 2 \,.\, k^{-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in U$. Podle III máme: $x \in \beta(P)$, $\varphi_a(x) < 2 \,.\, k^{-1} \Rightarrow x \in \overline{U}$. Protože $b \in V$, $\overline{U} \cap V = \emptyset$, jest

$$\varphi_a(b) \geqq 2 \,.\, k^{-1} . \tag{6}$$

Nyní (4) dává $\varrho(a_k, a_n) < n^{-1} + k^{-1}$, takže podle (5) máme $\varrho(a_k, a) \leqq$ $\leqq k^{-1}$. Pro $x \in P$ jest: $\varrho(a, x) \leqq \varrho(a, a_k) + \varrho(a_k, x) \leqq k^{-1} + \varrho(a_k, x)$, tj.: $P \subset T = \mathscr{E}_x\, [\varphi_a(x) - \varphi_{a_k}(x) \leqq k^{-1}]$. Z toho soudíme stejnou úvahou jako ve IV, že $T = \beta(R)$. Je tedy zejména $b \in T$, což podle (3) a (6) je nemožné.

9.4.21. Budiž P úplný obal metrického prostoru Q. Aby Q byl topologicky úplný, k tomu je nutné a stačí, aby Q byl G_δ-množinou v P.

Důkaz. I. Budiž $Q \subset P$ G_δ-množina v P. Podle **9.4.20** existuje takový kompaktní FH-prostor R, že P je G_δ-množina v R. Podle **4.6.16** existuje taková G_δ-množina S v prostoru R, že $Q = P \cap S$. Podle **4.4.21** je tedy Q G_δ-množina v R, a tudíž Q je topologicky úplný prostor.

II. Budiž Q topologicky úplný. Podle **8.4.3** a **9.1.8** je P úplně regulární prostor, takže podle **9.4.17** existuje taková G_δ-množina T prostoru P, že $Q = T \cap \bar{Q}$. Podle definice **9.4.3** je množina Q hustá v P, tj. $\bar{Q} = P$, tedy $Q = T$.

9.4.22. Budiž Q topologicky úplný metrisovatelný prostor. Topologie prostoru Q se dá vytvořit takovou metrikou ϱ_0, při které je Q metricky úplný.

Důkaz. I. Podle **9.4.11** a **9.4.21** existuje takový metricky úplný prostor P, že Q je G_δ-množina v P. Označme ϱ metriku prostoru P. Podle **4.4.19** existují v P takové uzavřené množiny F_n, že $P - Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Protože případ $Q = P$ je triviální, můžeme předpokládat, že $F_n \neq \emptyset$ pro všecka n.

II. Pro $x \in Q$, $y \in Q$, $n \in \mathbf{N}$ budiž (viz definici **9.1.8**)

$$f_n(x, y) = \varrho(x, y) + d(x, F_n) + d(y, F_n)\,, \tag{7}$$

$$g_n(x, y) = \frac{\varrho(x, y)}{f_n(x, y)}\,, \tag{8}$$

$$\varrho_0(x, y) = \varrho(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot g_n(x, y)\,. \tag{9}$$

Protože $x \in Q$, $F_n = \bar{F}_n \subset P - Q$, je $d(x, F_n) > 0$ podle **9.1.7** a podobně saké $d(y, F_n) < 0$. Tudíž $0 \leqq \varrho(x, y) < f_n(x, y)$, takže definice (8) má tmysl a jest

$$0 \leqq g_n(x, y) < 1\,. \tag{10}$$

Nekonečná řada napravo v (9) je tedy konvergentní. Mimo to

$$0 \leqq \varrho(x, y) \leqq \varrho_0(x, y)\,. \tag{11}$$

Pro $x = y$ je zřejmě $\varrho_0(x, y) = 0$; pro $x \neq y$ je zřejmě $\varrho_0(x, y) > 0$. Také $\varrho_0(x, y) = \varrho_0(y, x)$ je zřejmé.

Jelikož pro $c > 0$, $0 \leqq t_1 \leqq t_2$, jest

$$\frac{t_1}{c + t_1} \leqq \frac{t_2}{c + t_2}$$

a jelikož pro $x \in Q$, $y \in Q$, $z \in Q$ jest $\varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$, máme

$$g_n(x, z) \leqq \frac{\varrho(x, y) + \varrho(y, z)}{\varrho(x, y) + d(x, F_n) + \varrho(y, z) + d(z, F_n)}\,. \tag{12}$$

Avšak podle **9.1.7** jest

$$d(y, F_n) \leqq \varrho(x, y) + d(x, F_n)\,,$$
$$d(y, F_n) \leqq \varrho(y, z) + d(z, F_n)\,,$$

takže žádné z obou čísel

$$\varrho(x, y) + d(x, F_n) + d(y, F_n)\,, \quad \varrho(y, z) + d(y, F_n) + d(z, F_n)$$

není větší než jmenovatel ve (12). Tudíž ze (12) plyne

$$g_n(x, z) \leqq g_n(x, y) + g_n(y, z)\,,$$

takže podle (9) $\varrho_0(x, z) \leqq \varrho_0(x, y) + \varrho_0(y, z)$.

III. Tím je dokázáno, že ϱ_0 je metrika v Q. Dokážeme, že ϱ_0 je ekvivalentní s $\varrho \mid Q \times Q$. Podle (11) a podle **9.1.3** máme ukázat, že ke každému bodu $a \in Q$ a ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že $x \in Q$, $\varrho(a, x) < \delta \Rightarrow \varrho_0(a, x) < \varepsilon$. Jestliže při určité volbě bodu a a čísla ε tomu tak není, pak existuje v prostoru Q taková bodová posloupnost $\{x_n\}$, že $\lim \varrho(a, x_n) = 0$, avšak $\varrho_0(a, x_n) \geqq \varepsilon$ pro všecka n. Existuje takový index k, že $2^{-k+1} < \varepsilon$. Podle (10) je pro všecka n

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} \,.\, g_i(a, x_n) \leqq \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-k} < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,,$$

tedy

$$\varrho_0(a, x_n) < \varrho(a, x_n) + \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} \,.\, g_i(a, x_n) + \tfrac{1}{2}\varepsilon\,,$$

takže podle (7) a (8)

$$\varrho_0(a, x_n) < \varrho(a, x_n) + \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} \frac{\varrho(a, x_n)}{\varrho(a, x_n) + d(a, F_i)} + \tfrac{1}{2}\varepsilon\,. \tag{13}$$

Protože $\lim \varrho(a, x_n) = 0$, existuje takový index n, že pravá strana ve (13) je menší než ε. To je spor, neboť $\varrho_0(a, x_n) \geqq \varepsilon$ pro všecka n.

IV. Zbývá dokázat, že při metrice ϱ_0 prostor Q je metricky úplný. Budiž $\{x_n\}$ posloupnost Cauchyovská při metrice ϱ_0. Máme dokázat, že existuje takový bod $a \in Q$, že $\lim \varrho_0(a, x_n) = 0$ (viz **9.1.5**). Protože už víme, že ϱ_0 a $\varrho \mid Q \times Q$ jsou ekvivalentní metriky prostoru Q, stačí dokázat, že $\lim \varrho(a, x_n) = 0$. Avšak z (11) plyne, že posloupnost $\{x_n\}$ je Cauchyovská i při metrice ϱ. Protože prostor P při metrice ϱ

je metricky úplný, existuje takový bod $a \in P$, že $\lim \varrho(a, x_n) = 0$, a potřebujeme pouze dokázat, že $a \in Q$. Budiž naopak $a \in P - Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Pak existuje takový index k, že $a \in F_k$. Podle definice **9.1.8** je $0 \leqq d(x_n, F_k) \leqq \varrho(a, x_n)$. Protože $\lim \varrho(a, x_n) = 0$, jest

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, F_k) = 0 \,. \tag{14}$$

Podle (9) je $\varrho_0(x_m, x_n) \geqq 2^{-k} \,.\, g_k(x_m, x_n)$, takže ze (7) a (8) plyne

$$\varrho_0(x_m, x_n) \geqq 2^{-k} \frac{\varrho(x_m, x_n)}{\varrho(x_m, x_n) + d(x_m, F_k) + d(x_n, F_k)} \,. \tag{15}$$

