DODATEK II

Plně normální prostory

MIROSLAV KATĚTOV

V tomto dodatku pojednáváme o základních vlastnostech plně normálních*) prostorů (t. j. prostorů, které mají, zhruba řečeno, libovolně jemná lokálně konečná otevřená pokrytí) a o některých pojmech, které s nimi úzce souvisí (hvězdovitá zjemnění, pseudometriky, normální pokrytí; spočetně plně normální prostory, lokalisace vlastností aj.). Tyto pojmy nabyly v poměrně nedávné době**) značného významu v obecné topologii a mimo jiné umožnily rozšíření četných vět, které byly dříve známy pro separabilní, popř. pro kompaktní prostory, na prostory podstatně obecnější. Většina zmíněných pojmů má též značný význam pro teorii uniformních prostorů (o této teorii se zde ovšem zmiňujeme jen ve cvičeních). Aplikace teorie plně normálních prostorů a zmíněných příbuzných pojmů nejsou v tomto dodatku v podstatě uvedeny (až na otázky tzv. lokalisace vlastností), neboť jinak by jeho rozsah neúměrně vzrostl. Pro čtenáře, který se obdobnými pojmy již poněkud zabýval, poznamenáváme, že byly vynechány též pojmy „systémově normálního" a „silně parakompaktního" („hypokompaktního") prostoru.

Dodatek má dvě části, které se svým charakterem dosti liší. První, tj. §§ 1—4, má přípravný význam a zároveň je úvodem do teorie uniformních prostorů; druhá, tj. §§ 5—10, obsahuje vlastní teorii plně nor-

*) Tento název (sr. anglické „fully normal") je asi výstižnější než běžný termín „parakompaktní".

**) Pojem plně normálního prostoru se objevuje patrně poprvé v práci J. TUKEYHO, Convergence and uniformity in topology, Ann. of Math. Studies *2*, 1940.

málních prostorů (a některých jiných typů topologických prostorů), některé aplikace a v § 10 příklady. Na konci každého paragrafu jsou cvičení, jejichž předmětem je vždy (až na cvičení k § 10) důkaz určitého tvrzení. Některá cvičení jsou velmi lehká a k jejich řešení stačí uvědomit si význam pojmů a bezprostředně aplikovat některé věty. Většina cvičení není však zvlášť snadná; k některým z nich je proto (v hranatých závorkách) přidán stručný návod. V některých cvičeních jsou zavedeny nové pojmy; dosti často je pro řešení cvičení potřebná znalost způsobu řešení některých cvičení předcházejících. Bude proto zpravidla účelné řešit cvičení postupně od § 1. Ve vlastním textu se ovšem výsledků cvičení nikde nepoužívá.

Zvláštní charakter mají cvičení o uniformních prostorech, popř. δ-prostorech (jsou to všechna cvičení k § 3, většina cvičení k § 4 a cvičení **5.16**), neboť je v nich vlastně podán více méně soustavný výklad jistého úseku ze základů teorie uniformních prostorů. S ostatním obsahem knihy souvisí tato cvičení poměrně málo; lze je vynechat (zejména při prvním čtení) bez újmy pro porozumění ostatnímu textu.

Popíšeme nyní poněkud podrobněji obsah některých paragrafů.

Po přípravném § 1, obsahujícím pomocné věty potřebné většinou pro celý další výklad, se v §§ 2, 3, 4 probírají pojmy lokálně konečného otevřeného pokrytí, hvězdovitého zjemnění, pseudometriky a normálního otevřeného pokrytí, které navzájem úzce souvisí. V § 2 mají základní význam zejména pomocná věta **2.1** (věta o zúžení otevřeného pokrytí na pokrytí uzavřené), věty **2.6**, **2.7** a **2.9**. Věty **2.6** a **2.7** osvětlují strukturu lokálně konečných otevřených pokrytí normálních prostorů v tomto smyslu: každé takové pokrytí (a) má (lokálně konečné) zjemnění, které je sjednocením spočetného počtu diskrétních souborů, (b) má zúžení, které je „stejnoměrně lokálně konečné",*) (c) má hvězdovité zjemnění, které je rovněž lokálně konečným pokrytím. Věta **2.9** v podstatě udává „konstrukci" lokálně konečného otevřeného pokrytí na základě dané posloupnosti otevřených pokrytí, jejíž každý člen (ovšem kromě prvního) je hvězdovitým zjemněním předcházejícího (taková posloupnost se někdy nazývá „normální"). Důkazy některých

*) Soubor $\{X_\alpha\}$ částí prostoru P lze nazvat stejnoměrně lokálně konečným — tohoto termínu však nebudeme používat — jestliže nejen každý bod $x \in P$ má okolí, které protíná pouze konečně mnoho X_α, nýbrž dokonce existuje lokálně konečné otevřené pokrytí $\{V_\beta\}$ takové, že každé V_β protíná konečně mnoho X_α.

vět z § 2 (**2.6** a zejména **2.9**) jsou možná nejobtížnější z celého dodatku; čtenář může vynechat tyto důkazy při prvním čtení a vrátit se k nim až později.

