1

UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE JORDAN

Atti della Academia Nazionale dei Lincei.
Rendiconti.
Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali.
Roma (6) *12* (1930), 386–388

Notations. R désigne le plan euclidien contenant tous nos ensembles. $A \cap B$ désigne la partie commune aux ensembles A et B. Un *arc simple* (une *courbe simple*) est l'image biunivoque et bicontinue d'un segment (d'une circonférence). C étant un arc simple, C^* s'en obtient en omettant les deux extrémités. B étant un ensemble ouvert, $F(B)$ en désigne la frontière.

Lemme 1. Soit A un ensemble fermé et borné contenant un segment S. Supposons que l'ensemble $A - S$ soit situé à une distance >0 de chaque point de S^*. Soit V une composante de $R - A$. Alors $S^* \cap F(V) \neq \emptyset$ entraîne que S est contenu dans $F(V)$. Le nombre de telles composantes V est égal à *un* ou à *deux*. Le second cas a lieu si, et seulement si, les deux extrémités de S appartiennent à la même composante de $A - S^*$. Dans le second cas, en désignant par V_1, V_2 les deux composantes V, tous les points de $R - S$ suffisamment voisins à S^* appartiennent à $V_1 \cup V_2$ et chacun des deux ensembles V_1, V_2 est situé (au voisinage de S^*) entièrement d'un coté de S^*.[1]

Lemme 2. Soit Γ une courbe simple contenant un segment S. Il y a précisément deux composantes de $R - \Gamma$ telles que leur frontière coïncide avec Γ.

Démonstration. L'ensemble $\Gamma - S^*$ étant connexe et à une distance >0 de chaque point de S^*, d'après le lemme 1 il existe précisément deux composantes V de $R - \Gamma$ dont la frontière *contient* S; en outre, d'après le même lemme, les deux extrémités de S appartiennent à la même composante de $F(V) - S^*$ [2] (contenu dans $\Gamma - S^*$), d'où il résulte que $F(V) = \Gamma$.

[1] La démonstration se trouve essentiellement dans le § 2 de la Note de M. Brouwer, Beweis des Jordanschen Kurvensatzes (Math. Ann. *69* (1910), 171).

[2] En effet, soient V, W les composantes de $R - \Gamma$ dont les frontières contiennent S. Dans le lemme 1, posons $A = F(V)$. Alors V est aussi une composante de $R - F(V)$. En désignant par W_1 la composante de $R - F(V)$ qui contient W, on obtient l'autre composante dont la frontière contient S. (Réd.)

Théorème 1. — Soit Γ une courbe simple; soit V une composante de $R - \Gamma$. Alors $F(V) = \Gamma$.

Démonstration. Evidemment il existe une ligne brisée S sans point multiple dont les extrémités a, b appartiennent à Γ, S^* étant contenu dans V. Les points a, b divisent Γ en deux arcs simples C_1, C_2. Posons $\Gamma_i = S \cup C_i$ $(i = 1, 2)$. D'après le lemme 2, il y a deux composantes de $R - \Gamma_i$ dont la frontière coïncide avec Γ_i; désignons les par V_i, W_i. La partie connexe C_2^* de $R - \Gamma_1$ appartenant entièrement à *une* composante de $R - \Gamma_1$, on peut supposer que $V_1 \cap C_2^* = \emptyset$ et pareillement $V_2 \cap C_1^* = \emptyset$. Si l'on avait $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, on arriverait à la contradiction $V_1 = V_2$, car chacun des deux domaines connexes V_1, V_2 est disjoint à la frontière de l'autre. Donc $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. D'après le lemme 1, on en déduit sans peine que l'ensemble $K = V_1 \cup V_2 \cup S^*$ est connexe et ouvert; donc K fait partie de V. Evidemment $F(K)$ fait partie de Γ. Or on a précisément $F(K) = \Gamma$. En effet, prouvons p. ex. qu'un point α appartenant à C_1^* est agrégé à $F(K)$. Evidemment, il existe un entourage O de α disjoint à $V_2 \cup S^*$; donc $O \cap K = O \cap V_1$. Or α appartient à $F(V_1)$; donc $O \cap V_1 = O \cap K$ rencontre V_1 et par suite K. L'entourage O pouvant être supposé arbitrairement petit, il en résulte bien que le point α appartient à $F(K)$. Il reste à prouver que $V = K$ (car $F(K) = \Gamma$). Dans le cas contraire, il existerait *dans* V une ligne brisée L joignant un point de K à un point de $V - K$; la ligne L rencontrerait $F(K) = \Gamma$, ce qui est absurde, car $V \cap \Gamma = \emptyset$.

Théorème 2. — Soit Γ une courbe simple. Alors $R - \Gamma$ a *au moins* deux composantes.

Démonstration. Dans le cas contraire on aurait, en gardant les notations précédentes, $V = K = R - \Gamma$, d'où $O \cap V_1 = O \cap K = O \cap (R - \Gamma)$ et par suite $O \cap W_1 = \emptyset$. Or cela est absurde, car le point α appartient à $\Gamma_1 = F(W_1)$.

Théorème 3. — Soit Γ une courbe simple. Alors $R - \Gamma$ a *au plus* deux composantes.

Démonstration. Soient V, V', V'' trois composantes différentes de $R - \Gamma$. Par rapport à V, gardons les notations de la démonstration du théorème 1. Donnons aux symboles S', a', b', C_1', C_2', Γ_1', V_1' par rapport à V' la même signification que S, a, b, C_1, C_2, Γ_1, V_1 ont par rapport à V. De la relation $F(V) = \Gamma$ il résulte sans peine[3] que l'on peut s'arranger de manière que C_1' fasse partie de C_1^*. Soit O un entourage suffisamment petit d'un point α choisi sur $C_1'^*$ (donc sur C_1^*). D'après la démonstration du théorème 1, on a $O \cap V = O \cap V_1$, $O \cap V' = O \cap V_1'$. Or si l'on répète le démonstration de la relation $O \cap V = O \cap V_1$ en y remplaçant Γ, V, S respectivement par Γ_1, W_1, S', on obtient la relation $O \cap W_1 = O \cap V_1'$. La courbe Γ_1 contenant un segment, d'après le lemme 2 et le théorème 1 V_1 et W_1 sont les *seules* composantes de $R - \Gamma_1$. Donc $(O \cap V_1) \cup (O \cap W_1) = O \cap (R - \Gamma_1)$, d'où $(O \cap V) \cup (O \cap V') = O \cap (R - \Gamma)$, d'où $O \cap V'' = \emptyset$, ce qui contredit au théorème 1.

[3] V. Brouwer, loc. cit., § 3.

2

TROIS THÉORÈMES SUR L'HOMOLOGIE

Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou
Masarykovy university.
Brno *144* (1931), 21 pp.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_N$ des sousensembles fermés d'un espace topologique R. Soient p, q deux points de R situés en dehors de $\sum_{i=1}^{N} A_i$. Supposons qu'il existe, pour $1 \leqq i \leqq N$, un arc $\widehat{pq}$ dans R qui ne rencontre aucun des $N - 1$ ensembles A_j $(j \neq i)$. Un cas particulier du *théorème* A_n indique des conditions suffisantes pour qu'il existe dans R un arc $\widehat{pq}$ ne rencontrant aucun des N ensembles A_i. Le *théorème* B_n est en quelque sorte inverse au théorème A_n. Le *théorème* C_n résulte d'une synthèse des deux théorèmes A_n et B_n.

Dans le paragraphe 1 je donne un résumé rapide de quelques notions fondamentales de la topologie combinatoire dont je me sers dans ce qui suit. Dans le paragraphe 2 j'introduis certaines notations qui permettent d'énoncer simplement les trois théorèmes. Les paragraphes 3, 4 et 5 donnent respectivement l'énoncé et la démonstration des théorèmes A_n, B_n, C_n. Dans le paragraphe 6 je considère des cas particuliers en me bornant du reste au cas du plan; je retrouve quelques théorèmes connus de Janiszewski et de MM. Straszewicz et Kuratowski et j'y ajoute des théorèmes semblables qui semblent être nouveaux.

Je ne considère dans ce Mémoire que les homologies modulo 2 ce qui abrège un peu certaines considérations; mais tous les théorèmes se transportent aisément au cas où on tient compte aussi de l'orientation.

§ 1. Quelques notions de la topologie combinatoire

1. Un *n-simplex* $(n > 0)$ est un ensemble constitué par tous les points

$$A = \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n$$

où

(1) $$A_0, A_1, \ldots, A_n$$

sont des points donnés linéairement indépendants d'un espace euclidien et les λ parcourent toutes les valeurs réelles telles que

$$\lambda_0 \geqq 0, \lambda_1 \geqq 0, \ldots, \lambda_n \geqq 0\,, \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$$

Les points (1) sont les *sommets* du n-simplex. Chaque i-simplex $(0 \leqq i \leqq n)$ dont tous les sommets sont contenus dans la suite (1) est une *i-face* du n-simplex.

2. Un *n-complexe* $(n \geqq 0)$ K_n est un ensemble constitué par un nombre fini de n-simplices d'un espace euclidien, l'ensemble

(2) $$A_1, A_2, \ldots, A_N$$

de tous les sommets de ces n-simplices étant linéairement indépendant. Ces n-simplices sont les *n-faces* du n-complexe K_n, leurs i-faces $(0 \leqq i \leqq n)$ sont les i-faces de K_n. Un i-complexe $L_i\,(0 \leqq i \leqq n)$ est *contenu* dans K_n si chaque i-face de L_i est une i-face de K_n. L_i et M_i étant deux i-complexes $(0 \leqq i \leqq n)$, leur *somme* $L_i + M_i$ est l'ensemble de toutes les i-faces de K_n qui appartiennent à L_i ou à M_i, mais non à L_i et à M_i simultanément. Cette addition est commutative et associative.

3. La *frontière* d'un 0-complexe K_0 est le nombre 0 si le nombre des 0-faces de K_0 est pair et le nombre 1 dans le cas contraire. La *frontière* d'un n-simplex $(n \geqq 1)$ S_n est le $(n-1)$-complexe constitué par les $(n-1)$-faces de S_n. La *frontière* d'un n-complexe $(n \geqq 1)\,K_n$ est la somme des frontières de toutes les n-faces de K_n. Pour indiquer que L_{n-1} est la frontière de K_n, on écrira $L_{n-1} = FK_n$ ou bien $K_n \to L_{n-1}$. La frontière d'une somme est la somme des frontières.

4. Un n-complexe K_n sera appelé un *n-cycle* si sa frontière est vide $(K_n \to 0)$. En particulier un 0-cycle n'est qu'un ensemble constituté par un nombre fini et pair de points (lin. indépendants). La frontière d'un n-complexe $(n \geqq 1)$ est toujours un $(n-1)$-cycle.

5. Un i-cycle C_i contenu dans un n-complexe K_n est dit homologue à zéro dans K_n, ce qui s'écrit $C_i \sim 0$ dans K_n, si K_n contient un $(i+1)$-complexe L_{i+1} tel que $FL_{i+1} = C_i$ (pour $i = n$, si $C_i = 0$). On écrit $C_i \sim D_i$ au lieu de $C_i + D_i \sim 0$.

6. Le nombre maximum P_i de i-cycles $C_i^1, C_i^2, \ldots, C_i^{P_i}$ $(0 \leqq i \leqq n)$ contenus dans un n-complexe donné K_n et tel qu'une somme d'un nombre quelconque de ces i-cycles ne soit jamais homologue à zéro dans K_n s'appellera le $i^{\text{ème}}$ *nombre de Betti* du complexe K_n; on le désignera par $P_i(K_n)$.

7. Soit, pour $i = 0, 1, \ldots, n$,

$$E_i^1, E_i^2, \ldots, E_i^{\alpha_i}$$

l'ensemble de toutes les i-faces d'un n-complexe K_n donné. On a alors, pour $i =$
$= 1, 2, \dots, n$,

$$E_i^r \to \sum_{s=1}^{\alpha_{i-1}} \eta_{rs}^i E_{i-1}^s ,$$

les η ne prenant que les valeurs 0 et 1. Le rang modulo 2 de la matrice (η_{rs}^i) où $i =$
$= 1, 2, \dots, n$ est fixe, soit désigné par ϱ_i. Posons encore $\varrho_0 = 1$, $\varrho_{n+1} = 0$. Alors

$$P_i(K_n) = \alpha_i - \varrho_i - \varrho_{i+1} \quad (0 \leqq i \leqq n) .$$

8. Un n-complexe K_n sera appelé *connexe au sens large* si $P_0(K_n) = 0$. Un n-complexe K_n sera appelé *connexe au sens étroit* si à chaque couple E_n, E'_n de ces n-faces on peut associer une suite finie

$$E_n^0, E_n^1, \dots, E_n^u$$

de n-faces de K_n telle que 1° $E_n = E_n^0$, $E_n^u = E'_n$, 2° E_n^i et E_n^{i-1} aient une $(n - 1)$-face commune pour $1 \leqq i \leqq u$. Un n-complexe connexe au sens étroit est toujours connexe au sens large.

9. Soit E_i $(0 \leqq i \leqq n)$ une i-face donnée d'un n-complexe K_n donné. L'ensemble de toutes les n-faces de K_n dont E_i est une i-face constitue un n-complexe appelé *l'étoile* de E_i dans K_n.

10. Un n-complexe K'_n est une *subdivision* du n-complexe K_n si: 1° chaque n-face de K'_n est contenue entièrement dans une n-face de K_n; 2° chaque n-face de K'_n est la réunion d'un certain nombre de n-faces de K_n. A chaque i-complexe L_i contenu dans K_n correspond alors un i-complexe bien déterminé L'_i contenu dans K'_n qui forme une subdivision de K'_n; L'_i constitue une subdivision de L_i.

11. Un ensemble R d'objets de nature quelconque (appelés *points* de R) sera appelé un *espace* si l'on y a distingué une famille Φ de sousensembles telle que: 1° l'ensemble vide et les ensembles constitués par un seul point appartiennent à Φ; 2° si A et B appartiennent à Φ, leur *réunion* $A + B$ et leur *partie commune* AB y appartiennent aussi. Les ensembles de la famille Φ sont appelés les *sousensembles fermés de* R; leurs complémentaires s'appellent les *sousensembles ouverts de* R. Un exemple important d'espace forment les espaces euclidiens avec la définition habituelle de sousensembles fermés. Si R_1 est un sousensemble quelconque d'un espace R donné, on considère R_1 comme un espace en y définissant les sousensembles fermés comme les intersections de R_1 avec les sousensembles fermés de R. En particulier, chaque partie d'un espace euclidien constitue un espace.

12. Soient R_1 et R_2 deux espaces donnés. A chaque point P_1 de R_1 faisons correspondre un point $P_2 = f(P_1)$ bien déterminé de R_2 (*image* de P_1) de manière que *chaque* point P_2 de R_2 soit image d'un point (au moins) de R_1. On dit alors que R_2 est une *image* de R_1. En particulier, on dit que R_2 est une *image continue* de R_1 si on

a la propriété suivante: A_2 étant un sousensemble ouvert[1] quelconque de R_2, l'ensemble A_1 de tous les points P_1 de R_1 dont l'image $f(P_1)$ appartient à A_2 est un sousensemble ouvert[1] de R_1.

13. Les complexes et cycles précédemment définis soient appelés *ordinaires*. Soit R un espace donné. Une image continue K_n d'un n-complexe ordinaire $\tilde{K}_n$, K_n faisant partie de R, s'appelle un *n-complexe dans R*. On transporte d'une manière évidente les notions de *somme*, *frontière*, *cycle*, *homologie*, *subdivision*. P. ex. si C_n est un n-cycle dans R, image continue d'un n-cycle ordinaire $\tilde{C}_n$, l'homologie $C_n \sim 0$ dans R signifie qu'il existe un $(n+1)$-complexe ordinaire $\tilde{K}_{n+1}$ tel que $F\tilde{K}_{n+1} = \tilde{C}_n$ et une image continue K_{n+1} de $\tilde{K}_{n+1}$, K_{n+1} faisant partie de R, de manière que la correspondance ponctuelle entre $\tilde{K}_{n+1}$ et K_{n+1} contienne comme partie la correspondance ponctuelle donnée entre $\tilde{C}_n$ et C_n.

14. Soit R un espace. Soit C_n un n-cycle dans R. Soit C'_n une subdivision de C_n. Alors $C'_n \sim C_n$ dans R.

15. Soit R un espace. Soit $i \geqq 0$ un entier. Si l'on considère comme égaux deux i-cycles C_i, D_i dans R tels que $C_i \sim D_i$ dans R, l'ensemble de tous les i-cycles dans R constitute par rapport à l'addition un groupe appelé le $i^{\text{ième}}$ *groupe d'homologie de R*.

§ 2. Notations

16. Nous allons expliquer quelques notations dont nous ferons constamment usage.

Soit Q_n un n-complexe (ordinaire) donné ($n \geqq 0$). Les sommets (0-simplices) de Q_n seront désignés par (1), (2), ..., (N). Une h-face ($0 \leqq h \leqq n$) de Q_n aux sommets $(v_0), (v_1), \ldots, (v_h)$ sera désignée par $(v_0 v_1 \ldots v_h)$.

Soit R un espace donné. Soit $A_1, A_2, \ldots, A_N$ des sousensembles fermés donnés de R (leur nombre coïncide donc avec celui des sommets de Q_n). Pour chaque combinaison $v_0, v_1, \ldots, v_h$ des indices $1, 2, \ldots, N$ soit 1° $\{v_0 v_1 \ldots v_h\} = R - \prod_{i=0}^{h} A_{v_i}$; 2° $[v_0 v_1 \ldots v_h] = R - \sum^* A_i$, l'indice i dans $\sum^*$ parcourant ceux des valeurs 1, 2,... ..., N qui ne coïncident avec aucun des nombres $v_0, v_1, \ldots, v_h$. Posons encore $T = R - \sum_{i=1}^{N} A_i$, $U = \sum_{(v_0 v_1 \ldots v_n)} [v_0 v_1 \ldots v_n]$. Le symbole $\sum_{(v_0 v_1 \ldots v_h)}$ indique une sommation se rapportant à toutes les h-faces de Q_n ($0 \leqq h \leqq n$).

La lettre $p(s)$ indique un entier $\geqq 0$ ($\geqq 1$) donné.

[1] Le mot "ouvert" peut être remplacé ici par le mot "fermé".

§ 3. Théorème A_n

17. ***Prémisse:*** *Q_n est un n-cycle. Pour $1 \leqq h \leqq n$* [2] *et pour chaque h-face $(v_0 v_1 \dots v_h)$ de Q_n, chaque $(p + h)$-cycle dans $[v_0 v_1 \dots v_h]$ est homologue à zéro dans $[v_0 v_1 \dots v_h]$. ${}^1C_{p+n+1}, {}^2C_{p+n+1}, \dots, {}^sC_{p+n+1}$ étant s $(p + n + 1)$-cycles arbitraires dans U, on peut trouver s nombres $r_1, r_2, \dots, r_s$, égaux à zéro ou à un, mais non tous égaux à zéro, et l'on peut attacher à chaque n-face $(v_0 v_1 \dots v_n)$ de Q_n un $(p + n + 1)$-cycle $C_{p+n+1}^{v_0 v_1 \dots v_n}$ dans $(v_0 v_1 \dots v_n)$ de manière que l'on ait $\sum_{i=1}^{s} r_i {}^iC_{p+n+1} \sim \sim \sum_{(v_0 v_1 \dots v_n)} C_{p+n+1}^{v_0 v_1 \dots v_n}$ dans U. ${}^1C_p, {}^2C_p, \dots, {}^sC_p$ sont s p-cycles donnés dans T tels que l'on ait ${}^iC_p \sim 0$ dans $[v]$ pour $1 \leqq i \leqq s$, $1 \leqq v \leqq N$.*

Thèse: *Il existe s nombres $r_1, r_2, \dots, r_s$, égaux à zéro ou à un, mais non tous égaux à zéro, tels que l'on a $\sum_{i=1}^{s} r_i {}^iC_p \sim 0$ dans T.*

18. Partons d'un p-cycle C_p dans T tel que $C_p \sim 0$ dans $[v]$ pour $1 \leqq v \leqq N$. Nous allons en déduire un certain $(p + n + 1)$-cycle $C_{p+n+1} = \varphi(C_p)$ dans U.

19. Si, pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq n)$, on a attaché à chaque h-face $(v_0 v_1 \dots v_h)$ de Q_n un $(p + h + 1)$-complexe dans R : $K_{p+h+1}^{v_0 v_1 \dots v_h}$, on attachera à chaque h-complexe $l_h = \sum_{(v_0 v_1 \dots v_h)} r^{v_0 v_1 \dots v_h}(v_0 v_1 \dots v_h)$ contenu dans Q_n, où les nombres r sont égaux à zéro ou à un, le $(p + h + 1)$-complexe dans R $\sum_{(v_0 v_1 \dots v_h)} r_{v_0 v_1 \dots v_h} K_{p+h+1}^{v_0 v_1 \dots v_h}$ et on le désignera par $K_{p+h+1}(l_h)$.

20. D'après $C_p \sim 0$ dans $[v]$ on peut attacher a chaque sommet (v) de Q_n un $(p + 1)$-complexe K_{p+1}^{v} dans $[v]$ tel que $K_{p+1}^{v} \to C_p$. Nous allons attacher à chaque h-face $(1 \leqq h \leqq n)(v_0 v_1 \dots v_h)$ de Q_n un $(p + h + 1)$-complexe $K_{p+h+1}^{v_0 v_1 \dots v_h}$ dans $[v_0 v_1 \dots v_h]$ de manière que pour $1 \leqq h \leqq n$ soit vérifiée la condition π_h : Si l_h est un h-complexe arbitraire contenu dans Q_n et si $l_h \to c_{h-1}$, on a $K_{p+h+1}(l_h) \to \to K_{p+h}(c_{h-1})$. A ce but, nous procéderons par récurrence.

21. Soit $(v_0 v_1)$ une 1-face donnée de Q_n. Comme $K_{p+1}^{v_0} \to C_p$, $K_{p+1}^{v_1} \to C_p$, et comme $K_{p+1}^{v_0}$ $(K_{p+1}^{v_1})$ est situé dans $[v_0]$ (dans $[v_1]$), on voit que $K_{p+1}^{v_0} + K_{p+1}^{v_1}$ est un $(p + 1)$-cycle dans $[v_0 v_1]$. D'après nos suppositions, on a $K_{p+1}^{v_0} + K_{p+1}^{v_1} \sim 0$ dans $[v_0 v_1]$ de manière qu'il existe un $(p + 2)$-complexe $K_{p+2}^{v_0 v_1}$ dans $[v_0 v_1]$ tel que $K_{p+2}^{v_0 v_1} \to \to K_{p+1}^{v_0} + K_{p+1}^{v_1} = K_{p+1}(F(v_0 v_1))$. Or ceci signifie que la condition π_1 est réalisée.

22. Supposons que, pour une certaine valeur de h $(1 \leqq h \leqq n - 1)$, on ait déjà défini les $(p + h + 1)$-complexes $K_{p+h+1}^{v_0 v_1 \dots v_h}$ dans $[v_0 v_1 \dots v_h]$ attachés aux h-faces $(v_0 v_1 \dots v_h)$ de sorte que la condition π_h soit vérifiée. Alors, si $(v_0 v_1 \dots v_{h-1})$ est une $(h + 1)$-face de Q_n, on a $F(v_0 v_1 \dots v_{h+1}) \to 0$; d'après la condition π_h, il s'ensuit que $K_{p+h+1}(F(v_0 v_1 \dots v_{h+1}))$ est un $(p + h + 1)$-cycle qui est évidemment situé dans $[v_0 v_1 \dots v_{h+1}]$. Or nous avons supposé que chaque tel cycle est homologue à zéro

[2] Cette condition n'exige rien pour $n = 0$.

dans $[v_0v_1 \dots v_{h+1}]$; on en conclut qu'il existe un $(p+h+2)$-complexe $K_{p+h+2}^{v_0v_1\dots v_{h+1}}$ dans $[v_0v_1 \dots v_{h+1}]$ tel que $K_{p+h+2}^{v_0v_1\dots v_{h+1}} \to K_{p+h+1}(F(v_0v_1 \dots v_{h+1}))$. Or cette relation signifie que la condition π_{h+1} est réalisée.

23. Finalement, nous arrivons à attacher à chaque n-face $(v_0v_1 \dots v_n)$ de Q_n un $(p+n+1)$-complexe $K_{p+n+1}^{v_0v_1\dots v_n}$ dans $[v_0v_1 \dots v_n]$ de manière que la condition π_n est satisfaite. Or $Q_n = \sum_{(v_0v_1\dots v_n)} (v_0v_1 \dots v_n)$ est un n-cycle de manière que l'on conclut de π_n que $C_{p+n+1} = \sum_{(v_0v_1\dots v_n)} K_{p+n+1}^{v_0v_1\dots v_n}$ est un $(p+n+1)$-cycle, situé évidemment dans U. C'est ce $(p+n+1)$-cycle que nous désignerons par $\varphi(C_p)$.

24. Soit ${}^iC_{p+n+1} = \varphi({}^iC_p)$ pour $1 \leqq i \leqq s$. D'après nos suppositions, il existe des nombres r_i $(=0$ ou $=1)$ dont un au moins $\neq 0$ et des $(p+n+1)$-cycles $C_{p+n+1}^{v_0v_1\dots v_n}$ dans $[v_0v_1 \dots v_n]$ de manière que $C_{p+n+1} \sim \sum_{(v_0v_1\dots v_n)} C_{p+n+1}^{v_0v_1\dots v_n}$ dans U, où nous avons posé $C_{p+n+1} = \sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_{p+n+1}$. On voit sans peine que $C_{p+n+1} = \varphi(C_p)$, où $C_p = \sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_p$. On doit encore prouver que $C_p \sim 0$ dans T. On peut supposer que les notations des N^{os} 18–23 se rapportent aux deux cycles C_p, $C_{p+n+1} = \varphi(C_p)$ que l'on vient de définir.

25. D'après $\sum_{(v_0v_1\dots v_n)} K_{p+n+1}^{v_0v_1\dots v_n} = C_{p+n+1} \sim \sum_{(v_0v_1\dots v_n)} C_{p+n+1}^{v_0v_1\dots v_n}$ dans U, il existe un $(p+n+2)$-complexe dans $U: K_{p+n+2}$ tel que $K_{p+n+2} \to \sum_{(v_0v_1\dots v_n)} (K_{p+n+1}^{v_0v_1\dots v_n} + C_{p+n+1}^{v_0v_1\dots v_n})$. Le $(p+n+2)$-complexe K_{p+n+2} est une image continue d'un $(p+n+2)$-complexe ordinaire $\tilde{K}_{p+n+2}$. Or K_{p+n+2} fait partie de $U = \sum_{(v_0v_1\dots v_n)} [v_0v_1 \dots v_n]$; c'est donc la réunion des ses intersections avec les ensembles $[v_0v_1 \dots v_n]$ qui sont évidemment des sousensembles ouverts de R; par suite les dites intersections sont des sousensembles ouverts de K_{p+n+2}. Par définition même d'une image continue, on en conclut que $\tilde{K}_{p+n+2}$ est la réunion de certains sousensembles ouverts $\tau_{v_0v_1\dots v_n}$ (donc chacun correspond à une n-face de Q_n) tels que l'image dans K_{p+n+2} de chaque point de $\tau_{v_0v_1\dots v_n}$ appartienne à $[v_0v_1 \dots v_n]$. Il en résulte qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ jouissant de la propriété suivante: Si P et Q sont deux points de $\tilde{K}_{p+n+2}$ dont la distance $d(P, Q)$ est inférieur à ε, il existe une n-face $(v_0v_1 \dots v_n)$ de Q_n telle que les points P et Q appartiennent tous les deux a $\tau_{v_0v_1\dots v_n}$.[3] Soit $'\tilde{K}_{p+n+2}$ une subdivision

[3] Dans le cas contraire, il existerait deux suites infinies (P_i) et (Q_i) de points de K_{p+n+2} telles que 1° $d(P_i, Q_i) < 1/i$, 2° pour aucune valeur de $i = 1, 2, \dots$ il n'existe aucune n-face $(v_0v_1 \dots v_n)$ de Q_n telle que les points P_i et Q_i appartiennent tous les deux à $\tau_{v_0v_1\dots v_n}$. Or $\tilde{K}_{p+n+2}$ est un ensemble fermé et borné d'un espace euclidien; il en résulte qu'on peut extraire de la suite (P_i) une suite (P_i') tendant vers un point P_ω' de $\tilde{K}_{p+n+2}$; la suite correspondante (Q_i') extraite de (Q_i) tend alors aussi vers P_ω'. Or $\tilde{K}_{p+n+2} = \sum_{(v_0v_1\dots v_n)} \tau_{v_0v_1\dots v_n}$; par suite il existe une n-face $(v_0v_1 \dots v_n)$ telle que le point P_ω' appartienne à $\tau_{v_0v_1\dots v_n}$. L'ensemble $\tau_{v_0v_1\dots v_n}$ étant ouvert dans $\tilde{K}_{p+n+2}$, des relations $\lim P_i' = \lim Q_i' = P_\omega'$ on conclut que pour i suffisamment grand les deux points P_i' et Q_i' appartiennent simultanément à $\tau_{v_0v_1\dots v_n}$, ce qui est une contradiction.

de $\tilde{K}_{p+n+2}$ telle que le diamètre de chaque face de $'\tilde{K}_{p+n+2}$ soit inférieur à ε. Désignons par $'K_{p+n+2}$, $'K_{p+n+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}$, $'C_{p+n+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}$ les subdivisions correspondantes de K_{p+n+2}, $K_{p+n+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}$, $C_{p+n+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}$. D'après les propriétés du nombre ε et des ensembles $\tau_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}$, chaque face de $'K_{p+n+2}$ est entièrement contenue dans un des ensembles $[\nu_0\nu_1 \ldots \nu_n]$; il en résulte que si δ est une face de $'K_{p+n+2}$ rencontrant $\prod_{i=0}^{n} A_{\nu_i}$ où $(\nu_0\nu_1 \ldots \nu_n)$ est une n-face de Q_n, δ ne peut rencontrer A_i si l'indice i est différent de $\nu_0\nu_1 \ldots \nu_n$.

26. Choisissons une n-face $(\nu_0^0\nu_1^0 \ldots \nu_n^0)$ déterminée de Q_n et partageons les $(p + n + 2)$-faces de $'K_{p+n+2}$ en deux classes, en rangeant dans la première classe précisément les $(p + n + 2)$-faces qui rencontrent $\prod_{i=0}^{n} A_{\nu_i^0}$. Désignons par ${}^1K_{p+n+2}$ $({}^2K_{p+n+2})$ le $(p + n + 2)$-complexe dans U dont les $(p + n + 2)$-faces sont les $(p + n + 2)$-faces de la première (seconde) classe de $'K_{p+n+2}$. On a alors $'K_{p+n+2} = {}^1K_{p+n+2} + {}^2K_{p+n+2}$. Or soit δ une $(p + n + 1)$-face de $'K_{p+n+2}$ rencontrant $\prod_{i=0}^{n} A_{\nu_i^0}$; évidemment δ ne peut appartenir à $F\,{}^2K_{p+n+2} = F\,'K_{p+n+2} + F\,{}^1K_{p+n+2}$. Or $F'K_{p+n+2} = \sum_{(\nu_0\nu_1\ldots\nu_n)} ('K_{p+n+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n} + 'C_{p+n+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n})$. Si la n-face $(\nu_0\nu_1 \ldots \nu_n)$ de Q_n est différente de $(\nu_0^0\nu_1^0 \ldots \nu_n^0)$, il existe une valeur de i $(0 \leqq i \leqq n)$ telle que indice ν_i^0 ne fait pas partie des indices $\nu_0, \nu_1, \ldots \nu_n$. La face δ rencontrant ν_i^0 ne peut donc appartenir à $'K_{p+n+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n} + 'C_{p+n+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}$, car ce complexe fait partie de $[\nu_0\nu_1 \ldots \nu_n]$. Il en résulte que δ appartient à $F\,'K_{p+n+2}$ si et seulement si elle appartient à $'K_{p+n+1}^{\nu_0{}^0\nu_1{}^0\ldots\nu_n{}^0} + 'C_{p+n+1}^{\nu_0{}^0\nu_1{}^0\ldots\nu_n{}^0}$; donc δ n'appartient pas au $(p + n + 1)$-complexe $L_{p+n+1}^{\nu_0{}^0\nu_1{}^0\ldots\nu_n{}^0} = 'K_{p+n+1}^{\nu_0{}^0\nu_1{}^0\ldots\nu_n{}^0} + 'C_{p+n+1}^{\nu_0{}^0\nu_1{}^0\ldots\nu_n{}^0} + F\,{}^1K_{p+n+2}$. On voit donc que $L_{p+n+1}^{\nu_0{}^0\nu_1{}^0\ldots\nu_n{}^0}$ est un $(p + n + 1)$-complexe dans $\{\nu_0^0\nu_1^0 \ldots \nu_n^0\} \times [\nu_0^0\nu_1^0 \ldots \nu_n^0]$. Or $FL_{p+n+1}^{\nu_0{}^0\nu_1{}^0\ldots\nu_n{}^0} = F\,'K_{p+n+1}^{\nu_0{}^0\nu_1{}^0\ldots\nu_n{}^0}$.

27. Nous venons de trouver que pour $h = n$ l'énoncé suivant (désignerons le par Θ_h) est vrai: Si $(\nu_0\nu_1 \ldots \nu_h)$ est une h-face arbitraire de Q_n, on a[4] $FK_{p+h+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h} \sim 0$ dans $\{\nu_0\nu_1 \ldots \nu_h\} \,.\, [\nu_0\nu_1 \ldots \nu_h]$. Supposons que pour une certaine valeur de h $(1 \leqq h \leqq n)$ l'énoncé Θ_h soit déjà prouvé; nous en déduirons que l'énoncé Θ_{h-1} est aussi vrai. Soit donc $(\nu_1 \ldots \nu_h)$ une $(h - 1)$-face de Q_n. Il existe un indice ν_0 tel que $(\nu_0\nu_1 \ldots \nu_h)$ est une h-face de Q_n. D'après Θ_h il existe un $(p + h + 1)$-complexe $L_{p+h+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}$ dans $\{\nu_0\nu_1 \ldots \nu_h\} \,.\, [\nu_0\nu_1 \ldots \nu_h]$ tel que $FL_{p+h+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h} = FK_{p+h+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}$. D'après la définition de $\{\nu_0\nu_1 \ldots \nu_h\}$ et puisque $L_{p+h+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}$ fait partie de $\{\nu_0\nu_1 \ldots \nu_h\}$ aucun point de $L_{p+h+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}$ ne peut appartenir simultanément aux deux ensembles A_{ν_0} et $\prod_{i=1}^{h} A_{\nu_i}$. Donc l'ensemble $L_{p+h+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}$ peut être partagé en deux parties (pouvant d'ailleurs avoir des points communs) qui sont ses intersections avec $R - A_{\nu_0}$, $R - \prod_{i=1}^{h} A_{\nu_i}$. Or ces deux intersections sont des sousensembles ouverts de $L_{p+h+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}$. On en conclut comme au N° 25 qu'il existe une subdivision $'L_{p+h+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}$ de $L_{p+h+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}$ telle qu'aucune face de $'L_{p+h+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}$ ne rencontre

[4] D'après N° 14 $FK_{p+h+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h} \sim F'K_{p+h+1}^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}$.

pas simultanément A_{v_0} et $\prod_{i=1}^{h} A_{v_i}$. Désignons par ${}^1L_{p+h+1}^{v_0v_1\ldots v_h}$ le $(p + h + 1)$-complexe constitué par les $(p + h + 1)$-faces de ${}'L_{p+h+1}^{v_0v_1\ldots v_h}$ rencontrant $\prod_{i=1}^{h} A_{v_i}$ et par ${}^2L_{p+h+1}^{v_0v_1\ldots v_h}$ le $(p + h + 1)$-complexe constitué par les autres $(p + h + 1)$-faces de ${}'L_{p+h+1}^{v_0v_1\ldots v_h}$; donc ${}'L_{p+h+1}^{v_0v_1\ldots v_h} = {}^1L_{p+h+1}^{v_0v_1\ldots v_h} + {}^2L_{p+h+1}^{v_0v_1\ldots v_h}$ et aucune face de ${}^1L_{p+h+1}^{v_0v_1\ldots v_h}$ ne rencontre A_{v_0}. Soit δ une $(p + h)$-face de ${}'L_{p+h+1}^{v_0v_1\ldots v_h}$ rencontrant $\prod_{i=1}^{h} A_{v_i}$; δ ne peut appartenir à $F\,{}^2L_{p+h+1}^{v_0v_1\ldots v_h} = F\,{}'L_{p+h+1}^{v_0v_1\ldots v_h} + F\,{}^1L_{p+h+1}^{v_0v_1\ldots v_h}$. Or $F\,{}'L_{p+h+1}^{v_0v_1\ldots v_h}$ est une subdivision de $FL_{p+h+1}^{v_0v_1\ldots v_h} = FK_{p+h+1}^{v_0v_1\ldots v_h} = \sum_{i=0}^{h} K_{p+h}^{v_0\ldots v_{i-1}v_{i+1}\ldots v_h}$ (d'après la condition π_h du N° 20). On en conclut que $F\,{}'L_{p+h+1}^{v_0v_1\ldots v_h} = \sum_{i=0}^{h} {}'K_{p+h}^{v_0\ldots v_{i-1}v_{i+1}\ldots v_h}$, où ${}'K_{p+h}^{v_0\ldots v_{i-1}v_{i+1}\ldots v_h}$ est une certaine subdivision de $K_{p+h}^{v_0\ldots v_{i-1}v_{i+1}\ldots v_h}$. Pour $i \geqq 1$, le complexe ${}'K_{p+h}^{v_0\ldots v_{i-1}v_{i+1}\ldots v_h}$ est contenu dans $[v_0 \ldots v_{i-1}v_{i+1} \ldots v_h]$ et ne contient donc aucun point de A_{v_0} de manière que la face δ ne peut appartenir à ce complexe. On voit donc que δ appartient à $F\,{}'L_{p+h+1}^{v_0v_1\ldots v_h}$ si et seulement si elle appartient à ${}'K_{p+h}^{v_1\ldots v_h}$. Nous arrivons donc à la conclusion que δ n'appartient pas à $M_{p+h}^{v_0v_1\ldots v_h} = {}'K_{p+h}^{v_1\ldots v_h} + F\,{}^1L_{p+h+1}^{v_0v_1\ldots v_h}$; or ceci signifie que ce $(p + h)$-complexe est contenu dans $\{v_1 \ldots v_h\}$; le même complexe est évidemment contenu dans $[v_1 \ldots v_h]$. Or $FM_{p+h}^{v_0v_1\ldots v_h} = F'K_{p+h}^{v_1\ldots v_h}$, d'où $F\,{}'K_{p+h}^{v_1\ldots v_h} \sim 0$ dans $\{v_1 \ldots v_h\} \,.\, [v_1 \ldots v_h]$. D'après N° 14, cette homologie est vraie aussi pour $FK_{p+h}^{v_1\ldots v_h}$. L'énonce Θ_{h-1} est ainsi déduit de Θ_h.