Podle **9.1.7** jest

$$d(x_m, F_k) \leqq \varrho(x_m, x_n) + d(x_n, F_k) \,,$$

takže z (15) plyne

$$\varrho_0(x_m, x_n) \geqq 2^{-k-1} \frac{\varrho(x_m, x_n)}{\varrho(x_m, x_n) + d(x_n, F_k)} \,. \tag{16}$$

Protože posloupnost $\{x_n\}$ je Cauchyovská při metrice ϱ_0, existuje takový index p, že $m > p$, $n > p \Rightarrow \varrho_0(x_m, x_n) < 2^{-k-2}$. Z (16) nyní dostaneme snadným výpočtem

$$m > p \,, \quad n > p \Rightarrow \varrho(x_m, x_n) < d(x_n, F_k) \,.$$

Protože $\varrho(x_m, a) \leqq \varrho(x_m, x_n) + \varrho(x_n, a)$, je tedy

$$m > p \,, \quad n > p \Rightarrow \varrho(x_m, a) \leqq \varrho(a, x_n) + d(x_n, F_k) \,.$$

Nyní máme $\lim \varrho(a, x_n) = 0$ a podle **9.1.7** též $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F_k) = d(a, F_k) = 0$. Tudíž: $m > p \Rightarrow \varrho(x_m, a) \leqq 0 \Rightarrow a = x_m$. To je spor, neboť $x_m \in Q$, $a \in P - Q$.

9.4.23. Budiž K množina všech iracionálních čísel. Budiž $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pak existuje takové n, že množina $\overline{A}_n$ obsahuje interval. ($\overline{A}_n$ je uzávěr v prostoru $\mathbf{E}_1$.) Této věty jsme užili v příkladech **6.4.7** až **6.4.9**.

Důkaz. Podle **9.4.3** a **9.4.20** je $\mathbf{E}_1$ topologicky úplný prostor. Jest $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$. Kdyby žádná z množin $\overline{A}_n$ neobsahovala interval, pak by podle **4.10.8** množiny A_n byly řídké. Protože také (a) je řídká pro každý bod a spočetné množiny $\boldsymbol{E}_1 - K$, byla by množina $\boldsymbol{E}_1$ první kategorie v $\boldsymbol{E}_1$ a to je spor proti **9.4.19.**

9.5. Funkce první třídy

Definice **9.5.1.** Budiž P prostor; budiž f funkce v oboru P. Pravíme, že f je *funkce první třídy*, existuje-li taková posloupnost $\{f_n\}_1^\infty$ spojitých funkcí v oboru P, že $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pro každý $x \in P$.

9.5.1. Budiž P prostor; budiž f spojitá funkce v oboru P. Pak f je funkce první třídy.

9.5.2. Budiž Q vnořen do P; budiž f funkce první třídy v oboru P. Pak $f \mid Q$ je funkce první třídy v oboru Q. Viz **7.1.8.**

9.5.3. Budiž P prostor; buďtež f, g funkce první třídy v oboru P. Pro $x \in P$ budiž

$$f_1(x) = |f(x)| ;$$
$$f_2(x) = \max [f(x), g(x)] ;$$
$$f_3(x) = \min [f(x), g(x)] ;$$
$$f_4(x) = f(x) + g(x) ;$$
$$f_5(x) = f(x) - g(x) ;$$
$$f_6(x) = f(x) \,.\, g(x) ;$$
$$f_7(x) = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|} .$$

Pak $f_1, f_2, \ldots, f_7$ jsou funkce první třídy v oboru P. Viz **7.1.32.**

9.5.4. Budiž P prostor; buďtež f, g funkce první třídy v oboru P. Pro $x \in P$ budiž $g(x) \neq 0$. Pro $x \in P$ položme $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Pak je h funkce první třídy v oboru P. Existují takové posloupnosti $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ spojitých funkcí v oboru P, že $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ pro všecky $x \in P$. Pro $x \in P$ položme

$$\varphi_n(x) = f_n(x) \,.\, g_n(x)\,, \quad \psi_n(x) = \max\,[n^{-1}, [g_n(x))^2]\,, \quad q_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}\,.$$

Ze **7.1.32** plyne, že φ_n, ψ_n, q_n jsou spojité funkce v oboru P. Stačí tedy dokázat, že $\lim q_n(x) = h(x)$ pro každý $x \in P$. Je však $\lim\limits_{n\to\infty} (g_n(x))^2 = (g(x))^2 > 0$, takže existuje takový index $k(x)$, že: $n > k(x) \Rightarrow (g_n(x))^2 > n^{-1}$. Pro $n > k(x)$ jest $\psi_n(x) = (g_n(x))^2$; tudíž $\lim \psi_n(x) = (g(x))^2 > 0$. Protože $\lim \varphi_n(x) = f(x) \,.\, g(x)$, $\lim \psi_n(x) = (g(x))^2$, $h(x) = \dfrac{f(x) \,.\, g(x)}{(g(x))^2}$, jest $\lim q_n(x) = h(x)$.

9.5.5. Budiž P prostor; budiž f funkce první třídy v oboru P; budiž $|f(x)| < 1$ pro všecky $x \in P$. Pro $x \in P$ budiž

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 - |f(x)|}\,.$$

Pak je g funkce první třídy v oboru P. Existuje taková posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí v oboru P, že $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pro každý $x \in P$. Pro $x \in P$ budiž

$$\begin{aligned} |f_n(x)| < 1 - n^{-1} &\Rightarrow h_n(x) = f_n(x)\,, \\ f_n(x) \geqq 1 - n^{-1} &\Rightarrow h_n(x) = 1 - n^{-1}\,, \\ f_n(x) \leqq -1 + n^{-1} &\Rightarrow h_n(x) = -1 + n^{-1}\,. \end{aligned}$$

Ze **7.1.32** plyne, že h_n jsou spojité funkce v oboru P. Protože $|f(x)| < 1$, zjistíme snadno, že $\lim h_n(x) = f(x)$ pro každý $x \in P$. Protože $x \in P \Rightarrow |h_n(x)| < 1$, plyne ze **7.1.32**, že také k_n jsou spojité funkce v oboru P, jestliže

$$x \in P \Rightarrow k_n(x) = \frac{h_n(x)}{1 - |h_n(x)|}\,.$$

Zřejmě

$$x \in P \Rightarrow \lim k_n(x) = \frac{f(x)}{1 - |f(x)|}\,.$$

9.5.6. Budiž P prostor. Budiž $\{f_n\}_1^\infty$ posloupnost funkcí první třídy v oboru P. Nechť existuje stejnoměrná limita f (viz definici **7.3.3**) posloupnosti $\{f_n\}$. Pak také f je funkce první třídy v oboru P. Existují takové indexy $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, že

$$n \geqq n_i\,, \quad x \in P \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < 2^{-i-1} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Jest

$$m \geqq n_i\,, \quad n \geqq n_i\,, \quad x \in P \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < 2^{-i} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Položme

$$g(x) = f(x) - f_{n_1}(x)\,, \; g_i(x) = f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x) \; (x \in P;\; i = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Podle **9.5.3** stačí dokázat, že g je funkce první třídy. Existují takové spojité funkce φ_{in} $(i, n = 1, 2, 3, \ldots)$ v oboru P, že $x \in P \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{in}(x) = g_i(x)$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots$ Budiž

$$\begin{aligned} |\varphi_{in}(x)| < 2^{-i} &\Rightarrow \psi_{in}(x) = \varphi_{in}(x)\,, \\ \varphi_{in}(x) \geqq 2^{-i} &\Rightarrow \psi_{in}(x) = 2^{-i}\,, \\ \varphi_{in}(x) \leqq -2^{-i} &\Rightarrow \psi_{in}(x) = -2^{-i}\,. \end{aligned}$$