V § 3 je kromě věty **3.7**, která má podstatný význam pro teorii uniformních prostorů, důležitá zejména věta **3.8** o vztahu mezi pseudometrikou a „normální posloupností" zakrytí prostoru a věta **3.10** o charakterisaci normální oddělenosti množin. V § 4 jsou podstatné především věty **4.1** a **4.3**, v nichž jsou z různých hledisek (např. pomocí pojmu hvězdovitého zjemnění, pomocí pojmu normální oddělenosti, pomocí pseudometrik atd.) charakterisována normální otevřená pokrytí. Tato pokrytí se pro normální prostory v podstatě neliší od lokálně konečných otevřených pokrytí, mají však velký význam pro studium úplně regulárních prostorů (jež, jak známo, obecně nejsou normální).

V § 5 pojednáváme již přímo o plně normálních prostorech. Jsou v něm uvedeny zejména různé nutné a postačující podmínky plné normality (**5.4** až **5.6**), některé vlastnosti, které stačí, aby podprostor plně normálního prostoru byl rovněž plně normální (**5.7** až **5.10**), jakož i některé vlastnosti prostoru, které zaručují jeho plnou normalitu (**5.3**, **5.11**, **5.12**, **5.15**). Dále obsahuje § 5 důležitou větu **5.17** o rozšíření lokálně konečného souboru uzavřených množin na lokálně konečný soubor otevřených množin (z této věty mj. vyplývá, že každý plně normální prostor je „systémově normální", tj. k diskrétnímu souboru jeho částí $\{X_\alpha\}$ existuje vždy diskrétní soubor $\{G_\alpha\}$, kde $G_\alpha \supset X_\alpha$ jsou otevřené), zobecněnou větu o metrisaci (**5.20**) a věty o plné normalitě kartézského součinu (**5.22**, **5.23**).

V § 6 probíráme dědičně plně normální prostory; jde v podstatě (až na větu **6.7** o kartézském součinu) o přímou aplikaci výsledků § 5. V § 7 dospíváme po různých přípravných úvahách k větám, v nichž se pro některé třídy množin (např. pro F_σ-množiny, G_δ-množiny) v plně normálním (popř. dědičně plně normálním) prostoru tvrdí, že do takové třídy náleží každá množina, která do ní náleží lokálně. Obdobné věty dostáváme též pro některé vlastnosti prostorů (m-metrisovatelnost, topologická úplnost metrisovatelných prostorů). Spočetně plně normálním prostorům (tj. prostorům, v nichž každé spočetné otevřené pokrytí je normální) je věnován § 8. Obsahuje jednak (**8.2**) řadu nutných a postačujících podmínek spočetně plné normality, jednak některé postačující podmínky. V § 9 probíráme stručně některé otázky tzv. prodlužování pokrytí; omezujeme se při tom na nejvýš spočetná pokrytí. Některé výsledky § 9 patří vlastně do obecné teorie normálních prostorů; u jiných je nezbytný předpoklad spočetně plné normality. Konečně § 10 obsahuje, kromě několika dobře známých příkladů, poněkud složitější příklady **10.4** a **10.5**, jimž předchází v **10.3** několik pomocných vět.

Je třeba poznamenat, že vzhledem k účelu tohoto dodatku nebyla v něm často volena nejkratší cesta k důkazu určitých výsledků (to je zvlášť zřetelné např. na větě **5.21** o metrisaci), nýbrž spíše takový způsob výkladu, při kterém by se některé základní pojmy a věty osvětlily z různých hledisek a v různých souvislostech.

Na věty a definice z dodatku se odkazuje znakem např. **2.1**, **5.21**, na cvičení znakem např. 3.6. Někdy (ne příliš často) se odkazuje na základní text knihy, a to na jednotlivé články znakem např. **T 2.1**, na věty znakem např. **T 9.4.5**, na definice znakem např. **T** def. **6.1.1.**

Terminologie a označení ze základního textu knihy (včetně cvičení) používám ovšem soustavně v celém dodatku bez zvláštního upozornění. Některé doplňky a odchylky jsou vysvětleny na příslušném místě; jen na jeden symbol je třeba upozornit již zde: není-li x prvkem množiny M, píši často $x \text{ non} \in M$.

Literatura (články ve vědeckých časopisech) o plně normálních prostorech a příbuzných otázkách je nyní již velmi rozsáhlá. Od její soustavnější citace jsem upustil a zmiňuji se o ní jen místy v poznámkách pod čárou (uvádím někdy práce, v nichž byl zaveden důležitý pojem nebo vyřešen závažnější problém, někdy poměrně velmi nedávné práce, které obsahují ucelené osvětlení některé dílčí otázky nebo podrobnější odkazy na literaturu apod.). Knižně byly otázky teorie topologických prostorů, které jsou předmětem tohoto dodatku, zpracovány soustavněji dosud, zdá se, jedině v knize J. L. KELLEYHO General Topology, 1955.

Je mou milou povinností poděkovat závěrem dr. V. PTÁKOVI z Matematického ústavu ČSAV za řadu poznámek, které podstatně přispěly k odstranění některých nedostatků původního textu, ZD. FROLÍKOVI z matematicko-fysikální fakulty Karlovy university zejména za připomínky ke cvičením a V. TRNKOVÉ z téže fakulty za upozornění na některé závady v důkazech.