28. Nous avons prouvé par induction que l'énoncé Θ_0 est vrai. Donc on a $FK_{p+1}^1 \sim 0$ dans $\{1\} \,.\, [1]$. Or $FK_{p+1}^1 = C_p$ et $\{1\} \,.\, [1] = T$. Donc $C_p \sim 0$ dans T, ce qui prouve le théorème A_n.

§ 4. Théorème B_n

29. ***Prémisse:*** *Q_n est un n-cycle connexe au sens étroit;*[5] *$P_i(Q_n) = 0$ pour $1 \leqq i \leqq n - 1$.*[6] *Si E_i $(0 \leqq i \leqq n - 2)$ est une i-face arbitraire de Q_n et si H_n est l'étoile de E_i dans Q_n, H_n est un n-complexe connexe au sens étroit et tel que $P_j(H_n) = 0$ pour $i + 1 \leqq j \leqq n - 1$. Pour $0 \leqq h \leqq n - 1$*[7] *et pour chaque h-face $(v_0v_1 \ldots v_h)$ de Q_n, chaque $(p + h + 1)$-cycle dans $[v_0v_1 \ldots v_h]$ est homologue à zéro dans $[v_0v_1 \ldots v_h]$. ${}^1C_{p+n+1}, {}^2C_{p+n+1}, \ldots, {}^sC_{p+n+1}$ sont s $(p + n + 1)$-cycles dans U tels que, si $r_1, r_2, \ldots, r_s$ sont des nombres égaux à zéro ou à un, et si l'on a attaché à chaque n-face $(v_0v_1 \ldots v_n)$ de Q_n un $(p + n + 1)$-cycle $C_{p+n+1}^{v_0v_1\ldots v_n}$ arbitraire dans*

[5] Pour $n = 0$: Q_0 *est constitué par deux points.*
[6] Cette condition n'exige rien pour $n \leqq 1$.
[7] Cette condition n'exige rien pour $n = 0$.

$[v_0 v_1 \ldots v_n]$, *on ne peut avoir* $\sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_{p+n+1} \sim \sum_{(v_0 v_1 \ldots v_n)} C_{p+n+1}^{v_0 v_1 \ldots v_n}$ *dans* U *que si* $r_1 =$ $= r_2 = \ldots = r_s = 0$.

Thèse: *Il existe* s *p-cycles* ${}^1C_p, {}^2C_p, \ldots, {}^sC_p$ *dans* T *tels que* ${}^iC_p \sim 0$ *dans* $[v]$ *pour* $1 \leqq i \leqq s, 1 \leqq v \leqq N$, *tandis que, si* $r_1, r_2, \ldots, r_s$ *sont des nombres égaux à zéro ou à un, l'homologie* $\sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_p \sim 0$ *dans* T *ne peut être vérifiée que si* $r_1 = r_2 = \ldots =$ $= r_s = 0$. *Chaque p-cycle* ${}^iC_p$ $(1 \leqq i \leqq s)$ *est contenu dans* ${}^iC_{p+n+1}$.

30. Partons d'un $(p + n + 1)$-cycle arbitraire C_{p+n+1} dans U. Nous allons en déduire un certain p-cycle $C_p = \psi(C_{p+n+1})$ dans T tel que $C_p \sim 0$ dans $[v]$ pour $1 \leqq v \leqq N$.

31. Faisons de nouveau la convention du N° 19.

32. Comme au N° 25, on voit qu'il existe une subdivision C'_{p+n+1} de C_{p+n+1} de la forme $\sum_{(v_0 v_1 \ldots v_n)} K_{p+n+1}^{v_0 v_1 \ldots v_n}$, où $K_{p+n+1}^{v_0 v_1 \ldots v_n}$ est un $(p + n + 1)$-complexe dans $[v_0 v_1 \ldots v_n]$.[8] Soit S_{p+n} une $(p + n)$-face de quelqu'un des $(p + n)$-cycles $FK_{p+n+1}^{v_0 v_1 \ldots v_n}$. Si S_{p+n} ne rencontre aucun des N ensembles A_i, posons $u = -1$; dans le cas contraire, soient $A_{\mu_0}, A_{\mu_1}, \ldots, A_{\mu_u}$ tous les ensembles A_i rencontrés par S_{p+n}. Si S_{p+n} est une face de $FK_{p+n+1}^{v_0 v_1 \ldots v_n}$, S_{p+n} doit être contenue dans $[v_0 v_1 \ldots v_n]$; il en résulte que $(\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_u)$ est une face de $(v_0 v_1 \ldots v_n)$, d'où $u \leqq n$. Plus précisément, on a $u \leqq n - 1$, car, en vertu de $0 = F\,'C_{p+n+1} = \sum_{(v_0 v_1 \ldots v_n)} FK_{p+n+1}^{v_0 v_1 \ldots v_n}$, S_{p+n} est une face de deux au moins parmi les cycles $FK_{p+n+1}^{v_0 v_1 \ldots v_n}$. Dans le cas $u = -1$, posons $H_n = Q_n$; pour $u \geqq 0$, soit H_n l'étoile de $(\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_u)$ dans Q_n. Soient $E_n^1, E_n^2, \ldots, E_n^l$ toutes les n-faces $(v_0 v_1 \ldots v_n)$ de Q_n telles que S_{p+n} est une $(p + n)$-face de $FK_{p+n+1}^{v_0 v_1 \ldots v_n}$; d'après une remarque antérieure, $E_n^1, E_n^2, \ldots, E_n^l$ sont des n-faces de H_n. En vertu de $\sum_{(v_0 v_1 \ldots v_n)} FK_{p+n+1}^{v_0 v_1 \ldots v_n} = 0$, le nombre $l = 2k$ est pair. Si l'on tient compte de ce que pour $-1 \leqq u \leqq n - 2$ le n-complexe H_n est connexe au sens étroit, on voit que l'on peut poser

$$E_n^{2i-1} + E_n^{2i} = \sum_{j=1}^{2r_i} e_n^{ij}\,, \quad (1 \leqq i \leqq k)$$

les e_n^{ij} étant des n-faces de H_n telles que pour $1 \leqq i \leqq k$, $1 \leqq j \leqq r_i$, les n-faces $e_n^{i,2j-1}$ et $e_n^{i,2j}$ aient une $(n - 1)$-face E_{n-1}^{ij} commune, E_{n-1}^{ij} étant une $(n - 1)$-face de H_n. Posons $\sigma(S_{p+n}, E_{n-1}) = 1$ pour chaque $(n - 1)$-face de H_n qui apparait un nombre impair de fois parmi les E_{n-1}^{ij} $(1 \leqq i \leqq k, 1 \leqq j \leqq r_i)$ et $\sigma(S_{p+n}, E_{n-1}) = 0$ pour toutes les autres $(n - 1)$-faces de Q_n. Pour chaque $(n - 1)$-face $E_{n-1} =$ $= (v_1 \ldots v_n)$ de Q_n, posons

$$K_{p+n}^{v_1 \ldots v_n} = \sum_{S_{p+n}} \sigma(S_{p+n}, E_{n-1}) \,.\, S_{p+n}\,,$$

[8] Dorénavant (jusqu'au N° 37) soit $n \geqq 1$.

la somme se rapportant à toutes les $(p+n)$-faces S_{p+n} de tous les complexes $FK_{p+n+1}^{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_n}$ où $(\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_n)$ parcourt *toutes* les n-faces de Q_n.

33. Lorsque $\sigma(S_{p+n}, E_{n-1}) = 1$, $E_{n-1} = (v_1\dots v_n)$ est une $(n-1)$-face de H_n, donc (pour $u \geqq 0$) $(\mu_0\mu_1\dots\mu_u)$ est une u-face de $(v_1\dots v_n)$ de manière que S_{p+n} est contenu dans $[v_1\dots v_n]$. Il en résulte que $K_{p+n}^{v_1\dots v_n}$ est un $(p+n)$-complexe dans $[v_1\dots v_n]$. Or soit $(v_0v_1\dots v_n)$ une n-face de Q_n; posons $(v_0\dots v_{t-1}v_{t+1}\dots v_n) = \varepsilon_{n-1}^t$ $(0 \leqq t \leqq n)$. Alors

$$K_{p+n}(F(v_0v_1\dots v_n)) = \sum_{S_{p+n}} S_{p+n}\cdot\sum_{t=0}^{n}\sigma(S_{p+n}, \varepsilon_{n+1}^t),$$

le coefficient de S_{p+n} devant être réduit modulo 2. Pour chaque valeur de S_{p+n}, on reconnait sans peine que le nombre $\sum_{t=0}^{n}\sigma(S_{p+n}, \varepsilon_{n-1}^t)$ est congru modulo 2 au nombre $\tau(S_{p+n})$ indiquant combien de fois (dans les notations du N° 32) E_{n-1}^{ij} $(1 \leqq i \leqq k$, $1 \leqq j \leqq r_i)$ est une $(n-1)$-face de $(v_0v_1\dots v_n)$. Or Q_n est un n-cycle, ce qui signifie que chaque $(n-1)$-face de Q_n est une face d'un nombre pair de n-faces de Q_n; on conclut donc sans difficulté que le nombre $\tau(S_{p+n})$ est impair si et seulement si $(v_0v_1\dots$ $\dots v_n)$ coïncide avec une des n-faces $E_n^1, E_n^2\dots E_n^l$ ce qui signifie que S_{p+n} est une $(p+n)$-face de $FK_{p+n+1}^{v_0v_1\dots v_n}$. Par suite

$$K_{p+n}(F(v_0v_1\dots v_n)) = FK_{p+n+1}^{v_0v_1\dots v_n}.$$

34. Nous attacherons à chaque face $(v_0v_1\dots v_h)$ $(0 \leqq h \leqq n)$ de Q_n un $(p+h+1)$-complexe $K_{p+h+1}^{v_0v_1\dots v_h}$ dans $[v_0v_1\dots v_h]$ de manière que pour $1 \leqq h \leqq n$ soit vérifiée la condition π_h énoncée dans le N° 20. Au N° 32, nous avons introduit les $(p+n+1)$-complexes $K_{p+n+1}^{v_0v_1\dots v_n}$ et nous y avons construit les $K_{p+n}^{v_1\dots v_n}$. Au N° 33, nous avons vu que chaque $K_{p+n}^{v_1\dots v_n}$ est un $(p+n)$-complexe dans $[v_1\dots v_n]$ et que la condition π_n est vérifiée. Le cas $n=1$ est donc épuisé. Pour $n \geqq 2$ nos procéderons par récurrence.

35. Supposons que, pour une certaine valeur de h $(1 \leqq h \leqq n-1)$ on soit déjà arrivé à construire les $(p+h+1)$-complexes $K_{p+h+1}^{v_0v_1\dots v_h}$ dans $[v_0v_1\dots v_h]$ de manière que la condition π_{h+1} soit vérifiée. Il s'agit d'attacher à chaque $(h-1)$-face $(v_1\dots v_h)$ de Q_n un $(p+h)$-complexe $K_{p+h}^{v_1\dots v_h}$ dans $[v_1\dots v_h]$ de sorte à vérifier la condition π_h. Soit S_{p+h} une $(p+h)$-face de quelqu'un parmi les $(p+h)$-cycles $FK_{p+h+1}^{v_0v_1\dots v_h}$ où $(v_0v_1\dots v_h)$ parcourt toutes les h-faces de Q_n. Si S_{p+h} ne rencontre aucun des N ensembles A_i, posons $u=-1$; dans le cas contraire soient $A_{\mu_0}, A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_u}$ tous les ensembles A_i rencontrés par S_{p+h}. Si S_{p+h} est une h-face de $FK_{p+h+1}^{v_0v_1\dots v_h}$, S_{p+h} est contenu dans $[v_0v_1\dots v_h]$ et par suite $(\mu_0\mu_1\dots\mu_h)$ est une face de $(v_0v_1\dots v_h)$ d'où $u \leqq h$. Plus précisément, on a toujours $u \leqq h-1$.[9] Dans le cas $u=-1$, posons

[9] Puisque $h \leqq n-1$, il existe un indice v_{h+1} tel que $(v_0v_1\dots v_{h+1})$ est une $(h+1)$-face de Q_n. D'après la condition π_{h+1}, on a

$$K_{p+h+2}^{v_0v_1\dots v_{h+1}} \to \sum_{i=0}^{h+1} K_{p+h+1}^{v_0\dots v_{i-1}v_{i+1}\dots v_h} \to 0.$$

$H_n = Q_n$; pour $u \geqq 0$, soit H_n l'étoile de $(\mu_0\mu_1 \ldots \mu_u)$ dans Q_n. Dans tous les cas, en vertu de $u \leqq h - 1 \leqq n - 2$, le $h^{\text{ème}}$ nombre de Betti de H_n égale zéro. Les symboles E^i_{h+1}, E^j_h, E^k_{h-1} parcourt respectivement tous les $(h + 1)$-faces, h-faces, $(h - 1)$-faces de H_n. Soit

$$E^i_{h+1} \to \sum_j \eta_{ij} E^j_h\,, \quad E^j_h \to \sum_k \zeta_{jk} E^k_{h-1}\,,$$

les nombres η et ζ étant égaux à 0 où à 1. On a

$$\sum_j \eta_{ij}\zeta_{jk} \equiv 0 \pmod 2 \tag{1}$$

car $FE^i_{h+1} \to 0$. Soit α le nombre des h-faces E^j_h. Soient ϱ et σ les rangs modulo 2 des matrices (η_{ij}) et (ζ_{ij}). D'après $P_h(H_n) = 0$, on a (v. N° 7)

$$\alpha = \varrho + \sigma\,. \tag{2}$$

Considérons les congruences

$$\sum_j \eta_{ij} a_j \equiv 0 \pmod 2\,. \tag{3}$$

D'après (2), le système (3) possède σ solutions linéairement indépendantes mod 2. Or d'après (1), les positions $a_j = \zeta_{jk}$ donnent des solutions de (3) dont σ sont linéairement indépendantes mod 2. Il en résulte que chaque solution de (3) a la forme

$$a_j \equiv \sum_k b_k \zeta_{jk} \pmod 2\,. \tag{4}$$

Pour chaque h-face $(v_0 v_1 \ldots v_h)$ de Q_n posons $c_{v_0 v_1 \ldots v_h} = 1$ si S_{p+h} est une $(p + h)$-face de $FK^{v_0 v_1 \ldots v_h}_{p+h+1}$, ce qui exige, nous l'avons vu, que $(v_0 v_1 \ldots v_h)$ soit une h-face de H_n; pour toutes les autres h-faces $(v_0 v_1 \ldots v_h)$ de Q_n posons $c_{v_0 v_1 \ldots v_h} = 0$. Si $(v_0 v_1 \ldots v_h) = E^j_h$ est une h-face de H_n, posons $c_{v_0 v_1 \ldots v_h} = a_j$. Considérons maintenant une $(h - 1)$-face arbitraire $(v_0 v_1 \ldots v_{h+1}) = E^i_{h+1}$ de H_n. D'après la propriété π_{h-1}, on a $\sum_{\iota=0}^{h+1} FC^{v_0 \ldots v_{\iota-1} v_{\iota+1} \ldots v_{h+1}} = 0$, d'où l'on déduit les congruences (3). Par suite, on peut attacher à chaque $(h + 1)$-face de H_n un nombre b_k égal à zéro ou à un de manière que l'on ait les congruences (4). Pour une $(h - 1)$-face E^k_{h-1} de H_n posons $\sigma(S_{p+h}, E^k_{h-1}) = b_k$; pour une $(h - 1)$-face E_{h-1} de Q_n ne faisant pas partie de H_n posons $\sigma(S_{p+h}, E_{h-1}) = 0$. Pour chaque $(h - 1)$-face $E_{h-1} = (v_1 \ldots v_h)$ de Q_n posons

$$K^{v_1 \ldots v_h}_{p+h} = \sum_{S_{p+h}} \sigma(S_{p+h}, E_{h-1})\,.\,S_{p+h}\,,$$

S_{p+h} étant une $(p + h)$-face de $FK^{v_0 v_1 \ldots v_h}_{p+h+1}$, il existe par suite un indice i tel que S_{p+h} soit une $(p + h)$-face de $FK^{v_0 \ldots v_{i-1} v_{i+1} \ldots v_h}_{p+h+1}$; donc $(\mu_0\mu_1 \ldots \mu_u)$ est une face commune de $(v_0 v_1 \ldots v_h)$ et de $(v_0 \ldots v_{i-1} v_{i+1} \ldots v_h)$, d'où $u \leqq h - 1$.

la somme se rapportant à toutes les $(p + h)$-faces S_{p+h} de tous les complexes $FK_{p+h+1}^{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_h}$ où $(\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_h)$ parcourt toutes les h-faces de Q_n.

36. Lorsque $\sigma(S_{p+h}, E_{h-1}) = 1$, $E_{h-1} = (v_1 \ldots v_h)$ est une $(h - 1)$-face de H_n, donc (pour $u \geqq 0$) $(\mu_0\mu_1 \ldots \mu_u)$ est une u-face de $(v_1 \ldots v_h)$ de manière que S_{p+h} est contenu dans $[v_1 \ldots v_h]$. Il en résulte que $K_{p+h}^{v_1\ldots v_h}$ est un $(p + h)$-complexe dans $[v_1 \ldots v_h]$. Or soit $(v_0v_1 \ldots v_h)$ une h-face de Q_n; posons $(v_0 \ldots v_{t-1}v_{t+1} \ldots v_h) = \varepsilon_{h-1}^t$ $(0 \leqq t \leqq h)$. Alors

$$K_{p+h}(F(v_0v_1 \ldots v_h)) = \sum_{S_{p+h}} S_{p+h} \cdot \sum_{t=0}^{h} \sigma(S_{p+h}, \varepsilon_{h-1}^t),$$

le coefficient de S_{p+h} devant être réduit mod 2. Pour chaque valeur de S_{p+h}, on reconnait sans peine que le nombre $\sum_{t=0}^{h} \sigma(S_{p+h}, \varepsilon_{k-1}^t)$ est congru mod 2 au nombre $\tau(S_{p+h})$ des $(h - 1)$-faces E_{h-1}^k de H_n telles que $b_k = 1$ qui sont aussi des $(h - 1)$-faces de $(v_0v_1 \ldots v_h)$. Donc $\tau(S_{p+h}) = 0$ si $(v_0v_1 \ldots v_h)$ ne fait pas partie de H_n; et, lorsque $(v_0v_1 \ldots v_h) = E_h^j$ est une h-face de H_n, on a $\tau(S_{p+h}) = \sum_k b_k\zeta_{jk}$, donc, en vertu de N° 35 (4), $\tau(S_{p+h}) \equiv a_j \bmod 2$. Ceci signifie qu'on a dans tous les cas $\tau(S_{p+h}) \equiv c_{v_0v_1\ldots v_h} \bmod 2$, d'où

$$K_{p+h}(F(v_0v_1 \ldots v_h)) = \sum_{S_{p+h}} c_{v_0v_1\ldots v_h} S_{p+h} .$$

D'après la définition des nombres c il en résulte que

$$K_{p+h}(F(v_0v_1 \ldots v_h)) = FK_{p+h+1}^{v_0v_1\ldots v_h},$$

ce qui donne que la condition π_h est réalisée.

37. Finalement, nous arrivons à attacher à chaque sommet v de Q_n un $(p + 1)$-complexe K_{p+1}^v dans $[v]$ de manière que la condition π_1 est vérifiée. Or cette condition signifie que, si (v_0v_1) est une 1-face de Q_n, on a $K_{p+1}^{v_0} + K_{p+1}^{v_1} = FK_{p+2}^{v_0v_1}$ et par suite $FK_{p+1}^{v_0} = FK_{p+1}^{v_1}$. Or pour $n \geqq 1$ le n-complexe Q_n est connexe (au sens étroit et donc aussi) au sens large, de manière que nous concluons que le p-cycle $C_p = FK_{p+1}^v$ est indépendant du choix de v $(1 \leqq v \leqq N)$. Le cycle C_p étant contenu dans $[v]$ pour $1 \leqq v \leqq N$, il est contenu dans T. De plus, on a $C_p \sim 0$ dans $[v]$ pour $1 \leqq v \leqq N$. C'est ce p-cycle C_p que nous désignerons par $\psi(C_{p+n+1})$. Dans le cas $n = 0$ qui était exclu au N^{os} précédents, les $(p + 1)$-complexes K_{p+1}^v ont été déterminés déjà au commencement du N° 32. On a dans ce cas $N = 2$, donc $K_{p+1}^1 + K_{p+1}^2 = {}'C_{p+1} \rightarrow 0$, d'où $FK_{p+1}^1 = FK_{p+1}^2 = C_p = \psi(C_{p+1})$ est, ici encore, un p-cycle dans T homologue à zéro dans $[v]$ pour $1 \leqq v \leqq N$.

38. Soit ${}^iC_p = \psi({}^iC_{p+n+1})$ pour $1 \leqq i \leqq s$. Soient $r_1, r_2, \ldots, r_s$ des nombres égaux à 0 ou à 1, mais non tous égaux à 0. Posons $C_{p+n+1} = \sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_{p+n+1}$, $C_p =$

$= \sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_p$. On reconnait sans peine que $C_p = \psi(C_{p+n+1})$. D'après nos suppositions, si l'on attache à chaque n-face $(v_0v_1 \dots v_n)$ de Q_n un $(p+n+1)$-cycle $C_{p+n+1}^{v_0v_1\dots v_n}$ arbitraire dans $[v_0v_1 \dots v_n]$, on ne peut avoir $C_{p+n+1} \sim \sum_{(v_0v_1\dots v_n)} C_{p+n+1}^{v_0v_1\dots v_n}$ dans U. On doit encore prouver que l'homologie $C_p \sim 0$ dans T est impossible. On peut supposer que les notations des N^{os} 28—35 se rapportent aux deux cycles C_{p+n+1}, $C_p = \psi$ (C_{p+n+1}) qu l'on vient de définir.

39. Soit donc $C_p \sim 0$ dans T; nous devons arriver à une contradiction. Il existe un $(p+1)$-complexe L_{p+1} dans T tel que $L_{p+1} \to C_p$. Pour $1 \leqq v \leqq N$, $K_{p+1}^v +$ $+ L_{p+1}$ est par suite un $(p+1)$-cycle dans $[v]$;[10] d'après nos suppositions, ce cycle est homologue à zéro dans $[v]$. Il existe donc un $(p+2)$-complexe L_{p+2}^v dans $[v]$ tel que

$$L_{p+2}^v \to K_{p+1}^v + L_{p+1} \quad (0 \leqq h \leqq n-1)\,.$$

40. Nous attacherons à chaque face $(v_0v_1 \dots v_h)$ un $(p+h+2)$-complexe $L_{p+h+2}^{v_0v_1\dots v_h}$ dans $[v_0v_1 \dots v_h]$ et nous ferons pour ces complexes une convention analogue à celle du N^o 19. Pour $n = 1$, ces complexes sont tous déjà construits. Pour $n \geqq 2$, la construction n'est effectué que pour $h = 0$. Nous procéderons par induction de telle sorte que pour $1 \leqq h \leqq n-1$ soit vérifiée la condition ϑ_h: Pour chaque h-complexe l_h contenu dans Q_n la relation $l_h \to c_{h-1}$ entraîne $L_{p+h+2}(l_h) \to K_{p+h+1}(l_h) +$ $+ L_{p+h+1}(c_{h-1})$.

41. Supposons que, pour certaine valeur de h $(1 \leqq h \leqq n-1)$ on soit déjà arrivé à construire les $(p+h+1)$-complexes $L_{p+h+1}^{v_1\dots v_h}$ dans $[v_1 \dots v_h]$ satisfaisant à la condition ϑ_{h-1} (si $h-1 \geqq 1$). Il s'agit d'attacher à chaque h-face $(v_0v_1 \dots v_h)$ de Q_n un $(p+h+2)$-complexe $L_{p+h+2}^{v_0v_1\dots v_h}$ dans $[v_0v_1 \dots v_h]$ de manière à vérifier la condition ϑ_h. Si $h \geqq 2$, la condition ϑ_{h-1} donne $L_{p+h+1}(F(v_0v_1 \dots v_h)) \to K_{p+h}(F(v_0v_1 \dots v_h))$ d'où, d'après la condition π_h des N^{os} 20 et 34,

$$(*) \qquad L_{p+h+1}(F(v_0v_1 \dots v_h)) \to FK_{p+h+1}^{v_0v_1\dots v_h}\,.$$

Dans le cas $h = 1$ la condition (*) est aussi vérifiée d'après N^o 39 et la condition π_1. Il en résulte que $K_{p+h+1}^{v_0v_1\dots v_h} + L_{p+h+1}(F(v_0v_1 \dots v_h))$ est un $(p+h+1)$-cycle qui est évidemment situé dans $[v_0v_1 \dots v_h]$. Or nous avons supposé que chaque tel cycle est homologue à zéro dans $[v_0v_1 \dots v_h]$. Donc il existe un $(p+h+2)$-complexe $L_{p+h+2}^{v_0v_1\dots v_h}$ tel que $L_{p+h+2}^{v_0v_1\dots v_h} \to K_{p+h+1}^{v_0v_1\dots v_n} + L_{p+h+1}$ $(F(v_0v_1 \dots v_h))$ ce qui signifie que la condition ϑ_h est réalisée.

42. Finalement nous arrivons à attacher à chaque $(n-1)$-face $(v_1 \dots v_n)$ de Q_n un $(p+n+1)$-complexe $L_{p+n+1}^{v_1\dots v_n}$ dans $[v_1 \dots v_n]$ de manière à vérifier la condition

[10] Si $n = 0$, on a $C_{p+1} \sim C'_{p+1} = \sum_{v=1}^{2} K_{p+1}^v = \sum_{v=1}^{2} (K_{p+1}^v + L_{p+1})$, ce qui donne déjà la contradiction demandée. Soit donc $n \geqq 1$.

ϑ_{n-1}. Or soit $(v_0 v_1 \dots v_n)$ une n-face de Q_n. D'après ϑ_{n-1} et π_n, $L_{p+n+1}(F(v_0 v_1 \dots v_n)) \to FK_{p+n+2}^{v_0 v_1 \dots v_n}$. Donc $C_{p+n+1}^{v_0 v_1 \dots v_n} = K_{p+n+1}^{v_0 v_1 \dots v_n} + L_{p+n+1}(F(v_0 v_1 \dots v_n))$ est un $(p + n + 1)$-cycle évidemment contenu dans $[v_0 v_1 \dots v_n]$. Q_n étant un n-cycle, on a d'après N° 32 $\sum_{(v_0 v_1 \dots v_n)} C_{p+n+1}^{v_0 v_1 \dots v_n} = \sum_{(v_0 v_1 \dots v_n)} K_{p+n+1}^{v_0 v_1 \dots v_n} = C'_{p+n+1} \sim C_{p+n+1}$ dans U ce qui est la contradiction demandée.

§ 5. Théorème C_n

43. ***Prémisse:*** *Q_n est un n-cycle connexe au sens étroit;*[11] *$P_i(Q_n) = 0$ pour $1 \leqq i \leqq n - 1$.*[12] *Si E_i $(0 \leqq i \leqq n - 2)$ est une i-face arbitraire de Q_n et si H_n est l'étoile de E_i dans Q_n, H_n est un n-complexe connexe au sens étroit et tel que $P_j(H_n) = 0$ pour $i + 1 \leqq j \leqq n - 1$. Lorsque $n \leqq 1$, pour chaque sommet (v) de Q_n, chaque $(p + 1)$-cycle dans $[v]$ est homologue à zéro dans $[v]$. Pour $1 \leqq h \leqq n - 1$*[12] *et pour chaque h-face de Q_n, chaque $(p + h)$-cycle et chaque $(p + h + 1)$-cycle dans $[v_0 v_1 \dots v_h]$ est homologue à zéro dans $[v_0 v_1 \dots v_h]$. Lorsque $n \geqq 1$, pour chaque n-face $(v_0 v_1 \dots v_n)$ de Q_n chaque $(p + n)$-cycle dans $[v_0 v_1 \dots v_n]$ est homologue à zéro dans $[v_0 v_1 \dots v_n]$. Γ_p désigne le sousgroupe du $p^{\text{ème}}$ groupe d'homologie de l'espace T constitué par les p-cycles C_p dans T homologues à zéro dans $[v]$ pour $1 \leqq v \leqq N$. H_{p+n+1} désigne le sousgroupe du $(p + n + 1)^{\text{ème}}$ groupe homologie G_{p+n+1} de l'espace U constitué par les $(p + n + 1)$-cycles C_{p+n+1} dans U tels que l'on puisse attacher à chaque n-face $(v_0 v_1 \dots v_n)$ de Q_n un $(p + n + 1)$-cycle $C_{p+n+1}^{v_0 v_1 \dots v_n}$ dans $[v_0 v_1 \dots v_n]$ de manière à avoir $C_{p+n+1} \sim \sum_{v_0 v_1 \dots v_n} C_{p+n+1}^{v_0 v_1 \dots v_n}$ dans U.*

Thèse: *Le groupe Γ_p est isomorphe au groupe-quotient G_{p+n+1}/H_{p+n+1}.*

44. La prémisse du théorème A_n étant vérifiée, on peut attacher à chaque cycle C_p de la famille Γ_p un cycle $C_{p+n+1} = \varphi(C_p)$ de la famille G_{p+n+1} d'après la manière exposée aux N$^{\text{os}}$ 18–23. La prémisse du théorème B_n étant aussi vérifiée, on peut attacher à chaque cycle C_{p+n+1} de la famille G_{p+n+1} un cycle $C_p = \psi(C_{p+n+1})$ de la famille Γ_p d'après la manière exposée aux N$^{\text{os}}$ 30–37. On voit sans peine que les deux relations $C_{p+n+1} = \varphi(C_p)$ et $C_p = \psi(C_{p+n+1})$ s'entraînent mutuellement si l'on convient d'élargir un peu le sens de la relation $C_{p+n+1} = \varphi(C_p)$ de telle sorte qu'on la suppose vérifiée aussi dans le cas où il existe une subdivision C'_{p+n+1} de C_{p+n+1} telle qu'on ait $C'_{p+n+1} = \varphi(C_p)$ dans le sens primitif. Evidemment, les relations $C_p^1 = \psi(C_{p+n+1}^1)$, $C_p^2 = \psi(C_{p+n+1}^2)$ ou, ce qui est la même chose, $C_{p+n+1}^1 = \varphi(C_p^1)$, $C_{p+n+1}^2 = \varphi(C_p^2)$ entraînent $C_p^1 + C_p^2 = \psi(C_{p+n+1}^1 + C_{p+n+1}^2)$, $C_{p+n+1}^1 + C_{p+n+1}^2 = \varphi(C_p^1 + C_p^2)$.

45. D'après la démonstration du théorème A_n, la supposition que C_{p+n+1} appartienne à la famille H_{p+n+1} entraîne l'homologie $\psi(C_{p+n+1}) \sim 0$ dans T. D'après la

[11] Pour $n = 0$: *Q_0 est constitué par deux points.*

[12] Cette condition n'exige rien pour $n \leqq 1$.

démonstration du théorème B_n, la supposition $C_p \sim 0$ dans T entraîne que $\varphi(C_p)$ appartienne à la famille H_{p+n+1}.

46. Les deux opérations φ et ψ ne sont pas univoques; mais de ce qui précède on conclut sans peine qu'elles conduisent à une correspondance biunivoque et isomorphe entre les deux groupes Γ_p et G_{p+n+1}/H_{p+n+1}.

§ 6. Cas particuliers

47. Les suppositions faites dans nos théorèmes relativement à Q_n sont satisfaites en particulier lorsque Q_n est une variété (Mannigfaltigkeit, manifold) au sens de M. van Kampen[13] telle que $P_n(Q_n) = 1$. Le cas le plus important est celui où Q_n est la frontière d'un $(n+1)$-simplex ordinaire; on a ici $N = n+1$, $U = R - \prod_{i=1}^{n+1} A_i$.

48. Soit S une sphère ordinaire ou un plan euclidien complété par un point à l'infini. Nous allons rappeler quelques théorèmes bien connus: S contient un 2-cycle C_2 non homologue à zéro dans S et tel que pour chaque 2-cycle D_2 dans S on ait ou $D_2 \sim 0$ ou bien $D_2 \sim C_2$ dans S. Chaque 0-cycle et chaque 1-cycle dans S est homologue à zéro dans S. Soit A un sousensemble fermé non vide de S. Chaque 2-cycle dans $S - A$ est homologue à zéro dans $S - A$. Un 0-cycle dans $S - A$ est homologue à zéro dans $S - A$ si et seulement s'il est entièrement contenu dans une composante de $S - A$. Si A a $s + 1$ composantes, il existe $s - 1$ 1-cycles C_1^i $(1 \leqq i \leqq s-1)$ dans $S - A$ tels que à chaque 1-cycle C_1 dans $S - A$ on puisse attacher des nombres $r_1, r_2, \ldots, r_{s-1}$ égaux à zéro ou à un de manière que l'on ait $C_1 \sim \sum_{i=1}^{s-1} r_i C_1^i$ dans $S - A$, tandis que l'homologie $\sum_{i=1}^{s-1} r_i C_1^i \sim 0$ dans S n'a lieu que pour $r_1 = r_2 = \ldots = r_{s-1} = 0$. En particulier, si A est un continu chaque 1-cycle dans $S - A$ est homologue à zéro dans $S - A$. Lorsque le nombre des composantes de A est infini, on peut indiquer un nombre s arbitrairement grand de 1-cycles $C_1^i (1 \leqq i \leqq s)$ dans $S - A$ tels que l'homologie $\sum_{i=1}^{s} r_i C_1^i \sim 0$ dans S $(r_i = 0$ ou $= 1)$ n'a lieu que si $r_1 = r_2 = \ldots = r_s = 0$.

49. Pour $R = S$, $p = 0$ le théorème A_0 devient, si l'on suppose les 0-cycles ${}^iC_0$ constitués chacun de deux points dont le premier est indépendant de i: *Soient* $A_1, A_2, \ldots, A_{2k}$ $(k \geqq 1)$ *des sousensembles fermés de* S *en nombre fini et pair. Soit* $T = S - \sum_{i=1}^{2k} A_i$, $U = R - \sum A_i A_j$ $(1 \leqq i < j \leqq 2k)$, $[v] = T + A_v$ $(1 \leqq v \leqq 2k)$. *Soit* $s \geqq 1$ *un nombre entier possédant la propriété suivante:* ${}^1C_1, {}^2C_1, \ldots, {}^sC_1$

[13] E. R. van Kampen, Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze, Thèse, Leiden, 1929, chap. I. V. aussi S. Lefschetz, Topology, Colloquium Publications, 1930, chap. III.

étant s 1-*cycles arbitraires dans* U, *on peut trouver s nombres* $r_1, r_2, \dots, r_s$, *égaux à zéro ou à un, mais non tous égaux à zéro, et l'on peut déterminer, pour* $1 \leqq v \leqq 2k$, *un* 1-*cycle* C_1^v *dans* $[v]$ *de manière à avoir* $\sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_1 \sim \sum_{v=1}^{2k} C_1^v$ *dans* U. *Soient* $p_0, p_1, \dots, p_s$, $(s+1)$ *points de* T *appartenant, pour* $1 \leqq v \leqq 2k$, *à une seule composante de* $[v]$. *Alors on peut, parmi les points* $p_0, p_1, \dots, p_s$, *en choisir deux situés dans la même composante de* T. Si l'on remplace l'homologie $\sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_1 \sim$ $\sim \sum_{v=1}^{2k} C_i^v$ par l'homologie plus forte $\sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_1 \sim 0$, on arrive à l'énoncé suivant: *Soient* $A_1, A_2, \dots, A_{2k}$ *des sousensembles fermés de* S *en nombre fini et pair. Supposons que l'ensemble fermé* $\sum A_iA_j$ $(1 \leqq i < j \leqq 2k)$ *ait au plus* $s \geqq 1$ *composantes. Soient* $p_0, p_1, \dots, p_s$ $s+1$ *points de* S *tels que, pour* $1 \leqq v \leqq 2k$, $0 \leqq i < j \leqq s$, *les points* p_i *et* p_j *puissent être joints par un arc ne rencontrant aucun des* $2k-1$ *ensembles* A_μ $(\mu \neq v)$. *On peut alors indiquer deux points* p_i *et* p_j $(0 \leqq i < j \leqq s)$ *qui peuvent être joints par un arc ne rencontrant aucun des* $2k$ *ensembles* A_v. Plus particulièrement encore, pour $k = 1$ on a l'énoncé suivant: *Soient* A_1 *et* A_2 *deux sousensembles fermés de* S *tels qeu la partie commune* A_1A_2 *ait au plus* $s \geqq 1$ *composantes. Soient* $p_0, p_1, \dots, p_s$ $s+1$ *points de* S *en dehors de* $A_1 + A_2$ *tels que ni* A_1 *ni* A_2 *ne soit une coupure*[14] *de* S *entre deux quelconques d'entre eux. On peut indiquer deux points* p_i *et* p_j *tels que* $A_1 + A_2$ *ne soit pas une coupure de* S *entre* p_i *et* p_j.[15]

50. Pour $R = S$, $p = 0$ le théorème B_0 devient: *Soient* A_1 *et* A_2 *deux sousensembles fermés de* S. Soient ${}^1C_1, {}^2C_1, \dots, {}^sC_1$ $(s > 1)$ s 1-cycles dans $R - A_1A_2$ *tels que, si* $r_1, r_2, \dots, r_s$ *sont des nombres égaux à zéro ou à un, mais non tous égaux à zéro, et si l'on choisit arbitrairement un* 1-*cycle* C_1^1 *dans* $R - A_2$ *et un* 1-*cycle* C_1^2 *dans* $R - A_1$, *on n'a jamais* $\sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_1 \sim C_1^1 + C_1^2$ *dans* $R - A_1A_2$. *Il existe s* 0-*cycles* ${}^1C_0, {}^2C_0, \dots, {}^sC_0$ *dans* $R - (A_1 + A_2)$ *tels que* ${}^iC_p \sim 0$ *dans* $R - A_v$ *pour* $1 \leqq i \leqq s$; $v = 1, 2$, *mais* $\sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_0 \sim 0$ *dans* $R - (A_1 + A_2)$ $($*avec* $r_i = 0$ *ou* $=1)$ *seulement pour* $r_1 = r_2 = \dots = r_s = 0$. En particulier: *Soient* A_1 *et* A_2 *deux souscontinus de* S. *Supposons que l'ensemble* A_1A_2 *ait plus de* s $(\geqq 1)$ *composantes. On peut trouver un nombre fini* $p_1, p_2, \dots, p_{2k}$ *de points de* $R - (A_1 + A_2)$ *de manière que chaque composante de* $R - A_1$, *ainsi que chaque composante de* $R - A_2$ *en contienne un nombre pair, tandis qu'il existe plus de s composantes de* $R -$ $- (A_1 + A_2)$ *dont chacune en contient un nombre impair.* Corollaire 1: *Soient* A_1 *et* A_2 *deux souscontinus de* S *tels que* A_1A_2 *ait plus de* s $(\geqq 1)$ *composantes. Alors*

[14] Un sousensemble fermé A de S est une coupure de S entre p et q, lorsque p et q appartiennent à deux composantes différentes de $S - A$.