Funkce ψ_{in} jsou spojité podle **7.1.32**; protože $x \in P \Rightarrow |g_i(x)| < 2^{-i}$, jest

$$x \in P \Rightarrow |\psi_{in}(x) - g_i(x)| \leqq |\varphi_{in}(x) - g_i(x)|\,,$$

tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_{in}(x) = g_i(x)$. Budiž

$$x \in P \Rightarrow h_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_{in}(x)\,.$$

Funkce h_n jsou spojité podle **7.1.32**; stačí tedy dokázat, že $\lim h_n(x) = g(x)$ pro $x \in P$. Budiž $a \in P$, $\varepsilon > 0$. Existuje takový index k, že $3 \,.\, 2^{-k} < \varepsilon$ a

$$\Big|g(a) - \sum_{i=1}^{k} g_i(a)\Big| = |f(a) - f_{n_{k+1}}(a)| < \tfrac{1}{3} \,.\, \varepsilon\,.$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_{in}(a) = g_i(a)$, existuje takový index m, že $m > k$ a

$$i \leqq k\,, \quad n > m \Rightarrow |\psi_{in}(a) - g_i(a)| < \frac{\varepsilon}{3k}\,.$$

Pro $n > m$ jest

$$|h_n(a) - g(a)| \leqq \left|\sum_{i=1}^{k} g_i(a) - g(a)\right| + \sum_{i=1}^{k} |\psi_{in}(a) - g_i(a)| +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{\infty} |\psi_{in}(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + k \cdot \frac{\varepsilon}{3k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} = \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{1}{2^k} < \varepsilon ,$$

tj. $n > m \Rightarrow |h_n(a) - g(a)| < \varepsilon$, takže

$$\lim h_n(a) = g(a) .$$

Definice **9.5.2.** Bodovou množinu $F \subset P$ nazveme *dokonale uzavřenou* (v prostoru P), existuje-li spojitá funkce f v oboru P, pro kterou je $F = \mathscr{E}_x [f(x) = 0]$. Bodovou množinu $G \subset P$ nazveme *dokonale otevřenou* (v prostoru P), jestliže $P - G$ je dokonale uzavřená.

9.5.7. Dokonale uzavřená bodová množina je uzavřená. Dokonale otevřená bodová množina je otevřená. Viz **7.1.20.**

9.5.8. Průnik nejvýš spočetné soustavy $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ dokonale uzavřených bodových množin je dokonale uzavřená množina. Sjednocení nejvýš spočetné soustavy $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ dokonale otevřených bodových množin je dokonale otevřená množina.

Důkaz. I. Budiž $\{F_n\}_1^\infty$ posloupnost dokonale uzavřených bodových množin prostoru P. Existuje taková posloupnost $\{f_n\}_1^\infty$ spojitých funkcí v oboru P, že $F_n = \mathscr{E}_x [f_n(x) = 0]$. Budiž

$$|f_n(x)| < 2^{-n} \Rightarrow \varphi_n(x) = f_n(x) ,$$
$$f_n(x) \geqq 2^{-n} \Rightarrow \varphi_n(x) = 2^{-n} ,$$
$$f_n(x) \leqq - 2^{-n} \Rightarrow \varphi_n(x) = - 2^{-n} .$$

Podle **7.1.32** jsou φ_n spojité funkce v oboru P. Zřejmě $F_n = \mathscr{E}_x [\varphi_n(x) = 0]$. Položme

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(x)| .$$

Podle **7.1.32** jsou g_n spojité funkce v oboru P. Jest

$$x \in P , \quad m > k , \quad n > k \Rightarrow |g_m(x) - g_n(x)| \leqq \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-k} ,$$

takže podle **7.3.7** existuje stejnoměrná limita h posloupnosti funkcí $\{g_n\}_1^\infty$. Podle **7.3.3** a **7.3.8** jest h spojitá funkce v oboru P. Snadno se dokáže, že $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \mathscr{E}_x\,[h(x) = 0]$. Množina $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ je tedy dokonale uzavřená.

II. Jsou-li bodové množiny G_n dokonale otevřené, jsou množiny $P - G_n$ dokonale uzavřené. Podle I je množina $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (P - G_n)$ dokonale uzavřená, takže $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = P - \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (P - G_n)$ je dokonale otevřená.

9.5.9. Sjednocení konečné soustavy $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ dokonale uzavřených bodových množin je dokonale uzavřená množina. Průnik konečné soustavy $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ dokonale otevřených bodových množin je dokonale otevřená množina.

Důkaz. I. Jsou-li bodové množiny F_i $(1 \leqq i \leqq n)$ dokonale uzavřené v prostoru P, pak existují takové spojité funkce f_i $(1 \leqq i \leqq n)$ v oboru P, že $F_i = \mathscr{E}_x\,[f_i(x) = 0]$. Je-li

$$x \in P \Rightarrow \varphi(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x)\,,$$

jest φ spojitá funkce v oboru P podle **7.1.32.** Zřejmě $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i = \mathscr{E}_x\,[\varphi(x) = 0]$, takže množina $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ je dokonale uzavřená.

II. Jsou-li G_i $(1 \leqq i \leqq n)$ dokonale otevřené, jsou $P - G_i$ dokonale uzavřené, podle I je $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (P - G_i)$ dokonale uzavřená, takže $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i = P - \bigcup\limits_{i=1}^{n} (P - G_i)$ je dokonale otevřená.

9.5.10. Budiž P prostor; budiž f spojitá funkce v oboru P; budiž $c \in \mathbf{E}_1$. Bodové množiny

$$A = \mathscr{E}_x\,\,[f(x) \geqq c]\,,\quad B = \mathscr{E}_x\,\,[f(x) \leqq c]$$

jsou dokonale uzavřené. Bodové množiny

$$C = \mathscr{E}_x\,\,[f(x) > c]\,,\quad D = \mathscr{E}_x\,\,[f(x) < c]$$

jsou dokonale otevřené. Pro $x \in P$ budiž

$$f_1(x) = -c + \min\,[f(x), c]\,; \quad f_2(x) = -c + \max\,[f(x), c]\,.$$

Podle **7.1.32** jsou f_1, f_2 spojité funkce v oboru P. Zřejmě

$$A = \mathscr{E}_x \quad [f_1(x) = 0]\,; \quad B = \mathscr{E}_x \quad [f_2(x) = 0]\,.$$

Množiny A, B jsou tedy dokonale uzavřené a množiny $C = P - B$, $D = P - A$ jsou dokonale otevřené.

Definice **9.5.3.** Bodovou množinu $A \subset P$ nazveme *dokonalou F_σ-množinou* (v prostoru P), existuje-li taková posloupnost $\{F_n\}$ dokonale uzavřených množin, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$; $A \subset P$ nazveme *dokonalou G_δ-množinou* (v prostoru P), existuje-li taková posloupnost $\{G_n\}$ dokonale otevřených množin, že $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

9.5.11. Aby $A \subset P$ byla dokonalá G_δ-množina, k tomu je nutné a stačí, aby $P - A$ byla dokonalá F_σ-množina.

9.5.12. Dokonale uzavřená bodová množina je dokonalá F_σ-množina. Dokonale otevřená bodová množina je dokonalá G_σ-množina.

9.5.13. Dokonale uzavřená bodová množina je dokonalá G_δ-množina. Dokonale otevřená bodová množina je dokonalá F_σ-množina.

Důkaz. I. Je-li F dokonale uzavřená, pak existuje taková spojitá funkce f v oboru P, že $F = \mathscr{E}_x\,[f(x) = 0]$. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ budiž

$$A_n = \mathscr{E}_x\,[f(x) < n^{-1}]\,; \quad B_n = \mathscr{E}_x\,[f(x) > -n^{-1}]\,.$$

Podle **9.5.10** jsou A_n, B_n dokonale otevřené, takže podle **9.5.9** také $A_n \cap B_n$ je dokonale otevřená. Avšak $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n)$, takže F je dokonalá G_δ-množina.

II. Je-li G dokonale otevřená, je G dokonalá F_σ-množina podle I a podle **9.5.11.**

9.5.14. Sjednocení nejvýš spočetné soustavy $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ dokonalých F_σ-množin je dokonalá F_σ-množina. Průnik nejvýš spočetné soustavy $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ dokonalých G_δ-množin je dokonalá G_δ-množina.

9.5.15. Průnik konečné soustavy $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ dokonalých F_σ-množin je dokonalá F_σ-množina. Sjednocení konečné soustavy $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ dokonalých G_δ-množin je dokonalá G_δ-množina. Druhé tvrzení se odvodí z prvního na základě **9.5.11.** První tvrzení stačí dokázat pro případ dvou dokonalých F_σ-množin M_1, M_2. Je-li $M_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{1i}$, $M_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{2k}$, jest $M_1 \cap M_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} (F_{1i} \cap F_{2k})$. Jsou-li F_{1i}, F_{2k} dokonale uzavřené, je také $F_{1i} \cap F_{2k}$ dokonale uzavřená podle **9.5.8.**

9.5.16. Budiž $A \subset P$ dokonalá G_δ-množina; budiž $B \subset P$ dokonalá F_σ-množina; budiž $A \subset B$. Pak existuje taková $C \subset P$, že:

[1] C je dokonalá G_δ-množina;
[2] C je dokonalá F_σ-množina;
[3] $A \subset C \subset B$.

Důkaz. I. Existují takové dokonale otevřené $G_n \subset P$ a takové dokonale uzavřené $F_n \subset P$, že

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\,; \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\,.$$

Definujme rekurentně bodové množiny H_n, K_n:

$$(1) \qquad \begin{aligned} H_1 &= G_1\,, \quad K_1 = G_1 \cap F_1\,, \\ H_{n+1} &= K_n \cup \bigcap_{i=1}^{n+1} G_i\,, \quad K_{n+1} = H_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i\,. \end{aligned}$$

Položme

$$(2) \qquad H = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n\,, \quad K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\,.$$

Z **9.5.12**, **9.5.13**, **9.5.14** a **9.5.15** odvodíme indukcí, že každá z množin H_n, K_n je dokonalou F_σ-množinou a také dokonalou G_δ-množinou;

z **9.5.14** potom plyne, že H je dokonalá G_δ-množina, K je dokonalá F_σ-množina. Stačí tudíž dokázat, že

$$A \subset H = K \subset B .$$

Z (1) plyne

(3) $$K_n \subset H_n .$$

Mimo to je

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} G_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i \subset H_n ,$$

takže

(4) $$H_{n+1} \subset H_n .$$

Posléze je $K_n \subset \bigcup_{i=1}^{n} F_i \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i$, $K_n \subset H_{n+1}$, takže

(5) $$K_{n+1} \supset K_n .$$

II. Budiž $x \in A$. Pak je $x \in G_i$ pro všecka i, tedy podle (1) $x \in H_n$ pro všecka n, tudíž $x \in H$. Je tedy $A \subset H$.

III. Budiž $x \in K$. Pak existuje takové m, že $x \in K_m$; jest $K_m \subset \bigcup_{i=1}^{m} F_i$, tudíž $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = B$. Je tedy $K \subset B$.

IV. Budiž $x \in K$. Pak existuje takové m, že $x \in K_m$; podle (5) $n \geqq m \Rightarrow x \in K_n$, takže podle (3) $n \geqq m \Rightarrow x \in H_n$, a tudíž podle (4) $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = H$. Je tedy $K \subset H$.

V. Budiž $x \in H - K$. Pak je pro všecka n: $x \in H_{n+1} - K_n \subset \bigcap_{i=1}^{n+1} G_i$, tedy $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = A \subset B = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Tudíž existuje takové m, že $x \in \bigcup_{n=1}^{m} F_n$. Mimo to je však $x \in H_m$, tedy $x \in H_m \cap \bigcup_{n=1}^{m} F_n = K_m \subset K$ a to je nemožné. Tudíž $H - K = \emptyset$, tj. $H \subset K$.

9.5.17. Budiž P prostor; budiž f funkce první třídy v oboru P; budiž $c \in \mathbf{E}_1$. Bodové množiny

$$A = \mathscr{E}_x \ [f(x) \geqq c] , \quad B = \mathscr{E}_x \ [f(x) \leqq c]$$

jsou dokonalé G_δ-množiny. Bodové množiny

$$C = \mathscr{E}_x \quad [f(x) > c]\,, \quad D = \mathscr{E}_x \quad [f(x) < c]$$

jsou dokonalé F_σ-množiny.

Důkaz. I. Existuje taková posloupnost $\{f_n\}_1^\infty$ spojitých funkcí v oboru P, že $\lim f_n(x) = f(x)$ pro každý $x \in P$. Pro $i, n = 1, 2, 3, \ldots$ budiž

$$M_{in} = \mathscr{E}_x \quad [f_n(x) \geqq c + i^{-1}]\,.$$

Je-li $x \in C$, pak existuje takový index i, že $x \in M_{in}$ pro všecka $n \geqq i$. Obráceně se z existence takového i snadno odvodí, že $x \in C$. Tudíž

$$C = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i\,, \quad H_i = \bigcap_{n=i}^{\infty} M_{in}\,.$$

Avšak množiny M_{in} podle **9.5.10** jsou dokonale uzavřené, takže podle **9.5.8** také H_i jsou dokonale uzavřené a tedy C je dokonalá F_σ-množina.

II. Je-li $g(x) = -f(x)$ pro všecky $x \in P$, je zřejmě také g funkce první třídy a jest $D = \mathscr{E}_x\,[g(x) > -c]$, takže podle I je D dokonalá F_σ-množina.

III. Jest $A = P - D$, $B = P - C$, takže A, B jsou dokonalé G_δ-množiny podle **9.5.11.**

9.5.18. $C \subset P$ budiž dokonalá F_σ-množina a současně též dokonalá G_δ-množina. Budiž

$$x \in C \Rightarrow f(x) = 1\,, \quad x \in P - C \Rightarrow f(x) = 0\,.$$

Pak je f funkce první třídy v oboru P. Existují takové dvě posloupnosti $\{F_n\}_1^\infty$, $\{G_n\}_1^\infty$ bodových množin, že každá F_n je dokonale uzavřená, každá G_n je dokonale otevřená a že

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\,.$$

Podle **9.5.9** jsou množiny $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ a $P - \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ dokonale uzavřené; tudíž existují takové spojité funkce φ_n, ψ_n v oboru P, že

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \mathscr{E}_x \quad [\varphi_n(x) = 0]\,, \quad \bigcap_{i=1}^{n} G_i = \mathscr{E}_x \quad [\psi_n(x) \neq 0]\,.$$

Protože $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \subset C \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i$, jest $|\varphi_n(x)| + |\psi_n(x)| > 0$ pro každý $x \in P$. Proto existuje taková funkce f_n v oboru P, že

$$x \in P \Rightarrow f_n(x) = \frac{|\psi_n(x)|}{|\varphi_n(x)| + |\psi_n(x)|};$$

funkce f_n je podle **7.1.32** spojitá. Je-li $x \in C$, pak existuje takové m, že

$$n \geqq m \Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{n} F_i \Rightarrow f_n(x) = 1 .$$

Je-li $x \in P - C$, pak existuje takové m, že

$$n \geqq m \Rightarrow x \in P - \bigcap_{i=1}^{n} G_i \Rightarrow f_n(x) = 0 .$$

Tudíž $\lim f_n(x) = f(x)$ pro každý $x \in P$ a funkce f je první třídy.

9.5.19. Budiž P prostor; budiž f funkce v oboru P. Jestliže pro každé $c \in \mathbf{E}_1$ jsou

$$\mathscr{E}_x\ [f(x) \geqq c], \quad \mathscr{E}_x\ [f(x) \leqq c]$$

dokonalé G_δ-množiny, pak f je funkce první třídy.

9.5.20. Budiž P prostor; budiž f funkce v oboru P. Jestliže pro každé $c \in \mathbf{E}_1$ jsou

$$\mathscr{E}_x\ [f(x) > c], \quad \mathscr{E}_x\ [f(x) < c]$$

dokonalé F_σ-množiny, pak f je funkce první třídy.