[15] Straszewicz, Über die Zerschneidung der Ebene durch abgeschlossene Mengen, Fundamenta Math., t. 7, 1925. Pour $s = 1$, Janiszewski, Sur les coupures du plan faites par des continus, Prace matem.-fizyczne, t. 26, 1913.

$R - (A_1 + A_2)$ a plus de s composantes.[16] Corollaire 2: *Soient A_1 et A_2 deux souscontinus de S tels que $A_1 A_2$ ait au moins deux composantes. Alors il existe dans S deux points p et q tels que A_1 n'est pas et $A_1 + A_2$ est une coupure de S entre eux.*[17]

51. *Pour $R = S$, $p = 0$, $N \geqq 4$ le théorème A_1 donne, si l'on suppose d'abord que $U \neq S$: Soient $A_1, A_2, \ldots, A_k$ $(k \geqq 4)$ des sousensembles fermés de S remplissant les deux conditions: α) les k esembles*

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_{k-2}\,, \quad A_2 + A_3 + \ldots + A_{k-1}\,, \quad A_3 + A_4 + \ldots + A_k\,, \ldots, \quad A_k + A_1 + \ldots + A_{k-3}$$

sont des continus; β) il existe un indice j tel-que $3 \leqq j \leqq k - 1$, $A_1 A_j \neq 0$. Soient p et q deux points de $R - \sum_{i=1}^{2k} A_i$ tels qu'aucun des 2k ensembles $B_\nu = \sum_{\substack{i=1 \\ i=\nu}}^{k} A_i$ $(1 \leqq \nu \leqq k)$ ne soit une coupure entre eux. Alors l'ensemble $\sum_{i=1}^{k} A_i$ n'est pas une coupure entre p et q. Si l'on omet la condition β), on peut toujours affirmer ceci: Soient p, q et r trois points de $R - \sum_{i=1}^{k} A_i$ tels qu'aucun des k ensembles B_ν ne soit une coupure de S entre deux quelconques d'eux. Alors de ces trois points on peut en choisir deux de manière que $\sum_{i=1}^{k} A_i$ ne soit une coupure de S entre eux. Pour $R = S$, $p = 0$, $N = 3$ le théorème A_1 donne: *Soient A_1, A_2, A_3 trois souscontinus de S. Si l'on a $A_1 A_2 A_3 \neq \neq 0$ et si p et q sont deux points de $R - (A_1 + A_2 + A_3)$ tels qu'aucun des trois ensembles $A_1 + A_2$, $A_1 + A_3$, $A_2 + A_3$ ne soit une coupure entre eux, alors l'ensemble $A_1 + A_2 + A_3$ n'est pas non plus une coupure entre eux.*[18] *Si l'on ne suppose rien sur $A_1 A_2 A_3$, et si p, q et r sont trois points de $R - (A_1 + A_2 + A_3)$ tels qu'aucun des trois ensembles $A_1 + A_2$, $A_1 + A_3$, $A_2 + A_3$ ne soit une coupure de S entre deux quelconques d'eux, l'ensemble $A_1 + A_2 + A_3$ ne peut être une coupure de S entre deux quelconques d'eux.*[19] Pour $R = S$, $p = 0$, $N \geqq 4$ le théorème A_1

[16] Straszewicz, l. c.; pour $s = 1$, Janiszewski, l.c.

[17] Kuratowski et Straszewicz, Géneralisation d'un théorème de Janiszewski, Fund. Math., t. 12, 1928.

[18] Kuratowski, Théorème sur trois continus. Monatshefte, t. 36, 1939.

[19] Un continu est dit *indécomposable*, s'il n'est pas la somme de deux souscontinus différents de lui. Or soit A une frontière commune de trois régions de S: soient p, q, r trois points de S appartenant chacun à une de ces trois régions. Alors A est une coupure de S entre deux quelconques des points p, q, r, tandis qu'un sousensemble fermé $A' \neq A$ de A n'est une coupure ni entre p et q ni entre p et r, ni entre q et r. Le théorème du texte entraîne donc qu'on ne peut avoir $A = = A_1 + A_2 + A_3$; A_1, A_2, A_3 étant trois souscontinus tels que $A_1 + A_2 \neq A$, $A_1 + A_3 \neq A$, $A_2 + A_3 \neq A$. Autrement dit: *Toute frontière commune à trois régions de S est un continu indécomposable ou bien la somme de deux continus indécomposables* (Kuratowski, Sur la structure des frontières communes à deux régions, Fund. Math., t. 12, 1928).

donne: *Soient* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ $(k \geqq 4)$ *des sousensembles fermés non vides de S remplissant les deux conditions:* α) *les k ensembles*

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_{k-1}, A_2 + A_3 + \ldots + A_k, \ldots, A_k + A_1 + \ldots + A_{k-1}$$

sont des continus; β) *les ensembles* $A_i A_j$ $(1 \leqq i \leqq j - 2 \leqq k - 2)$ le cas $i = 1$, $j = k$ *étant excepté) sont vides. Il existe des points* $p_1, p_2, \ldots, p_{2h}$ *dans* $R - \sum_{i=1}^{k} A_i$ *tels que pour* $1 \leqq \nu \leqq k$, $B_\nu = \sum_{\substack{i=1 \\ i=\nu}}^{k} A_i$ *chaque composante de* $R - B_\nu$ *en contienne un nombre pair, tandis qu'une certaine composante de* $R - \sum_{i=1}^{k} A_i$ *en contienne un nombre impair. Le théorème vaut aussi pour* $k = 3$, *pourvu qu'on remplace la condition* β) *par la suivante: l'ensemble* $A_1 A_2 A_3$ *est vide.* La thése du théorème qui vient d'être énoncé possède cette conséquence: *il existe deux points p et q dans* $R - \sum_{i=1}^{k} A_i$ *tels que l'ensemble* $A_1 + A_2 + \ldots + A_{k-1}$ *n'est pas une coupure de S entre eux, tandis que l'ensemble* $A_1 + A_2 + \ldots + A_k$ *est une coupure de S entre eux.*

52. Le théorème A_0 a été donné par M. Alexander en 1922.[20] Le théorème C_0 ne diffère pas trop d'un théorème de M. W. Mayer.[21] Que le théorème de M. Mayer peut se transformer dans la forme de notre théorème C_0, a été remarqué par M. Helly.[22] J'ai généralisé beaucoup le théorème de M. Mayer dans un Mémoire qui paraîtra probablement dans les Fundamenta Mathematicae.[23] Les théorèmes A_n, B_n et C_n peuvent être facilement généralisés de la même manière.

[20] A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem, Transactions of the Amer. Math. Soc., t. 23 (corollary W^i).

[21] Abstrakte Topologie, Monatshefte, t. 36, 1929, chap. 4.

[22] Über Systeme von abgeschlossenen Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten, Monatshefte, t. 37, 1930.

[23] Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque, chap. 4, ([7]).

3

SUR LA THÉORIE DE LA DIMENSION

Comptes Rendus Hebdomadaires
des Séances de l'Académie des Sciences.
Paris *193* (1931), 976–977

1. Dans cette Note j'appelle *espace* un espace topologique R possédant les deux propriétés ci-après:[1] 1° si F_1, F_2 sont deux sous-ensembles *fermés* de R sans point commun, il existe deux sous-ensembles *ouverts* de R sans point commun contenant respectivement F_1 et F_2; 2° chaque sous-ensemble ouvert de R est une somme d'une infinité dénombrable de sous-ensembles fermés de R. Chaque sous-ensemble d'un espace est un espace. Chaque espace *distancié* (metrischer Raum) constitue un cas particulier de nos espaces.

2. $\dim R = -1$ si $R = 0$ et réciproquement. $\dim R \leqq n$ signifie que, A étant un sous-ensemble fermé de R et U un sous-ensemble ouvert de R contenant A, il existe un sous-ensemble ouvert V de R contenant A, contenu dans U et tel que $\dim H \leqq \leqq n - 1$, où H est la frontière de V. On sait que pour les espaces *séparables* cette définition de la dimension coïncide avec celle de Menger-Urysohn.[2] Or j'ai démontré les trois théorèmes ci-après, qui ne l'étaient jusqu'à présent que pour les espaces séparables.

3. S étant un sous ensemble arbitraire de R, on a $\dim S \leqq \dim R$.[3]

4. Lorsque $R = \sum_{i=1}^{\infty} S_i$, les ensembles S_i étant fermés dans R, si $\dim S_i \leqq n$ pour chaque i, on a aussi $\dim R \leqq n$.[4]

5. Soit $R = \sum_{\nu=1}^{m} U_\nu$, les U_ν étant ouverts dans R; soit $\dim R = n$. Il existe des sous-ensembles ouverts V_i de R en nombre fini tels que: 1° $R = \sum \overline{V}_i$, où $\overline{V}_i$ est la fermeture de V_i; 2° chaque $\overline{V}_i$ fait partie d'un U_ν; 3° pour $2 \leqq \mu \leqq n + 2$, si S_μ désigne

[1] P. Urysohn, *Math. Annalen*, *94*, 1925, p. 286, note (^{41}) au bas de la page.
[2] K. Menger, *Dimensionstheorie*, Leipzig-Berlin, Teubner, 1928, p. 116.
[3] Menger, *loc. cit.*, p. 81.
[4] Menger, *loc. cit.*, p. 92.

l'ensemble de tous les points de R appartenant à μ au moins des ensembles $\bar{V}_i$, on a $\dim S_\mu \leqq n - r + 1$.[5]

6. Les démonstrations seront publiées dans un autre Recueil.

[5] Menger, *loc. cit.*, p. 156.

4

SUR LES ENSEMBLES CONNEXES IRRÉDUCTIBLES ENTRE n POINTS

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky
61 (1932) 109–129
(Traduit de tchèque:
Množství irreducibilně souvislá mezi n body.)

I.

Jusqu'à présent, la Topologie n'a pas gagné parmi les cours universitaires la place qu'elle mériterait par son importance de plus en plus croissante dans l'ensemble des sciences mathématiques; aucune de ses parties n'a été traitée en langue tchèque. Pour cette raison je trouve bon de faire précéder l'exposé propre du sujet (voir la partie II) par un aperçu sommaire de notions bien connues dont j'aurai besoin.

1. L'ensemble R (composé d'éléments quelconques) sera appelé *espace* (*topologique*),[1] et ses éléments seront appelés *points*, lorsque nous avons choisi d'après une règle π certaines parties de R, que nous appellerons *fermées dans R*. La règle π doit satisfaire aux *axiomes* (conditions) suivantes: 1.1 les ensembles $\emptyset$[2] et R sont fermés dans R; 1.2 tout ensemble composé d'un seul point de R[3] est fermé dans R; 1.3 la somme $A + B$[4] de deux ensembles A et B fermés dans R est aussi fermée dans R; 1.4 l'intersection[5] d'un système quelconque (même infini) d'ensembles fermés dans R est fermée dans R. Un ensemble $A \subset R$[6] sera dit *ouvert* dans R si l'ensemble *complémentaire* $R - A$[7] est fermé dans R. Les ensembles ouverts dans R jouissent donc des propriétés suivantes: 1.5 les ensembles $\emptyset$ et R sont ouverts dans R; 1.6 si $x \in R$ est un point quelconque de R, l'ensemble $R - (x)$ est ouvert dans R; 1.7 l'inter-

[1] On peut trouver des explications plus detaillées de différentes notions d'espace (y compris des remarques historiques) dans le livre M. Fréchet: *Les espaces abstraits*, 1928. Les espaces que nous allons étudier ici y sont appelés *espaces accessibles*.

[2] Le symbole $\emptyset$ désigne l'ensemble *vide* (qui ne contient aucun élément).

[3] L'ensemble composé d'un seul point x sera désigné par (x).

[4] La somme d'un nombre quelconque d'ensembles est l'ensemble des points qui appartiennent à un (au moins) des ensembles du système donné; la notation sera empruntée à l'addition des nombres.

[5] L'intersection d'un système quelconque d'ensembles est l'ensemble des points qui appartiennent à tous les ensembles du système; la notation rappelle celle de la multiplication des nombres.

[6] $A \subset B$ ou $B \supset A$ signifie que l'ensemble A fait partie de l'ensemble B (tout élément de A est élément de B).

[7] $A - B$ est l'ensemble des points de A qui n'appartiennent pas à B.

section AB de deux ensembles A, B ouverts dans R est ouverte dans R; 1.8 la somme d'un système quelconque d'ensembles ouverts est ouverte dans R. On peut arriver à la même notion d'espace en définissant dans R des ensembles ouverts de façon axiomatique à l'aide de 1.5—1.8 et en introduisant ensuite les ensembles fermés: un ensemble $A \subset R$ sera dit fermé dans R si $R - A$ est ouvert dans R.

2. L'exemple le plus important d'espace est l'espace euclidien (ou cartésien) à k dimensions R_k: c'est l'espace de tous les k-tuples ordonnés de nombres réels. [En particulier R_1 est l'ensemble de tous les nombres réels.] Pour que soit un espace au sens de notre définition, il faut définir les ensembles fermés (ouverts) dans R_k. On peut trouver cette définition dans le Mémoire de M. V. Jarník — *Úvod do teorie množství,*[8] paragraphe 4, N^{os} 4 et 5, où l'on a aussi démontré que nos axiomes 1.1—1.4 sont bien vérifiés. Plus tard, (voir 5) nous donnerons un exemple beaucoup plus général.

3. Soient R, R^* deux espaces donnés. Supposons qu'il existe entre R et R^* une application biunivoque telle que l'image de tout ensemble ouvert[9] dans R soit un ensemble ouvert dans R^*, et inversement que tout ensemble dont l'image dans R^* est ouverte soit aussi ouvert dans R. Nous disons alors que les espaces R et R^* sont *homéomorphes. La Topologie* (appelée aussi Analysis Situs) étudie les propriétés des espaces, qui restent invariantes par applications homéomorphes.

4. Soit $A \subset R$. Alors il existe dans R des ensembles fermés $F \supset A$; l'intersection de tous ces F est, d'après 1.4, fermée également, c'est donc le *plus petit* des F. On l'appelle *fermeture de A dans l'espace* R, on le désigne par $\bar{A}$.[10] La définition entraine sans difficulté les propositions suivantes: 4.1 $A = \bar{A}$ si et seulement si A est fermé dans R; 4.2 si $A \subset B$, alors $\bar{A} \subset \bar{B}$; 4.3 $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$.

5. Soit $S \subset R$. Par ensemble fermé dans S nous entendons l'intersection de S avec un ensemble fermé dans R. Nous voyons que les axiomes 1.1—1.4 sont alors valables même dans S, donc *toute partie de l'espace R est aussi un espace.* Il est évident qu'un ensemble ouvert dans S n'est rien d'autre que l'intersection de S avec un ensemble ouvert dans R.

En particulier, toute partie de l'espace euclidien R_k est un espace également, ce qui nous donne un exemple fort général d'espace.

Si S est fermé dans R, alors tout ensemble fermé dans S est aussi fermé dans R. Si S est ouvert dans R, alors tout ensemble ouvert dans S est aussi ouvert dans R.

6. Soit $A \subset S \subset R$. Soit $\bar{A}$ la fermeture de l'ensemble A dans l'espace R. Alors $\bar{A}S$ est la fermeture de l'ensemble A dans l'espace S. Démonstration. Tout d'abord $\bar{A}S$ est bien fermé dans S et contient A. Soit ensuite H un ensemble fermé dans S, $H \supset A$. Il existe donc un ensemble F fermé dans R, tel que $H = SF$, donc $F \supset A$, de sorte

[8] Complément à la seconde édition du livre *Integrální počet* de K. Petr.

[9] Il est aisé de voir que dans cette définition on peut remplacer partout le mot „ouvert" par le mot „fermé".

[10] C'est la notation usuelle des Fundamenta Mathematicae. M. Jarník (loc. cit.) écrit A^0.

que (cf. 4.1 et 4.2) $F \supset \bar{A}$ donc $H = SF \supset \bar{A}S$. Il en résulte que $\bar{A}S$ est le plus petit ensemble fermé dans S contenant A.

7. Soit $k = 2, 3, \ldots$. Nous disons que la somme $\sum_{r=1}^{k} A_r$ (A_r sont parties de l'espace R) a les *termes séparés* si pour $1 \leqq r \leqq k$ A_r est fermé dans $\sum_{r=1}^{k} A_r$ et que pour $1 \leqq r < s \leqq k$ ou ait $A_r A_s = \emptyset$. Dans cette définition nous pouvons remplacer le mot „fermé" par „ouvert". En effet, si p. ex. les ensembles A_r sont fermés dans $\sum_{r=1}^{k} A_r$, alors tout $A_s = \sum_{r=1}^{k} A_r - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^{k} A_r$ est ouvert dans $\sum_{r=1}^{k} A_r$.

8. Supposons que la somme $A + B$ ait les termes séparés. Soit $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$. Alors la somme $A_0 + B_0$ a aussi les termes séparés. Démonstration. Comme $AB = \emptyset$, on a aussi $A_0 B_0 = \emptyset$; de plus $A_0 = A(A_0 + B_0)$; comme A est fermé dans $A + B$, il s'en ensuit que A_0 est fermé dans $A_0 + B_0$. D'une façon analogue nous trouvons que B_0 est fermé dans $A_0 + B_0$.

9. Supposons que les sommes $A + B$, $A + C$ aient les termes séparés. Alors la somme $A + (B + C)$ a les termes séparés. Démonstration. Comme A est fermé dans $A + B$ et dans $A + C$, il existe des ensembles F_1, F_2 fermés dans R tels que $A = F_1(A + B)$, $A = F_2(A + C)$. Mais alors $A \subset F_1$, $A \subset F_2$ donc $F_1 F_2(A + B + C) = F_2 F_1(A + B) + F_1 F_2(A + C) = F_2 A + F_1 A = A + A = A$; or $F_1 F_2$ est fermé dans R, donc $A = F_1 F_2(A + B + C)$ est fermé dans $A + B + C$. On démontre d'une façon analogue que A est ouvert dans $A + B + C$. Ensuite, $AB = \emptyset$, $AC = \emptyset$, donc $A(B + C) = \emptyset$ et $B + C = (A + B + C) - A$; comme A est ouvert dans $A + B + C$, on voit que $B + C$ est fermé dans $A + B + C$.

10. Un ensemble $S \subset R$ est dit *connexe*[11] lorsque $S \neq \emptyset$ et qu'une décomposition $S = A + B$ aux termes séparés n'est possible que si elle est *triviale*, c'est-à-dire telle que soit $A = \emptyset$, soit $B = \emptyset$.[12] Il est alors évident qu'une décomposition plus générale $S = \sum_{r=1}^{k} A_r$ aux termes séparés n'est possible non plus que si $A_r = \emptyset$ à l'exception d'un seul indice r. Il est évident qu'un ensemble composé d'un seul point est connexe, tandis qu'un ensemble contenant un nombre fini $k > 1$ de points n'est pas connexe.

11. Soit $S = A + B$ aux termes séparés. Soit T une partie connexe de S. Alors

[11] Cette définition a été introduite pour la première fois par N. J. Lennes: *Curves in non-metrical analysis situs with an application in the calculus of variations*, Amer. J. of Math., 33, 1911, p. 303. Indépendemment de Lennes, elle a été réintroduite par F. Hausdorff dans son livre *Grundzüge der Mengenlehre*, 1914, chap. VII, § 7. Les simples théorèmes qui suivent sont dus a Hausdorff.

[12] Nous voyons que la connexité d'un ensemble S est une propriété topologique de l'espace S, indépendente du choix de l'espace R plus large dans lequel l'espace S est immergé.

$TA = \emptyset$ ou bien $TB = \emptyset$. Démonstration. D'après 8 on a $T = AT + BT$ aux termes séparés.

12. Soient S_1, $S_2 \subset R$ deux ensembles connexes $S_1 S_2 \neq \emptyset$. Alors $S_1 + S_2$ est connexe. Démonstration. Supposons que nous ayons $S_1 = S_2 = A + B$, les termes du second membre étant séparés. Comme $S_1 S_2 \subset S_1 + S_2$, nous avons (en interchangeant A et B si besoin est) $S_1 S_2 A \neq \emptyset$. D'après 11 nous avons alors $S_1 B = S_2 B = \emptyset$, donc $B = (S_1 + S_2) B = \emptyset$.

13. Soit $S \neq \emptyset$. Supposons que toute paire de points a, b de S soit contenu dans une partie connexe de S. Alors S est connexe. Démonstration. Soit $S = A + B$ aux termes séparés. Si l'on n'avait ni $A = \emptyset$ ni $B = \emptyset$, on pourrait choisir de point a dans A et le point b dans B. Les deux points se trouveraient alors dans un ensamble connexe $T \subset S$, on aurait donc $AT \neq \emptyset \neq BT$, ce qui est en contradiction avec 11.

14. Soit $\mathfrak{M}$ un système de parties, connexes de l'espace R, qui contiennent toutes un point donné a. Alors la somme S du système $\mathfrak{M}$ est connexe. Démonstration. Soit $S = A + B$ aux termes séparés. On peut supposer a dans A, donc $A \neq \emptyset$. Or si l'on avait $B \neq \emptyset$, on pourrait choisir un point b dans B. Ce point b appartient forcément à un ensemble T du système $\mathfrak{M}$, or le point a lui appartient aussi, mais T est une partie connexe de S, on aurait donc $AT \neq \emptyset \neq BT$, en contradiction avec 11.

15. Soit S une partie connexe de l'espace R. Soit $S \subset T \subset \bar{S}$. Alors T est connexe. Démonstration. Soit $T = A + B$ aux termes séparés. D'après 11 on a avec une notation convenable $SB = \emptyset$, donc $S \subset A$, $A \neq \emptyset$. D'après 4.1 et 6 on a $A = T\bar{A}$; d'après 4.2 $\bar{S} \subset \bar{A}$, donc $T \subset \bar{A}$, de sorte que $A = T\bar{A} = T$, donc $B = \emptyset$.

16. Soit $S \neq \emptyset$ un ensemble donné. Un ensemble A sera appelé *composante* de l'ensemble S si A est une partie connexe de S qui n'est contenue dans aucune autre partie connexe de S.[13] Soit T une partie connexe quelconque de S; alors T fait partie d'une composante de S. En effet, il existe des parties connexes U de l'ensemble S qui contiennent T (dont T en particulier); comme T est connexe, on a $T \neq \emptyset$, et d'après 14 la somme A de *tous* les U est bien connexe. Evidemment, A est la composante cherchée de l'ensemble S. Comme tout ensemble composé d'un seul point est connexe, nous voyous en particulier, que tout point de S se trouve dans une composante de S. D'autre part, si A, B sont deux composantes *différentes* d'un ensemble S, on a toujours $AB = \emptyset$, car autrement la somme $A + B$ serait d'après 12 une partie connexe de S.

Si S lui-même est connexe, il n'a qu'une composante ($= S$). Si $S(\neq 0)$ n'est pas connexe, le nombre de ses composantes est >1 (fini ou infini.)

17. Soit A une composante de l'ensemble S. Alors A est fermé dans S. Démonstration. Comme $A \subset \bar{A}S \subset \bar{A}$, l'ensemble $\bar{A}S$ est connexe d'après 15. Comme $A \subset \bar{A}S \subset S$, on a $A = \bar{A}S$ d'après la définition de la composante.

[13] La notion de composante de l'ensemble S ne dépend que de l'espace S, et non pas de l'espace plus large R dans lequel S est plongé.

18. Soit $S = \sum_{r=1}^{k} A_r$ aux termes séparés $\neq \emptyset$. Supposons qu'il soit impossible d'écrire S sous la forme d'une somme de plus de k termes séparés $\neq \emptyset$. Alors $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont les composantes de l'ensemble S (de sorte que S a exactement k composantes). Démonstration. Soit $A_k = B_k + B_{k+1}$ aux termes séparés. Si nous posons $B_1 = A_1, \ldots, B_{k-1} = A_{k-1}$, nous avons $S = \sum_{r=1}^{k+1} B_r$. Pour $1 \leqq r < s \leqq k + 1$, nous avons alors $B_r B_s = \emptyset$. De plus, les ensembles B_r sont ouverts dans S: c'est évident pour $r < k$; pour $r = k$ ou $r = k + 1$, B_r est ouvert dans A_k et A_k est ouvert dans S, de sorte que, d'après 5, B_r est ouvert dans S. Il en résulte que la somme $\sum_{r=1}^{k+1} B_r = S$ a les termes séparés, de sorte qu'un au moins des B_r est $= \emptyset$, donc soit $B_k = \emptyset$, soit $B_{k+1} = \emptyset$. Cela prouve que A_k est connexe. Soit (voir 16) A'_k la composante de l'ensemble S, qui contient A_k. Comme $S = \sum_{r=1}^{k-1} A_r + A_k$ aux termes séparés, nous avons d'après 11 $A'_k \cdot \sum_{r=1}^{k-1} A_r = \emptyset$, c'est-à-dire $A'_k = A_k$; donc A_k est une composante de S. Il en est de même des autres ensembles A_r.

19. Supposons que S ait un nombre fini $k \geqq 2$ de composantes $A_1, \ldots, A_k$. Alors $S = \sum_{r=1}^{k} A_r$ aux termes séparés. Cela découle de 16 et 17.

20. Soit S une partie connexe de l'espace connexe R. Soit $R - S = P + Q$ aux termes séparés. Alors $S + P$ est un ensemble connexe.[14] Démonstration. Soit $S + P = A + B$ le second membre ayant les termes séparés. D'après 11 et pour une notation convenable, nous avons $SA = \emptyset$, donc $A \subset P$, de sorte que d'après 8 la somme $A + Q$ a les termes séparés. Donc, d'après 9, la somme $A + (B + Q)$ a les termes séparés également. Or $A + B + Q = S + P + Q = S + (R - S) = R$ est connexe, ce qui entraîne que l'on a ou bien $A = \emptyset$, ou bien ($B + Q = \emptyset$, donc) $B = \emptyset$.

21. D'après 5, une partie quelconque de l'ensemble R_1 de tous les nombres réels est un espace. En particulier, un intervalle $\langle a, b \rangle$ (c'est-à-dire l'ensemble de tous les x tels que $a \leqq x \leqq b$, où a, b sont deux nombres réels, $a < b$) est un espace *connexe*. Démonstration. Soit $\langle a, b \rangle = A + B$ aux termes séparés. Les ensembles A, B sont fermés dans $\langle a, b \rangle$, l'intervalle $\langle a, b \rangle$ est fermé dans R_1 et borné, donc (cf. 5) les ensembles A, B sont fermés dans R_1. Nous avons à déduire une contradiction à partir de l'hypothèse $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Comme $AB = \emptyset$, il existe[15] un nombre $\alpha > 0$ tel que si x est dans A et y dans B, on ait toujours $|x - y| > \alpha$. D'autre part, il existe évidemment dans $\langle a, b \rangle$ une suite finie $x_0, x_1, \ldots, x_n$, telle que $x_0 = x$, $x_n = y$, $|x_{r+1} - x_r| < \alpha$ pour $0 \leqq r \leqq n - 1$. Mais pour un r convenablement

[14] Voir B. Knaster, C. Kuratowski: *Sur les ensembles connexes*, Fundamenta mathematicae, 2, 1921, p. 210 (théorème VI).

[15] Voir V. Jarník, loc. cit., p. 701, VI.

choisi, nous aurons x_r dans A et x_{r+1} dans B (ou inversement) et l'inégalité $|x_{r+1} - x_r| < \alpha$ contredira la définition du nombre α.

22. Tout espace homéomorphe à un intervalle $\langle a, b\rangle$ s'appelle *arc simple*; les images des points a, b sont ses *extrémités*.[16] Comme tout espace homéomorphe à un espace connexe est évidemment connexe lui-même, nous voyons que tout arc simple est connexe.

23. Nous sommes maintenant capable de déterminer toutes les parties connexes de l'espace R_1 des nombres réels. Ce sont tout d'abord toutes les parties composées d'un seul point chacune, ensuite, en vertu de 13 et 21, tous les intervalles. Il est évident que R_1 n'a pas d'autres parties connexes. Car si $S \subset R_1$ et que S contienne plus qu'un seul nombre sans toute fois être intervalle, il existe dans $R_1 - S$ un nombre a tel que $AS \neq \emptyset \neq BS$, où $A(B)$ désigne l'ensemble de tous les nombres réels plus grands (plus petits) que a. Or les ensembles A, B sont ouverts dans R_1, donc $S = AS + BS$ aux termes séparés, donc S n'est pas connexe.

II.

24. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ des points distincts d'un espace R donné. Nous disons que R est *connexe irréductible entre les points* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et nous écrivons $R = I(a_1, \ldots, a_n)$, lorsque: 1° R est un espace connexe; 2° aucune partie $S \neq R$ de l'espace R contenant tous les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n'est connexe. Pour $n = 2$ cette notion a été introduite par N. J. Lennes dans son travail cité sub[11], et étudiée en détail par B. Knaster et K. Kuratowski.[17] Le cas de $n > 2$ n'a pas été jusqu'à présent étudié (à ce que je sais, du moins). D'après 23, l'intervalle $\langle a, b\rangle$ est connexe irréductible entre les points a et b, mais ne l'est pas entre une autre paire de ses points. Comme la connexité est une propriété topologique, un arc simple est connexe irréductible entre ses deux extrémités, mais ne l'est pas entre une autre paire de ses points.

25. Soit $R = I(a_1, a_2, \ldots, a_m), (m = 2, 3, \ldots)$. Soient $b_1, b_2, \ldots, b_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ d'autres points de l'espace R. Alors évidemment $R = I(a_1, a_2, \ldots, a_m; b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

26. Soit $R = S + T$. Soit $ST = (x)$ un ensemble composé d'un seul point. Soit $S = I(a_1, \ldots, a_m, x)$, $T = I(b_1, \ldots, b_n, x)$ $(m, n = 1, 2, 3, \ldots)$. Supposons S et T fermés dans R.[18] Alors $R = I(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$. Démonstration. L'espace R

[16] A priori les extrémités pourraient changer si l'on changeait l'application homéomorphe sur l'intervalle; le résultat donné à la fin du paragraphe 24 fait cependant voir que ce n'est pas le cas.

[17] Voir loc. cit. sub[14]. Cf. aussi L. Vietoris: *Stetige Mengen*, Monatshefte für Math. und Physik, 31, 1921, p. 173–204. Les ensembles $I(a, b)$ s'appellent ici *Linienstück*.

[18] Cette supposition est essentielle. Exemple (l'espace R fait partie du plan euclidien R_2): S est le segment joignant les points $x = (0, 1)$, $a = (0, -1)$; l'ensemble T est composé du point x et des points $(t, \sin 1/t)$ $(0 < t \leqq 1)$. On a $S = I(a, x)$, $T = I(b, x)$ où $b = (1, \sin 1)$, $ST = (x)$, mais non pas $R = S + T = I(a, b)$. L'ensemble T n'est pas fermé dans R.

est connexe d'après 12. Soit P une partie connexe de R contenant les points $a_1, \ldots$ $\ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$; nous avons à montrer que $P = R$. Posons $SP = S_0$, $TP = T_0$, alors S_0 contiendra les points $a_1, \ldots, a_m$ et T_0 les points $b_1, \ldots, b_n$. Les ensembles S, T étant fermés dans R, S_0 et T_0 sont fermés dans P. Comme $P = S_0 + T_0$ est connexe et $S_0 \neq \emptyset$, $T_0 \neq \emptyset$, on a forcément $S_0T_0 \neq \emptyset$. Mais $S_0T_0 \subset ST = (x)$, donc $S_0T_0 = (x)$. Soit $S_0 = A + B$ aux termes séparés et supposons que le point x appartient p. ex. à B. Les ensembles A, B sont fermés dans S_0; S_0, T_0 sont fermés dans P, donc les ensembles A, $B + T_0$ sont fermés dans P. Ensuite $A(B + T_0) = AB + AT_0 = AT_0 \subset (S_0 - (x))\, T_0 = S_0T_0 - (x) = \emptyset$. Donc $P = A + (B + T_0)$ aux termes séparés; comme $B + T_0 \neq \emptyset$ et P est connexe, nous avons $A = \emptyset$. Il en résulte que S_0 est une partie *connexe* de S contenant les points $a_1, \ldots, a_m, x$, donc $S_0 = S$. De façon analogue nous obtenons $T_0 = T$, donc $P = R$.

27. Soit $R = I(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Soit x un nouveau point de l'espace R, différent des points $a_1, \ldots, a_n$. L'ensemble $R - (x)$ a un nombre fini k de composantes, on a $2 \leqq k \leqq n$. Toute composante P de l'ensemble $R - (x)$ contient au moins un des points $a_1, \ldots, a_n$. Soient $a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}$ exactement ceux des points $a_1, \ldots, a_n$ qui appartiennent à P. On a alors $P + (x) = I(a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}, x)$. De plus les ensembles P sont ouverts dans R et les ensembles $P + (x)$ sont fermés dans R. Démonstration. Comme $R - (x)$ contient tous les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, l'ensemble $R - (x)$ n'est pas connexe. Il est donc possible d'écrire $R - (x)$ comme la somme de deux termes séparés $\neq \emptyset$. D'une manière plus générale soit $R - (x) = \sum_{r=1}^{k} P_r$ $(k = 2, 3, \ldots)$ aux termes séparés $\neq \emptyset$. Les ensembles P_r sont ouverts dans $R - (x)$ qui est ouvert dans R, donc P_r sont ouverts dans R. Il en résulte que $P_r + (x)$ sont fermés dans R, car p. ex. $P_1 + (x) = R - \sum_{r=2}^{k} P_r$. D'après 20, $P_r + (x)$ sont des ensembles connexes. Si p. ex. P_1 ne contenait aucun des points $a_1, \ldots, a_n$, l'ensemble $R - P_1 = \sum_{r=2}^{k} (P_r + (x))$ serait une partie connexe (d'après 12) de R contenant tous les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on aurait donc $R - P_1 = R$ d'où $P_1 = \emptyset$, ce qui est une contradiction. Soient donc $a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}$ $(m \geqq 1)$ exactement ceux des points $a_1, \ldots, a_n$ qui se trouvent dans P_1. Soit S une partie connexe de $P_1 + (x)$, contenant tous les $m + 1$ points $a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}, x$. Alors l'ensemble $S + \sum_{r=2}^{k} (P_r + (x))$ est une partie connexe (d'après 12) de R contenant tous les points $a_1, \ldots, a_n$, de sorte que $S + \sum_{r=2}^{k} (P_r + (x)) = R$, d'où $P_1 \subset S$, donc $S = P_1 + (x)$. On a donc $P_1 + (x) = I(a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}, x)$. Comme chacun des k ensembles séparés P_r contient au moins un des points $a_1, \ldots, a_n$, nous avons $k \leqq n$. Si nous prenons k maximal, les ensembles P_r seront, d'après 18, les composantes de l'ensemble $R - (x)$.

28. Pour le cas particulier de $n = 2$ nous obtenons le résultat suivant: Soit $R = I(a, b)$. Soit x un nouveau point de R, différent de a et de b. Alors $R - (x)$ a deux

composantes $A(x)$ et $B(x)$, dont la première contient le point a et la seconde le point b. Les ensembles $A(x)$ et $B(x)$ sont ouverts dans R; les ensembles $A(x) + (x)$ et $B(x) + (x)$ sont fermés dans R. De plus, $A(x) + (x) = I(a, x)$; $B(x) + (x) = I(x, b)$. Soit maintenant y un nouveau point de l'espace R, différent des points a, b, x. Alors un des deux ensembles connexes $A(y) + (y)$, $B(y) + (y)$ fait partie de $R - (x)$, donc d'une de ses composantes $A(x)$, $B(x)$. On n'a pas $A(y) \subset B(x)$, car $A(y)$ contient le point a qui n'appartient pas à $B(x)$. De façon analogue on trouve que l'on ne peut pas avoir $B(y) \subset A(x)$ non plus. Donc ou bien $A(y) + (y) \subset A(x)$, ou bien $B(y) + (y) \subset B(x)$, de sorte que $R - (B(y) + (y)) \supset R - B(x)$, c'est-à-dire $A(y) \supset A(x) + (x)$. Nous avons donc $A(x) \neq A(y)$ et ou bien $A(y) \subset A(x)$, ou bien $A(y) \supset A(x)$. Cela permet *d'ordonner*[19] l'ensemble R de la façon suivante: 1° Le point a précède tout autre point de R. 2° Le point b suit tout autre point de R. 3° Si x, y sont deux nouveaux points de R ($\neq a, b$), alors x précède y lorsque $A(x) \subset A(y)$. Il est évident que tout point de $A(x)$ ($x \neq a, b$) précède x et que tout point de $B(x)$ suit x.