Důkazy vět **9.5.19**, **9.5.20**. I. Předpoklady v **9.5.19** jsou podle **9.5.11** ekvivalentní s předpoklady v **9.5.20**, takže máme pouze ukázat, že f je funkce první třídy, jsou-li splněny předpoklady obou vět.

II. Nejprve předpokládejme

$$x \in P \Rightarrow |f(x)| < 1 .$$

Budiž $n \in \mathbf{N}$. Pro $-n \leqq i \leqq n$, i celé, budiž

$$A_i = \mathscr{E}_x \left[f(x) \leqq \frac{i}{n} \right], \quad B_i = \mathscr{E}_x \left[f(x) < \frac{i+1}{n} \right].$$

Pak jsou A_i dokonalé G_δ-množiny, B_i jsou dokonalé F_σ-množiny a jest $A_i \subset B_i$. Tudíž podle **9.5.16** existují takové množiny C_i $(-n \leqq i \leqq n)$, že $A_i \subset C_i \subset B_i$ a že každá C_i je dokonalá G_δ-množina a současně též dokonalá F_σ-množina. Zřejmě je $\bigcup_{i=-n}^{n} A_i = P$, a tedy také $\bigcup_{i=-n}^{n} C_i = P$.

Budiž

$$D_{-n} = C_{-n}\,, \quad -n+1 \leqq i \leqq n \Rightarrow D_i = C_i - \bigcup_{j=-n}^{i-1} C_j\,.$$

Pak množiny D_i $(-n \leqq i \leqq n)$ jsou disjunktní a jest $\bigcup_{i=-n}^{n} D_i = P$. Z **9.5.14** a **9.5.15** plyne snadno, že každá D_i je dokonalá G_δ-množina a současně též dokonalá F_σ-množina. Podle **9.5.18** je tedy φ_i funkce první třídy, jestliže

$$x \in D_i \Rightarrow \varphi_i(x) = 1\,, \quad x \in P - D_i \Rightarrow \varphi_i(x) = 0\,.$$

Budiž

$$x \in P \Rightarrow f_n(x) = \sum_{i=-n}^{n} \frac{i}{n}\,.\,\varphi_i(x)\,.$$

Z **9.5.3** plyne, že f_n je funkce první třídy v oboru P. Je-li $x \in P$, budiž λ nejmenší hodnota indexu i $(-n \leqq i \leqq n)$, pro kterou $x \in A_i$. Pak jest (užíváme předpokladu, že $|f(x)| < 1$)

$$\frac{\lambda - 1}{n} < f(x) \leqq \frac{\lambda}{n}\,.$$

Protože $A_\lambda \subset C_\lambda$, jest $x \in C_\lambda$; je-li $-n \leqq i \leqq \lambda - 2$, jest $x \in P - B_i$, a tudíž $x \in P - C_i$, neboť $C_i \subset B_i$. Z toho plyne snadno, že je buďto $x \in D_\lambda$ nebo $x \in D_{\lambda-1}$, takže je buďto $f(x) = \dfrac{\lambda}{n}$ nebo $f_n(x) = \dfrac{\lambda-1}{n}$.

Tím je dokázáno, že

$$x \in P \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqq \frac{1}{n}\,.$$

Tudíž f je stejnoměrná limita posloupnosti $\{f_n\}$ a podle **9.5.6** je f funkce první třídy.

III. Je-li f libovolná funkce splňující předpoklady vět **9.5.19** a **9.5.20**, budiž

$$x \in P \Rightarrow g(x) = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|}\,.$$

Snadno se zjistí, že g splňuje tytéž předpoklady jako f. Avšak

$$x \in P \Rightarrow |g(x)| < 1 ,$$

takže g je funkce první třídy podle II. Podle **9.5.5** je také f funkce první třídy, neboť

$$x \in P \Rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{1 - |g(x)|} .$$

9.5.21. Budiž P metrisovatelný prostor. Každá uzavřená množina je dokonale uzavřená, každá otevřená množina je dokonale otevřená, každá F_σ-množina je dokonalá F_σ-množina, každá G_δ-množina je dokonalá G_δ-množina. První tvrzení plyne ze **7.3.14**, **9.1.8**, **9.1.9**; ostatní tvrzení se snadno odvodí z prvního.

9.5.22. Budiž $T \neq \emptyset$ dobře uspořádaná množina; budiž ε kladné číslo; budiž P metrický prostor s metrikou ϱ. Pro každé $t \in T$ budiž $G(t)$ otevřená a $F(t)$ uzavřená množina prostoru P. Budiž

(1) $$t \in T , \quad x \in F(t) , \quad y \in P , \quad \varrho(x, y) < \varepsilon \Rightarrow y \in G(t) ,$$

(2) $$t \in T , \quad \tau \in T , \quad \tau \text{ před } t \Rightarrow F(t) \cap G(\tau) = \emptyset .$$

Budiž $M = \bigcup F(t)$ $(t \in T)$. Pak je M uzavřená množina prostoru P. Pro $x \in P$, $\alpha > 0$ budiž $S(x, \alpha)$ (ϱ, α)-okolí bodu x. Jestliže M není uzavřená, pak existuje bod $y \in \overline{M} - M$. Podle **4.2.9** je $M \cap S(y, \varepsilon) \neq \emptyset$. Protože T je dobře uspořádaná, plyne z definice množiny M, že existuje takové $t_0 \in T$, že $F(t_0) \cap S(y, \varepsilon) \neq \emptyset$, avšak

$$t \in T , \quad t \text{ před } t_0 \Rightarrow F(t) \cap S(y, \varepsilon) = \emptyset .$$

Budiž $x_0 \in F(t_0) \cap S(y, \varepsilon)$; je tedy $x_0 \in F(t_0)$, $\varrho(x_0, y) < \varepsilon$, takže $y \in G(t_0)$ podle (1). Podle **4.4.13** je $G(t_0)$ okolí bodu y, takže existuje takové $\alpha > 0$, že $S(y, \alpha) \subset G(t_0)$. Jestliže $t \in T$ leží před t_0, jest $F(t) \cap S(y, \varepsilon) = \emptyset$. Jestliže $t \in T$ leží za t_0, jest $F(t) \cap G(t_0) = \emptyset$ podle (2), a tedy $F(t) \cap S(y, \alpha) = \emptyset$. Protože $F(t_0) \subset M$, $y \in \overline{M} - M$, jest $y \in P - F(t_0)$. Podle **4.4.13** je $P - F(t_0)$ okolí bodu y, takže existuje takové $\beta > 0$, že $F(t_0) \cap S(y, \beta) = \emptyset$. Existuje takové $\gamma > 0$, že $\gamma < \varepsilon$, $\gamma < \alpha$, $\gamma < \beta$. Pro každé $t \in T$ je $F(t) \cap S(y, \gamma) = \emptyset$; tudíž $M \cap S(y, \gamma) = \emptyset$. To je však podle **4.2.9** nemožné, neboť $y \in \overline{M}$.

9.5.23. Budiž $T \neq \emptyset$ dobře uspořádaná množina; budiž P metrisovatelný prostor. Pro každé $t \in T$ budiž $G(t)$ otevřená množina a $A(t)$ F_σ-množina prostoru P; budiž $A(t) \subset G(t)$ pro každé $t \in T$. Budiž

(3) $$t \in T\,, \quad \tau \in T\,, \quad \tau \text{ před } t \Rightarrow A(t) \cap G(\tau) = \emptyset\,.$$

Budiž $M = \bigcup A(t)$ $(t \in T)$. Pak je M F_σ-množina prostoru P.