29. Supposons l'espace $R = I(a, b)$ ordonné suivant 28. Nous appellerons *intervalle* dans R toute partie S de l'ensemble R qui contient plus d'un point et pour laquelle on a: Lorsque x, y, z sont trois points de R, x précède y, y précède z, x et z appartiennent à S, alors y appartient à S également. Soit S une partie de l'espace $R = I(a, b)$ contenant plus d'un point de R; alors S est connexe si et seulement si c'est un intervalle dans R.[20] Démonstration. Soit *d'abord* S un intervalle dans R ayant x pour son premier et y pour son dernier point. Alors quatre cas sont possibles: 1° $x = a$, $y = b$; 2° $x = a$, $y \neq b$; 3° $x \neq a$, $y = b$; 4° $x \neq a$, $y \neq b$. Dans les trois premiers cas nous avons $S = R$, $S = A(y) + (y)$, ou $S = (x) + B(x)$, respectivement; S est donc connexé en vertu de 28. Le quatrième cas peut facilement être réduit au troisième, car alors S est évidemment un intervalle dans $A(y) + (y) = I(a, y)$. Soit *ensuite* S un intervalle quelconque. Fixons arbitrairement deux points x, y ($x \neq y$) dans S. Lorsque x p. ex. précède y, alors l'intervalle dans R qui a x pour son premier et y pour son dernier point, est une partie connexe de S contenant x et y, donc S est connexe d'après 13. Soit *maintenant* S un ensemble dans R, mais qui n'est pas un intervalle. Il existe alors dans $R - S$ un point $x \neq a, b$, tel que $SA(x) \neq \emptyset \neq SB(x)$. Comme $S \subset R - (x) = A(x) + B(x)$, S n'est pas connexe (voir 11).

C'est également l'ordre *inverse* dans R, que l'on obtient en interchangeant les rôles joués par les points a et b, qui jouit de la même propriété. Mais il est évident qu'aucun autre ordre dans R ne peut jouir de la même propriété.

30. L'ordre introduit en 28 dans l'espace $R = I(a, b)$ jouit encore de la propriété suivante:[21] Soit $R = S + T$, $ST = \emptyset$. Supposons que S et T soient des intervalles, et que S contienne le point a, et T contienne le point b. Alors ou bien il existe dans S un dernier point α, ou bien il existe dans T un premier point β; mais de ces deux

[19] Voir loc. cit. sub[14], p. 219, théorème XX.
[20] Voir loc. cit. sub[14], p. 221, corollaire XXIV.
[21] Voir loc. cit. sub[14], p. 221, théorème XXIII.

points il ne peut exister qu'un seul. Démonstration. Sie α existe, nous avons évidemment $S = A(\alpha) + (\alpha)$, donc (d'après 28) S est fermé dans R. Si α n'existe pas, alors S est évidemment la somme de tous les $A(x)$ où x parcourt l'ensemble S, donc S est une somme d'ensembles ouverts dans R (voir 28), d'où il résulte (voir 1.8) que S est ouvert dans R. D'un manière analogue, nous trouvons que T est fermé dans R si β existe, et ouvert dans R si β n'existe pas. Donc, si notre théorème n'était pas vrai, la somme $R = S + T$ aurait les termes séparés $\neq \emptyset$ et l'espace R ne serait pas connexe.

31. Soient

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \tag{1}$$

des points différents de l'espace R, $k = 2, 3, \ldots$ Les points (1) forment une partie T de l'espace R; soit $S = R - T$. Supposons que pour chaque point a_ν de (1) il existe au moins un autre point a_μ de (1) tel que

$$S + (a_\nu) + (a_\mu) = I(a_\nu, a_\mu)\,. \tag{2}$$

Il est alors possible de diviser les points (1) en deux groupes (non-vides) tels que (2) est vérifié si et seulement si a_ν et a_μ appartiennent à des groupes différents. Soient $b_1, \ldots, b_r$, et $c_1, \ldots, c_s$ $(r + s = k)$ ces deux groupes, nous écrivons

$$S = I^*(b_1, \ldots, b_r \mid c_1, \ldots, c_s)\,.\,^{22}$$

Démonstration. Nous allons partir d'une certaine paire de points a_ν, a_μ satisfaisant à la condition (2) et nous ordonnons l'ensemble $S + (a_\nu) + (a_\mu)$ suivant 28. Cela introduit également un ordre dans l'ensemble S lui-même; le théorème établié au paragraphe 29 est valable pour S aussi. Nous avons, bien entendu, deux ordres possibles, l'un inverse de l'autre. La remarque qu'on trouve à la fin du paragraphe 29 a lieu pour S aussi, d'où il résulte aisément que la paire d'ordres (mutuellement inverses) dans l'ensemble S, que nous obtenons ainsi à partir des points a_ν, a_μ, ne changera pas si nous remplaçons les points a_ν, a_μ par une autre paire de points de (1), pourvu qu'elle satisfasse, bien entendu, la condition (2). Fixons donc un de ces deux ordres dans S; nous dirons alors que nous avons *orienté* l'ensemble S; il y a exactement deux manières différentes dont on peut le faire. Prenons maintenant un point x arbitraire dans S et désignons par $P(x)$ ou $Q(x)$ l'ensemble des points de $S - (x)$ qui précèdent x, ou le suivent respectivement. Si (2) a lieu, nous voyons en raison de 29, que ou bien les ensembles

$$P(x) + (a_\nu)\,, \quad Q(x) + (a_\mu) \tag{*}$$

[22] Les hypothèses admises peuvent se réaliser pour n'importe quelles valeurs r, s. Exemple: R est une partie du plan euclidien R_2. Soient β_ν, $1 \leqq \nu \leqq r$, des nombres arbitraires, tous différents, pris dans l'intervalle $\langle -1, 1 \rangle$, soient γ_ν, $1 \leqq \nu \leqq s$, des nombres arbitraires satisfaisant aux mêmes conditions. Nous prenons les points $b_\nu = (-1, \beta_\nu)$, $1 \leqq \nu \leqq r$ et les points $c_\nu = (1, \gamma_\nu)$, $1 \leqq \nu \leqq s$; S sera l'ensemble des points $(t, \sin(1/(1 - |t|)))$ où $-1 < t < 1$.

sont connexes et les ensembles

$$(**)\qquad P(x) + (a_\mu)\,,\quad Q(x) + (a_\nu)$$

ne le sont pas, ou bien, inversement, les ensembles (*) ne sont pas connexes et les ensembles (**) sont connexes. Nous obtenons alors la division des points (1) en rangeant au premier groupe les points a_ν pour lesquels $P(x) + (a_\nu)$ est connexe, et ces points seulement; l'autre groupe comprendra alors tous les points (1) pour lesquels $Q(x) + (a_\nu)$ est connexe, et ces points seulement. Nous dirons alors que les points (1) qui appartiennent au premier (second) groupe sont des points *initiaux* (*finals*) pour S; *tous* les points (1) auront alors le nom commun de points *extrèmes* pour S. Si nous changeons l'orientation de S, les points initiaux deviendront finals et réciproquement. Si $b_1, \ldots, b_r$ $(c_1, \ldots, c_s)$ sont des points initiaux (finals) pour S, on a

$$(3)\qquad \overline{P(x)} = P(x) + (x) + \sum_{\nu=1}^{r}(b_\nu)\,;\quad \overline{Q(x)} = Q(x) + (x) + \sum_{\nu=1}^{s}(c_\nu)\,.$$

Démonstration. L'ensemble $P(x)$ est ouvert dans S, de sorte que $S - P(x) = Q(x) + (x)$ est fermé dans S. Si le point x n'était pas dans $\overline{P(x)}$, l'ensemble $P(x)$ serait fermé dans S et l'on aurait $S = P(x) + (Q(x) + (x))$ aux termes séparés, ce qui est impossible. A cause de la symétrie, nous pouvons nous borner à la démonstration de la première des formules (3) seulement. Il nous reste donc à démontrer que les points b_ν appartiennent et que les points c_ν n'appartiennent pas à $\overline{P(x)}$. Si un point b_ν n'appartenait pas à $\overline{P(x)}$, l'ensemble $P(x)$ serait fermé dans $P(x) + (b_\nu)$ et la somme $P(x) + (b_\nu)$ aurait les termes séparés, ce qui est impossible, car $P(x) + (b_\nu)$ est connexe. Si un point c_ν appartenait à $\overline{P(x)}$, l'ensemble $P(x) + (c_\nu)$ serait connexe d'après 15, ce qui est contradictoire.

32. Soient

$$(4)\qquad v_1, v_2, \ldots, v_k\quad (k = 2, 3, \ldots)$$

des points de l'espace R. Soient

$$(5)\qquad S_1, S_2, \ldots, S_l\quad (l = 1, 2, 3, \ldots)$$

des ensembles ouverts dans R. Soit ensuite

$$(6)\qquad R = \sum_{\nu=1}^{k}(v_\nu) + \sum_{\nu=1}^{l} S_\nu$$

chaque point de R appartenant à un seul des $k + l$ ensembles figurant au second membre de (6). Pour $1 \leqq \lambda \leqq l$ soit

$$\bar{S}_\lambda = S_\lambda + \sum_{\nu=1}^{r}(a_\nu) + \sum_{\nu=1}^{s}(b_\nu) = I^*(a_1, \ldots, a_r \mid b_1, \ldots, b_s)\,,\quad (r, s = 1, 2, 3, \ldots)$$

où $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$ sont des points différents de (4). Supposons de plus [23] que si S_λ, S_μ sont deux ensembles distincts de (5), il existe des indices $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ ($t = 1, 2, 3, \ldots$; $\nu_0, \nu_1, \ldots = 1, 2, \ldots, l$) tels que $\nu_0 = \lambda$, $\nu_t = \mu$ et pour $1 \leqq i \leqq t$ on ait $\bar{S}_{\nu_{i-1}}\bar{S}_{\nu_i} \neq \emptyset$. Supposons que pour tout μ ($1 \leqq \mu \leqq k$) il existe au moins un λ ($1 \leqq \lambda \leqq l$) tel que le point v_μ appartienne à $\bar{S}_\lambda$. Si l'on prend arbitrairement un indice λ ($1 \leqq \lambda \leqq l$), si (7) a lieu et que le point $a_\nu(b_\nu)$ soit choisi arbitrairement parmi les r points $a_1, \ldots, a_r$ (parmi les s points $b_1, \ldots, b_s$), supposons qu'il soit alors impossible de trouver des indices $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ ($t = 0, 1, 2, \ldots$; $\nu_0, \nu_1, \ldots = 1, 2, \ldots, l$) tous différents de λ et tels que le point a_ν appartienne à S_{ν_0}, le point b_ν à S_{ν_t} et que l'on ait $\bar{S}_{\nu_{i-1}}\bar{S}_{\nu_i} = \emptyset$ pour $1 \leqq i \leqq t$.[24]
Nous disons que R et un *arbre général*;[25] les points (4) seront appelés *sommets* de cet arbre, les ensembles (5) seront ses *côtés*.

33. Les sommets et les côtés d'un arbre général R ne sont pas déterminés sans ambiguïté *par l'espace R*; ils dépendent de sa *construction*. On peut toujours construir cet arbre de telle façon que des points donnés (en nombre fini) de l'espace R soient sommets de l'arbre. Car si pour une construction (6) de l'arbre général R un point x de l'espace R n'est pas sommet de l'arbre R, mais appartient p. ex. au côté S_λ, orientions S_λ (voir 31), désignons par $P(x)$ et $Q(x)$ l'ensemble des points de S_λ qui précèdent, ou suivent respectivement, le point x, ajoutons aux sommets (4) le nouveau sommet x, éloignons de (5) le côté S_λ et ajoutons-y deux nouveaux côtés $P(x)$ et $Q(x)$. Le lecteur vérifiera lui-même facilement que pour cette nouvelle construction de l'espace R toutes les conditions imposées aux arbres généraux subsistent.

34. Il est possible d'écrire les côtés (5) de l'arbre général (6) dans un tel ordre que les espaces $R_\lambda = \sum_{r=1}^{\lambda} \bar{S}_r$ ($1 \leqq \lambda \leqq l$) deviennent arbres généraux.[26] Démonstration. Il est évident que R_1 est un arbre quel que soit le choix du côté S_1. Supposons que pour un certain λ ($2 \leqq \lambda \leqq l$) les côtés $S_1, \ldots, S_{\lambda-1}$ soient déjà choisis de telle manière que $R_1, \ldots, R_{\lambda-1}$ soient des arbres généraux. Si S_μ est un nouveau côté (choisi arbitrairement), il existe des côtés $S_1 = S_{\nu_0}, S_{\nu_1}, \ldots, S_{\nu_t} = S_\mu$ tels que $\bar{S}_{\nu_{i-1}}\bar{S}_{\nu_i} = \emptyset$. Prenons i tel que $\nu_i \geqq \lambda$, ν_i étant minimal avec cette propriété; posons ensuite $S_\lambda = S_{\nu_i}$. Le lecteur vérifiera facilement lui-même que ce choix du côté S_λ implique que R_λ est aussi un arbre général; cela achève la démonstration. Comme $\bar{S}_\lambda\bar{S}_{\nu_{i-1}} = \emptyset$, $\bar{S}_{\nu_{i-1}} \subset R_{\lambda-1}$ et les termes de la somme (6) n'ont pas de points communs, il existe dans $R_{\lambda-1}$ un sommet a qui est extrème pour S_λ. Orientons S_λ de telle manière que a devienne point initial pour S_λ et désignons par b un point final pour S_λ. Alors b

[23] Cette condition est inutile si $l = 1$.
[24] Cette dernière condition est inutile si $t = 0$.
[25] Si $\bar{S}_\lambda$ sont des arcs simples et que l'on ait dans (7) $r = s = 1$ (pour tout λ), l'arbre général ainsi défini deviendra ce qu'on appelle *arbre* en Topologie combinatoire.
[26] Les sommets et les côtés de l'arbre général R_λ sont les sommets et les côtés de l'arbre général R contenus dans R_λ.

n'est pas dans $R_{\lambda-1}$. Dans le cas contraire, il existerait en effet dans $R_{\lambda-1}$ des côtés S_μ, S'_μ tels que le premier (le second) d'entre eux eût le point a (ou b, respectivement) pour point extrême. Comme $R_{\lambda-1}$ est un arbre général, il existerait alors des indices $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_t$, tous $<\lambda$ et tels que $\nu_0 = \mu$, $\nu_t = \mu'$, et l'on aurait de plus[24] $\bar{S}_{\nu_{i-1}}\bar{S}_{\nu_i} \neq \emptyset$. Or comme le point a (ou b) appartient à $\bar{S}_{\nu_0}$ (ou à $\bar{S}_{\nu_t}$, respectivement) et que a (b) est point initial (final) pour S_λ et $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_t \neq \lambda$, R ne serait pas un arbre général.

35. Soit x un point de l'arbre général R, sans être un de ses sommets. Alors l'ensemble $R - (x)$ n'est pas connexe. Démonstration. Désignons par S_λ le côté de R qui contient x et reprenons la notation (7). Orientons S_λ de telle façon que les points a_ν ($1 \leqq \nu \leqq r$) soient initiaux pour S_λ. L'ensemble A soit composé des points a_ν ($1 \leqq \nu \leqq r$) et de tous les points des ensembles $\bar{S}_\mu$ ($\mu \neq \lambda$) pour lesquels on peut indiquer des indices $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_t$ ($t \geqq 0$), tous $\neq \lambda$, tels que: un des points a_ν ($1 \leqq \nu \leqq r$) appartienne à $\bar{S}_{\nu_0}$, $\nu_t = \mu$, et que l'on ait $\bar{S}_{\nu_{i-1}}\bar{S}_{\nu_i} \neq \emptyset$ pour $1 \leqq i \leqq t$.[24] D'après la définition de l'arbre général R aucun point b_ν ($1 \leqq \nu \leqq s$) n'appartient à A, donç l'ensemble $B = (R - S_\lambda) - A$ contient tous les points b_ν. Il est évident que A est fermé dans R. Si $v \neq a$ est un sommet de l'arbre général R et que v appartienne à A, A contiendra évidemment tout côté S_μ ($\mu \neq \lambda$) pour lequel v est un point extrême. Il en résulte sans difficulté que A est ouvert dans $R - S_\lambda$, donc B est fermé dans $R - S_\lambda$, donc (voir 5) B est fermé dans R. Désignons par $P(x)$ ou $Q(x)$, l'ensemble des points de S_λ qui précèdent, ou suivent respectivement, le point x. On a alors $R = (A + \overline{P(x)}) + (B + \overline{Q(x)})$, les deux termes étant fermés dans R et sans point commun outre x (voir 31 (3)). Donc

$$R - (x) = [(A + \overline{P(x)}] - (x)] + [(B + \overline{Q(x)}) - (x)]$$

aux termes séparés $\neq \emptyset$, de sorte que $R - (x)$ n'est pas connexe.

36. Gardons la notation du paragraphe 35. Modifions les côtés et les sommets der l'arbre général R suivant 33.[27] Le lecteur trouvera facilement que

$$R_1 = A + \overline{P(x)}, \quad R_2 = B + \overline{Q(x)}$$

sont des arbres généraux; leurs sommets et leurs côtés sont les sommets et les côtés de R contenus dans R_1 ou R_2 respectivement. Les arbres généraux R_1 et R_2 n'ont qu'un seul point commun: c'est le point x qui est sommet de l'un et de l'autre; chacun d'eux n'a qu'un côté pour lequel x est extrême (ce sont les côtés $P(x)$ et $Q(x)$).

37. Nous appellerons *point extrême* d'un arbre général R tout sommet de R qui est point extrême pour un seul de ses côtés.[28] Tout arbre général a au moins deux points extrêmes différents. Démonstration. L'énoncé est évident si le nombre de côtés $l = 1$; soit donc $l > 1$. Ecrivons les côtés S_λ ($1 \leqq \lambda \leqq l$) dans le même

[27] Les symboles x, $P(x)$, $Q(x)$ ont la même signification que dans 35.

[28] Nous verrons plus tard (paragraphe 49) que les points extrêmes de l'arbre général R sont déterminés sans ambiguïté par l'espace R (indépendemment de sa construction).

ordre que dans 34. Alors tout point extrême de S_t est point extrême pour R (car il n'appartient pas à R_{t-1}, comme on l'a montré en 34). Il existe donc au moins un point extrême de R. Mais dans la construction du paragraphe 34 nous pouvons choisir arbitrairement le côté S_1: nous pouvons donc supposer que $\bar{S}_1$ contient un point extrême de R. Comme $\bar{S}_l$ contient lui-aussi un point extrême de R, R a au moins deux points extrêmes.

38. Tout arbre général est connexe. Démonstration. Tout côté S_λ est connexe; donc (voir 15) les ensembles $\bar{S}_\lambda$ sont également connexes. Lorsque S_λ, S_μ sont deux côtés différents, il existe des indices $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ $(t \geqq 1)$ tels que $\nu_0 = \lambda$, $\nu_t = \mu$ et $\bar{S}_{\nu_{i-1}}\bar{S}_{\nu_i} \neq \emptyset$ pour $1 \leqq i \leqq t$. Donc (d'après 12) $\sum_{i=0}^{t} \bar{S}_{\nu_i}$ est connexe. Mais tout sommet v_μ $(1 \leqq \mu \leqq k)$ se trouve dans un certain ensemble $\bar{S}_\lambda$ $(1 \leqq \lambda \leqq l)$. En vertu de (6) nous obtenons $\sum_{r=1}^{l} \bar{S}_r = R$, et R est connexe d'après 13.

39. Soit v un point extrême d'un arbre général R. Alors $R - (v)$ est connexe. La démonstration est la même que dans 36 avec la différence qu'il faut prendre $\bar{S}_\lambda - (v)$ au lieu de $\bar{S}_\lambda$.[29]

40. Nous appellerons *point singulier* de R un point a d'un arbre général R si l'ensemble $R - (a)$ est connexe. D'après 35 tout point singulier est sommet de l'arbre; il existe donc seulement un nombre fini de points singuliers. D'après 39 tout point extrème est singulier,[30] donc en vertu de 37 tout arbre général a au moins deux points singuliers.

41. Soit R un arbre général; soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tous ses points singuliers (donc $n = 2, 3, \ldots$). Alors $R = I(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. D'une façon plus générale, soient $q_1, q_2, \ldots$ $\ldots, q_m$ $(m \geqq 2)$ m points différents d'un arbre général R. Alors $R = I(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ si et seulement si parmi les points $q_1, \ldots, q_m$ il yatous les points $p_1, \ldots, p_n$. Démonstration. Soit S une partie connexe de R contenant tous les points $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Si l'on n'avait pas $S = R$, il existerait un point z dans $R - S$. Comme S contient tous les points singuliers, l'ensemble $R - (z) \subset S$ ne serait pas connexe. Donc $R - (z) =$ $= A + B$ aux termes séparés $\neq \emptyset$. D'après 11 et pour une notation convenable, on aurait $BS = \emptyset$. Or l'ensemble $B + (z)$ est connexe (d'après 20) et contient plus d'un point; il contient donc aussi le point x qui n'est pas sommet de R. Comme $BS = \emptyset$, le point x est dans $R - S$, donc $S \subset R - (x)$. D'après 35 et 36 nous avons $R - (x) =$ $= [R_1 - (x)] + [R_2 - (x)]$ aus termes séparés, R_1 et R_2 étant des arbres généraux.

[29] Si $\bar{S}_{\nu_{i-1}}\bar{S}_{\nu_i} \neq \emptyset$, on a $[\bar{S}_{\nu_{i-1}} - (v)][\bar{S}_{\nu_i} - (v)] \neq \emptyset$ car autrement v serait point extrème des *deux* côtés $S_{\nu_{i-1}}$ et S_{ν_i}, ce qui est contradictoire.

[30] Mais il peut exister des points singulier qui ne sont pas extrêmes. Exemple: R fait partie du plan euclidien R_2. R a quatre sommets $a = (-1, -\sin 1)$, $b = (1, \sin 1)$, $c = (0, 1)$, $d =$ $= (0, -1)$ et deux côtés: ce sont les ensembles des points $(t, \sin (1/t))$ pour $-1 < t < 0$, ou bien pour $0 < t < 1$ respectivement. Tous les quatre points a, b, c, d sont singuliers, mais seuls les points a, b sont extrêmes.

Chacun des deux arbres généraux R_1, R_2 a au moins deux points extrêmes (d'après 37), donc au moins un point extrême $\neq x$. Mais tout point de ce genre est évidemment (extrême, donc) singulier pour R, donc il appartient à S. Il en résulte $S[R_1 - (x)] \neq \emptyset$, $S[R_2 - (x)] \neq \emptyset$, ce qui est en contradiction avec 11. Donc $S = R$ et d'après 38, $R = I(p_1, \ldots, p_n)$. Si parmi les points $q_1, \ldots, q_m$ il y a tous les points $p_1, \ldots, p_n$ nous avons $R = I(q_1, \ldots, q_m)$ d'après 25. Si p. ex. le point p_1 ne figure pas parmi les points $q_1, \ldots, q_m$, l'ensemble $R - (p_1)$ sera une partie connexe (car p_1 est singulier) de R, contenant $q_1, \ldots, q_m$, on n'aura donc pas $R = I(q_1, \ldots, q_m)$.

42. Soit $R = \sum_{r=1}^{n} P_r$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Supposons que tout P_r soit fermé dans R,[31] et que tout P_r soit un arbre général. Soit x un point de l'espace R tel que $P_r P_s = (x)$ pour $1 \leqq r \leqq s < n$. Alors R est un arbre général. La démonstration est facile et le lecteur peut la faire lui-même.

43. Soit $R = I(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Alors R est un arbre général. Démonstration. Le theorème est évident pour $n = 2$. Nous pouvons donc supposer que $n > 2$ et que le théorème soit déjà établi pour les espaces connexes irréductibles entre $m < n$ points. Sous ces hypothèses nous allons donner la démonstration aux paragraphes 44–48.

44. Pour démontrer le théorème énoncé, nous nous servirons surtout du résultat du paragraphe 27. Supposons d'abord qu'il soit possible de choisir le point x de telle manière que le nombre k de composantes $P_1, P_2, \ldots, P_k$ de l'ensemble $R - (x)$ soit plus grand que 2. Comme chacun des ensembles P_r $(1 \leqq r \leqq k)$ contient au moins un des points $a_1, \ldots, a_n$ chacun ne peut contenir plus de $n - 2$ points $a_1, \ldots, a_n$. Mais si $a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}$ sont exactement ceux des points $a_1, \ldots, a_n$ qui appartiennent à P_r, nous avons $1 < m < n - 1$ et d'après 27 $P_r + (x) = I(a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}, x)$. En vertu de l'hypothèse faite au paragraphe 43, les ensembles $P_r + (x)$, $1 \leqq r \leqq k$, sont donc des abres généraux. Or, en vertu de 27, les ensembles $P_r + (x)$ sont fermés dans R, et $R = \sum_{r=1}^{k} (P_r + (x))$, et $(P_r + (x))(P_s + (x)) = (x)$ pour $r \neq s$. Donc d'après 42, R est un arbre général. Nous arrivons au même resultat en suivant le même raisonnement, lorsque $k = 2$ mais chacune des deux composantes P_1, P_2 de l'ensemble $R - (x)$ contient au moins deux (donc au plus $n - 2$) points $a_1, \ldots, a_n$.

45. Il nous reste donc à faire la démonstration pour le cas où pour tout point $x \neq a_1, \ldots, a_n$ de l'espace R l'ensemble $R - (x)$ correspondant a deux composantes dont une soit p. ex. $P_1(x)$, contient un et un seul des n points $a_1, \ldots, a_n$, soit $a_{\nu(x)}$ ce point; l'autre composante $P_2(x)$ de l'ensemble $R - (x)$ contient alors les points a_r $(1 \leqq r \leqq n, r \neq \nu(x))$. Considérons d'abord le cas où, pour tous les choix possibles du point x, l'indice $\nu(x)$ ne prend pas toutes les n valeurs $1, 2, \ldots, n$. En changeant au besoin la notation, nous pouvons supposer $\nu(x) > 1$ pour tous x. Nous pouvons supposer également que $R \neq I(a_2, \ldots, a_n)$, car autrement R serait un arbre général

[31] Cette hypothèse est essentielle, comme le montre l'exemple donné dans la note[18].

en vertu de 43. Il existe donc un ensemble connexe $S \subset R$, $S \neq R$, contenant tous les points $a_2, \ldots, a_n$. Si l'on n'a pas $S = R - (a_1)$, il existe dans $R - S$ un point $x \neq a_1, \ldots, a_n$; mais alors $S \subset R - (x) = P_1(x) + P_2(x)$, et d'après 11 et 19 on aura ou bien $S \subset P_1(x)$, ou bien $S \subset P_2(x)$; or comme S renferme $n - 1 > 1$ des points $a_1, \ldots, a_n$, on ne peut pas avoir $S \subset P_1(x)$, d'où $S \subset P_2(x)$, mais ceci n'est pas possible non plus, car $\nu(x) > 1$ de sorte que le point $a_{\nu(x)}$ appartient à S mais non pas à $P_2(x)$. Il faut donc que l'on ait $S = R - (a_1)$, donc $R - (a_1) = I(a_2, \ldots, a_n)$. D'après l'hypothèse faite au paragraphe 43, $R - (a_1)$ est un arbre général. Soient

$$(4) \qquad v_1, v_2, \ldots, v_k \quad (k = 2, 3, \ldots)$$

les sommets et

$$(5) \qquad S_1, S_2, \ldots, S_l \quad (l = 1, 2, 3, \ldots)$$

les côtés de l'arbre général $R - (a_1)$. Si l'on avait $\overline{R - (a_1)} = R - (a_1)$, on aurait $R = (R - (a_1)) + (a_1)$ aux termes séparés, $\neq 0$, ce qui n'est pas possible; nous avons donc $\overline{R - (a_1)} = R$ d'où il résulte (voir 4.3) qu'il existe au moins un λ $(1 \leqq \lambda \leqq l)$ tel que a_1 appartient à $\bar{S}_\lambda$ (c'est-à-dire dans $\bar{S}_\lambda - S_\lambda$).

46. Soit S_λ le côté de l'arbre général $R - (a_1)$, tel que a_1 appartienne à $\bar{S}_\lambda - S_\lambda$. Nous orientons S_λ (suivant 31). Si x est un point quelconque de S_λ, désignons par $Q_1(x)$, ou $Q_2(x)$ resp. le système des points de S_λ qui précèdent x, ou suivent x, respectivement. Nous avons alors $S_\lambda = Q_1(x) + (x) + Q_2(x)$, donc $\bar{S}_\lambda = \overline{Q_1(x)} + (x) + \overline{Q_2(x)}$ et nous voyons que le point a_1 appartient ou bien à $\overline{Q_1(x)}$, ou bien à $\overline{Q_2(x)}$. Désignons par $T_1(T_2)$ le système des points x de S_λ tels que le point a_1 appartient à l'ensemble $\overline{Q_1(x)}$ $(\overline{Q_2(x)})$ correspondant. Nous avons alors $S_\lambda = T_1 + T_2$. Supposons d'abord qu'il existe dans S_λ deux points x et y tels que x précède y ou $x = y$ et que x soit dans T_1 et y dans T_2. D'après 29 les ensembles $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$ sont connexes, donc d'après 15 les ensembles $Q_1(x) + (a_1)$ et $Q_2(y) + (a_1)$ sont connexes également, d'où il résulte d'après 12 que l'ensemble $S'_\lambda = Q_1(x) + Q_2(y) + (a_1)$ est connexe. Nous avons évidemment $S'_\lambda \subset S_\lambda - (x)$. D'après (3) du paragraphe 31 et d'après 15, l'ensemble S''_λ que l'on obtient à partir de S'_λ en y ajoutant les points extrêmes du côté S_λ de l'arbre général $R - (a_1)$ est aussi connexe. Si nous considérons la démonstration de la connexité d'un arbre général faite au paragraphe 38, appliquée à $R - (a_1)$, nous voyons aisément qu'elle reste valable lorsque nous remplaçons S_λ et sa fermeture dans $R - (a_1)$ par les ensembles S'_λ et S''_λ respectivement; il s'en ensuit que l'ensemble $((R - (a_1)) - S_\lambda) + S'_\lambda = R_1$ est connexe. Mais cet ensemble contient tous les points $a_1, \ldots, a_n$ mais non pas le point x, donc il n'est pas connexe, car $R = I(a_1, \ldots, a_n)$. Il en résulte que l'hypothèse faite ci-dessus concernant les points x, y ne peut être vraie; donc $T_1 T_2 = \emptyset$ et tout point de T_2 précède tous les points de T_1. Si $T_1 \neq \emptyset \neq T_2$, soit $b(c)$ un point initial (final) du côté S_λ de l'arbre général $R - (a_1)$; on aura donc $S_\lambda + (b) + (c) = I(b, c)$. Les

hypothèses du théorème du paragraphe 30 sont alors vérifiées évidemment si nous y prenons $S_\lambda + (b) + (c)$, $T_2 + (b)$, $T_1 + (c)$ au lieu de R, S, T. Il existe donc dans S_λ un point x qui est ou bien dernier dans T_2, ou bien premier dans T_1. Modifions suivant 33 la construction de l'arbre général $R - (a_1)$ en ajoutant ce point x aux sommets (4) et en remplaçant le côté S_λ par deux nouveaux côtés $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$. Nous trouvons alors: Le point a_1 appartient à un, et à un seul, des ensembles $\overline{Q_1(x)}$, $\overline{Q_2(x)}$; s'il est dans $\overline{Q_1(x)}$ et que nous décomposions $Q_1(x)$ en $T_1' + T_2'$ de manière analogue à celle de la décomposition $S_\lambda = T_1 + T_2$, nous aurons $T_1' = \emptyset$; si a_1 est dans $\overline{Q_2(x)}$ et que nous écrivions $Q_2(x) = T_1'' + T_2''$ dans le même sens, nous aurons $T_2'' = \emptyset$.[32]

47. Nous sommes donc arrivés au résultat suivant: sous les hypothèses faites au paragraphe 45, il est possible de faire la construction de l'arbre général $R - (a_1)$ à partir des sommets (4) et des côtés (5) d'une telle manière que pour tout côté S_λ tel que a_1 appartient à $\bar{S}_\lambda - S_\lambda$, on ait $T_1 = \emptyset$ ou $T_2 = \emptyset$ (avec la notation du paragraphe 46). Pour une orientation appropriée du côté S_λ, nous aurons $T_2 = \emptyset$. Soient $b_1, \ldots, b_r$ (ou $c_1, \ldots, c_s$) $(r, s = 1, 2, \ldots)$ les points initiaux (finals) d'un tel côté S_λ. Comme (d'après 6) la fermeture de S_λ dans l'espace $R - (a_1)$ est $\bar{S}_\lambda - (a_1)$, nous avons

$$\bar{S}_\lambda - (a_1) = I^*(b_1, \ldots, b_r \mid c_1, \ldots, c_s) \tag{8}$$

et

$$\bar{S}_\lambda = S_\lambda + (a_1) + \sum_{\nu=1}^{r} (b_\nu) + \sum_{\nu=1}^{s} (c_\nu)\,.$$

L'ensemble $S_\lambda + (a_1) + (c_1)$ est connexe d'après 15. Soit U une partie connexe de cet ensemble, contenant les points a_1 et c_1. Si $U \neq S_\lambda + (a_1) + (c_1)$, il existe un point x dans $S_\lambda - U$, donc $U \subset (S_\lambda - (x)) + (a_1) + (c_1)$. Définissons $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$ comme au paragraphe 46, nous aurons alors $S_\lambda - (x) = Q_1(x) + Q_2(x)$ aux termes séparés. D'après 31, (3), le point c_1 n'appartient pas à $\overline{Q_1(x)}$, donc (voir 6) $Q_1(x)$ est fermé dans $Q_1(x) + (c_1)$, donc la somme $Q_1(x) + (c_1)$ a les termes séparés. Comme $T_2 = \emptyset$, le point a_1 n'appartient pas à $\overline{Q_2(x)}$ donc la somme $Q_2(x) + (a_1)$ a les termes séparés. Enfin $a_1 \neq c_1$, donc la somme $(a_1) + (c_1)$ a les termes séparés aussi. Il en résulte d'après 9 que la somme

$$[Q_1(x) + (a_1)] + [Q_2(x) + (c_1)] \supset U$$

a les termes séparés. Donc d'après 11 nous avons ou bien $U[Q_1(x) + (a_1)] = \emptyset$ ou bien $U[Q_2(x) + (c_1)] = \emptyset$ ce qui est contradictoire, car U contient les points $a_1$et

[32] Nous supposons, bien entendu, que les nouveaux côtés $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$ sont orientés en accord avec S_λ.

c_1. Nous avons donc démontré que $S_\lambda + (a_1) + (c_1) = I(a_1, c_1)$. De là et de (8) il découle en vertu de 31 que nous avons

$$\bar{S}_\lambda = I^*(a_1, b_1, \ldots, b_r \mid c_1, \ldots, c_s)\,.$$

Cela est vrai pour tous les indices λ pour lesquels $(a_1) \subset \bar{S}_\lambda$. Pour les autres λ nous avons (8) où $\bar{S}_\lambda - (a_1) = \bar{S}_\lambda$.

Ce résultat-là nous montre que, en ajoutant le point a_1 aux sommets (4) de l'arbre général $R - (a_1)$ et en gardant les côtés (5) nous obtenons l'arbre général R. Car toutes les propriétés de l'arbre général mentionnées au paragraphe 32 sont manifestement vérifiées, l'exception faite de la dernière, c'est-à-dire de la suivante: Si a est un point initial et b un point final d'une côté S_λ, il n'est pas possible de trouver des indices $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ $(t \geqq 0)$, tous différénts de λ et tels que le point a appartienne à $\bar{S}_{\nu_0}$, le point b à $\bar{S}_{\nu_t}$ et que[24] pour $1 \leqq i \leqq t$ on ait $\bar{S}_{\nu_{i-1}}\bar{S}_{\nu_i} \neq \emptyset$. Supposons donc par contre que pour un certain choix de S_λ, a, b il soit possible de trouver de tels indices $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$. Prenons dans S_λ un point x et définissons $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ de la même façon qu'au paragraphe 46. L'ensemble

$$(\bar{Q}_1(x) - (x)) + \sum_{i=0}^{t} \bar{S}_{\nu_i} + (\bar{Q}_2(x) - (x)) = S_\lambda^*$$

contient d'après 31 (3) tous les points extrêmes du côté S_λ et est connexe d'après 12. Pour cette raison la démonstration de la connexité, faite au paragraphe 38 subsiste si nous y remplaçons l'ensemble $\bar{S}_\lambda$ (pour l'indice λ donné) par l'ensemble S_λ^*. Cela signifie que l'ensemble

$$R_1 = (R - \bar{S}_\lambda) + S_\lambda^*$$

est connexe. Or c'est une contradiction, car R_1 contient tous les points $a_1, \ldots, a_n$ mais non pas le point x, or $R = I(a_1, \ldots, a_n)$.

48. Il nous reste à faire la démonstration sous les hypothèses faites au début du paragraphe 45 et en admettant que l'indice $\nu(x)$ prendra toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$, lorsque x parcourt l'ensemble $R - \sum_{r=1}^{n} (a_r)$. Pour $1 \leqq r \leqq n$ désignons par A_r la somme de tous les ensembles $P_1(x)$ (la notation étant celle du début du paragraphe 45) correspondant aux points x de $R - \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu)$, pour lesquels $\nu(x) = r$. Donc le point a_r appartient à A_r pour $1 \leqq r \leqq n$. De plus, les ensembles A_r sont ouverts dans R d'après 1.8, car $P_1(x)$ sont ouverts dans R d'après 27. La somme $\sum_{r=1}^{n} A_r$ a donc les termes ouverts $\neq \emptyset$; l'espace R étant connexe, nous avons $\sum_{r=1}^{n} A_r \neq R$ et nous pouvons trouver un point x dans $R - \sum_{r=1}^{n} A_r$. Comme le point a_r est dans A_r, nous avons $x \neq a_1, \ldots, a_n$.

D'après nos hypothèses, il existe alors une décomposition $R - (x) = P_1(x) + P_2(x)$. Nous pouvons choisir les indices de façon à avoir $\nu(x) = 1$, donc d'après 27, $P_1(x) + (x) = I(a_1, x)$, $P_2(x) + (x) = I(a_2, \ldots, a_n, x)$. Les ensembles $P_1(x) + (x)$ et $P_2(x) + (x)$ sont fermés dans R en vertu de 27; et l'on a

$$[P_1(x) + (x)] + [P_2(x) + (x)] = R\,; \quad [P_1(x) + (x)]\,[P_2(x) + (x)] = (x)\,.$$

Comme $P_1(x) + (x) = I(a_1, x)$, cet ensemble là est un arbre général: Il suffit alors de démontrer que $P_2(x) + (x)$ est aussi un arbre général, et il en découlera d'après 42 que R est un arbre général également. S'il existe dans $P_2(x)$ un point $y \neq a_2, \ldots, a_n$, tel que, ou bien $(P_2(x) + (x)) - (y)$ ait au moins trois composantes, ou bien toute composante de cet ensemble contienne au moins deux des points $x, a_2, \ldots, a_n$, alors $P_2(x) + (x)$ sera un arbre général d'après 44. Supposons donc que pour tout point y de l'ensemble $P_2(x) - \sum_{r=2}^{n} (a_r)$ l'ensemble $P_2(x) + (x)$ a exactement deux composantes $S_1(y)$ et $S_2(y)$, dont la première contient *un et un seul* des points $x, a_2, \ldots, a_n$. Il suffit alors de démontrer que pour aucun point y dans $P_2(x) - \sum_{r=2}^{n} (a_r)$ le point x n'appartient à $S_1(y)$; en effet, on aura alors $P_2(x) + (x) = I(a_2, \ldots, a_n, x)$ et l'ensemble $P_2(x) + (x)$ sera un arbre général en vertu de la démonstration faite aux paragraphes 45–47. Mais si pour un certain choix du point y le point x appartenait à $S_1(y)$, l'ensemble $S_1(y) + P_1(x) = S_1(y) + (P_1(x) + (x))$ serait connexe en vertu de 12. Or

$$\begin{aligned} S_1(y) + S_2(y) + P_1(x) &= [(P_2(x) + (x)) - (y)] + P_1(x) = \\ &= [P_1(x) + (x) + P_2(x)] - (y) = R - (y)\,, \end{aligned}$$

donc

$$[S_1(y) + P_1(x)] + S_2(y) = P_1(y) + P_2(y)\,.$$

Les termes du premier membre sont connexes, ceux du second membre sont séparés; il en résulte d'après 11 que l'on a ou bien

$$S_1(y) + P_1(x) = P_1(y)\,, \quad S_2(y) = P_2(y)$$

ou bien

$$S_1(y) + P_1(x) = P_2(y)\,, \quad S_2(y) = P_1(y)\,.$$

Mais le second cas est impossible, car $S_2(y)$ contient les points $a_2, \ldots, a_n$, tandis que $P_1(y)$ contient un seul des points $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Donc $S_1(y) + P_1(x) = P_1(y)$. Mais alors le point a_1 appartiendrait à $P_1(x)$ et le point x à $S_1(y)$; l'ensemble $P_1(y)$ contiendrait alors les points a_1, x de sorte que l'on aurait $\nu(y) = 1$, $(x) \subset P_1(y)$, donc $(x) \subset A_1$. Or c'est une contradiction, car le point x a été choisi dans $R - \sum_{r=1}^{n} A_r$.

49. Les points singuliers d'un arbre général R ont été définis par une propriété topologique; par contre les points extrêmes ont été définis, paragraphe 37, seule-

ment à l'aide d'une certaine construction de l'arbre général. Mais il est également possible de définir les points extrêmes d'un arbre général par une propriété topologique: Soit v un point d'un arbre général R. Le point v est un point extrême de l'arbre R si et seulement si un ensemble $S \subset R$, $S \neq \emptyset$, est connexe chaque fois que $S + (v)$ est connexe. Démonstration. Supposons *d'abord* que le point v ne soit pas un des sommets de l'arbre général R, mais qu'il appartienne à un côté S_λ. Alors l'ensemble $S = S_\lambda - (v)$ n'est pas connexe (voir 29), mais $S + (v) = S_\lambda$ est connexe. Supposons *maintenant* que v soit un sommet, mais non pas un point extrême de R. Il existe alors deux côtés distincts S_λ, S_μ de l'arbre général R tels que le point v appartienne à $\bar{S}_\lambda \bar{S}_\mu$. Les ensembles S_λ, S_μ sont ouverts dans R, de sorte que la somme $S = S_\lambda + S_\mu$ a les termes séparés; donc S n'est pas connexe, mais $S + (v) = (S_\lambda + (v)) + (S_\mu + (v))$ est connexe d'après 15 et 12. Supposons *enfin* que le point v soit un point extrême de R, donc un point extrême d'un seul côté S_λ de R. Orientons S_λ de telle manière que v soit un point final de S_λ. Soit $S \subset R$, $S \neq \emptyset$ et supposons l'ensemble $S + (v)$ connexe; nous avons à montrer que l'ensemble S est connexe également. Comme $(R - S_\lambda) - (v) = \sum \bar{S}_\mu + \sum (v_\nu)$, où la première somme s'étend à tous les côtés de R autres que S_λ et où v_ν sont tous les sommets de R autres que v, nous voyons que l'ensemble $(R - S_\lambda) - (v)$ est fermé dans R de sorte que la somme $[(R - S_\lambda) - (v)] + (v)$ a les termes séparés. Si l'on avait $S \subset R - S_\lambda$, il résulterait de 8 que la somme $S + (v)$ a les termes séparés et l'ensemble $S + (v)$ ne serait pas connexe. Donc $SS_\lambda \neq \emptyset$. Soit x un point quelconque de S_λ, désignons par $P(x)$, ou $Q(x)$ resp., l'ensemble des points de S_λ qui précèdent x (ou le suivent, resp.). Nous pourrions introduire x en tant qu'un nouveau sommet suivant 33; alors $Q(x)$ serait (voir 31, (3)) son unique côté ayant v pour point extrême; il en résulterait (tout comme pour SS_λ) que l'on aurait $SQ(x) \neq \emptyset$ pour tout point x de S_λ. Comme $SS_\lambda \neq \emptyset$, prenons le point x dans SS_λ; nous allons démontrer qu'il en découle $Q(x) \subset S$. En effet, si ce n'était pas le cas, il serait possible de prendre un point y dans $Q(x) - S$, et comme $SQ(y) \neq \emptyset$, encore un autre point z dans $SQ(y)$. D'après 33, il serait alors possible d'introduire x, z comme deux nouveaux sommets; x serait alors un point initial et z un point final, du nouveau côté $T = Q(x) - (Q(z) - (z))$; on aurait $(y) \subset T$. En vertu de la démonstration du paragraphe 35 la somme $R - (y) = A + B$ aurait les termes séparés, avec $(x) \subset A$, $(z) \subset B$. Donc $AS \neq \emptyset \neq BS$. Or c'est en contradiction avec 11, car $(y) \subset Q(x) + S$, de sorte que $S + (v)$ est une partie connexe de $R - (y)$. Ainsi avons nous démontré que $Q(x) \subset S$. Nous avons vu que, en prenant x pour un nouveau sommet nous ne faisons que remplacer S_λ par le côté $Q(x)$; ce n'est donc qu'une modification admissible de la construction de l'arbre général R si nous supposons $S_\lambda \subset S$. Soit maintenant $S = A + B$ aux termes séparés; d'après 11 nous aurons, en interchangeant A et B si besoin est, $S_\lambda \subset A$. Donc $B \subset (R - S_\lambda) - (v)$ de sorte que la somme $B + (v)$ aura les termes séparés. Donc, d'après 9, la somme $(A + (v)) + B$ aura aussi les termes séparés. Or $(A + (v)) + B = S + (v)$ est connexe donc $B = \emptyset$. Donc S est connexe.

5

UNE NOUVELLE CLASSE DE CONTINUS

Fundamenta Mathematicae
18 (1931), 85–87

Un continu C (espace métrique, compact et connexe) *jouit de la propriété* $P(P_n)$ *s'il existe sur C une fonction continue réelle* $f(x)$ *telle que, pour chaque nombre réel c, l'équation* $f(x) = c$ *possède un nombre fini* (*au plus n*) *solutions* $x \in C$. Le but de cette Note est de démontrer que la *propriété P entraîne les trois propriétés suivantes*:

1°. *C est une courbe régulière* (au sens de M. Menger);

2°. *l'ensemble E des extrémités* (points d'ordre 1) *de C est clairsemé* (et par suite dénombrable);

3°. *R désignant l'ensemble des points de ramification* (points d'ordre >2) *de C, l'ensemble* $\bar{R}$ *est punctiforme.*

I. Soit a un point donné de l'espace C et soit U un entourage[1] donné de a si petit que $x \in \bar{U}$, $x \neq a$ entraîne $f(x) \neq f(a)$. Posons[2] $\mu = \mathrm{Min}\,|f(x) - f(a)| > 0$ pour $x \in \mathrm{Fr.}\,U$ [3]. Désignons par V l'ensemble des points $x \in U$ tels que $|f(x) - f(a)| < \mu$. Alors $V \subset U$ V est un entourage de a, et $x \in \mathrm{Fr.}\,V$ entraîne $f(x) = f(a) \pm \mu$ d'où il résulte que l'ensemble Fr. V est fini[4].

L'espace C est donc une courbe régulière. Il en résulte[5] que C est localement connexe. Donc[6] tous deux points de C sont situés sur un arc simple. La même propriété appartient à chaque sous-continu de C.[7]

[1] Ensemble ouvert contenant a.

[2] Le minimum existe, car l'ensemble Fr. U est compact.

[3] Fr. $U = \bar{U} - U$.

[4] On voit que le propriété P_n entraîne que l'ordre de chaque point de C soit $\leqq 2n$.

[5] Menger, *Grundzüge einer Theorie der Kurven*, Math. Ann. 95, p. 300. Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes*, II, Verh. Amsterdam 1927, N° 4, p. 65.

[6] Mazurkiewicz, Fund. Math. I, p. 201. R. L. Moore, Trans. Amer. Soc. 17, p. 137.

[7] Chaque sous-continu d'un continu jouissant de la propriété P en jouit de même.

II. Supposons, par impossible, que l'ensemble E contienne une partie non vide et dense en soi. Or l'ensemble E est un G_δ.[8] On en conclut, d'après un théorème de M. Young,[9] que E contient un sous-ensemble parfait E_1. De la propriété P on déduit sans peine que l'ensemble réel $f(E_1)$ est lui aussi parfait. Donc $f(E_1)$ contient un sous-ensemble D tel que chaque point de D soit un point limite *bilatéral* pour D. Soit $E_2 \subset E_1$, $f(E_2) = D$. Choisissons un point $a_1 \in E_2$. Il existe un arc simple $C_1 \subset C$ aux extrémités a_1, b_1. Posons $f(C_1) = K_1$ de manière que K_1 est un intervalle fermé contenant le nombre a_1. Or $f(a_1) \in D$; de la propriété de D on voit qu'il existe un point $a_2 \in E_2$, $a_2 \neq a_1$, $a_2 \neq b_1$, tel que $f(a_2)$ soit situé à l'intérieur de K_1. Le point a_2 ne peut appartenir à C_1, car autrement son ordre serait $\geqq 2$, tandis que $a_2 \in E$. Donc il existe un arc simple $C_2 \subset C$ aux extrémités a_2, b_2 tel que $C_1 \,.\, C_2 = 0$. Posons $K_2 = f(C_2)$; on peut supposer que $K_2 \subset K_1$. On arrive ainsi à former une suite d'arcs simples $C_n \subset C$ *disjoints deux à deux* et tels que $f(C_{n+1}) \subset f(C_n)$. De la dernière inclusion résulte l'existence d'un nombre c commun à tous les intervalles $f(C_n)$. L'équation $f(x) = c$ possède alors une solution $x_n \in C_n$ pour chaque valeur de n. Or ceci contredit à la propriété P.

III. Supposons, par impossible, que l'ensemble $\bar{R}$ contienne un continu K. Comme nous avons vu plus haut, il existe un arc simple $C \subset K$; donc $C \subset \bar{R}$. Il existe donc un point $a_1 \in R$ tel que le nombre $f(a_1)$ soit à l'intérieur de l'intervalle $f(C)$. D'après un théorème de M. Menger[10] il existe dans C trois arcs simples C_1', C_2, C_3 n'ayant deux à deux en commun que l'extrémité commune a_1. On peut supposer que les intervalles $f(C_1')$, $f(C_2)$, $f(C_3)$ fassent partie de l'intérieur de $f(C)$. L'inclusion $C_1' + C_2 + C_3 \subset C$ étant évidemment impossible, soit p. ex. $b_1 \in C_1' - C$. En désignant par C_1 un petit sous-arc de C_1' contenant b_1, on aura: 1° $C_1 \,.\, C = 0$; 2° l'intérieur de $f(C)$ contient l'intervalle $f(C_1)$. De l'inclusion $C \subset \bar{R}$ résulte alors l'existence d'un point $a_2 \in R$ tel que le nombre $f(a_2)$ soit à l'intérieur de $f(C_1)$. En répétant le procédé qui précède on arrive à former un arc simple C_2 tel que $C_2 \,.\, C = 0$ et que l'intérieur de $f(C_1)$ contienne l'intervalle $f(C_2)$. On peut supposer que l'arc C_2 soit situé dans une proximité donnée de C. D'après la relation $C_1 \,.\, C = 0$, on peut donc s'arranger de façon à avoir $C_1 \,.\, C_2 = 0$. En continuant à procéder ainsi, on arrive à former une suite d'arcs simples $C_n \subset C$ disjoints deux à deux et tels que $f(C_{n+1}) \subset \subset f(C_n)$. Or nous avons déjà vu que ceci contredit à la propriété P.

[8] Menger, l. c., p. 282, Urysohn, l. c., p. 18.
[9] Hausdorff, *Mengenlehre*, 1927, p. 138.
[10] Fund. Math. X, p. 98.

6

SUR LA DIMENSION DES ESPACES PARFAITEMENT NORMAUX

Bulletin international de l'Académie
des Sciences de Bohême (1932), 18 pp.

Je modifie légèrement la définition récursive (Menger et Urysohn) de la dimension. Dans le cas des espaces séparables, seul étudié jusqu'à présent, la modification est purement formelle. Je démontre 1° le théorème sur la dimension d'un sous-ensemble, 2° le théorème sur la dimension d'une somme (Summensatz) et 3° le théorème sur le recouvrement d'un espace à dimension finie (Zerlegungssatz) pour des espaces très géneraux comprenant comme cas particulier les espaces distanciés (metrische Räume).

Les théorèmes principaux de cet Ouvrage ont été énoncés sans démonstration dans la Note *Sur la théorie de la dimension* (C. R., nov. 1931), [3].

I. Théorèmes auxiliaires

1. Un ensemble R s'appelle un *espace topologique* (et les éléments de R s'appellent *points*) si l'on a donné une famille $\mathfrak{F}$ de sous-ensembles de R (appelés ensembles *fermés dans* R) de manière que:

1.1. L'ensemble vide 0 et l'espace R sont des ensembles fermés dans R.

1.2. x étant un point quenconque de R, l'ensemble (x) est fermé dans R.

1.3. La somme d'un nombre *fini* d'ensembles fermés dans R est fermée dans R.

1.4. Le produit (= partie commune) d'un nombre *quelconque* d'ensembles fermés dans R est fermé dans R.

2. Un ensemble $A \subset R$ s'appelle *ouvert dans* R si l'ensemble $R - A$ est fermé dans R.

3. Si $S \subset R$, on appelle *fermé dans* S chaque produit AS, A étant fermé dans R. Chaque sous-ensemble S de l'espace topologique R constitue alors un espace topologique.

4. Si $A \subset R$, je désigne par $\bar{A}$ la *fermeture* de A (le plus petit sous-ensemble fermé de R contenant A).

5. Si $A \subset S \subset R$, la fermeture de A dans l'espace S est $\bar{A} . S$.

6. Les ensembles $A, B \subset R$ s'appellent *séparés*, si 1° $AB = 0$, 2° A et B sont fermés (ou, ce qui revient au même, ouverts) dans $A + B$.

6.1. Si les ensembles A_i, B_j sont séparés pour $1 \leqq i \leqq h$, $1 \leqq j \leqq k$, les ensembles $\sum_{i=1}^{h} A_i$, $\sum_{j=1}^{k} B_j$ le sont aussi.

6.2. Les ensembles A, B étant séparés, si $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, les ensembles A_1 et B_1 le sont aussi.

7.1. Les ensembles $A, B \subset R$ sont fermés dans $A + B$ si et seulement si $A\bar{B} + \bar{A}B = AB$.

7.2. Les ensembles A, B sont séparés si et seulement si $A\bar{B} = \bar{A}B = 0$.

8. Si $U \subset R$ est ouvert dans R, l'ensemble $H_R(U) = \bar{U} - U$ s'appelle la *frontière* de U (dans l'espace R).

8.1. $U . H_R(U) = 0$.

8.2. $U + H_R(U) = \bar{U}$.

8.3. Si U est ouvert dans R, $H_R(U)$ est fermé dans R.

9.1.[1] Soient U_i $(1 \leqq i \leqq m)$ des ensembles ouverts dans R. Alors

$$H_R(\sum_{i=1}^{m} U_i) \subset \sum_{i=1}^{m} H_R(U_i).$$

9.2.[2] Soient U, V des ensembles ouverts dans R. Alors

$$H_R(U - \bar{V}) \subset H_R(U) + H_R(V).$$

10.[3] Soient Q_ν, V_ν $(\nu = 1, 2, 3, \dots)$ des ensembles ouverts dans R. Soit $S = \prod_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu$. Soit $T \subset S$, $T \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu$. Pour $\nu = 1, 2, 3, \dots$ soit $Q_\nu \supset Q_{\nu+1}$, $V_\nu \subset Q_\nu$. Alors

$$H_R(\sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu) \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} H_R(V_\nu) + M,$$

$$M = S . H_R(\sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu) \subset S - T.$$

11.[4] Soit $S \subset R$; soit U un sous-ensemble ouvert de R. Alors

$$H_S(SU) \subset S . H_R(U).$$

[1] K. Menger, *Dimensionstheorie*, p. 36.
[2] Menger, l. c., p. 36.
[3] Menger, l. c., p. 37. L'énoncé de M. Menger est légèrement différent de celui du texte.
[4] Menger, l. c., p. 35.

12. Un espace topologique R s'appelle *normal*[5] s'il jouit de la propriété suivante: Si $AB = 0$, les ensembles A, B étant fermés dans R, il existe des ensembles U, V ouverts dans R tels que $U \supset A$, $V \supset B$, $UV = 0$.

12.1.[6] Soit R un espace normal. Soit $A(U)$ un sous-ensemble fermé (ouvert) de R; soit $A \subset U$. Il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

13. Un espace topologique R s'appelle *complètement normal*[7] s'il jouit de la propriété suivante: Si les ensembles $A, B \subset R$ sont séparés, il existe des ensembles U, V ouverts dans R tels que $U \supset A$, $V \supset B$, $UV = 0$.

13.1.[8] Un espace complètement normal est normal.

13.2.[9] Chaque sous-ensemble S d'un espace complètement normal R constitue un espace complètement normal.

13.3.[10] Soit R un espace complètement normal; soit $S \subset R$. Soit $U_0(U)$ un ensemble ouvert dans S (dans R); soit $U_0 \subset U$. Il existe un ensemble V ouvert dans R tel que

$$V \subset U\,, \quad SV = U_0\,, \quad S\,.\,H_R(V) = H_S(U_0)\,.$$

14. Un espace topologique R soit appelé *parfaitement normal*[11] s'il possède les deux propriétés ci-après: 1° R est normal; 2° chaque sous-ensemble ouvert de R est un F_σ dans R (= somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés dans R). La propriété 2° peut être énoncée comme il suit: chaque sous-ensemble fermé de R est un G_δ dans R (= produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts dans R).

14.1. Un espace parfaitement normal est complètement normal.[12]

14.2. Chaque sous-ensemble d'un espace parfaitement normal constitue un espace parfaitement normal.[11]

14.3. Soit R un espace parfaitement normal; soit S un sous-ensemble fermé de R. Il existe des ensembles Q_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) fermés dans R tels que

$$S = \prod_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu = \prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{Q}_\nu\,; \quad Q_{\nu+1} \subset Q_\nu\,.$$

Démonstration. S étant fermé, c'est un G_δ dans R. Il existe par suite des ensembles U_ν ouverts dans R tels que $S = \prod_{\nu=1}^{\infty} U_\nu$. D'après 12.1 on détermine des en-

[5] P. Urysohn, *Über die Mächtigkeit zusammenhängender Mengen*, Math. Annalen, t. 94, p. 265.
[6] Urysohn, l. c., p. 272.
[7] Urysohn, l. c., p. 265.
[8] Urysohn, l. c., p. 265.
[9] Urysohn, l. c., p. 284.
[10] Menger, l. c., p. 36.
[11] Cette catégorie d'espace a été incidemment considérée (sans un nom spécial) par Urysohn, l. c., p. 286, note [41] au bas de la page.
[12] Urysohn, l. c., sub [11].

sembles V_ν ouverts dans R tels que $S \subset V_\nu \subset \overline{V}_\nu \subset U_\nu$. Alors il suffit de poser $Q_\nu = \prod_{i=1}^{\nu} V_i$.

II. Définition de la dimension

15. Soit R un espace topologique; on dit que le nombre de dimensions de R égale -1 (ou au plus -1) et l'on écrit $\dim R = -1$ (ou $\dim R \leqq -1$) si et seulement si $R = 0$. Supposons que l'on ait déjà défini, pour une certaine valeur de n $(= 0, 1, 2, 3, \ldots)$ les espaces topologiques dont le nombre de dimensions égale au plus $n - 1$. Soit alors R un espace topologique et soit A un ensemble fermé dans R. On dit que le nombre de dimensions de R relativement à A égale au plus n et on écrit $\dim_A R \leqq n$ is l'on peut attacher à chaque ensemble $U \supset A$ ouvert dans R un ensemble V ouvert dans R de manière à avoir $A \subset V \subset U$, $\dim H_R(V) \leqq n - 1$. On dit que le nombre de dimensions de R égale au plus n et l'on écrit $\dim R \leqq n$ lorsque $\dim_A R \leqq n$ pour chaque sous-ensemble A fermé de R. On dit que le nombre de dimension de R (évent. relativement a un sous-ensemble fermé A) égale n et on écrit $\dim R = n$ $(\dim_A R = n)$, lorsque $\dim R \leqq n$ $(\dim_A R \leqq n)$ mais non $\dim R \leqq n - 1$ $(\dim_A R \leqq n - 1)$.

16.1. Soit S un ensemble fermé dans R; soit A un ensemble fermé dans S. Soit $\dim_A R \leqq n$. Alors $\dim_A S \leqq n$.

16.2. Soit S un ensemble fermé dans R. Soit $\dim R \leqq n$. Alors $\dim S \leqq n$.

Démonstration. On voit sans peine qu'il suffit de déduire 16.1 pour la dimension n en supposant la proposition 16.2 vraie pour la dimension $n - 1$. Soit donc $U_0 \supset A$ un sous ensemble-ouvert de S. Il existe donc un sous-ensemble U ouvert de R tel que $U_0 = US$, donc $A \subset U$. Puisque $\dim_A R \leqq n$, il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $A \subset V \subset U$, $\dim H_R(V) \leqq n - 1$. Posons $V_0 = SV$. L'ensemble V_0 est ouvert dans S, et l'on a $A \subset V_0 \subset U_0$. De plus, l'ensemble $H_S(V_0)$ est fermé dans S, donc aussi dans R, et l'on a $H_S(V_0) \subset H_R(V_0)$ d'après 11. La proposition 16.2 pour la dimension $n - 1$ étant vraie, il s'ensuit $\dim H_S(V_0) \leqq n - 1$.

17.1. Soit S un sous-ensemble fermé de R; soit A un sous-ensemble fermé de S. Supposons qu'à chaque ensemble $U \supset A$ ouvert dans R on puisse attacher un ensemble V ouvert dans R tel que $A \subset V \subset U$, $\dim S \,.\, H_R(V) \leqq n - 1$. Alors $\dim_A S \leqq$ $\leqq n$.

Démonstration. Soit $U_0 \supset A$ un ensemble ouvert dans S. Il existe un ensemble U ouvert dans R tel que $U_0 = SU$. Il s'ensuit l'existence d'un ensemble V ouvert dans R tel que $A \subset V \subset U$, $\dim S \,.\, H_R(V) \leqq n - 1$. Posons $V_0 = SV$. L'ensemble V_0 est ouvert dans S et l'on a $A \subset V_0 \subset U_0$. D'après 11 on a $H_S(V_0) \subset S \,.\, H_R(V)$. L'ensemble $H_S(V_0)$ étant fermé dans S, on conclut de 16.2 que $\dim H_S(V_0) \leqq n - 1$.

17.2. Soit R un espace complètement normal. Soit S un sous-ensemble fermé de R; soit A un sous-ensemble fermé de S. Soit $\dim_A S \leqq n$. Alors à chaque ensemble

$U \supset A$ ouvert dans R on peut attacher un ensemble V ouvert dans R tel que $A \subset \subset V \subset U$, $\dim S \,.\, H_R(V) \leqq n - 1$.

Démonstration. L'ensemble $U_0 = SU$ est ouvert dans S et l'on a $U_0 \supset A$. Puisque $\dim_A S \leqq n$, il existe un ensemble V_0 ouvert dans S tel que $A \subset V_0 \subset U_0 \subset \subset U$, $\dim H_S(V_0) \leqq n - 1$. Or d'après 13.3 il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $V \subset U$, $SV = V_0$ (donc $V \supset A$), $S \,.\, H_R(V) = H_S(V_0)$.

18. Soit R un espace topologique. Soient A, B des sous-ensembles fermés de R; soit $C \subset R$. Soit $R - C = P + Q$, les ensembles P, Q étant séparés (v. 6); soit $P \supset A$, $Q \supset B$. Alors on dit que *l'ensemble C sépare A et B l'un de l'autre dans R.*

18.1. Soit R un espace normal. Soient A, B deux sous-ensembles fermés de R, soit $AB = 0$. Soit $\dim_A R \leqq n$. Il existe un sous-ensemble C fermé de R séparant A et B l'un de l'autre dans R et tel que $\dim C \leqq n - 1$.

Démonstration. D'après 12.1 il existe un ensemble U ouvert dans R tel que $A \subset U \subset \overline{U} \subset R - B$. Puisque $\dim_A R \leqq n$, il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $A \subset V \subset U$, $\dim H_R(V) \leqq n - 1$. On voit sans peine que l'ensemble $C = = H_R(V)$ possède toutes les propriétés demandées.

18.2. Soit R un espace normal. Soit A un sous-ensemble fermé de R. Supposons qu'à chaque ensemble $B \subset R - A$ fermé dans R on puisse attacher un ensemble C fermé dans R séparant A et B l'un de l'autre dans R de manière que $\dim C \leqq n - 1$. Alors $\dim_A R \leqq n$.

Démonstration. Soit $U \supset A$ un ensemble ouvert dans R. En posant $B = R - U$ on voit qu'il existe un ensemble C fermé dans R et deux ensembles séparés P, Q de manière que $\dim C \leqq n - 1$, $R - C = P + Q$, $P \supset A$, $Q \supset B$. On voit sans peine que l'ensemble P est ouvert dans R, que $A \subset P \subset U$ et que $H_R(P) \subset C$, d'où $\dim H_R(P) \leqq n - 1$ d'après 16.2.

18.3. Soit R un espace complètement normal. Soit $A, B, C \subset R$; supposons que C sépare A et B l'un de l'autre dans R. Il existe un ensemble $C^* \subset C$ fermé dans R séparant A et B l'un de l'autre dans R.

Démonstration. On a $R - C = P + Q$, où P, Q sont séparés. L'espace R étant complètement normal, il existe des ensembles U, V ouverts dans R tels que $U \supset P$, $V \supset Q$, $UV = 0$. Il suffit de poser $C^* = R - (U + V)$.

18.4. Soit A un sous-ensemble fermé d'un espace complètement normal R. Supposons qu'à chaque ensemble $B \subset R - A$ fermé dans R on puisse attacher un ensemble C séparant A et B l'un de l'autre dans R de manière qui $\dim C \leqq n - 1$. Alors $\dim_A R \leqq n$.

Démonstration. D'après 13.1, 16.2., 18.2 et 18.3.

III. Théorème sur la dimension d'une somme

19. Soit R un espace parfaitement normal. Soient S_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ des sous-ensembles fermés de R; soit $\dim S_i \leqq n$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ Alors $\dim \sum_{i=1}^{\infty} S_i \leqq n$.

Ce théorème est banal pour $n = -1$. On peut donc procéder comme il suit: Dans les démonstrations du n^0 20 on fera usage du théorème 19 pour la dimension $n - 1$; dans le n^0 21 on démontrera le théorème 19 en continuant le supposer vrai pour la dimension $n - 1$ et en faisant usage de la proposition 20.3.

20.1. Soit R un espace parfaitement normal. Soit S un sous-ensemble fermé de R; soient A, B^* des sous-ensembles fermés de S. Soit C^* un sous-ensemble fermé de S séparant A et B^* l'un de l'autre dans S et tel que $\dim C^* \leqq n - 1$. Supposons que $\dim_F R \leqq n$ pour chaque ensemble $F \subset R - S$ fermé dans R. Soit B un sous-ensemble fermé de R tel que $B^* = SB$. Il existe un ensemble C fermé dans R séparant A et B l'un de l'autre dans R et tel que $\dim C \leqq n - 1$.

Démonstration. L'ensemble C^* séparant A et B^* l'un de l'autre dans S, il existe deux ensembles séparés P, Q tels que $S - C^* = P + Q$, $P \supset A$, $Q \supset B^*$. On voit sans peine que l'ensemble P est ouvert dans S, que $\bar{P} . B = 0$ et que $H_S(P) \subset C^*$, d'où $\dim H_S(P) \leqq n - 1$ d'après 16.2. Les ensembles $\bar{P}$, B étant fermés dans l'espace normal R, la relation $\bar{P}B = 0$ donne l'existence de deux ensembles U, T ouverts dans R tels que $U \supset \bar{P}$, $T \supset B$, $UT = 0$, d'où $\bar{U}T = 0$ d'après 7.2. D'après 13.3 et 14.1 il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $P = SV$, $V \subset U$, $SK = H_S(P)$, où $K = H_R(V)$. On voit sans peine que $A \subset V$, $BV = 0$, $BK = 0$. D'après 14.3 il existe des ensembles Q_ν ouverts dans R tels que

$$Q_\nu \supset Q_{\nu+1}, \quad K = \prod_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu = \prod_{\nu=1}^{\infty} \bar{Q}_\nu .$$

L'ensemble $K - S$ est ouvert dans K, c'est donc un F_σ dans K; K étant fermé dans R, $K - S$ est un F_σ dans R. Il existe par suite des ensembles F_ν fermés dans R tels que

$$K - S = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu .$$

D'après 12.1 et puisque $KB = 0$, il existe des ensembles Z_ν ouverts dans R tels que

$$F_\nu \subset Z_\nu \subset \bar{Z}_\nu \subset R - B .$$

Evidemment $F_\nu \subset R - S$, d'où $\dim_{F_\nu} R \leqq n$. Or $F_\nu \subset Q_\nu Z_\nu$ de manière qu'il existe des ensembles W_ν ouverts dans R tels que

$$F_\nu \subset W_\nu \subset Q_\nu Z_\nu , \quad \dim H_R(W_\nu) \leqq n - 1 .$$

On a $K - S \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu$ de manière que l'on conclut du théorème 10, en se rappelant que $SK = H_S(P)$,

$$H_R\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu\right) \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} H_R(W_\nu) + H_S(P) .$$

Posons

$$X = V + \sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu ,$$

$C = H_R(X)$, de manière que d'après 9.1

$$(*) \qquad C \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} H_R(W_\nu) + H_S(P) .$$

Le théorème 19 étant par hypothèse vrai pour la dimension $n - 1$, le nombre de dimensions du second membre de la relation (*) est au plus égal à $n - 1$, d'où $\dim C \leqq$ $\leqq n - 1$ d'après 16.2. Or on vérifie sans peine que l'ensemble C sépare A et B l'un de l'autre dans R, car

$$R - C = X + (R - \overline{X}) , \quad X \supset A , \quad R - \overline{X} \supset B .$$

20.2. Soit R un espace parfaitement normal. Soit S un sous-ensemble fermé de R; soit T un sous-ensemble arbitraire de R. Soit A un sous-ensemble fermé de S. Soit $\dim_A S \leqq n$; soit $\dim T \leqq n$. Alors $\dim_A (S + T) \leqq n$.

Démonstration. Sans restreindre la généralité on peut supposer que $R = S + T$ (v. 14.2). De la relation $\dim T \leqq n$ on conclut alors sans peine que $\dim_F R \leqq n$ pour chaque choix d'un ensemble $F \subset R - S$ fermé dans R. Puisque $\dim_A S \leqq n$, d'après 18.1 à chaque ensemble $B^* \subset S - A$ fermé dans S on peut attacher un ensemble C^* fermé dans S séparant A et B^* l'un de l'autre dans S et tel que $\dim C^* \leqq$ $\leqq n - 1$. Or soit $B \subset R - A$ un ensemble fermé dans R. En posant $B^* = SB$ on conclut de 20.1 qu'il existe un ensemble C fermé dans R séparant A et B l'un de l'autre dans R et tel que $\dim C \leqq n - 1$. D'après 18.2 on a donc $\dim_A R = \dim_A (S + T) \leqq$ $\leqq n$.

20.3. Soit R un espace parfaitement normal. Soient S, T des ensembles fermés dans R. Soit $\dim S \leqq n$, $\dim T \leqq n$. Alors $\dim (S + T) \leqq n$.

Démonstration. De nouveau on peut supposer que $R = S + T$. Soit A fermé dans R; soit $U \supset A$ ouvert dans R. On doit construire un ensemble V ouvert dans R tel que $A \subset V \subset U$, $\dim H_R(V) \leqq n - 1$. L'ensemble AS est fermé dans S, d'où $\dim_{AS} S \leqq n$; on a de plus $\dim T \leqq n$, $R = S + T$. Donc on déduit de 20.2 que $\dim_{AS} R \leqq n$. Par suite il existe un ensemble V_1 ouvert dans R tel que $AS \subset V_1 \subset U$, $\dim H_R(V_1) \leqq n - 1$. Par raison de symmétrie il existe un ensemble V_2 ouvert dans R tel que $AT \subset V_2 \subset U$, $\dim H_R(V_2) \leqq n - 1$. Posons $V = V_1 + V_2$. Evidemment

V est un sous-ensemble ouvert de R et $A \subset V \subset U$. D'après 9.1 on a

(*) $$H_R(V) \subset H_R(V_1) + H_R(V_2).$$

Or le théorème 20.3 n'est qu'un cas spécial du théorème 19 dont nous supposons la validité pour la dimension $n - 1$; donc le théorème 20.3 est vrai pour la dimension $n - 1$ de manière que le second membre de (*) a le nombre de dimensions au plus égal à $n - 1$, d'où $\dim H_R(V) \leqq n - 1$ d'après 16.2.

21.1. Passons à la démonstration du théorème 19 pour la dimension n. Les ensembles $\sum_{i=1}^{k} S_i$ sont fermés dans R; du théorème 20.3 on déduit par récurrence que $\dim \sum_{i=1}^{k} S_i \leqq n$; enfin $\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} S_i$. Il en résulte qu'il suffit de démontrer le théorème 19 sous la supposition

(1) $$S_k \subset S_{k+1} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Sans restreindre la généralité on peut aussi supposer (v. 14.2) que

(2) $$\sum_{k=1}^{\infty} S_k = R.$$

Choisissons un ensemble A fermé dans R et un ensemble $Z \supset A$ ouvert dans R. Il s'agit de construire un ensemble U_ω ouvert dans R tel que $A \subset U_\omega \subset Z$, $\dim H_R(U_\omega) \leqq n - 1$. Commençons en construisant par récurrence, d'après 12.1, des ensembles Z_r ouverts dans R tels que

(3) $$A \subset Z_r \subset Z, \quad \bar{Z}_r \subset Z_{r+1} \quad \text{pour} \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

21.2. Le moyen essentiel pour la construction de l'ensemble U_ω cherché sera la construction préalable de trois suites U_r, V_r, T_r $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ d'ensembles ouverts dans R qui possède, pour $r = 1, 2, 3, \ldots$, les dix propriétés ci-après:

(a_r) $$AS_r \subset U_r \subset Z_r,$$

(b_r) $$U_{r-1} \subset U_r,$$

(c_r) $$\dim S_r \,.\, H_R(U_r) \leqq n - 1,$$

(d_r) $$U_r - U_{r-1} \subset V_{r-1},$$

(e_r) $$H_R(U_r) - S_{r-1} \subset V_{r-1},$$

(f_r) $$H_R(U_{r-1}) - S_{r-1} \subset V_{r-1},$$

(g_r) $$A \subset V_{r-1},$$

(h_r) $$S_{r-1} - \bar{U}_{r-1} \subset T_{r-1},$$

(i_r) $$T_{r-2} \subset T_{r-1},$$

(j_r) $$T_{r-1} \,.\, V_{r-1} = 0.$$

Nous convenons d'ailleurs de poser

(4) $$U_0 = 0\,, \quad V_0 = R\,, \quad S_0 = 0\,, \quad T_0 = 0\,, \quad T_{-1} = 0\,.$$

Nous procèderons de la manière suivante: D'abord (en 21.3) on construira l'ensemble U_1 ouvert dans R de manière à avoir $(a_1) - (j_1)$. Ensuite (en 21.4) en supposant que, pour une certaine valeur de k $(= 1, 2, 3, \ldots)$ on ait déjà construit les ensembles U_r, V_s, T_s $(1 \leqq r \leqq k,\ 1 \leqq s \leqq k - 1)$ de manière que les conditions $(a_r) - (j_r)$ soient vérifiés pour $1 \leqq r \leqq k$, on construira les ensembles V_k, T_k ouverts dans R satisfaisant aux conditions $(f_{k+1}) - (j_{k+1})$. Enfin (en 21.5) en supposant que, pour une valeur donnée de k $(= 1, 2, 3, \ldots)$ on ait déjà construit les ensembles U_r, V_r, T_r $(1 \leqq r \leqq k)$ ouverts dans R vérifiant les conditions $(a_r) - (e_r)$, $(f_s) - (j_s)$ $(1 \leqq r \leqq k, 1 \leqq s \leqq k + 1)$, on construira l'ensemble U_{k+1} ouvert dans R satisfaisant aux conditions $(a_{k+1}) - (e_{k+1})$. Le but proposé sera ainsi atteint.