Budiž ϱ metrika v P. Pro každé $t \in T$ existuje taková posloupnost $\{B_n(t)\}_1^\infty$ uzavřených množin, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(t) = A(t)$. Je-li $G(t) = P$, položme $F_{ni}(t) = B_n(t)$ pro $n, i = 1, 2, 3, \ldots$ Je-li $G(t) \neq P$, budiž (viz definici **9.1.8**)

(4) $$F_{ni}(t) = B_n(t) \cap \mathscr{E}_x\ [d(x, P - G(t)) \geqq i^{-1}]\,.$$

Množiny $F_{ni}(t)$ jsou uzavřené podle **4.4.5**, **7.1.18** a **9.1.7**. Protože $B_n(t) \subset A(t) \subset G(t)$ a protože množina $P - G(t)$ je uzavřená, jest

$$x \in B_n(t) \Rightarrow d[x, P - G(t)] > 0$$

podle **9.1.7**, takže $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_{ni}(t) = B_n(t)$. Protože $F_{ni}(t) \subset A(t)$, je podle (3):

$$t \in T\,, \quad \tau \in T\,, \quad \tau \text{ před } t \Rightarrow F_{ni}(t) \cap G(\tau) = \emptyset\,.$$

Mimo to jest:

$$t \in T\,, \quad x \in F_{ni}(t)\,, \quad y \in P\,, \quad \varrho(x, y) < i^{-1} \Rightarrow y \in G(t)\,,$$

neboť to je zřejmé pro $G(t) = P$ a v opačném případě to plyne ze (4). Nyní plyne z **9.5.22**, že každá množina $H_{ni} = \bigcup F_{ni}(t)$ $(t \in T)$ je uzavřená, takže

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} H_{ni}$$

je F_σ-množina.

9.5.24. Budiž P metrisovatelný prostor; budiž f funkce v oboru P. Nechť pro každou uzavřenou množinu $F \neq \emptyset$ zúžení $f \mid F$ má aspoň jeden bod spojitosti. Pak f je funkce první třídy.

Důkaz. I. Stačí dokázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje taková funkce k v oboru P, že k je první třídy a že

$$x \in P \Rightarrow |f(x) - k(x)| < \varepsilon\,.$$

Neboť potom existuje taková posloupnost $\{f_n\}_1^\infty$ funkcí první třídy v oboru P, že $x \in P \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < n^{-1}$, takže f je funkce první třídy podle **9.5.6.**

II. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle **3.6.1** a **3.7.4** existuje taková dobře uspořádaná množina W, že moh $W >$ moh P. Budiž $\mathfrak{G}$ soustava všech otevřených množin prostoru P; budiž ω symbol různý od všech prvků soustavy $\mathfrak{G}$. Pro $\xi \in W$ budiž $\mathbf{A}(\xi)$ úsek množiny W určený jejím prvkem ξ. Je-li φ zobrazení úseku $\mathbf{A}(\xi)$ do $\mathfrak{G} \cup (\omega)$, položme $g(\varphi) = \omega$, jestliže $\omega \in \varphi^1[\mathbf{A}(\xi)]$; jestliže však $\varphi^1[\mathbf{A}(\xi)] \subset \mathfrak{G}$, pak budiž $H = \bigcup \varphi(\eta)$ $[\eta \in \mathbf{A}(\xi)]$, není-li ξ první ve W, $H = \emptyset$, je-li ξ první ve W; podle **4.4.10** je H otevřená množina prostoru P; jestliže $H = P$, budiž opět $g(\varphi) = \omega$; jestliže $H \neq P$, pak podle předpokladu můžeme zvolit bod $a \in P - H$, který je bodem spojitosti zúžení $f \mid P - H$; podle **4.5.6**, **7.1.3** a **9.1.5** existuje takové otevřené okolí U bodu a, že $x \in U - H \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$; podle **4.2.3** je $a \in U$, tedy $U - H \neq \emptyset$; budiž $g(\varphi) = U$. Ze **3.5.2** nyní plyne, že existuje takové zobrazení ψ množiny W do $\mathfrak{G} \cup (\omega)$, že $\psi(\xi) = g(\varphi)$ pro každé $\xi \in W$, kde $\varphi = \psi \mid \mathbf{A}(\xi)$. Z předpokladu moh $W >$ moh P odvodíme snadno, že musí existovat takové $\xi \in W$, že $\psi(\xi) = \omega$. Budiž ξ_0 první takové ξ a položme $T = \mathbf{A}(\xi_0)$. Vyloučíme-li triviální případ $P = \emptyset$, bude $T \neq \emptyset$. Množina T je dobře uspořádaná. Pro každé $t \in T$ jest $\psi(t) \subset P$ otevřená množina. Je-li t první v T, budiž $K(t) = \psi(t)$; jestliže t není první v T, budiž

$$K(t) = \psi(t) - \bigcup \psi(\tau) \quad [\tau \in \mathbf{A}(t)] .$$

Pro každé $t \in T$ můžeme zvolit takový bod $\alpha(t) \in K(t)$, že

$$x \in K(t) \Rightarrow |f(x) - f[\alpha(t)]| < \varepsilon .$$

Jest $P = \bigcup K(t)$ $(t \in T)$ a soustava množin $K(t)$ $(t \in T)$ je disjunktní. Existuje tudíž taková funkce k v oboru P, že

$$x \in K(t) \Rightarrow k(x) = f[\alpha(t)] .$$

Zřejmě

$$x \in P \Rightarrow |f(x) - k(x)| < \varepsilon ;$$

jde tedy pouze o důkaz, že k je funkce první třídy. Budiž $Z \subset \mathbf{E}_1$, $M = \mathscr{E}_x[k(x) \in Z]$; podle **9.5.20** a **9.5.21** stačí ukázat, že M je F_σ-množina. Pro $t \in T$ budiž $A(t) = M \cap K(t)$; zřejmě je buďto $A(t) = K(t)$ nebo

$A(t) = \emptyset$. Ze **4.4.16**, **4.4.18** a **9.1.9** plyne, že každá $A(t)$ je F_σ-množina. Jest $A(t) \subset \psi(t)$ pro každé $t \in T$ a množiny $\psi(t) \subset P$ jsou otevřené. Dále jest $M = \bigcup A(t)$ $(t \in T)$ a

$$t \in T\,, \quad \tau \in T\,, \quad \tau \text{ před } t \Rightarrow A(t) \cap \psi(\tau) = \emptyset\,.$$

Tudíž M je F_σ-množina podle **9.5.23.**

9.5.25. Budiž P F-prostor. Budiž f funkce první třídy v oboru P. Budiž Q množina bodů spojitosti funkce f. Pak $P - Q$ je množina první kategorie. Existuje taková posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí v oboru P, že $\lim f_n(x) = f(x)$ pro každý $x \in P$. Je-li $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbf{N}$, budiž

(1) $$A_{m,\varepsilon} = \mathscr{E}_x \;\; [\mu > m,\, \nu > m \Rightarrow |f_\mu(x) - f_\nu(x)| \leqq \varepsilon]\,.$$

Podle **7.1.18** a **7.1.32** jsou $A_{m,\varepsilon}$ uzavřené množiny. Z věty **9.4.2** (užité na prostor $\mathbf{E}_1$) plyne

(2) $$P = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m,\varepsilon}$$

pro každé $\varepsilon > 0$. Budiž

(3) $$B_{m,\varepsilon} = \operatorname{Fr} A_{m,\varepsilon}\,.$$

Množiny $B_{m,\varepsilon}$ jsou řídké podle **4.10.14**, takže podle **4.11.1** stačí dokázat, že

$$P - Q \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{m,\frac{1}{n}}\,.$$

Budiž

(4) $$a \in P - \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{m,\frac{1}{n}}\,.$$

Máme dokázat, že a je bod spojitosti funkce f. Budiž $\varepsilon > 0$. Zvolme index k tak, že $k^{-1} < \varepsilon$. Podle (2) a (4) jest

$$a \in \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m,\frac{1}{k}} - \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{m,\frac{1}{k}}\,;$$

existuje tedy takový index m, že $a \in A_{m,\frac{1}{k}} - B_{m,\frac{1}{k}}$. Podle (3) a protože