21.3. L'ensemble AS_1 est fermé dans S_1; l'ensemble Z_1 est ouvert dans R et $AS_1 \subset \subset Z_1$ d'après (3); l'ensemble S_1 est fermé dans R et $\dim S_1 \leqq n$. Donc il résulte de 14.1 et 17.2 qu'il existe un ensemble U_1 ouvert dans R tel que $AS_1 \subset U_1 \subset Z_1$, $\dim S_1 \,.\, H_R(U_1) \leqq n - 1$. En tenant compte de (4) on voit que les conditions $(a_1) - - (j_1)$ sont réalisées.

21.4. Soit $k = 1, 2, 3, \ldots$ Supposons que les ensembles U_r, V_s, T_s $(1 \leqq r \leqq k,$ $1 \leqq s \leqq k - 1)$ vérifient les conditions $(a_r) - (j_r)$ pour $1 \leqq r \leqq k$. Montrons d'abord que

(α_k) $$A,\, S_k - \bar{U}_k\,;$$
(β_k) $$H_R(U_k) - S_k\,, \quad S_k - \bar{U}_k\,;$$
(γ_k) $$A,\, T_{k-1}\,;$$
(δ_k) $$H_R(U_k) - S_k,\, T_{k-1}$$

sont des couples d'ensembles séparés. L'ensemble $S_k - U_k$ est fermé dans R et contient $S_k - \bar{U}_k$; donc d'après (a_k)

$$\bar{A}(S_k - \bar{U}_k) + A \,.\, \overline{S_k - \bar{U}_k} = A \,.\, \overline{S_k - \bar{U}_k} \subset A(S_k - U_k) = AS_k - U_k = 0$$

de manière que (v. 7.2) les ensembles (α_k) sont séparés. De plus,

$$\overline{H_R(U_k) - S_k} \,.\, (S_k - \bar{U}_k) \subset H_R(\bar{U}_k) \,.\, (R - U_k) = 0\,,$$
$$(H_R(U_k) - S_k) \,.\, \overline{S_k - \bar{U}_k} \subset (R - S_k)\, S_k = 0\,,$$

de manière que les ensembles (β_k) sont séparés. Les ensembles V_{k-1}, T_{k-1}, étant ouverts dans R, il sont donc séparés en vertu de (j_k). Donc, d'après 6.2 et (g_k), les ensembles (γ_k) sont séparés et, comme $H_R(U_k) - S_k \subset H_R(U_k) - S_{k-1}$ d'après (1) [pour $k = 1$ d'après (4)], il résulte de 6.2 et (e_k) que les ensembles (δ_k) sont séparés. Par suite on voit de 6.1 que les ensembles

$$A + [H_R(U_k) - S_k]\,, \quad (S_k - \bar{U}_k) + T_{k-1}$$

sont séparés; en tenant compte de 14.1 on en déduit qu'il existe des ensembles V_k, T_k ouverts dans R satisfaisant aux conditions $(f_{k+1}) - (j_{k+1})$.

21.5. Soit $k = 1, 2, 3, \dots$ Supposons que les ensembles U_r, V_r, T_r $(1 \leqq r \leqq k)$ vérifient les conditions $(a_r) - (e_r)$, $(f_s) - (j_s)$ pour $1 \leqq r \leqq k$, $1 \leqq s \leqq k + 1$. D'après 14.3 il existe des ensembles Q_ν ouverts dans R tels que

$$(5) \qquad Q_\nu \supset Q_{\nu+1} \quad \text{pour} \quad \nu = 1, 2, 3, \dots,$$

$$(6) \qquad [A + H_R(U_k)] \,.\, S_{k+1} = \prod_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu = \prod_{\nu=1}^{\infty} \bar{Q}_\nu \,.$$

Les ensembles $[A + H_R(U_k)] \,.\, S_{k+1}$, S_k étant fermés dans l'espace parfaitement normal R, leur différence est un F_σ dans R. Il existe donc des ensembles F_ν fermés dans R tels que

$$(7) \qquad [A + H_R(U_k)] \,.\, S_{k+1} - S_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu \,.$$

D'après (7), (f_{k+1}) et (g_{k+1}) on a $F_\nu \subset V_k$. En vertu de 12.1, il existe donc des ensembles P_ν ouverts dans R tels que

$$(8) \qquad \bar{P}_\nu \subset V_k$$

et $F_\nu \subset P_\nu$. D'après (6) et (7) $F_\nu \subset Q_\nu$. De (3), (7) et (a_k) on déduit sans peine que $F_\nu \subset Z_{k+1}$. D'après (7) on a $F_\nu \subset R - S_k$. L'ensemble F_ν fermé dans S_{k+1} [d'après (7)] fait donc partie de l'ensemble $P_\nu Q_\nu Z_{k+1} \,.\, (R - S_k)$. Or S_{k+1} est fermé dans R et dim $S_{k+1} \leqq n$; il résulte donc de 14.1 et 17.2 qu'il existe des ensembles W_ν ouverts dans R tels que

$$(9) \qquad F_\nu \subset W_\nu \quad \text{pour} \quad \nu = 1, 2, 3, \dots,$$

$$(10) \qquad W_\nu \subset P_\nu Q_k Z_{k+1} - S_k \quad \text{pour} \quad \nu = 1, 2, 3, \dots,$$

$$(11) \qquad \dim S_{k+1} \,.\, H_R(W_\nu) \leqq n - 1 \quad \text{pour} \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

D'après (5), (6), (7), (9) et (10) les suppositions du théorème 10 sont satisfaites si l'on remplace S, T, Q_ν, V_ν par (6), (7), Q_ν, W_ν. Donc

$$(12) \qquad H_R\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu\Big) \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} H_R(W_\nu) + S_k \,.\, (A + H_R(U_k)) \,.$$

Posons

$$(13) \qquad U_{k+1} = U_k + \sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu$$

de manière que U_{k+1} est un sous-ensemble ouvert de R.

De (a_k), (3), (7), (9), (13) on déduit sans peine que la condition (a_{k+1}) est réalisée. La vérité de (b_{k+1}) est évidente. D'après (a_k), (12), (13) et 9.1 on a

$$(14) \qquad H_R(U_{k+1}) \subset H_R(U_k) + \sum_{\nu=1}^{\infty} H_R(W_\nu) .$$

D'après (7), (9) et (13) on a $H_R(U_{k+1}) \, . \, [S_{k+1} \, . \, H_R(U_k) - S_k] = 0$, de manière que (14) donne

$$(15) \qquad S_{k+1} \, . \, H_R(U_{k+1}) \subset S_k \, . \, H_R(U_k) + \sum_{\nu=1}^{\infty} S_{k+1} \, . \, H_R(W_k) .$$

Or nous supposons la validité du théorème 19 pour la dimension $n - 1$; de (c_k), (11), (15) et 16.2 résulte donc (c_{k+1}). D'après (8) et (10) $W_\nu \subset V_k$ de manière que (13) donne (d_{k+1}). D'après (8) et (10) $H_R(W_\nu) \subset V_k$; d'après (f_{k+1}) $H_R(U_k) - S_k \subset V_k$; donc (14) donne (e_{k+1}).

21.6. La construction des ensembles U_r, V_r, T_r ouverts dans R possédant les propriétés $(a_r) - (j_r)$ pour $r = 1, 2, 3, \ldots$ est ainsi achevée. Nous devons (v. 21.1) construire un ensemble U_ω ouvert dans R tel que

$$(16) \qquad A \subset U_\omega \subset Z ,$$

$$(17) \qquad \dim H_R(U_\omega) \leqq n - 1 .$$

Posons à cet effet

$$U_\omega = \sum_{r=1}^{\infty} U_r ,$$

de manière que U_ω est un sous-ensemble ouvert de R. La condition (16) est vérifiée en vertu de (2), (3) et (a_r). Choisissons une valeur de k $(= 1, 2, 3, \ldots)$. D'après (b_r) et (d_r) on a

$$(18) \qquad U_\omega \subset U_k + \sum_{r=k}^{\infty} V_r .$$

D'après (i_r) et (j_r) on a $T_k \, . \sum_{r=k}^{\infty} V_r = 0$; les ensembles T_k et $\sum_{r=k}^{\infty} V_r$ étant ouverts dans R, ils sont séparés, d'où (v. 7.2)

$$T_k \, . \, \overline{\sum_{r=k}^{\infty} V_r} = 0 .$$

Or d'après (18)

$$H_R(U_\omega) \subset \overline{U}_\omega \subset \overline{U}_k + \overline{\sum_{r=k}^{\infty} V_r}$$

de manière que

$$T_k \, . \, H_R(U_\omega) \subset \overline{U}_k .$$

Donc, en vertu de (h_{k+1}) $(S_k - \bar{U}_k) \, . \, H_R(U_\omega) = 0$, c'est-à-dire $S_k \, . \, H_R(U_\omega) \subset \bar{U}_k$. Or $U_k \subset U_\omega \subset R - H_R(U_\omega)$; $\bar{U}_k - U_k = H_R(U_k)$; donc $S_k \, . \, H_R(U_\omega) \subset S_k \, . \, H_R(U_k)$. Ceci étant vrai pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, on déduit de (2) que

$$H_R(U_\omega) \subset \sum_{k=1}^{\infty} S_k \, . \, H_R(U_k) \, . \tag{19}$$

Comme nous supposons la validité du théorème 19 pour la dimension $n - 1$, la relation (17) s'obtient de (19) et (c_r) en vertu de 16.2.

IV. Quelques conséquences

22. Soit R un espace parfaitement normal; soit $\dim R \leqq n$. Soit A un sous-ensemble arbitraire de R. Soit $U \supset A$ un sous-ensemble ouvert de R. Il existe un ensemble V ouvert dans R tel que

$$A \subset V \subset U \, , \quad H_R(V) = \Phi_1 + \Phi_2 \, ,$$
$$\dim \Phi_1 \leqq n - 1 \, , \quad \Phi_2 = \bar{A} \, . \, H_R(V) = (\bar{A} - A) \, . \, H_R(V) \, .$$

Démonstration. L'espace R étant parfaitement normal, l'ensemble $\bar{A} \, . \, U$ est un F_σ dans R. Il existe donc des ensembles F_ν fermés dans R tels que

$$\bar{A} \, . \, U = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu \, . \tag{1}$$

D'après 14.3 il existe des ensembles Q_ν ouverts dans R tels que

$$Q_\nu \supset Q_{\nu+1} \, , \quad \bar{A} = \prod_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu = \prod_{\nu=1}^{\infty} \bar{Q}_\nu \, . \tag{2}$$

D'après (1) et (2) $F_\nu \subset UQ_\nu$; or $\dim R \leqq n$ de manière qu'il existe des ensembles W_ν ouverts dans R tels que

$$F_\nu \subset W_\nu \subset UQ_\nu \, , \tag{3}$$

$$\dim H_R(W_\nu) \leqq n - 1 \, . \tag{4}$$

D'après 10

$$H_R\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu\Big) \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} H_R(W_\nu) + (\bar{A} - U) \, . \tag{5}$$

Posons

$$V = \sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu \, ; \quad \Phi_1 = H_R(V) \, . \sum_{\nu=1}^{\infty} H_R(W_\nu) \, ; \quad \Phi_2 = \bar{A} \, . \, H_R(V) \, .$$

L'ensemble V est ouvert dans R; comme $A \subset U$, d'après (1) et (3) $A \subset \bar{A} \,.\, U \subset V$; donc $A \,.\, H_R(V) = 0$, d'où $\Phi_2 = (\bar{A} - A) \,.\, H_R(V)$; d'après (5) $H_R(V) = \Phi_1 + \Phi_2$; d'après (4), 19 et 16.2 $\dim \Phi_1 \leqq n - 1$.

23. Soit R un espace parfaitement normal; soit $\dim R \leqq n$. Soit S un sous-ensemble arbitraire de R. Alors $\dim S \leqq n$.

Démonstration. Le théorème étant banal pour $n = -1$, supposons le vrai pour la dimension $n - 1$. Soit A un ensemble fermé dans S; soit $U_0 \supset A$ un ensemble ouvert dans S de manière qu'il existe un ensemble U ouvert dans R tel que $U_0 = SU$, d'où $U \supset A$. D'après 22 il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $A \subset V \subset U$, $H_R(V) = \Phi_1 + \Phi_2$, $\dim \Phi_1 \leqq n - 1$, $\Phi_2 \subset \bar{A} - A$. Posons $V_0 = SV$; l'ensemble V_0 est ouvert dans S et l'on a $A \subset V_0 \subset U_0$. D'après 5 $A = S\bar{A}$, d'où $S\Phi_2 = 0$, donc $S \,.\, H_R(V) \subset \Phi_1$ et par suite $H_S(V_0) \subset \Phi_1$ en vertu de 11. Or nous supposons la validité du théorème à démontrer pour la dimension $n - 1$; donc $\dim H_S(V_0) \leqq$ $\leqq n - 1$. Par suite $\dim S \leqq n$.

24.1. Soit R un espace parfaitement normal; soit $\dim R \leqq n$. Soit S un sous-ensemble fermé de R. Soit U_0 un ensemble ouvert dans S, soit $U \supset U_0$ un ensemble ouvert dans R. Soit $\dim H_S(U_0) \leqq n - 1$. Alors il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $U_0 \subset V \subset U$, $SV = U_0$, $S \,.\, H_R(V) = H_S(U_0)$, $\dim H_R(V) \leqq n - 1$.

Démonstration. D'après 13.3 et 14.1 il existe un ensemble W ouvert dans R tel que $SW = U_0$, $U_0 \subset W \subset U$, $S \,.\, H_R(W) = H_S(U_0)$. D'après le théorème 22 (où l'on remplace A, U par U_0, W) il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $U_0 \subset V \subset W \subset U$ (donc $SV = U_0$), $H_R(V) = \Phi_1 + \Phi_2$, $\dim \Phi_1 \leqq n - 1$, $\Phi_2 =$ $= \bar{U}_0 \,.\, H_R(V) = (\bar{U}_0 - U_0)\, H_R(V)$. L'ensemble Φ_2 est fermé dans R. On a $H_R(V) \subset$ $\subset \bar{V} \subset \bar{W}$; or $SW = U_0 \subset V \subset R - H_R(V)$, de manière $S \,.\, H_R(V) \subset S \,.\, H_R(W) =$ $= H_S(U_0)$, d'où $S \,.\, H_R(V) = H_S(U_0)$ d'après 11. Or $H_S(U_0) = S \,.\, \bar{U}_0 - U_0 =$ $= \bar{U}_0 - U_0$ (car $U_0 \subset S$ entraîne $\bar{U}_0 \subset S$, S étant fermé dans R) et par suite $\Phi_2 =$ $= (\bar{U}_0 - U_0)\, H_R(V) = H_S(V_0)$, donc $\dim \Phi_2 \leqq n - 1$. L'ensemble Φ_2 étant fermé dans R, l'ensemble $H_R(V) - \Phi_2 \subset \Phi_1$ est (l'espace R étant parfaitement normal) un F_σ dans R, d'où $H_R(V) = \Phi_2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$, les F_ν étant des sous-ensembles de Φ_1 fermés dans R. Comme $\dim \Phi_1 \leqq n - 1$, $\dim F_\nu \leqq n - 1$ d'après 23 (ou bien d'après 16.2). Donc $\dim H_R(V) \leqq n - 1$ d'après 19.

24.2. Soit R un espace parfaitement normal. Soient $S_1, S_2, \ldots, S_k$ des sous-ensembles fermés de R. Soit $R = S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_k$. Soit U_0 un ensemble ouvert dans S_k; soit $U \supset U_0$ un ensemble ouvert dans R. Soit $\dim S_\nu \leqq n_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq k$. Soit $\dim H_{S_k}(U_0) \leqq n_k - 1$. Alors il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $U_0 \subset V \subset U$, $S_k \,.\, V = U_0$, $S_k \,.\, H_R(V) = H_{S_k}(U_0)$, $\dim S_\nu \,.\, H_R(V) \leqq n_\nu - 1$ pour $1 \leqq \nu \leqq k$.

Démonstration. Le théorème étant banal pour $k = 1$, supposons le vrai pour $k - 1$. Il existe donc (v. 14.2) un ensemble V_0 ouvert dans S_2 tel que $U_0 \subset$

$\subset V_0 \subset S_2 \,.\, U$, $S_k \,.\, V_0 = U_0$, $S_k \,.\, H_{S_2}(V_0) = H_{S_k}(U_0)$, $\dim S_\nu \,.\, H_{S_2}(V_0) \leqq n_\nu - 1$ pour $2 \leqq \nu \leqq k$. D'après 24.1 (où on remplace n, S, U_0 par n_1, S_2, V_0) il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $U_0 \subset V_0 \subset V \subset U$, $S_2 V = V_0$ (et donc $S_k V = U_0$), $S_2 \,.\, H_R(V) = H_{S_2}(V_0)$, $\dim H_R(V) \leqq n_1 - 1$. Comme $S_k \subset S_2$, on a $S_k \,.\, H_R(V) = {}$ $= S_k \,.\, H_{S_2}(V_0) = H_{S_k}(U_0)$. Comme $S_1 = R$, la relation $\dim S_\nu \,.\, H_R(V) \leqq n_\nu - 1$ est vraie pour $\nu = 1$. Pour $2 \leqq \nu \leqq k$ on a $S_\nu \subset S_2$, donc $S_\nu \,.\, H_R(V) = S_\nu \,.\, H_{S_2}(V_0)$ d'où ici encore $\dim S_\nu \,.\, H_R(V) \leqq n_\nu - 1$.

V. Théorème sur le recouvrement d'un espace à dimension finie

25.1. Soit R un espace normal. Soient $U_1, \ldots, U_m$ des sous-ensembles ouverts de R; soit $\sum_{\nu=1}^{m} U_\nu = R$. Il existe un ensemble V_1 ouvert dans R tel que $\overline{V}_1 \subset U_1$, $V_1 + \sum_{\nu=2}^{m} U_\nu = R$.

Démonstration.[13] L'ensemble $R - \sum_{\nu=2}^{m} U_\nu$ est fermé dans R et est contenu dans U_1. Donc d'après 12.1 il existe un ensemble V_1 ouvert dans R tel que

$$R - \sum_{\nu=2}^{m} U_\nu \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset U_1 \,;$$

évidemment $V_1 + \sum_{\nu=2}^{m} U_\nu = R$.

25.2. Soit R un espace normal. Soient $U_1, \ldots, U_m$ des sous-ensembles ouverts de R; soit $\sum_{\nu=1}^{m} U_\nu = R$. Il existe des ensembles $V_1, \ldots, V_m$ ouverts dans R tels que $\overline{V}_1 \subset U_1, \ldots, \overline{V}_m \subset U_m$, $\sum_{\nu=1}^{m} V_\nu = R$.

Démonstration.[13] Les ensembles V_ν s'obtiennent en appliquant n fois la proposition 25.1.

25.3. Soit R un espace parfaitement normal; soit $\dim R \leqq n$. Soient $U_1, \ldots, U_m$ des sous-ensembles ouverts de R; soit $\sum_{\nu=1}^{m} U_\nu = R$. Il existe des ensembles $V_1, \ldots, V_m$ ouverts dans R tels que: $\overline{V}_\nu \subset U_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$; $\sum_{\nu=1}^{m} \overline{V}_\nu = R$; $V_\mu V_\nu = 0$ pour $1 \leqq \mu < \nu \leqq m$; $\dim H_R(V_\nu) \leqq n - 1$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$.

Démonstration. D'après 25.2 il existe des ensembles $F_1, \ldots, F_m$ fermés dans R tels que $F_\nu \subset U_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$, $\sum_{\nu=1}^{m} F_\nu = R$. D'après 12.1 il existe des ensembles

[13] Menger, l. c., p. 159—160 (Bemerkung).

$W_1, \ldots, W_m$ ouverts dans R tels que $F_\nu \subset W_\nu \subset \overline{W}_\nu \subset U_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$. Puisque $\dim R \leqq n$, il existe des ensembles $Z_1, \ldots, Z_m$ ouverts dans R tels que $F_\nu \subset Z_\nu \subset W_\nu$, $\dim H_R(Z_\nu) \leqq n - 1$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$. Posons $V_1 = Z_1$; pour $2 \leqq \nu \leqq m$ posons $V_\nu = Z_\nu - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \overline{Z}_\mu$. Les ensembles V_ν sont ouverts dans R et l'on a $\overline{V}_\nu \subset \overline{Z}_\nu \subset \overline{W}_\nu \subset U_\nu$. Soit p un point arbitraire de R; comme $R = \sum_{\nu=1}^{m} F_\nu \subset \sum_{\nu=1}^{m} \overline{Z}_\nu$, soit ν le plus petit indice tel que $(p) \subset \overline{Z}_\nu$; on voit sans peine que $(p) \subset \overline{V}_\nu$. Donc $\sum_{\nu=1}^{m} \overline{V}_\nu = R$. Pour $1 \leqq \mu < < \nu \leqq m$ on a $V_\nu \subset R - \sum_{i=1}^{\nu-1} \overline{Z}_i \subset R - \overline{Z}_\mu \subset R - \overline{V}_\mu \subset R - V_\mu$, d'où $V_\mu V_\nu = 0$. Comme $V_1 = Z_1$, on a $\dim H_R(V_1) \leqq n - 1$. Pour $2 \leqq \nu \leqq m$ on a

$$V_\nu = Z_\nu - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \overline{Z}_\mu = Z_\nu - \overline{\sum_{\mu=1}^{\nu-1} Z_\mu},$$

donc d'après 9.1 et 9.2

$$H_R(V_\nu) \subset \sum_{\mu=1}^{\nu} H_R(Z_\mu)$$

d'où $\dim H_R(V_\nu) \leqq n - 1$ d'après 19 et 23 (ou bien 16.2).

26. Soit R un espace parfaitement normal; soit $\dim R \leqq n$. Soient $U_1, \ldots, U_m$ des sous-ensembles ouverts de R; soit $\sum_{\nu=1}^{m} U_\nu = R$. Il existe des ensembles V_i $(1 \leqq i \leqq \leqq (n+1)\,m)$ ouverts dans R jouissant des propriétés suivantes:

1° $\overline{V}_i \subset U_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$, $(n+1)(\nu-1)+1 \leqq i \leqq (n+1)\,\nu$;

2° $\sum_{i=1}^{(n+1)m} \overline{V}_i = R$;

3° $V_i \,.\, V_j = 0$ pour $1 \leqq i < j \leqq (n+1)\,m$;

4° $\dim H_R(V_i) \leqq n - 1$ pour $1 \leqq i \leqq (n+1)\,m$;

5° soit $i_1, i_2, \ldots, i_r$ $(2 \leqq r \leqq n+2)$ une combinaison des indices $1, 2, \ldots, (n+1)\,m$: alors $\dim \prod_{s=1}^{r} \overline{V}_{i_s} \leqq n - r + 1$.

Démonstration. Pour $k = 1$, ils résulte sans peine de 25.3 qu'il existe des ensembles $V_i^{(k)}$ $(1 \leqq i \leqq km)$ ouverts dans R tels que

(a_k) $\quad \overline{V}_i^{(k)} \subset U_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$, $k(\nu-1)+1 \leqq i \leqq k\nu$;

(b_k) $\quad \sum_{i=1}^{km} \overline{V}_i^{(k)} = R$;

(c_k) $\quad V_i^{(k)} \,.\, V_j^{(k)} = 0$ pour $1 \leqq i < j \leqq km$;

(d_k) $\dim H_R(V_i^{(k)}) \leqq n - 1$ pour $1 \leqq i \leqq km$;

(e_k) pour chaque combinaison $i_1, i_2, \ldots, i_r$ des indices $1, 2, \ldots, km$ telle que $2 \leqq r \leqq k + 1$ on a $\dim \prod_{s=1}^{r} \bar{V}_{i_s}^{(k)} \leqq n - r + 1$.[14]

On doit prouver que de tels ensembles $V_i^{(k)}$ existent aussi pour $k = n + 2$. Supposons donc que, pour une certaine valeur de k $(1 \leqq k \leqq n + 1)$, on ait construit des ensembles $V_i^{(k)}$ $(1 \leqq i \leqq km)$ ouverts dans R jouissant des propriétés $(a_k) - (e_k)$; il s'agit seulement d'en déduire des ensembles $V_i^{(k+1)}$ $(1 \leqq i \leqq (k + 1)\, m)$ ouverts dans R vérifiant $(a_{k+1}) - (e_{k+1})$.

26.1. Pour $1 \leqq r \leqq k$, soit S_r l'ensemble de tous les points p de l'espace R tels que $(p) \subset V_i^{(k)}$ pour r valeurs différentes au moins de l'indice i $(1 \leqq i \leqq km)$. D'après (b_k) on a $S_1 = R$. Evidemment $S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_k$ et les ensembles S_k $(1 \leqq r \leqq k)$ sont fermés dans R. D'après 19 et (e_k) on a $\dim S_r \leqq n - r + 1$ pour $1 \leqq r \leqq k$. Les ensembles $S_k U_\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq m)$ sont ouverts dans S_k et l'on a $\sum_{\nu=1}^{m} S_k U_\nu = S_k$. Donc, en vertu de 14.2 et 25.3, il existe des ensembles T_ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ ouverts dans S_k tels que

(1) $$\bar{T}_\nu \subset U_\nu \quad \text{pour} \quad 1 \leqq \nu \leqq m\,;$$

(2) $$\sum_{\nu=1}^{m} \bar{T}_\nu = S_k\,;$$

(3) $$T_\mu T_\nu = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq \mu < \nu \leqq m\,;$$

(4) $$\dim H_{S_k}(T_\nu) \leqq n - k \quad \text{pour} \quad 1 \leqq \nu \leqq m\,.$$

26.2. Nous allons construire des ensembles W_ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ ouverts dans R tels que:

(α_ν) $$\bar{W}_\nu \subset U_\nu \quad \text{pour} \quad 1 \leqq \nu \leqq m\,;$$

(β_ν) $$S_k \,.\, W_\nu = T_\nu \quad \text{pour} \quad 1 \leqq \nu \leqq m\,;$$

(γ_ν) $$S_k \,.\, H_R(W_\nu) = H_{S_k}(T_\nu) \quad \text{pour} \quad 1 \leqq \nu \leqq m\,;$$

(δ_ν) $$\dim S_k \,.\, H_R(W_\nu) \leqq n - r \quad \text{pour} \quad 1 \leqq r \leqq k, 1 \leqq \nu \leqq m\,;$$

(ε_ν) $$\bar{W}_\mu W_\nu = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq \mu < \nu \leqq m\,;$$

(ζ_ν) $$\bar{W}_\mu \,.\, \bar{W}_\nu \subset S_k \quad \text{pour} \quad 1 \leqq \mu < \nu \leqq m\,.$$

[14] Pour $k = 1$, donc $r = 2$, on a $P = \prod_{s=1}^{r} \bar{V}_{i_s}^{(k)} = \bar{V}_{i_1}^{(1)} \,.\, V_{i_2}^{(1)}$. Or d'après (c_i) $V_{i_1}^{(1)} \,.\, V_{i_2}^{(1)} = 0$ d'où $V_{i_1}^{(1)} \bar{V}_{i_2}^{(1)} = 0$ selon 7.2; donc $P \subset H_R(V_{i_1}^{(1)})$, d'où $\dim P \leqq n - r + 1 = n - 1$ d'après 16.2 et (d_1).

Les conditions (ε_1) et (ζ_1) sont à regarder comme banales. D'après (1) et 12.1 on construit d'abord des ensembles Z_ν ouverts dans R tels que

$$(5) \qquad \overline{T}_\nu \subset Z_\nu \subset \overline{Z}_\nu \subset U_\nu \quad \text{pour} \quad 1 \leqq \nu \leqq m\,.$$

D'après 26.1 les hypothèses du théorème 24.2 sont vérifiées lorsqu'on y remplace U_0, U, n_r $(1 \leqq r \leqq k)$ par T_1, Z_1, $n - r$. Il existe donc un ensemble W_1 ouvert dans R vérifiant $(\alpha_1) - (\zeta_1)$. Supposons donc que, pour une certaine valeur de ν $(2 \leqq \nu \leqq$ $\leqq m)$, on ait déjà construit des ensembles $W_1, \ldots, W_{\nu-1}$ ouverts dans R tels que les propriétés $(\alpha_\mu) - (\zeta_\mu)$ aient lieu pour $1 \leqq \mu < \nu$. On doit construire un ensemble W_ν ouvert dans R jouissant des propriétés $(\alpha_\nu) - (\zeta_\nu)$. Pour $1 \leqq \mu < \nu$ on a d'après (β_μ) et (γ_μ)

$$(\overline{W}_\mu - S_k)\,\overline{T}_\nu \subset (\overline{W}_\mu - S_k)\,S_k = 0\,, \quad \overline{\overline{W}_\mu - S_k}\,.\,T_\nu \subset \overline{W}_\mu\,.\,S_kT_\nu \subset \overline{T}_\mu T_\nu\,;$$

les ensembles T_μ et T_ν étant ouverts dans S_k, il sont séparés d'après (3), d'où $\overline{T}_\mu\,.\,T_\nu =$ $= 0$. Donc (v. 7.2) les ensembles $\overline{W}_\mu - S_k$ et T_ν sont séparés; les ensembles $\sum_{\mu=1}^{\nu-1}(\overline{W}_\mu -$ $- S_k)$, T_ν le sont aussi en vertu de 6.1; donc (v. 14.1) il existe des ensembles P_ν, Q_ν ouverts dans R tels que

$$(6) \qquad P_\nu \supset \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \overline{W}_\mu - S_k\,, \quad Q_\nu \supset T_\nu\,, \quad P_\nu Q_\nu = 0\,.$$

Or on peut appliquer le théorème 24.2 en y remplaçant U_0, U, n_r $(1 \leqq r \leqq k)$ par T_ν, $Z_\nu Q_\nu$, $n - r$. Il s'ensuit l'existence d'un ensemble W_ν ouvert dans R tel que

$$(7) \qquad T_\nu \subset W_\nu \subset Z_\nu Q_\nu$$

et que les conditions (β_ν), (γ_ν), (δ_ν) soient réalisées. D'après (7) on a $\overline{W}_\nu \subset \overline{Z}_\nu$, d'où il résulte (α_ν) d'après (5). Les ensembles P_ν, Q_ν ouverts dans R sont séparés d'après (6), de manière que (v. 7.2) $P_\nu\overline{Q}_\nu = 0$, donc $\overline{W}_\mu\overline{Q}_\nu \subset S_k$ pour $1 \leqq \mu < \nu$. Or on a $\overline{W}_\nu \subset \overline{Q}_\nu$ en vertu de (7), donc on a (ζ_ν). Par suite pour $1 \leqq \mu < \nu$ on a $\overline{W}_\mu\,.\,W_\nu = [W_\mu +$ $+ H_R(W_\mu)]\,.\,W_\nu \subset S_k$, d'où, en tenant compte de (β_μ), (γ_μ) et (β_ν),

$$\overline{W}_\mu\,.\,W_\nu = [S_kW_\mu + S_k\,H_R(W_\mu)]\,.\,S_kW_\nu = [T_\mu + H_{S_k}(T_\mu)]\,T_\nu = \overline{T}_\mu T_\nu = 0$$

d'après (3) et 7.2; il en résulte (ε_ν).

26.3. Posons

$$(8) \quad W_{i+r}^{(k+1)} = V_i^{(k)} - \sum_{\nu=1}^{m} \overline{W}_\nu \quad \text{pour} \quad 0 \leqq r \leqq m - 1, rk + 1 \leqq i \leqq (r + 1)\,k\,,$$

$$(9) \qquad V_{r(k+1)}^{(k+1)} = W_\nu \quad \text{pour} \quad 1 \leqq \nu \leqq m\,,$$

de manière que $V_i^{(k+1)}$ $(1 \leqq i \leqq (k + 1)\,m)$ sont des sous-ensembles ouverts de R.

D'après (a_k) et (α_ν) on a (a_{k+1}). Pour $0 \leqq r \leqq m - 1$ $rk + 1 \leqq i \leqq (r+1)k$ on a d'après (8) $V_i^{(k)} \subset V_{i+r}^{(k+1)} + \sum_{\nu=1}^{m} \overline{W}_\nu$, d'où $\overline{V}_i^{(k)} \subset \overline{V}_{i+r}^{(k+1)} + \sum_{\nu=1}^{n} \overline{W}_\nu$, donc (b_{k+1}) en vertu de (9) et (b_k). D'après (8), (9), (c_k) et (ε_ν) on a (c_{k+1}). D'après 9.1 et 9.2 on a pour $0 \leqq r \leqq m - 1$, $rk + 1 \leqq i \leqq (r+1)k$

$$H_R(V_{i+r}^{(k+1)}) \subset H_R(V_i^{(k)}) + \sum_{\nu=1}^{m} H_R(W_\nu),$$

d'où (d_{k+1}) d'après (δ_ν), (d_k), 16.2 et 20.3.

26.4. Il reste à prouver (e_{k+1}). Soit donc $j_1, j_2, \ldots, j_r$ $(2 \leqq r \leqq k+1)$ une combinaison des indices $1, 2, \ldots, (k+1)m$. Soit

$$Q = \prod_{s=1}^{r} \overline{V}_{j_s}^{(k+1)}.$$

On doit démontrer que $\dim Q \leqq n - r + 1$. Quatre cas sont à distinguer:

Premier cas. Deux au moins parmi les ensembles $V_{j_s}^{(k+1)}$ $(1 \leqq s \leqq r)$ sont donnés par (9); soit pour fixer les idées

$$V_{j_1}^{(k+1)} = W_\mu, \quad V_{j_2}^{(k+1)} = W_\nu$$

avec $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, m$; $\mu < \nu$. On a $Q \subset \overline{W}_\mu \,.\, \overline{W}_\nu$, d'où $Q \subset S_k$ d'après (ζ_ν). En outre $\overline{W}_\mu W_\nu = 0$ d'après (ε_ν), d'où $Q \subset H_R(W_\nu)$. Donc d'après 16.2 et (δ_ν) $\dim Q \leqq \leqq n - k \leqq n - r + 1$, car $r \leqq k + 1$.

Deuxième cas. Parmi les r ensembles $V_{j_s}^{(k+1)}$, un seul est donné par (9). Il existe un indice ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ et une combinaison $i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}$ d'indices $1, 2, \ldots, km$ de manière que

$$Q = \overline{W}_\nu \,.\, \overline{\prod_{s=1}^{r-1} V_{i_s}^{(k)} - \sum_{\mu=1}^{m} \overline{W}_\mu} \subset \overline{W}_\nu \,.\, \prod_{s=1}^{r-1} \overline{V}_{i_s}^{(k)} \subset \overline{W}_\nu \,.\, S_{r-1}\,.$$

Les ensembles W_ν, $V_{i_s}^{(k)} - \sum_{\mu=1}^{m} \overline{W}_\mu$ sans point commun étant ouverts dans R, ils sont séparés; donc $W_\nu \,.\, \overline{\prod_{s=1}^{r-1} V_{i_s}^{(k)} - \sum_{\mu=1}^{m} \overline{W}_\mu} = 0$ d'après 7.2, d'où $Q \subset S_{r-1} \,.\, H_R(W_\nu)$ et $\dim Q \leqq n - r + 1$ d'après 16.2 et (δ_ν).

Troisième cas. Tous les ensembles $V_{j_s}^{(k+1)}$ sont donnés par (8) et $2 \leqq r \leqq k$. Il existe donc une combinaison $i_1, i_2, \ldots, i_r$ d'indices $1, 2, \ldots, km$ telle que

$$(*) \qquad Q = \prod_{s=1}^{r} \overline{V_{i_s}^{(k)} - \sum_{\mu=1}^{m} \overline{W}_\mu} \subset \prod_{s=1}^{r} \overline{V}_{i_s}^{(k)},$$

donc $\dim Q \leqq n - r + 1$ d'après 16.2 et (e_k).

Quatrième cas. Tous les ensembles $V_{j_s}^{(k+1)}$ sont donnés par (8) et $r = k + 1$. On a de nouveau la formule (*). Comme $r = k + 1$, on a $Q \subset S_k$ en vertu de la définition de S_k, d'où $Q \subset \sum_{\nu=1}^{m} \overline{W}_\mu$ d'après (2) et (β_ν). Or $(V_{i_s}^{(k)} - \sum_{\mu=1}^{m} \overline{W}_\mu) \,.\, W_\nu = 0$, d'où $\overline{V_{i_s}^{(k)} - \sum_{\mu=1}^{m} \overline{W}_\mu} \,.\, W_\nu = 0$ d'après 7.2 de manière que $Q \,.\, W_\nu = 0$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$. Donc $Q \subset \sum_{\nu=1}^{m} (\overline{W}_\nu - W_\nu)$, $Q \subset S_k$ et par suite $Q \subset \sum_{\nu=1}^{m} S_k \,.\, H_R(W_\nu)$, donc d'après 16.2 et (δ_ν) $\dim Q \leqq n - k = n - r + 1$.

27. Soit R un espace parfaitement normal. Soit S un sous-ensemble fermé de R; soit $\dim S \leqq n$. Soient $U_1, \dots, U_m$ des sous-ensembles ouverts de R; soit $\sum_{\nu=1}^{m} U_\nu \supset S$. Il existe des ensembles V_i $(1 \leqq i \leqq (n + 1)\, m)$ ouverts dans R tels que:

1° $\overline{V}_i \subset U_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$, $(n + 1)(\nu - 1) + 1 \leqq i \leqq (n + 1)\, \nu$;

2° $\sum_{i=1}^{(n+1)m} V_i \supset S$;

3° $V_i V_j = 0$ pour $1 \leqq i < j \leqq (n + 1)\, m$;

4° $\dim S \,.\, H_R(V_i) \leqq n - 1$ pour $1 \leqq i \leqq (n + 1)\, m$;

5° pour chaque combinaison $i_1, i_2, \dots, i_r$ $(2 \leqq r \leqq n + 2)$ d'indices $1, 2, \dots$ $\dots, (n + 1)\, m$ on a $\prod_{s=1}^{r} \overline{V}_{i_s} \subset S$, $\dim \prod_{s=1}^{r} \overline{V}_{i_s} \leqq n - r + 1$.

Démonstration. D'après 26 et 14.2 il existe des ensembles T_i ouverts dans S tels que:

6° $\overline{T}_i \subset U_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$, $(n + 1)(\nu - 1) + 1 \leqq i \leqq (n + 1)\, \nu$;

7° $\sum_{i=1}^{(n+1)m} \overline{T}_i = S$;

8° $T_i \,.\, T_j = 0$ pour $1 \leqq i < j \leqq (n + 1)\, m$;

9° $\dim H_S(T_i) \leqq n - 1$ pour $1 \leqq i \leqq (n + 1)\, m$;

10° pour chaque combinaison $i_1, i_2, \dots, i_r$ $(2 \leqq r \leqq n + 2)$ d'indices $1, 2, \dots$ $\dots, (n + 1)\, m$ on a $\dim \prod_{s=1}^{r} \overline{T}_{i_s} \leqq n - r + 1$.

D'après 6° et 12.1 il existe des ensembles Z_i ouverts dans R tels que

$$\overline{T}_i \subset Z_i \subset \overline{Z}_i \subset U_\nu \quad \text{pour} \quad 1 \leqq \nu \leqq m\,, \quad (n + 1)(\nu - 1) + 1 \leqq i \leqq (n + 1)\, \nu.$$

Evidemment il suffit de construire des ensembles V_i $(1 \leqq i \leqq (n + 1)\, m)$ ouverts dans R de manière que

$$(a_i) \qquad T_i \subset V_i \subset Z_i\,, \quad T_i = SV_i \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq (n + 1)\, m\,;$$

$$(b_i) \qquad V_i \,.\, V_j = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq j < i \leqq (n+1)\,m\,;$$

$$(c_i) \qquad S \,.\, H_R(V_i) = H_S(T_i) \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq (n+1)\,m\,;$$

$$(d_i) \qquad \overline{V}_i \,.\, \overline{V}_j = \overline{T}_i \,.\, \overline{T}_j \quad \text{pour} \quad 1 \leqq j < i \leqq (n+1)\,m\,.$$

D'après 13.3 et 14.1 il existe un ensemble V_1 ouvert dans R vérifiant (a_1) et (c_1), que (b_1) et (d_1) n'exigent rien. Supposons donc que pour une certaine valeur de i $(2 \leqq i \leqq (n+1)\,m)$ on ait déjà construit des ensembles $V_j\,(1 \leqq j < i)$ ouverts dans R tels que les conditions $(a_j) - (d_j)$ soient satisfaites pour $1 \leqq j < i$. On doit construire un ensemble V_i ouvert dans R vérifiant $(a_i) - (d_i)$. Pour $1 \leqq j < i$ on a

$$(\overline{V}_j - S) \,.\, \overline{T}_i \subset (R - S)\, S = 0\,,$$

$$\begin{aligned} \overline{V_j - S} \,.\, T_i \subset \overline{V}_j \,.\, S \,.\, T_i &= [S \,.\, V_j + S \,.\, H_R(V_j)]\, T_i = \\ &= [T_j + H_S(T_j)]\, T_i = \overline{T}_j \,.\, T_i \end{aligned}$$

et $\overline{T}_j \,.\, T_i = 0$ d'après 8[c] et 7.2. Par suite, en vertu de 6.1 et 7.2, les ensembles $\sum_{j=1}^{i-1} \overline{V}_j - S$ et T_i sont séparés; il existe donc (v. 14.1) des ensembles P_i, Q_i ouverts dans R tels que

$$P_i \supset \sum_{j=1}^{i-1} \overline{V}_j - S\,, \quad Q_i \supset T_i\,, \quad P_i Q_i = 0\,.$$

D'après 7.2 $P_i \overline{Q}_i = 0$. D'après 13.3 et 14.1 il existe un ensemble V_i ouvert dans R tel que

$$T_i \subset V_i \subset Z_i Q_i\,, \quad T_i = SV_i\,, \quad H_S(T_i) = S \,.\, H_R(V_i)\,.$$

Les propriétés (a_i) et (c_i) sont évidentes. Puisque $V_i \subset Q_i$, $V_j \subset S + P_i\,(1 \leqq j < i)$, on a $\overline{V}_i \overline{V}_j \subset P_i \overline{Q}_i + S = S$. Donc $V_i V_j = S$, d'où $V_i V_j = SV_i \,.\, SV_j = T_i T_j = 0$, d'où (b_i). De plus $S\overline{V}_i = S \,.\, [V_i + H_R(V_i)] = T_i + H_S(T_i) = \overline{T}_i$; comme $\overline{V}_i \overline{V}_j \subset S$, on a $\overline{V}_i \overline{V}_j = S\overline{V}_i \,.\, S\overline{V}_j = \overline{T}_i \overline{T}_j$, d'où (d_i).

7

THÉORIE GÉNÉRALE DE L'HOMOLOGIE DANS UN ESPACE QUELCONQUE

Fundamenta Mathematicae
19 (1932), 149–183

Dans les dernières années, plusieurs auteurs[1] ont développé une théorie de l'homologie dans un espace *métrique et compact* R. Voici la manière de procéder de M. Alexandroff: D'après le théorème de Borel, on peut recouvrir R par un système *fini*

$$U_1, U_2, \ldots, U_k \tag{1}$$

d'ensembles ouverts[2] dont la norme (= maximum des diamètres des ensembles (1)) est inférieure à un nombre positif donné. Or on déduit de (1) un complexe (abstrait) N dont les sommets $a_1, a_2, \ldots, a_k$ correspondent aux ensembles (1), les sommets $a_{\nu_0}, a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_n}$ déterminant un n-simplexe de N si et seulement si les ensembles correspondants $U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \ldots, U_{\nu_n}$ ont un point commun. Ceci étant, on considère une suite de recouvrements tels que (1), dont les normes tendent vers zéro, chaque recouvrement de la suite s'obtenant du précédent par une subdivision, et l'on forme la suite

$$N_1, N_2, N_3, \ldots \tag{2}$$

des complexes correspondants (Projektionsfolge). Chaque cycle $C^n_{\nu+1}$ situé dans $N_{\nu+1}$ détermine un cycle $C^n_\nu = \pi C^n_{\nu+1}$ dans N_ν, la *projection* de $C^n_{\nu+1}$. Une suite

$$C^n_1, C^n_2, C^n_3, \ldots,$$

[1] P. Alexandroff, Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension, Annals of Math., (2) 30, 1929; p. 101–187, où l'on trouve cités les travaux antérieurs du même auteur.

S. Lefschetz, Topology, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 12, 1930, Chap. 7, § 4.

L. Vietoris, Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen, Math. Annalen, 97, 1927, p. 454–472.

Pour le cas particulier où l'espace R est une partie du plan euclidien, v. déjà L. E. J. Brouwer, Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve, Math. Annalen, 72, 1912, p. 422–425.

[2] M. Alexandroff considère des ensembles *fermés*; mais cette différence n'est pas essentielle (v. ce Mémoire, V, 8).

de cycles contenus dans les complexes (2) constitue un cycle dans R (Projektionszyklus, Vollzyklus) si l'on a pour chaque ν l'homologie $C_\nu^n \sim \pi C_{\nu+1}^n$ dans N_ν.

Or si l'espace R est quelconque, on peut aussi considérer des recouvrements finis (1) formés d'ensembles ouverts (= réseaux ouverts). Ici encore, chaque réseau peut être considéré comme un complexe. L'unique différence consiste en ce qu'il n'existe plus une suite telle que (2) constituée par des réseaux „arbitrairement petits"; au lieu de la suite (2), on a ici à considérer la famille de *tous* les réseaux ouverts.[3] Le but principal de ce Mémoire est de montrer comment on arrive ainsi à une théorie de l'homologie dans un espace topologique quelconque; le traitement ne suppose d'ailleurs aucune connaissance des travaux antérieurs.

L'ouvrage est divisé en cinq Chapitres. Au Chap. I, je rappelle sans démonstration quelques propriétés connues des modules. Au Chap. II, j'expose une théorie générale d'une manière très abstraite. Je ne suppose ici *rien* sur la nature de l'espace R; au contraire je suppose donnée une *famille fondamentale de réseaux*, c'est-à-dire une famille de recouvrements finis de R soumis à la seule restriction qu'à deux recouvrements quelconques de la famille on en puisse déterminer un troisième qui soit un „affinement" simultané des deux recouvrements donnés. Chaque famille fondamentale de réseaux donne lieu à une théorie de l'homologie des cycles. Je considère d'ailleurs, d'après M. Lefschetz,[4] des cycles mod α, α étant un sous-ensemble donné quelconque de R. Au Chap. III, je considère le cas important où R est un espace topologique, la famille fondamentale étant celle des réseaux ouverts. J'y expose d'abord les relations entre les cycles dans R et les cycles dans un sous-ensemble fermé de R. Ensuite, je montre que la théorie des cycles de dimension zéro coïncide avec la théorie de la connexité au sens de Lennes-Hausdorff. A la fin, je considère des réseaux *réguliers*[5] par rapport à un sous-ensemble de R.

A ce but, je démontre (III 20) deux lemmes relatifs à un espace topologique complètement normal, qui ont peut-être quelque intérêt intrinsèque. Au Chap. IV, je traite une application de la théorie générale; notamment, je généralise un théorème de MM. Mayer et Vietoris[6] relatif aux homologies dans la somme $R_1 + R_2$ de deux complexes, au cas où R_1 et R_2 sont deux espaces topologiques normaux fermés dans leur somme. La méthode dont je fais usage ici est celle de MM. Mayer et Vietoris, mais dans le cas bien plus général que j'envisage il y a des difficultés que l'on vainc d'une part au moyen de la notion d'un réseau régulier, d'autre part par un théorème général (II 21) relatif à l'existence des cycles. Le théorème que je démontre contient

[3] On sait que M. Hurewicz a montré l'importance de la famille de tous les réseaux ouverts dans la théorie de la dimension des espaces métriques et séparables (v. W. Hurewicz, Proc. Acad. Amsterdam 30, 1927, p. 425, ou bien K. Menger, Dimensionstheorie, Chap. V).

[4] Topology, Chap. I, n° 14.

[5] Cf. Lefschetz, Topology, p. 91 (normal neighborhood N^L).

[6] W. Mayer, Über abstrakte Topologie, Monatshefte f. Math. u. Phys. 36, 1929, p. 1—42. L. Vietoris, Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe, ibidem, 37, 1930, p. 159—162.

comme cas particulier le „théorème de Phragmén-Brouwer généralisé" de M. Alexandroff.[7] Au Chap. V je remarque d'abord que la théorie des cycles à coefficients rationnels (suivant M. Lefschetz[8]) exposée aux Chap. précédents peut se transporter au cas (considéré par M. Alexander[9]) des cycles dont les coefficients sont des entiers réduits mod. m. Ensuite, je montre que le cas où la famille fondamentale est celle des réseaux *fermés* est essentiellement identique au cas (que je considère) des réseaux ouverts. A la fin, je remarque que l'on peut obtenir une nouvelle théorie de l'homologie en choisissant une famille additive fixe de sous-ensembles de R; en particulier, on peut obtenir une théorie qui est à celle exposée au Chap. III dans le même rapport que la notion du *continu* à celle d'un ensemble *connexe*.

I. Modules

1. $\mathfrak{R}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.

Un ensemble quelconque *non vide* M s'appelle un *module* si l'on a défini deux opérations: 1° la *somme* $a + b \in M$ de deux éléments $a, b \in M$; 2° le *produit* $ra \in M$ d'un élément $a \in M$ par un nombre $r \in \mathfrak{R}$; on suppose d'ailleurs que

1° par rapport à l'addition, M constitue un groupe commutatif dont l'élément identique soit désigné par $0'$;

2° pour $a, b \in M$; $r, s \in \mathfrak{R}$ on a

$$r(a + b) = ra + rb\,, \quad (r + s)\,a = ra + sa\,,$$
$$r(sa) = (rs)\,a\,, \quad 1a = a\,.$$

On en déduit en particulier que $0a = 0'$, $r0' = 0'$, tandis que pour $r \neq 0$, $a \neq 0'$ on a $ra \neq 0'$. Dorénavant, nous écrirons plus simplement 0 au lieu de $0'$.

2. On dit que l'élement $a \in M$ *dépend* de $A \subset M$ si $a = 0$ ou $a = \sum_1^n r_\nu a_\nu$ pour un choix convenable de $n = 1, 2, 3, \ldots, r_\nu \in \mathfrak{R}$, $a_\nu \in A$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$.

On dit qu'un sous-ensemble $A \subset M$ est *indépendent* si l'on ne peut trouver des éléments $a_1, \ldots, a_n \in M$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ différents l'un de l'autre et des nombres $r_1, \ldots, r_n \in \mathfrak{R}$ dont un au moins $\neq 0$ de manière que l'on ait $\sum_1^n r_\nu a_\nu = 0$. Cette condition est vérifiée si $A = 0$ est l'ensemble vide.

Un ensemble $A \subset M$ constitue une *base* du module M si 1° A est indépendant; 2° chaque élément de M dépend de A.

[7] Untersuchungen etc., p. 178.

[8] Topology, Chap. VII.

[9] J. W. Alexander, Combinatorial analysis situs, I. Transactions Amer. Math. Soc., 28, 1926, p. 301–329.

3. Chaque module possède au moins une base; le nombre h des termes d'une base (c'est un nombre naturel ou bien un aleph) est le même pour toutes les bases; nous appellerons h le *rang* du module M. Un module M est dit *fini* si son rang est fini.

4. Un ensemble $M_1 \subset M$, $M_1 \neq 0$, constitue un module si et seulement si

1° $a, b \in M_1$ implique $a + b \in M_1$;

2° $a \in M_1$, $r \in \mathfrak{R}$ implique $ra \in M_1$.

On dit alors que M_1 est un *sousmodule* du module M.

5. Soit A_1 une base d'un sousmodule M_1 du module M. Alors il existe une base $A \supset A_1$ du module M.

6. Soient h, h_1 les rangs d'un module M et de son sousmodule M_1. Alors $h_1 \leqq h$. Donc si le module M est fini, aussi M_1 est fini; dans ce cas, l'égalité $h_1 = h$ entraîne $M_1 = M$.

7. Une suite *décroissante* de sousmodules d'un module *fini* M est toujours *finie* (si le rang de M est h, la suite possède au plus $h + 1$ termes).

8. Soit $\mathfrak{M}$ une classe (non vide) de sousmodules d'un module *fini* M et soit P le produit (= partie commune) de tous les modules de la classe $\mathfrak{M}$. Il existe alors des éléments $M_1, M_2, \ldots, M_k$ (k fini) de la classe $\mathfrak{M}$ tels que $P = M_1, M_2, \ldots, M_k$. Si $P \neq 0$, c'est un sousmodule de M.

9. Soient M, M' deux modules. Soit f une fonction univoque définie dans le domaine M et telle que: 1° pour $a \in M$ on a $f(a) \in M'$; 2° pour $a' \in M'$ il existe un élément $a \in M$ tel que $a' = f(a)$; 3° pour $a, b \in M$ on a $f(a + b) = f(a) + f(b)$; 4° pour $a \in M$, $r \in \mathfrak{R}$ on a $f(ra) = rf(a)$. On dit alors que le module M' est une image *homomorphe* du module M. Si $s \neq b$ entraîne $f(a) \neq f(b)$, on dit que les modules M, M' sont *isomorphes*.

10. Soient h, h' les rangs des modules M, M'. Si M' est une image homomorphe de M, $h' \leqq h$ (en particulier, une image homomorphe d'un module fini est un module fini); si M et M' sont isomorphes, $h' = h$. Et réciproquement.

11. Soit M_1 un sousmodule d'un module M. On peut considérer comme *égaux* deux éléments $a, b \in M$ tels que $a - b \in M_1$. En faisant ainsi, on obtient de M un nouveau module que nous désignerons par $M - M_1$. Evidemment $M - M_1$ est une image homomorphe de M.

12. Soient M_1, M_2 deux sousmodules d'un module M jouissant de la propriété suivante: Pour chaque $a \in M$ il existe un et un seul couple a_1, a_2 tel que $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$, $a = a_1 + a_2$. On dit alors que le module M est la *somme directe* des modules M_1, M_2 et l'on écrit $M = M_1 + M_2$.

13. Soit M_1 un sousmodule d'un module M. Il existe alors un sousmodule M_2 de M tel que $M = M_1 + M_2$. Le module M_2 est isomorphe à $M - M_1$.

14. Soit M un module; soit $L \subset M$. Nous dirons que L est un *système linéaire* s'il existe un élément $a_0 \in L$ et un sousmodule M_1 de M tel que pour $a \in M$ on a $a \in L$ si et seulement si $a - a_0 \in M_1$.

15. Soit Λ une classe (non vide) de systèmes linéaires contenus dans un module *fini* M et soit Q le produit de tous les systèmes constituant la classe Λ. Il existe alors des éléments $L_1, L_2, \ldots, L_k$ (k fini) de la classe Λ tels que $Q = L_1 L_2 \ldots L_k$. Si $Q \neq 0$, c'est un système linéaire.

II. Homologies par rapport à une famille fondamentale de réseaux

1. Soit R un ensemble arbitraire donné. Soit Z une famille donnée satisfaisant aux deux axiomes suivants:

1° Chaque élément $\mathfrak{U}$ de Z est un ensemble *fini* de parties $U_1, U_2, \ldots, U_k$ de R telles que $\sum_1^k U_\nu = R$; $U_\nu \neq 0$;·

2° $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2 \in Z$ étant donnés, il existe un élement $\mathfrak{V} \in Z$ tel que $V \in \mathfrak{V}$ entraîne $V \subset U_1 U_2$ pour un choix convenable de $U_1 \in \mathfrak{U}_1$, $U_2 \in \mathfrak{U}_2$.

Chaque élément $\mathfrak{U}$ de Z sera nommé un *réseau*; la famille Z sera appelée la *famille fondamentale de réseaux*. Les éléments U d'un réseau $\mathfrak{U}$ seront appelés les *sommets* du réseau $\mathfrak{U}$ et aussi les $(0, \mathfrak{U})$-*simplexes*. Nous désignerons habituellement un réseau par une des lettres $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$; les sommets de $\mathfrak{U}$ p. ex. seront désignés par la lettre U (éventuellement avec un indice).

2. $\mathfrak{U}$ étant un réseau et n un nombre naturel, un $(n, \mathfrak{U})$-*simplexe* sera par définition un symbole de la forme

$$(U_0, U_1, \ldots, U_\nu, \ldots, U_n),$$

où les U_ν (qui seront appelés les *sommets du simplexe*) sont des sommets de $\mathfrak{U}$ tous *distincts l'un de l'autre* et tels que l'ensemble

$$\prod_0^n U_\nu \tag{1}$$

n'est pas vide. Si $(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n)$ est une permutation des indices $(0, 1, \ldots, n)$, nous poserons

$$(U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \ldots, U_{\nu_n}) = \pm (U_0, U_1, \ldots, U_n) \tag{2}$$

avec le signe supérieur (inférieur) dans le cas d'une permutation paire (impaire). L'ensemble (1) sera appelé le *noyau* du simplexe. Nous désignerons un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe par $S^n(\mathfrak{U})$ ou par S^n (éventuellement avec un indice inférieur). Le noyau du simplexe S^n sera désigné par $J(S^n)$.

3. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau; $n = 0, 1, 2, \ldots$ Soient $S_1^n, S_2^n, \ldots, S_{\alpha_n}^n$ tous les $(n, \mathfrak{U})$-simplexes (de deux simplexes tels que 2 (2) nous n'écrivons qu'un seul). Une $(n, \mathfrak{U})$-*chaîne* sera par définition un symbole de la forme

$$\sum_1^{\alpha^u} r_\nu S_\nu^n$$

où $r_\nu \in \mathfrak{R}$. Nous désignerons une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne par $K^n(\mathfrak{U})$ ou par K^n (éventuellement avec un indice inférieur). Après des conventions évidentes, l'ensemble de toutes les $(n, \mathfrak{U})$-chaînes constitue un *module fini*. Pour presque toutes les valeurs de n, on a $\alpha_n = 0$; alors il n'existe qu'une seule $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $K^n = 0$.

4. La *frontière* d'une $(0, \mathfrak{U})$-chaîne est zéro; notation $F(K^0) = 0$ ou $K^0 \to 0$. Soit maintenant $n > 0$. La *frontière* d'un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe $S^n = (U_0, U_1, \ldots, U_n)$ est la $(n - 1, \mathfrak{U})$-chaîne

$$F(S^n) = \sum_0^{n-1} (-1)^\nu S_\nu^{n-1}, \quad S_\nu^{n-1}$$

étant le $(n - 1, \mathfrak{U})$-simplexe dont le symbole s'obtient de $(U_0, U_1, \ldots, U_n)$ en y omettant le sommet U_ν. La *frontière* d'une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne

$$K^n = \sum_1^{\alpha_n} r_\nu S_\nu^n$$

est la $(n - 1, \mathfrak{U})$-chaîne

$$F(K^n) = \sum_1^{\alpha_n} r_\nu F(S_\nu^n) .$$

Au lieu de $K^{n-1} = F(K^n)$ nous écrirons aussi $K^n \to K^{n-1}$. En vertu de l'opération F, un certain sousmodule du module des $(n - 1, \mathfrak{U})$-chaînes est une image *homomorphe* du module des toutes les $(n, \mathfrak{U})$-chaînes.

5. Dorénavant, la lettre A désigne un sous-ensemble donné de R. Nous dirons que la $(n, \mathfrak{U})$-chaîne

$$K^n = \sum_1^{\alpha_n} r_\nu S_\nu^n$$

est *contenue dans* A (notation: $K^n \subset A$) si pour chaque valeur de ν on a un des deux cas suivants: 1° $r_\nu = 0$; 2° $A \,.\, J(S_\nu^n) \neq 0$. Cette condition est toujours vérifiée dans le cas $A = R$. Les $(n, \mathfrak{U})$-chaînes contenues dans A constituent un *module*. Evidemment $K^n \subset A$ entraîne $F(K^n) \subset A$.[10]

[10] Il est important de remarquer que les relations $K^n \subset A_1$, $K^n \subset A_2$ n'entraînent pas $K^n \subset$ $\subset A_1 A_2$.

6. Dorénavant, la lettre α désigne un sous-ensemble donné de A. La notation $K_1^n(\mathfrak{U}) = K_2^n(\mathfrak{U})$ mod α signifie que $K_1^n(\mathfrak{U}) - K_2^n(\mathfrak{U}) \subset \alpha$; dans ce cas, si $K_1^n(\mathfrak{U}) \subset A$, on a aussi $K_2^n(\mathfrak{U}) \subset A$. Si l'on considère comme égales deux $(n, \mathfrak{U})$-chaînes qui sont égales mod α, l'ensemble de toutes les $(n, \mathfrak{U})$-chaînes continue à constituer un module (v. I, 11). Nous écrirons

$$K^n \to K^{n-1} \bmod \alpha \tag{1}$$

pour indiquer que $F(K^n) = K^{n-1}$ mod α. Dans la relation (1) il est permis de remplacer chaque chaîne par une autre égale à elle mod α.

7. Une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $K^n \subset A$ sera appelée un $(n, \mathfrak{U})$-*cycle mod* α *dans* A dans le cas où $K^n \to 0$ mod α. [Dans le cas $A = R$ on parlera simplement d'un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α.] Les $(n, \mathfrak{U})$-cycles mod α dans A constituent un module. On désignera les $(n, \mathfrak{U})$-cycles mod α par $C^n(\mathfrak{U})$ ou par C^n, éventuellement avec un indice inférieur. Dans le cas $\alpha = 0$ on parlera de $(n, \mathfrak{U})$-cycles *absolus*. Evidemment, un $(n, \mathfrak{U})$-cycle absolu est aussi un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α a pour chaque choix de α.

8. On démontre sans peine [11] que $F[S^{n+1}(\mathfrak{U})]$ est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle absolu. Donc une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne C^n est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α dans A s'il existe une $(n + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $K^{n+1} \subset A$ telle que $K^{n+1} \to C^n$ mod α (il en résulte $C^n \subset A$). Chaque $(n, \mathfrak{U})$-cycle C^n mod α dans A jouissant de cette propriété sera nommée *homologue à zéro* mod α dans A, ce qu'on écrit

$$C^n \sim 0 \bmod \alpha \text{ dans } A\,.$$

[L'attribut „dans A" sera omis si $A = R$.] La notation

$$C_1^n \sim C_2^n \bmod \alpha \text{ dans } A \tag{1}$$

signifie que C_1^n et C_2^n sont des $(n, \mathfrak{U})$-cycles mod α dans A tels que $C_1^n - C_2^n \sim 0$ mod α dans A. Les $(n, \mathfrak{U})$-cycles homologues à zéro mod α dans A constituent évidemment un sousmodule du module de tous les $(n, \mathfrak{U})$-cycles mod α dans A. En considérant comme égaux deux cycles C_1^n, C_2^n liés par (1), ce que nous ferons dans tout ce qui suit, les $(n, \mathfrak{U})$-cycles mod α dans A continuent donc (v. I 11) à constituer un module fini. La relation (1) vaut en particulier si $C_1^n = C_2^n$ mod α.

9. Un réseau $\mathfrak{B}$ est un *affinement* d'un réseau $\mathfrak{U}$ si chaque sommet V de $\mathfrak{B}$ fait partie d'un sommet U de $\mathfrak{U}$. $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_k$ étant des réseaux donnés (en nombre fini), d'après N° 1, axiome 2°, il existe un affinement simultané $\mathfrak{B}$ de tous les réseaux $\mathfrak{U}_\nu$. Evidemment un affinement d'un affinement d'un réseau $\mathfrak{U}$ est un affinement du réseau $\mathfrak{U}$.

10. Soit $\mathfrak{B}$ un affinement d'un réseau $\mathfrak{U}$. A chaque sommet V de $\mathfrak{B}$ on peut alors faire correspondre un sommet $\pi V = U \supset V$ bien déterminé du réseau $\mathfrak{U}$. L'opération π sera appelée une *projection* du réseau $\mathfrak{B}$ dans le réseau $\mathfrak{U}$; nous écrirons $\pi =$

[11] V. p. ex. Lefschetz, Topology, p. 19.

$= \mathrm{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Les réseaux $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ étant donnés, il peut exister *plusieurs* projections de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{U}$.

11. Soit $\mathfrak{V}$ un affinement d'un réseau $\mathfrak{U}$; $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Soit

$$S^n = (V_0, V_1, \ldots, V_n)$$

un $(n, \mathfrak{V})$-simplexe. Si les sommets

$$\pi V_0, \pi V_1, \ldots, \pi V_n$$

du réseau $\mathfrak{U}$ ne sont pas tous distincts l'un de l'autre, on posera $\pi S^n = 0$; dans le cas contraire

$$\pi S^n = (\pi V_0, \pi V_1, \ldots, \pi V_n)$$

est un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe. Si

$$K^n = \sum_1^{\alpha_n} r_\nu S_\nu^n$$

est une $(n, \mathfrak{V})$-chaîne, sa projection πK^n sera par définition la $(n, \mathfrak{U})$-chaîne

$$\pi K^n = \sum_1^{\alpha_n} r_\nu \pi S_\nu^n .$$

En vertu de l'opération π, un certain sousmodule du module de toutes les $(n, \mathfrak{U})$-chaînes est une image *homomorphe* du module de toutes les $(n, \mathfrak{V})$-chaînes. Pour chaque $(n, \mathfrak{V})$-simplexe S^n on a la relation

$$\pi\, F(S^n) = F(\pi S^n)$$

qui est évidente si $\pi S^n \neq 0$ mais qui vaut aussi[12] dans le cas $\pi S^n = 0$. Donc $\pi\, F(K^n) = F(\pi K^n)$ pour chaque $(n, \mathfrak{V})$-chaîne K^n. Lorsque $K^n \subset A$ où $K^n \subset \alpha$, évidemment aussi $\pi K^n \subset A$ ou $\pi K^n \subset \alpha$. De toutes ces remarques il résulte: si C^n est un $(n, \mathfrak{V})$-cycle mod α dans A, alors πC^n est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α dans A; si en outre $C^n \sim 0$ mod α dans A, aussi $\pi C^n \sim 0$ mod α dans A.

12. Soit $\mathfrak{V}$ un affinement d'un réseau $\mathfrak{A}$; soit $\pi_1 = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, $\pi_2 = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Rangeons tous les sommets de $\mathfrak{V}$ dans une suite finie bien déterminée

$$V_1, V_2, \ldots, V_k$$

et posons $\pi_1 V_\nu = U'_\nu$, $\pi_2 V_\nu = U''_\nu$. Maintenant soit

$$S^n = (V_{\nu 0}, V_{\nu_1}, \ldots, V_{\nu_n})$$

[12] V. p. ex. Lefschetz, op. c., Chap. II, n° 2.

un $(n, \mathfrak{B})$ simplexe; on peut supposer que $\nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_n$. Posons pour un moment

$$P(S^n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i-1} (U''_{\nu_0} U''_{\nu_1} \ldots U''_{\nu_{i-1}} U''_{\nu_i} U'_{\nu_i} U'_{\nu_{i+1}} \ldots U'_{\nu_{n-1}} U'_{\nu_n})$$

en convenant qu'à droite chaque symbole dont les sommets ne sont pas tous distincts signifie zéro. Donc $P(S^n)$ est une $(n + 1, \mathfrak{U})$-chaîne. Si $K^n = \sum_1^{\alpha_n} r_\nu S_\nu^n$ est une $(n, \mathfrak{B})$-chaîne, posons $P(K^n) = \sum_1^{\alpha_n} r_\nu P(S_\nu^n)$. On démontre sans peine[13] que

$$P(S^n) \to \pi_2 S^n - \pi_1 S^n - P[F(S^n)]$$

d'où pour chaque $(n, \mathfrak{B})$-chaîne K^n

$$(1) \qquad P(K^n) \to \pi_2 K^n - \pi_1 K^n - P[F(K^n)] .$$

En particulier, considérons une $(n, \mathfrak{B})$-cycle C^n mod α dans A; alors $C^n \subset A$, $F(C^n) \subset \alpha$, d'où $P(C^n) \subset A$, $P[F(C^n)] \subset \alpha$, de manière que la relation (1) donne

$$\pi_2 C^n \sim \pi_1 C^n \text{ mod } \alpha \text{ dans } A .$$

Or nous avons convenu de considérer comme égaux deux $(n, \mathfrak{U})$-cycles mod α dans A homologues mod α dans A; donc *nous pouvons toujours choisir arbitrairement la projection* Pr. $(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$.

13. Soit $\mathfrak{B}$ un affinement d'un réseau $\mathfrak{U}$ et soit $\mathfrak{W}$ un affinement du réseau $\mathfrak{B}$; soit π = Pr. $(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$, π' = Pr. $(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})$. Supposons qu'un $(n, \mathfrak{U})$-cycle $C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A jouisse de la propriété que $\pi' C^n(\mathfrak{W}) \sim C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A pour un choix convenable du $(n, \mathfrak{W})$-cycle $C^n(\mathfrak{W})$ mod α dans A; alors $\pi\, C^n(\mathfrak{B}) \sim C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A pour un choix convenable du $(n, \mathfrak{W})$-cycle $C^n(\mathfrak{B})$ mod α dans A.

En effet, soit π'' = Pr. $(\mathfrak{W}, \mathfrak{B})$; d'après 12 on peut supposer que $\pi' = \pi\pi''$;[14] alors il suffit de poser $C^n(\mathfrak{B}) = \pi''\, C^n(\mathfrak{W})$.

14. Un $(n, \mathfrak{U})$-cycle $C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A s'appellera *essentiel* si, pour chaque affinement $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{U}$ il existe un $(n, \mathfrak{B})$-cycle $C^n(\mathfrak{B})$ mod α dans A tel que $\pi\, C^n(\mathfrak{B}) \sim$ $\sim C^n(\mathfrak{U})$ où π = Pr. $(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Si l'on considère comme égaux deux $(n, \mathfrak{U})$-cycles homologues mod α dans A, les $(n, \mathfrak{U})$-cycles essentiels mod α dans A constituent un module fini; cet important module sera désigné par $M_n(A, \mathfrak{U}; \alpha)$. Le symbole A s'omettra dans le cas $A = R$; le symbole α s'omettra dans le cas $\alpha = 0$; donc p. e. $M_n(\mathfrak{U}) = M_n(R, \mathfrak{U}; 0)$.

15. Un affinement $\mathfrak{B}$ d'un réseau $\mathfrak{U}$ est dit *normal*, lorsque pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, et pour chaque $(n, \mathfrak{B})$-cycle $C^n(\mathfrak{B})$ mod α dans A le $(n, \mathfrak{U})$-cycle $\pi\, C^n(\mathfrak{B})$ mod α dans A

[13] Cf. Lefschetz, op. c., Chap. II, n° 8.

[14] L'opération $\pi\pi''$ s'obtient en effectuant d'abord l'opération π'' et ensuite π.

$[\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})]$ est essentiel. La notion de normalité dépend donc de A et α. D'après 13, chaque affinement d'un affinement normal du réseau $\mathfrak{U}$ est un affinement normal de $\mathfrak{U}$.

16. $\mathfrak{U}$ étant un réseau arbitrairement donné, il existe un affinement normal de $\mathfrak{U}$ (pour un choix donné de A, α).

Démonstration. La condition de normalité est banale pour toutes les valeurs suffisamment grandes de n (pour toutes les valeurs de n pour lesquelles les $(n, \mathfrak{U})$-simplexes n'existent pas). Il suffit donc (cf. la remarque faite à la fin du N° 15) de prouver l'existence d'un affinement tel que la condition de normalité soit satisfaite pour une valeur *donnée* de n. Cela étant, pour chaque affinement $\mathfrak{B}$ du réseau $\mathfrak{U}$ soit $\Gamma(\mathfrak{B})$ l'ensemble de tous les $(n, \mathfrak{U})$-cycles $C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A pour lesquels il existe un $(n, \mathfrak{B})$-cycle $C^n(\mathfrak{B})$ mod α dans A tel que $C^n(\mathfrak{U}) \sim \pi\, C^n(\mathfrak{B})$ mod α dans A, où $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Pour chaque choix de $\mathfrak{B}$, $\Gamma(\mathfrak{B})$ est un sousmodule du module *fini* $M_n(A, \mathfrak{U}; \alpha)$; en outre, si $\mathfrak{W}$ est un affinement de $\mathfrak{B}$, d'après 13 on a $\Gamma(\mathfrak{W}) \subset \Gamma(\mathfrak{B})$.

Evidemment l'ensemble E de tous les $(n, \mathfrak{U})$-cycles mod α dans A *essentiels* coïncide avec la partie commune de tous les $\Gamma(\mathfrak{B})$, où $\mathfrak{B}$ parcourt tous les affinements de $\mathfrak{U}$. D'après I 8, il existe des affinements $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_k$ (k fini) de $\mathfrak{U}$ tel que $E = \prod_1^k \Gamma(\mathfrak{B}_\nu)$. Soit $\mathfrak{W}$ un affinement simultané de tous les réseaux $\mathfrak{B}_\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq k)$. Alors $\Gamma(\mathfrak{W}) \subset \subset \Gamma(\mathfrak{B}_\nu)$, d'où $\Gamma(\mathfrak{W}) \subset E$ (et naturellement $\Gamma(\mathfrak{W}) = E$). L'affinement $\mathfrak{W}$ de $\mathfrak{U}$ jouit donc de la propriété voulue.

17. D'après la remarque à la fin du N° 15, on a plus généralement: $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_k$ étant des réseaux donnés en nombre fini, il existe un affinement normal simultané de tous les $\mathfrak{U}_\nu$.

18. Soit $\mathfrak{B}$ un affinement d'un réseau $\mathfrak{U}$; $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Soit $C^n(\mathfrak{U})$ un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α dans A essentiel. Il existe un $(n, \mathfrak{B})$-cycle $C^n(\mathfrak{B})$ mod α dans A *essentiel* tel que $\pi\, C^n(\mathfrak{B}) \sim C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A.

Démonstration. Soit (16) $\mathfrak{W}$ un affinement *normal* du réseau $\mathfrak{B}$; $\pi' = \text{Pr.}\,(\mathfrak{W}, \mathfrak{B})$, donc $\pi\pi' = \text{Pr.}\,(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})$. Le cycle $C^n(\mathfrak{U})$ étant essentiel, il existe un $(n, \mathfrak{W})$-cycle $C^n(\mathfrak{W})$ mod α dans A tel que $C^n(\mathfrak{U}) \sim \pi\pi'\, C^n(\mathfrak{W})$ mod α dans A. En posant $C^n(\mathfrak{B}) = = \pi'\, C^n(\mathfrak{W})$, on a $C^n(\mathfrak{U}) \sim \pi\, C^n(\mathfrak{B})$ mod α dans A; en outre, le cycle $C^n(\mathfrak{B})$ est essentiel, car $\mathfrak{W}$ est un affinement normal de $\mathfrak{B}$.