$A_{m,\frac{1}{k}}$ je uzavřená množina, jest $a \in P - \overline{P - A_{m,\frac{1}{k}}}$, tj. $A_{m,\frac{1}{k}}$ je okolí bodu a. Z (1) plyne

$$x \in A_{m,\frac{1}{k}}, \quad \mu > m\,, \quad \nu > m \Rightarrow |f_\mu(x) - f_\nu(x)| \leqq \frac{1}{k}\,,$$

a tedy, protože $\lim\limits_{\mu \to \infty} f_\mu(x) = f(x)$,

$$x \in A_{m,\frac{1}{k}}\,, \quad \nu > m \Rightarrow |f_\nu(x) - f(x)| \leqq \frac{1}{k} < \varepsilon\,,$$

takže a je bod spojitosti funkce f podle **7.1.33.**

9.5.26. Budiž P metricky úplný prostor. Budiž f funkce v oboru P. Pro $A \subset P$ budiž $s(A)$ množina bodů spojitosti zúžení $f \mid A$, $r(A) = A - s(A)$. Aby f byla funkce první třídy, k tomu je nutná a stačí kterákoli z následujících podmínek:

[1] Pro každou uzavřenou množinu $A \neq \emptyset$ jest $s(A) \neq \emptyset$.
[2] Pro každou uzavřenou množinu $A \neq \emptyset$ množina $s(A)$ je hustá v A.
[3] Pro každou uzavřenou množinu $A \neq \emptyset$ je $r(A)$ první kategorie v A.
[4] Pro každou $A \subset P$, $A \neq \emptyset$ je $r(A)$ první kategorie v A.

Důkaz. I. Je-li f funkce první třídy v oboru P, plyne ze **7.1.8**, že pro každou $A \subset P$ je $f \mid A$ funkce první třídy v oboru A.

II. Je-li f funkce první třídy, pak podle I a **9.5.25** platí [4].

III. Zřejmě [4] $\Rightarrow$ [3].

IV. [3] $\Rightarrow$ [2] podle **9.4.19** a **9.4.20.**

V. Zřejmě [2] $\Rightarrow$ [1].

VI. Platí-li [1], je f funkce první třídy podle **9.5.24.**

9.6. Cvičení k § **9.**

9.6.1. Budiž ϱ funkce v oboru $P \times P$. Pro $x \in P$, $y \in P$, $z \in P$ budiž:

[1] $x = y \Leftrightarrow \varrho(x, y) = 0$;
[2] $\varrho(x, y) + \varrho(z, y) \geqq \varrho(x, z)$.

Pak ϱ je metrika v P. Jestliže ve [2] místo $\varrho(z, y)$ dáme $\varrho(y, z)$, stane se tvrzení nesprávným.

9.6.2. Budiž P množina všech posloupností, jejichž členy jsou reálná čísla. Pro $\xi = \{x_n\} \in P$, $\eta = \{y_n\} \in P$ budiž

$$\varrho_1(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

$$\varrho_2(\xi, \eta) = \text{infimum množiny čísel } [\frac{1}{n} + \max_{1 \leqq i \leqq n} |x_i - y_i] (n \in \acute{N}) .$$

Pak jsou ϱ_1, ϱ_2 dvě navzájem ekvivalentní metriky v množině P. V prostoru jimi vytvořeném je právě tehdy $\lim \xi_n = \xi$, kde $\xi_n = \{x_{ni}\}_{i=1}^{\infty}$, jestliže pro každé $i \in \acute{N}$ jest $\lim_{n \to \infty} x_{ni} = x_i$.

Definice **9.6.1.** Budiž f zobrazení metrického prostoru P do metrického prostoru P_1. Pravíme, že f je *stejnoměrně spojité*, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že:

$$x \in P\,, \quad y \in P\,, \quad \varrho(x, y) < \delta \Rightarrow \varrho[f(x), f(y)] < \varepsilon\,.$$

9.6.3. Stejnoměrně spojité zobrazení je spojité.

9.6.4. Budiž f zobrazení metrického prostoru P do metrického prostoru P_1. Aby f bylo stejnoměrně spojité, k tomu je nutné a stačí:

$$x_n \in P\,, \quad y_n \in P\,, \quad \lim \varrho(x_n, y_n) = 0 \Rightarrow \lim \varrho[f(x_n), f(y_n)] = 0\,.$$

9.6.5. Budiž P metrický prostor; budiž $\emptyset \neq M \subset P$. Pro $x \in P$ budiž $f(x) = d(x, M)$ (viz definici **9.1.8**). Pak f je stejnoměrně spojitá funkce v oboru P.

9.6.6. Budiž f spojité zobrazení kompaktního metrického prostoru P do metrického prostoru P_1. Pak f je stejnoměrně spojité.

9.6.7. Budiž P metrický prostor s druhým axiomem spočetnosti. Množina všech členů posloupnosti $\{a_n\}$ budiž hustá v prostoru P. Pro $x \in P$, $n \in N$ budiž

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + \varrho(a_n, x)}\,.$$

Funkce f_n jsou spojité a jest:

$$x \in P \Rightarrow 0 < f_n(x) \leqq 1\,,$$
$$x \in P\,, \quad y \in P \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leqq \varrho(x, y)\,.$$

Je-li $\emptyset \neq A \subset P$, budiž $\mu_n(A)$ supremum množiny čísel $|f_n(x) - f_n(y)| (x \in A$, $y \in A)$; dále budiž $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mu_n(A)$. Jestliže množina A je jednobodová, jest $\mu(A) = 0$. Dále platí

$$\emptyset \neq A \subset B \subset P \Rightarrow \mu(A) \leqq \mu(B)\,,$$
$$\emptyset \neq A \subset P \Rightarrow \mu(\bar{A}) = \mu(A)\,.$$

Je-li $\emptyset \neq A \subset P$, $\emptyset \neq B \subset P$, $\varepsilon > 0$ a jestliže ke každému $x \in A$ existuje takový $y \in B$, že $\varrho(x, y) < \varepsilon$, pak $\mu(A) < \mu(B) + 2\varepsilon$. Je-li $\emptyset \neq A \subset B \subset P$, $B - \bar{A} \neq \emptyset$, jest $\mu(A) < \mu(B)$. Je-li $A \subset P$, $B \subset P$, $A \cap B \neq \emptyset$, jest $\mu(A \cup B) \leqq \mu(A) + \mu(B)$.

Definice **9.6.2.** Budiž P metrický prostor. Každé posloupnosti bodových množin $\{A_n\}_1^\infty$ přiřadíme dvě bodové množiny B, C takto:

$$B = \mathscr{E}_x \; [x \in P, \liminf d(x, A_n) = 0] \,,$$
$$C = \mathscr{E}_x \; [x \in P, \lim d(x, A_n) = 0] \,.$$

Při tom $d(x, A_n)$ má pro $A_n \neq \emptyset$ význam vyložený v definici **9.1.8** a položíme třeba $d(x, \emptyset) = 1$. Pišme

$$B = \overline{\mathrm{Lim}}\, A_n \,, \quad C = \underline{\mathrm{Lim}}\, A_n \,.$$

Z věty **9.1.3** plyne snadno, že množiny B, C se nezmění při přechodu od jedné metriky k jiné s ní ekvivalentní; jinak řečeno, tyto množiny závisí jen na topologii prostoru P. Zřejmě

$$\overline{\mathrm{Lim}}\, A_n = \overline{\mathrm{Lim}}\, \bar{A}_n \,, \quad \underline{\mathrm{Lim}}\, A_n = \underline{\mathrm{Lim}}\, \bar{A}_n \,.$$

Zřejmě $\underline{\mathrm{Lim}}\, A_n \subset \overline{\mathrm{Lim}}\, A_n$; jestliže $\underline{\mathrm{Lim}}\, A_n = \overline{\mathrm{Lim}}\, A_n$, píšeme

$$\underline{\mathrm{Lim}}\, A_n = \overline{\mathrm{Lim}}\, A_n = \mathrm{Lim}\, A_n$$

a pravíme, že posloupnost $\{A_n\}$ je *konvergentní.*

9.6.8. Nechť metrický prostor P splňuje druhý axiom spočetnosti. Pak z každé posloupnosti bodových množin $\{A_n\}$ lze vybrat konvergentní posloupnost. Důkaz stručně naznačíme. Nechť členy posloupnosti $\{B_n\}$ tvoří otevřenou basi prostoru P. Budiž $A_{1n} = A_n$. Při daném $i \in \mathbf{N}$ budiž $\{A_{i+1,n}\}_{n=1}^\infty$ taková posloupnost vybraná z posloupnosti $\{A_{in}\}_{n=1}^\infty$, pro kterou platí

$$(*) \qquad B_i \cap \overline{\mathrm{Lim}}\, A_{i+1,n} = \emptyset \,;$$

jestliže žádná posloupnost vybraná z $\{A_{in}\}_{n=1}^\infty$ nemá vlastnost (*), budiž $A_{i+1,n} = A_{in}$. Pak posloupnost $\{A_{nn}\}$ je konvergentní.

Definice **9.6.3.** Budiž P metrický prostor. Budiž P^* soustava všech neprázdných kompaktních prostorů vnořených do P. Pro $A \in P^*$, $B \in P^*$ budiž

$$u(A, B) = \max d(x, B) \quad (x \in A) \,,$$
$$u(B, A) = \max d(y, A) \quad (y \in B) \,;$$

obě maxima existují podle **8.2.15**, **8.3.3** a **9.1.7.** Budiž

$$\varrho^*(A, B) = \max\,[u(A, B), u(B, A)] \,.$$

Snadno se zjistí, že ϱ^* je symetrická odchylka v množině P^*. Dále se snadno zjistí (je-li též $C \in P^*$), že:

$$u(A, C) \leqq u(A, B) + u(B, C),$$
$$u(C, A) \leqq u(B, A) + u(C, B),$$

takže ϱ^* je metrika v P^*. Tudíž P^* je metrický prostor, který nazveme *Hausdorffovým nadprostorem* prostoru P. Ve cvič. **9.6.9** až **9.6.16** znamená P^* Hausdorffův nadprostor metrického prostoru P.

9.6.9. Je-li $A_n \in P^*$ pro $n \in \mathbf{N}$ a $A \in P^*$, pak platí:

$$\lim u(A, A_n) = 0 \Rightarrow A \subset \underline{\mathrm{Lim}}\, A_n .$$

9.6.10. Je-li $A_n \in P^*$ pro $n \in \mathbf{N}$ a $A \in P^*$, pak platí:

$$\lim u(A_n, A) = 0 \Rightarrow A \supset \overline{\mathrm{Lim}}\, A_n .$$

9.6.11. Budiž $A_n \in P^*$ pro $n \in \mathbf{N}$, $A \in P^*$. Je-li P kompaktní, pak $\lim \varrho^*(A_n, A) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Lim}\, A_n = A$. Při libovolném P platí vztah $\lim \varrho^*(A_n, A) = 0$ právě tehdy, jestliže předně $\mathrm{Lim}\, A_n = A$ a za druhé $A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je kompaktní.

9.6.12. Budiž f homeomorfní zobrazení metrického prostoru P na metrický prostor P_1. Budiž P^* (P_1^*) Hausdorffův nadprostor prostoru P (P_1). Pro $X \in P^*$ budiž $\varphi(X) = f^1(X)$. Pak φ je homeomorfní zobrazení P^* na P_1^*.

9.6.13. Je-li P metricky úplný, platí totéž o P^*.

9.6.14. Je-li P totálně omezený, platí totéž o P^*.

9.6.15. Splňuje-li P druhý axiom spočetnosti, platí totéž o P^*.

9.6.16. Je-li P kompaktní, platí totéž o P^*.

9.6.17. Budiž $D \subset \mathbf{E}_1$ množina všech čísel tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} i_n \,.\, 3^{-n}$, kde každé i_n má jednu z hodnot 0, 2. Pak existuje homeomorfní zobrazení množiny D na diskontinuum. Množina D vznikne takto z uzavřeného intervalu $J = \mathscr{E}_t\,[0 \leqq t \leqq 1]$. Nejprve rozdělíme D na tři stejné díly a odstraníme poslední třetinu (bez jejích krajních bodů), takže zůstanou dva uzavřené intervaly. Z každého z obou těchto intervalů opět odstraníme poslední třetinu (zase bez krajních bodů). Stejně naložíme s každým ze zbývajících čtyř intervalů a tak pokračujeme stále dál. D je ta podmnožina intervalu J, která zbude po odstranění spočetně mnoha otevřených intervalů.

Definice **9.6.4.** Množinu $D \subset \mathbf{E}_1$ popsanou v **9.6.17** nazveme *triadické diskontinuum.* Body 0, 1 a všecky krajní body každé odstraňované třetiny nazveme *přístupnými body* množiny D; ostatní její body nazveme *nepřístupnými body* množiny D.

9.6.18. Existuje podobné homeomorfní zobrazení přirozeně uspořádané množiny všech iracionálních čísel na přirozeně uspořádanou množinu všech nepřístupných bodů triadického diskontinua.

9.6.19. Buďtež P_1, P_2 metricky úplné prostory. Budiž f homeomorfní zobrazení množiny $Q_1 \subset P_1$ na množinu $Q_2 \subset P_2$. Existuje taková G_δ-množina R_1 prostoru P_1 a taková G_δ-množina R_2 prostoru P_2, že $Q_1 \subset R_1$, $Q_2 \subset R_2$ a že existuje homeomorfní zobrazení φ množiny R_1 na množinu R_2, jehož zúžením je f. Důkaz stručně naznačíme. Pro $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$ budiž A_{mn} množina těch $x \in P_1$, pro něž platí:

$$a \in Q_1\,,\quad b \in Q_1\,,\quad \varrho(a, x) < n^{-1}\,,\quad \varrho(b, x) < n^{-1} \Rightarrow \varrho[f(a), f(b)] \leqq m^{-1}\,;$$

budiž $H_1 = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{mn}$. Podobně budiž B_{mn} množina těch $y \in P_2$, pro něž platí:

$$a \in Q_2\,,\quad b \in Q_2\,,\quad \varrho(a, y) < n^{-1}\,,\quad \varrho(b, y) < n^{-1} \Rightarrow \varrho[f_{-1}(a), f_{-1}(b)] \leqq m^{-1}\,;$$

budiž $H_2 = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{mn}$. Jest $Q_1 \subset H_1$, $Q_2 \subset H_2$. Existuje takové spojité zobrazení g_1 množiny H_1 do P_2, že $f = g_1 \mid Q_1$; existuje takové spojité zobrazení g_2 množiny H_2 do P_1, že $f_{-1} = g_2 \mid Q_2$. Budiž

$$R_1 = \mathscr{E}_x\ [x \in H_1,\ g_1(x) \in H_2]\,,\quad R_2 = \mathscr{E}_y\ [y \in H_2,\ g_2(y) \in H_1]\,.$$

Dále budiž $\varphi = g_1 \mid R_1$, $\psi = g_2 \mid R_2$. Dá se ukázat, že R_1 (R_2) je G_δ-množina prostoru P_1 (P_2) a že zobrazení φ, ψ jsou navzájem inversní; zřejmě $Q_1 \subset R_1$, $Q_2 \subset R_2$, $f = \varphi \mid Q_1$.

9.6.20. Budiž P normálně uspořádaná množina mohutnosti $\aleph_1$. V příkladě **8.3.2** byl definován druh prvku $a \in P$, který označíme $f(a)$; f je tedy funkce v oboru P. Pokládejme P za uspořádaný prostor ve smyslu definice **6.1.2.** Pak je P dědičně normální prostor s prvním axiomem spočetnosti. V každé bodové množině $F \neq \emptyset$ existuje bod spojitosti funkce $f \mid F$. Přes to f není funkce první třídy, jak snadno zjistíme na základě **8.5.12.** Z toho plyne, že v **9.5.24** nelze předpoklad metrisovatelnosti prostoru P nahradit předpokladem, že P je dědičně normální prostor s prvním axiomem spočetnosti. Nevím, je-li možné předpoklad metrisovatelnosti nahradit předpokladem, že P je dokonale normální prostor.