19. Le théorème qui vient d'être prouvé peut évidemment s'énoncer ainsi: $\mathfrak{B}$ étant un affinement de $\mathfrak{U}$, le module $M_n(A, \mathfrak{U}; \alpha)$ est en vertu de l'opération $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$, une image homomorphe du module $M_n(A, \mathfrak{B}; \alpha)$.

20. Soit donné, pour *chaque* réseau $\mathfrak{U}$, un $(n, \mathfrak{U})$-cycle $C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A et supposons vérifiée la propriété suivante: Si $\mathfrak{B}$ est un affinement de $\mathfrak{U}$, $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$, alors $C^n(\mathfrak{U}) \sim \pi\, C^n(\mathfrak{B})$ mod α dans A. L'ensemble $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ de tous les cycles $C^n(\mathfrak{U})$ sera appelé un *(n, R)-cycle mod α dans A*. L'attribut „dans A" s'omettra dans le cas $A = R$; dans le cas $\alpha = 0$, nous parlerons de (n, R)-cycles *absolus*. En vertu

des conventions évidentes, l'ensemble de tous les (n, R)-cycles mod α dans A constitue un *module.* L'*homologie* $\{C^n(\mathfrak{U})\} \sim 0 \bmod \alpha$ dans A signifie que $C^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod \alpha$ dans A pour chaque réseau $\mathfrak{U}$. L'homologie $\{C_1^n(\mathfrak{U})\} \sim \{C_2^n(\mathfrak{U})\}$ signifie que $\{C_1^n(\mathfrak{U})\} - \{C_2^n(\mathfrak{U})\} = \{C_1^n(\mathfrak{U}) - C_2^n(\mathfrak{U})\} \sim 0 \bmod \alpha$ dans A. Si l'on considère comme égaux deux cycles homologues mod α dans A, l'ensemble de tous les (n, R)-cycles mod α dans A continue (v. I 11) à constituer un module. Cet important module sera désigné par $M_n(A, R; \alpha)$ et son rang (qui est un nombre naturel ou un aleph) sera désigné par $P_n(A, R; \alpha)$. La lettre A s'omettra dans le cas $A = R$; la lettre α s'omettra dans le cas $\alpha = 0$. Le nombre $P_n(R; \alpha)$ est le $n^{\text{ième}}$ *nombre de Betti* de R mod α; le nombre $P_n(R)$ est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Betti absolu de R.

21. Soit donné, pour *chaque* réseau $\mathfrak{U}$, un système linéaire[15] (v. I 14) $L^n(\mathfrak{U})$ de $(n, \mathfrak{U})$-cycles mod α dans A et supposons vérifiée la propriété suivante: Si $\mathfrak{V}$ est un affinement de $\mathfrak{U}$, $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, on a $\pi\, L^n(\mathfrak{V}) \subset L^n(\mathfrak{U})$. Alors il existe un (n, R)-cycle $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ mod α dans A tel que $C^n(\mathfrak{U}) \in L^n(\mathfrak{U})$ pour chaque réseau $\mathfrak{U}$.

La démonstration de ce théorème fait l'objet des N^{os} 22–27.

22. Pour chaque réseau $\mathfrak{U}$, soit $L_1^n(\mathfrak{U})$ la partie commune de tous les ensembles $\pi\, L^n(\mathfrak{V})$,[16] où $\mathfrak{V}$ parcourt tous les affinements de $\mathfrak{U}$, $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Evidemment, chaque $\pi\, L^n(\mathfrak{V})$ est un système linéaire de $(n, \mathfrak{U})$-cycles mod α dans A et, si $\mathfrak{W}$ est un affinement de $\mathfrak{V}$, $\pi' = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})$, on a $\pi'\, L^n(\mathfrak{W}) \subset \pi\, L^n(\mathfrak{V})$ (cf. 13). D'après I 15, il existe des affinements $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_k$ (k fini) de $\mathfrak{U}$ tels que $L_1^n(\mathfrak{U}) = \prod_1^k \pi_\nu\, L^n(\mathfrak{V}_\nu)$, où $\pi_\nu = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{V}_\nu, \mathfrak{U})$. Soit $\mathfrak{V}$ un affinement simultané des réseaux $\mathfrak{V}_\nu$, $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Alors $\pi\, L^n(\mathfrak{V}) \subset \pi_\nu\, L^n(\mathfrak{V}_\nu)$, donc $\pi\, L^n(\mathfrak{V}) \subset L_1^n(\mathfrak{U})$, d'où $\pi\, L^n(\mathfrak{V}) = L_1^n(\mathfrak{U})$ en vertu de la définition même de $L_1^n(\mathfrak{U})$.

23. Un affinement $\mathfrak{V}$ d'un réseau $\mathfrak{U}$ soit appelé *favorable* si $\pi\, L^n(\mathfrak{V}) = L_1^n(\mathfrak{U})$; nous venons de voir que chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède un affinement favorable. Evidemment chaque affinement d'un affinement favorable d'un réseau $\mathfrak{U}$ est un affinement favorable de $\mathfrak{U}$. Donc si l'on a donné un ensemble *fini* de réseaux, il existe un affinement favorable simultané de tous les réseaux donnés.

24. Soit $\mathfrak{V}$ un affinement d'un réseau $\mathfrak{U}$; $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Alors $\pi\, L_1^n(\mathfrak{V}) = L_1^n(\mathfrak{U})$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{W}$ un affinement favorable simultané des réseaux $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, soit $\pi' = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{W}, \mathfrak{V})$, donc $\pi\pi' = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})$. D'après la définition même d'un affinement favorable, on a $\pi'\, L^n(\mathfrak{W}) = L_1^n(\mathfrak{V})$, $\pi\pi'\, L^n(\mathfrak{W}) = L_1^n(\mathfrak{U})$, d'où $\pi\, L_1^n(\mathfrak{V}) = {}$ $= L_1^n(\mathfrak{U})$.

25. Rangeons la famille fondamentale Z de réseaux sous la forme d'une suite

[15] Nous considérons comme égaux deux cycles homologues mod α dans A de manière que les rélations $C_1^n(\mathfrak{U}) \in L^n(\mathfrak{U})$, $C^n(\mathfrak{U}) \sim C_1^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A entraînent que $C_2^n(\mathfrak{U}) \in L^n(\mathfrak{U})$.

[16] $\pi L^n(\mathfrak{V})$ est l'ensemble de tous les $(n, \mathfrak{U})$-cycles $C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A tels que $C^n(\mathfrak{U}) \sim \pi\, C^n(\mathfrak{V})$ pour un choix convenable de $C^n(\mathfrak{V}) \in L^n(\mathfrak{V})$.

transfinie bien ordonnée

$$\mathfrak{U}_0, \mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_\omega, \mathfrak{U}_{\omega+1}, \ldots, \mathfrak{U}_\xi, \ldots \quad (\xi < \gamma).$$

On peut alors former une suite transfinie

$$(1) \qquad C_0^n, C_1^n, \ldots, C_\omega^n, C_{\omega+1}^n, \ldots, C_\xi^n, \ldots \quad (\xi < \gamma)$$

où $C_\xi^n \in L_1^n(\mathfrak{U}_\xi)$ de manière que l'on ait la propriété P suivante: Si $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ sont des nombres ordinaux en nombre fini inférieurs à γ, il existe un affinement simultané $\mathfrak{B}$ des réseaux $\mathfrak{U}_{\eta_\nu}$ $(1 \leqq \nu \leqq k)$ en un cycle $C^n(\mathfrak{B}) \in L_1^n(\mathfrak{B})$ tel que $\pi_\nu C^n(\mathfrak{B}) \sim C_{\eta_\nu}^n$ mod α dans A $[1 \leqq \nu \leqq k;\ \pi_\nu = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U}_{\eta_\nu})]$.

La démonstration en sera donnée dans les deux n^{os} suivants; l'énoncé du n^{o} 21 sera alors prouvé, car $\{C_\xi^n\}$ est un (n, R)-cycle mod α dans A. En effet si $\mathfrak{U}_{\eta_2}$ est affinement de $\mathfrak{U}_{\eta_1}$, $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_{\eta_2}, \mathfrak{U}_{\eta_1})$, d'après la propriété P il existe un affinement $\mathfrak{B}$ simultané des réseaux $\mathfrak{U}_{\eta_1}$, $\mathfrak{U}_{\eta_2}$ et un cycle $C_n(\mathfrak{B}) \in L_1^n(\mathfrak{B})$ tel que $\pi_1 C^n(\mathfrak{B}) \sim C_{\eta_1}^n$, $\pi_2 C^n(\mathfrak{B}) \sim C_{\eta_2}^n$ mod α dans A, où $\pi_1 = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U}_{\eta_1})$, $\pi_2 = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U}_{\eta_2})$; or on peut supposer que $\pi_1 = \pi\pi_2$ de manière que $C_{\eta_1} \sim \pi\pi_2 C^n(\mathfrak{B}) \sim \pi C_{\eta_2}^n$ mod α dans A.

26. On construit la suite transfinie 25 (1) par récurrence transfinie. Le cycle $C_0^n \in L_1^n(\mathfrak{U}_0)$ peut être choisi à volonté. Supposons que, ξ étant un nombre ordinal $< \gamma$ donné, on ait déjà déterminé tous les termes $C_\eta^n \in L_1^n(\mathfrak{U}_\eta)$, $\eta < \xi$, de la suite 25 (1) de telle façon que l'on ait la propriété suivante: Si $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ sont des nombres ordinaux inférieurs à ξ en nombre fini, il existe un affinement simultané $\mathfrak{B}$ des réseaux $\mathfrak{U}_{\eta_n}$ $(1 \leqq \nu \leqq k)$ et un cycle $C^n(\mathfrak{B}) \in L_1^n(\mathfrak{B})$ tel que $\pi_\nu C^n(\mathfrak{B}) \sim C_{\eta_\nu}^n$ mod α dans A, où $\pi_\nu = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U}_{\eta_\nu})$. Il s'agit seulement de ce qu'il est alors possible de choisir un cycle $C_\xi^n \in L_1^n(\mathfrak{U}_\xi)$ de telle façon que, pour $\eta_1, \ldots, \eta_k < \xi$ (k fini) il existe toujours un affinement $\mathfrak{W}$ simultané des $k+1$ réseaux $\mathfrak{U}_\xi, \mathfrak{U}_{\eta_1}, \ldots, \mathfrak{U}_{\eta_k}$ et un cycle $C^n(\mathfrak{W}) \in L_1^n(\mathfrak{W})$ tel que $\pi_n' C^n(\mathfrak{W}) \sim C_{\eta_\nu}^n$, $\pi C^n(\mathfrak{W}) \sim C_\xi^n$ mod α dans A, où $\pi_n' = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{W}, \mathfrak{U}_{\eta_\nu})$, $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{W}, \mathfrak{U}_\xi)$.

27. Pour $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k < \xi$ *donnés*, désignons par $\Lambda(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ l'ensemble de tous les cycles $C_\xi^n \in L_1^n(\mathfrak{U}_\xi)$ jouissant de la propriété qui vient d'être énoncée. Alors $\Lambda(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k) \neq 0$. En effet, soit $\mathfrak{B}$ un affinement simultané des réseaux $\mathfrak{U}_{\eta_1}, \mathfrak{U}_{\eta_2}, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{U}_{\eta_k}$ tel que, pour un choix convenable de $C^n(\mathfrak{B}) \in L_1^n(\mathfrak{B})$, on ait $\pi_\nu C^n(\mathfrak{B}) \sim C_{\eta_\nu}^n$ mod α dans A, où $\pi_\nu = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U}_{\eta_\nu})$. Soit $\mathfrak{W}$ un affinement simultané des réseaux $\mathfrak{U}_\xi$ et $\mathfrak{B}$; $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})$, $\bar\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{W}, \mathfrak{B})$, donc $\pi_\nu' = \pi_\nu \bar\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{W}, \mathfrak{U}_{\eta_\nu})$. D'après 24, on a $\bar\pi\, L_1^n(\mathfrak{W}) = L_1^n(\mathfrak{B})$; donc il existe un cycle $C^n(\mathfrak{W}) \in L_1^n(\mathfrak{W})$ tel que $\bar\pi\, C^n(\mathfrak{W}) \sim$ $\sim C^n(\mathfrak{B})$, donc aussi $\pi_n' C^n(\mathfrak{W}) \sim C_{\eta_\nu}^n$ mod α dans A. En posant $C_\xi^n = \pi C^n(\mathfrak{W}) \in$ $\in \pi L_1^n(\mathfrak{W}) = L_1^n(\mathfrak{U}_\xi)$, on a $C_\xi^n \in \Lambda(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$. L'inégalité $\Lambda(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ étant ainsi démontrée, on vérifie sans peine que $\Lambda(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ est un *système linéaire* de $(n, \mathfrak{U}_\xi)$-cycles mod α dans A. La partie commune d'un nombre fini quelconque de tels systèmes linéaires

$$\Lambda(\eta_1^{(r)}, \eta_2^{(r)}, \ldots, \eta_{k_r}^{(r)}) \quad (r = 1, 2, \ldots, h)$$

est toujours $\neq 0$, car elle contient évidemment le système linéaire

$$A(\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \ldots, \eta_{k_1}^{(1)}, \eta_1^{(2)}, \ldots, \eta_{k_h}^{(h)}) .$$

D'après I 15 on en déduit que la partie commune A de *tous* les $A(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ (pour tous les choix possibles des nombres ordinaux $\eta_1, \ldots, \eta_k$ en nombre fini tous inférieurs à ξ) est elle aussi $\neq 0$. Il suffit évidemment de choisir arbitrairement $C_\xi^n \in A$.

28. Soit $\mathfrak{U}_0$ un réseau donné et soit C_0^n un $(n, \mathfrak{U}_0)$-cycle mod α dans A *essentiel* donné. Il existe un (n, R)-cycle $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ mod α dans A tel que $C^n(\mathfrak{U}_0) = C_0^n$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{V}$ un réseau arbitraire. Désignons par $L^n(\mathfrak{V})$ l'ensemble de tous les $(n, \mathfrak{V})$-cycles mod α dans A jouissant de la propriété suivante: Il existe un affinement simultané $\mathfrak{V}_1$ des deux réseaux $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{U}_0$ et un $(b, \mathfrak{V}_1)$-cycle $C^n(\mathfrak{V}_1)$ mod α dans A tels que $\pi_1 C^n(\mathfrak{V}_1) \sim C^n(\mathfrak{V})$, $\pi_0 C^n(\mathfrak{V}_1) \sim C_0^n$ mod α dans A, où $\pi_1 = \text{Pr.}(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V})$, $\pi_0 = \text{Pr.}(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{U}_0)$. Evidemment $L^n(\mathfrak{V}) \neq 0$, parce que C_0^n est essentiel; on voit sans peine que $L^n(\mathfrak{V})$ est un système linéaire de $(n, \mathfrak{V})$-cycles mod α dans A. Supposons encore que le réseau $\mathfrak{V}$ soit un affinement d'un réseau $\mathfrak{U}$, choisissons $C^n(\mathfrak{V}) \in L^n(\mathfrak{V})$ et gardons les notations précédentes; soit $\pi = \text{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, donc $\pi'_1 = \pi\pi_1 = \text{Pr.}(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{U})$. En posant $C^n(\mathfrak{U}) = \pi C^n(\mathfrak{V})$, on a $\pi'_1 C^n(\mathfrak{V}_1) \sim C^n(\mathfrak{U})$, $\pi_0 C^n(\mathfrak{V}_1) \sim C_0^n$ mod α dans A, d'où $C^n(\mathfrak{U}) \in L^n(\mathfrak{V})$. Donc $\pi L^n(\mathfrak{V}) = L^n(\mathfrak{U})$. D'après 21, il existe donc un (n, R)-cycle $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ mod α dans A tel que $C^n(\mathfrak{U}) \in L^n(\mathfrak{U})$ pour chaque réseau $\mathfrak{U}$. Or $C^n(\mathfrak{U}_0) \in L^n(\mathfrak{U}_0)$ entraîne évidemment que $C^n(\mathfrak{U}_0) \sim C_0^n$ mod α dans A, de manière que l'on peut poser $C^n(\mathfrak{U}_0) = C_0^n$.

29. Le résultat qui vient d'être démontré peut évidemment s'énoncer comme il suit: Soit $\mathfrak{U}_0$ un réseau fixe. En faisant correspondre, à chaque (n, R)-cycle $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ mod α dans A, le $(n, \mathfrak{U}_0)$-cycle $C^n(\mathfrak{U}_0)$ mod α dans A, le module fini $M_n(A, \mathfrak{U}_0; \alpha)$ apparaît comme une *image homomorphe* du module $M_n(A, R; \alpha)$. Lorsque le nombre de Betti $P_n(A, R; \alpha)$ est fini (et dans ce cas seulement) on peut évidemment choisir le réseau $\mathfrak{U}_0$ de manière que les modules $M_n(A, R; \alpha)$ et $M_n(A, \mathfrak{U}_0; \alpha)$ soient *isomorphes*. Chaque affinement d'un tel réseau jouit évidemment de la même propriété.

30. Soit Z_1 un sous-ensemble de la famille fondamentale Z de réseaux tel que, le réseau $\mathfrak{U} \in Z$ étant arbitrairement donné, il en existe *dans* Z_1 un affinement $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$. La famille Z_1 satisfait évidemment aux axiomes 1° et 2° du n^o 1. Nous dirons que Z_1 est une *famille complète de réseaux* (relativement à la famille fondamentale Z).

Pour un moment, appelons $(n, R)^*$-cycle la notion qui diffère du (n, R)-cycle seulement en ce que la famille fondamentale Z est remplacée par Z_1. De chaque (n, R)-cycle $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ mod α dans A on obtient un $(n, R)^*$-cycle mod α dans A en négligeant les réseaux qui n'appartiennent pas à la famile Z_1. Réciproquement, soit $\{C^n(\mathfrak{V})\}$ un $(n, R)^*$-cycle mod α dans A arbitrairement donné. Si $\mathfrak{U} \in Z$ est un réseau ne faisant pas partie de Z_1, choisissons en un affinement $\mathfrak{V} \in Z_1$ et posons $C^n(\mathfrak{U}) = \pi C^n(\mathfrak{V})$, $\pi = \text{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. On voit sans peine que l'on obtient ainsi un (n, R)-cycle $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ mod α dans A qui est bien déterminé par le $(n, R)^*$-cycle $\{C^n(\mathfrak{V})\}$ à une homologie mod α dans A près. *En remplaçant la famille fondamentale Z de réseaux par la famille complète* Z_1, *le module* $M_n(A, R; \alpha)$ *ne change pas.*

III. Homologies dans les espaces topologiques

1. Dorénavant, R désigne un *espace topologique*, c'est-à-dire un ensemble (dont les éléments s'appellent points) où l'on a donné à des certains sous-ensembles le nom d'*ensembles ouverts* (dans R); l'ensemble complémentaire $R - A$ d'un ensemble A ouvert dans R s'appelle *fermé* (dans R). On suppose de plus les quatre axiomes suivants:

1° L'ensemble vide 0 est à la fois ouvert et fermé.
2° Un ensemble composé d'un point unique est fermé.
3° L'ensemble somme d'une famille arbitraire d'ensembles ouverts est ouvert.
4° L'ensemble produit de deux ensembles ouverts est ouvert.

Le plus petit ensemble fermé contenant un ensemble $A \subset R$ donné s'appelle la *fermeture* de A (dans R) et on le désigne par $\bar{A}$. On a $A = \bar{A}$ si A est fermé et dans ce cas seulement.

A étant une partie donnée de R, on appelle *ouvert* dans A chaque ensemble de la forme AU, où U est ouvert dans R. En vertu de cette définition, chaque partie d'un espace topologique est un espace topologique.

Les propriétés les plus élémentaires des espaces topologiques seront supposées connues.

2. Un *réseau* (*ouvert*) dans R est un système composé d'un nombre fini d'ensembles ouverts et non vides, dont la somme coïncide avec l'espace R tout entier. Dorénavant, la famille fondamentale Z de réseaux sera composée de tous les réseaux ouverts. L'axiome 1° du Chap. II, n^o 1 est évident; mais aussi l'axiome 2° est vérifié; il suffit d'appeler $\mathfrak{B}$ le système des ensembles U_1U_2, où U_1 parcourt les sommets de $\mathfrak{U}_1$ et U_2 ceux de $\mathfrak{U}_2$. On reconnaît sans peine que l'on peut, dans tout ce Chapitre, remplacer la famille fondamentale Z par une famille complète (II 30) $Z_1 \subset Z$ arbitrairement choisie.

3. Evidemment un ensemble ouvert rencontre $A \subset R$ s'il rencontre $\bar{A}$ et réciproquement. On en conclut[17] que la théorie de l'homologie des (n, R)-cycles mod α dans A ($\alpha \subset A \subset R$) reste inaltérée si l'on remplace α, A par α_1, A_1 de manière que $\alpha_1 \subset A_1$, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_1$, $\bar{A} = \bar{A}_1$. Il s'ensuite que l'on peut supposer, sans restreindre la généralité, que les ensembles α et A soient *fermés* dans R.

4. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R. En remplaçant chaque sommet U de $\mathfrak{U}$ par son intersection $u = AU$ avec $A \subset R$ et en omettant les intersections vides, on obtient un réseau $\mathfrak{u} = A \,.\, \mathfrak{U}$ dans A.

[17] Il faut tenir compte de ce fait évident que le noyau (II 2) d'un simplexe est un ensemble ouvert.

5. Soit A fermé dans R et soit $\mathfrak{u}$ un réseau dans A. Il existe un réseau $\mathfrak{U}$ dans R tel que $\mathfrak{u} = A \, . \, \mathfrak{U}$.

Il suffit de remplacer chaque sommet u de $\mathfrak{u}$ par un ensemble U ouvert dans R et tel que $u = A \, . \, U$ et d'ajouter le sommet $U = R - A$.

6. Soit A fermé dans R; soit $\mathfrak{u}$ un réseau dans A; soient $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ des réseaux dans R tels que $A \, . \, \mathfrak{U}_1 = A \, . \, \mathfrak{U}_2 = \mathfrak{u}$. Il existe un affinement simultané $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$ tel que $A \, . \, \mathfrak{V} = \mathfrak{u}$.

Les sommets V de $\mathfrak{V}$ s'obtienent comme il suit: 1° $V = U_1 U_2$, où $U_1 \in \mathfrak{U}_1, U_2 \in \mathfrak{U}_2$, $AU_1 = AU_2 \neq 0$; 2° $V = (R - A) \, U_1 U_2$, où $U_1 \in \mathfrak{U}_1$, $U_2 \in \mathfrak{U}_2$.

7. Soit A fermé dans R; soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R, $\mathfrak{u} = A\mathfrak{U}$. Soit S^n un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe dans A, c'est-à-dire $A \, . \, J(S^n) \neq 0$. En remplaçant chaque sommet U de S^n par $u = A \, . \, Z$, on obtient de S^n un $(n, \mathfrak{u})$-simplexe $s^n = A \, . \, S^n$, *si tous les* $n + 1$ *sommets* u *sont distincts*; dans le cas contraire, on pose $s^n = 0$. Plus généralement, soit $K^n = \sum r_\nu S^n_\nu$ une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne dans A; alors $k^n = A \, . \, K^n = \sum r_\nu \, . \, AS^n_\nu$ est une $(n, \mathfrak{u})$-chaîne. Evidemment $F(AK^n) = AF(K^n)$. On en conclut: si C^n est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α dans A, alors AC^n est un $(n, \mathfrak{u})$-cycle; si l'on a de plus $C^n \sim 0 \bmod \alpha$ dans A, aussi $AC^n \sim 0 \bmod \alpha$.

8. Réciproquement soit $\mathfrak{u}$ un réseau dans $A = \bar{A} \subset R$ et soit $c^n(\mathfrak{u})$ un $(n, \mathfrak{u})$-cycle mod α. D'après 5, on peut déterminer un réseau $\mathfrak{U}$ dans R tel que $\mathfrak{u} = A \, . \, \mathfrak{U}$. Evidemment il existe un $(n, \mathfrak{U})$-cycle $C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A tel que $c^n(\mathfrak{u}) = A \, . \, C^n(\mathfrak{U})$. Le cycle $C^n(\mathfrak{U})$ n'est pas complètement déterminé, mais on voit sans peine que $c^n(\mathfrak{u}) = A \, . \, C^n_1(\mathfrak{U}) = A \, . \, C^n_2(\mathfrak{U})$ entraîne que $C^n_1(\mathfrak{U}) \sim C^n_2(\mathfrak{U})$ mod α dans A. Plus généralement on reconnaît sans difficulté que $c^n_1(\mathfrak{u}) = A \, . \, C^n_1(\mathfrak{U})$, $c^n_2(\mathfrak{u}) = A \, . \, C^n_2(\mathfrak{U})$, alors $c^n_1(\mathfrak{u}) \sim c^n_2(\mathfrak{u})$ mod α entraîne $C^n_1(\mathfrak{U}) \sim C^n_2(\mathfrak{U})$ mod α dans A et réciproquement.

9. Soit $\{c^n(\mathfrak{u})\}$ un (n, A)-cycle mod α $(A = \bar{A})$. Pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ dans R choisissons (8) un $(n, \mathfrak{U})$-cycle $C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A de manière que $AC^n = c^n(A\mathfrak{U})$; chaque cycle $C^n(\mathfrak{U})$ est (8) déterminé à une homologie mod α dans A près. Soit $\mathfrak{V}$ un affinement de $\mathfrak{U}$; $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. On voit sans peine que $\pi \, C^n(\mathfrak{V})$ est une valeur admissible pour $C^n(\mathfrak{U})$, ce qui donne $C^n(\mathfrak{U}) \sim \pi \, C^n(\mathfrak{V})$ mod α dans A. Donc $\{C(\mathfrak{U})\}$ est un (n, R)-cycle mod α dans A. Evidemment, le cycle $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ est déterminé par $\{c^n(\mathfrak{u})\}$ à une homologie mod α dans A près. Posons $\{c^n(\mathfrak{u})\} = A \, . \, \{C^n(\mathfrak{U})\}$.

10. Réciproquement, soit $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ un (n, R)-cycle mod α dans $A = \bar{A}$. Il existe un (n, A)-cycle $\{c^n(\mathfrak{u})\}$ mod α tel que $\{c^n(\mathfrak{u})\} = A \, . \, \{C^n(\mathfrak{U})\}$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{u}$ un réseau dans A. Choisissons (5) le réseau $\mathfrak{U}$ dans R de manière que $\mathfrak{u} = A \, . \, \mathfrak{U}$ et posons $c^n(\mathfrak{u}) = A \, . \, C^n(\mathfrak{U})$. Il faut démontrer que le $(n, \mathfrak{u})$-cycle $c^n(\mathfrak{u})$ est bien déterminé à une homologie mod α près. Soit donc $\mathfrak{u} = A \, . \, \mathfrak{U}_1 = A \, . \, \mathfrak{U}_2$; on doit démontrer que $A \, . \, C^n(\mathfrak{U}_1) \sim A \, . \, C^n(\mathfrak{U}_2)$ mod α. D'après 6, nous pouvons évidemment supposer que $\mathfrak{U}_2$ est un affinement de $\mathfrak{U}_1$, $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$. Par la méthode du Chap. II n^o 12 on reconnaît que $A\pi \, C^n(\mathfrak{U}_2) \sim A \, C^n(\mathfrak{U}_2)$ mod α. Or $\pi \, C^n(\mathfrak{U}_2) \sim C^n(\mathfrak{U}_1)$ mod α dans A de manière que (8) $A\pi \, C^n(\mathfrak{U}_2) \sim A \, C^n(\mathfrak{U}_1)$ mod α, donc finalement $A \, C^n(\mathfrak{U}_1) \sim A \, C^n(\mathfrak{U}_2)$ mod α.

Soit $\mathfrak{w}$ un affinement du $\mathfrak{u}$. On voit sans peine que l'on peut déterminer $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ de manière que $\mathfrak{w} = A \,.\, \mathfrak{V}$, $\mathfrak{u} = A \,.\, \mathfrak{U}$ et que $\mathfrak{V}$ soit un affinement de $\mathfrak{U}$, $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Comme $\pi\, C^n(\mathfrak{V}) \sim C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A, on vérifie aisément que $\pi'\, c^n(\mathfrak{w}) \sim c^n(\mathfrak{u})$ mod α, où $\pi' = \text{Pr.}\,(\mathfrak{w}, \mathfrak{u})$.

Donc $\{c^n(\mathfrak{u})\}$ est le (n, A)-cycle mod α demandé.

11. Les considérations qui viennent d'être faites prouvent qu'il y a, *si A est fermé dans R*, une correspondance biunivoque entre les modules[18] $M_n(A, R; \alpha)$ et $M_n(A; \alpha)$. En particulier $P_n(A, R; \alpha) = P_n(A, \alpha)$.

12. Soit p un point donné de R. Pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ dans R, choisissons un $(0, \mathfrak{U})$-cycle absolu $C^0(\mathfrak{U})$ constitué par un seul $(0, \mathfrak{U})$-simplexe U tel que $p \in U$. Evidemment $\{C^0(\mathfrak{U})\}$ est un $(0, R)$-cycle absolu; nous le désignerons par $\{p\}$. Ce cycle n'est pas absolument déterminé (car un réseau peut avoir plusieurs sommets contenant p), mais il est certainement déterminé à une homologie près.

13. Soient A, B deux sous-ensembles de R qui peuvent se réduire à des points. Pour abréger, disons qu'un réseau $\mathfrak{U}$ dans R *sépare* A de B lorsque pour deux sommets U_1, U_2 de $\mathfrak{U}$ tels que $AU_1 \neq 0$, $BU_2 \neq 0$ on n'a jamais l'homologie $U_1 \sim U_2$; évidemment, chaque affinement $\mathfrak{V}$ d'un tel réseau $\mathfrak{U}$ sépare aussi A de B. Si le réseau $\mathfrak{U}$ sépare A de B, soit U la somme de tous les $(0, \mathfrak{U})$-simplexes homologues à un $(0, \mathfrak{U})$-simplexe rencontrant A et soit V la somme des autres $(0, \mathfrak{U})$-simplexes. Alors on a évidemment

$$(1) \qquad R = U + V; \quad UV = 0; \quad A \subset U, B \subset V; \quad U, V \text{ ouverts dans } R.$$

Réciproquement, sous les conditions (1) le réseau constitué par U, V sépare A de B.

On voit que l'espace R est *connexe* si et seulement si deux quelconques de ses points ne sont jamais séparés par aucun réseau. Rappelons que chaque point p de R appartient toujours à un sous-ensemble Γ *connexe maximé* de R; on dit que Γ est une *composante* de R.

Soit p un point donné de R; soit Q l'ensemble de tous les points $q \in R$ qui ne sont séparés de p par aucun réseau; l'ensemble Q est une *quasicomposante* de R au sens de M. Hausdorff.[19] On sait que chaque quasicomposante de R est une composante de R ou bien une somme de composantes de R; si le nombre des quasicomposantes est *fini*, elles coïncident avec les composantes.

14. Si les points p et q appartiennent à la même quasicomposante de P, on a $\{p\} \sim \{q\}$.

Soit $\{p\} = \{C_1^0(\mathfrak{U})\}$, $\{q\} = \{C_2^0(\mathfrak{U})\}$. Un réseau arbitraire $\mathfrak{U}$ ne peut séparer p de q; donc $C_1^0(\mathfrak{U}) \sim C_2^0(\mathfrak{U})$.

15. Soit $\alpha \subset R$. Une quasicomposante Q sera dite *essentielle* mod α, s'il existe un réseau $\mathfrak{U}$ séparant Q de α. Si la composante Q n'est pas essentielle mod α et si $p \in Q$, évidemment aucun réseau ne sépare p de α.

[18] Pour la notation, v. II 20.

[19] Grundzüge der Mengenlehre, 1914, p. 248—249.

Si α ne rencontre qu'un nombre *fini* de quasicomposantes de R et si $Q \,.\, \alpha = 0$, la quasicomposante Q est essentielle. En effet, pour chaque quasicomposante Q_ν rencontrant α il existe évidemment un réseau $\mathfrak{U}_\nu$, séparant Q de Q_ν; un affinement $\mathfrak{U}$ simultané des reseaux $\mathfrak{U}_\nu$ sépare alors Q de α.

16. Soit $p \in R$, $\alpha \subset R$. Si la quasicomposante Q contenant p n'est pas essentielle mod α, on a $\{p\} \sim 0 \bmod \alpha$.

Soit $\{p\} = \{C^0(\mathfrak{U})\}$. Un réseau arbitraite $\mathfrak{U}$ ne pouvant séparer p de α, évidemment $C^0(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod \alpha$.

17. Soient $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ des quasicomposantes distinctes et essentielles mod α; soit $p_\nu \in Q_\nu$. Alors les $(0, R)$-cycles $\{p_\nu\}$ sont indépendants mod α.

Démonstration. Soit $\{p_\nu\} = \{C^0_\nu(\mathfrak{U})\}$. Soit $\mathfrak{U}_\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq k)$ un réseau séparant p_ν de α; soit $\mathfrak{V}_{\mu\nu}$ $(1 \leqq \mu < \nu \leqq k)$ un réseau séparant p_μ de p_ν; soit $\mathfrak{W}$ un affinement simultané de tous les réseaux $\mathfrak{U}_\nu$, $\mathfrak{V}_{\mu\nu}$. Le réseau $\mathfrak{W}$ sépare alors simultanément chaque point p_ν de α et de tous les autres p_μ. On en déduit sans peine qu'une homologie $\sum r_\nu\, C^0_\nu(\mathfrak{W}) \sim 0 \bmod \alpha$ exige $r_1 = \ldots = r_k = 0$.

18. Les raisonnements qui précèdent conduisent sans peine au théorème général suivant: Le nombre des quasicomposantes essentielles mod α est égal à $P_0(R; \alpha)$. Cas particuliers: Si α ne rencontre qu'un nombre fini k de quasicomposantes de R, le nombre total des quasicomposantes de R est égal à $P_0(R; \alpha) + k$. Le nombre des quasicomposantes de R est égal à $P_0(R)$; etc.

19. Dorénavant, nous allons supposer que l'espace topologique R est *complètement normal*;[20] cela veut dire que l'on a, outre les axiomes $1^\circ - 4^\circ$ du n° 1, l'axiome suivant:

5° si deux ensembles A, $B \subset R$ sont séparés par un réseau u dans $A + B$,[21] ils le sont aussi par un réseau $\mathfrak{U}$ dans R.

Chaque sous-ensemble A de R constitue un espace topologique complètement normal.[22]

20. **Lemme** h' $(h = 1, 2, 3, \ldots)$: Soient $u_1, u_2, \ldots, u_h$ des ensembles ouverts (fermés) dans $A \subset R$; soit $\prod_1^h u_\nu = 0$. Il existe des ensembles $U_1, U_2, \ldots, U_h$ ouverts dans R et tels que $U_\nu \supset u_\nu$, $\prod_1^h U_\nu = 0$.

Lemme h'' $(h = 1, 2, 3, \ldots)$: Soient $u_1, u_2, \ldots, u_h$ des ensembles ouverts (fermés)

[20] Cette notion a été introduite par M. Tietze (Math. Annalen, 88, p. 301); la dénomination est celle d'Urysohn (Math. Annalen, 94, p. 265).

[21] La supposition peut évidemment s'énoncer sous la forme suivante: $A \,.\, B = 0$ et A, B sont ouverts dans $A + B$; ou encore sous la forme: $A\bar{B} + B\bar{A} = 0$.

[22] V. Urysohn, l. c., p. 284.

dans $A \subset R$; soit V un ensemble ouvert dans R; soit $V \supset \prod_1^h u_\nu$. Il existe des ensembles $U_1, U_2, \ldots, U_h$ ouverts dans R et tels que $U_\nu \supset u_\nu$, $\prod_1^h U_\nu = V$.

Les lemmes étant évidents pour $h = 1$, il suffit de déduire 1° h'' de h'; 2° $(h + 1)'$ de h''.

Supposons donc en premier lieu la validité de h' ainsi que la prémisse de h''. Posons $A' = A - \prod_1^h u_\nu$; $u'_\nu = A' \, . \, u_\nu$. Les ensembles u'_ν sont alors ouverts (fermés) dans A' et l'on a $\prod_1^h u'_\nu = 0$. D'après h', il existe des ensembles U'_ν ouverts dans R et tels que $U'_\nu \supset u'_\nu$; $\prod_1^h U'_\nu = 0$. On voit sans peine qu'il suffit de poser $U_\nu = U'_\nu + V$.

En second lieu, supposons la validité de h'' ainsi que la prémisse de $(h + 1)'$. Evidemment

$$\bar{u}_{h+1} \, . \, v = u_{h+1} \, . \, \bar{v}_{h+1} = 0 \, ; \quad \left(v = \prod_1^h u_\nu\right).$$

L'espace R étant complètement normal, on en déduit (v. 13 (1)) qu'il existe des ensembles V et U_{h+1} ouverts dans R et tels que $V \supset \prod_1^h u_\nu$, $U_{h+1} \supset u_{h+1}$, $V \, . \, U = 0$. D'après h'', il existe des ensembles $U_1, U_2, \ldots, U_h$ ouverts dans R et tels que $U_\nu \supset u_\nu$, $\prod_1^h U_\nu = V$. On voit bien que les ensembles $U_1, U_2, \ldots, U_{h+1}$ jouissent des propriétés demandées.

21. Soit $A \subset R$. Soient $u_1, u_2, \ldots, u_k$ (k fini) des ensembles ouverts (fermés) dans A. Il existe des ensembles $V_1, V_2, \ldots, V_k$ ouverts dans R et tels que: 1° $V_\nu \supset u_\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq k)$; 2° on a $V_{\nu_1} \, . \, V_{\nu_2} \, . \ldots . \, V_{\nu_h} = 0$ pour chaque combinaison $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h)$ d'indices $1, 2, \ldots, k$ $(1 \leqq h \leqq k)$ telle que $u_{\nu_1} \, . \, u_{\nu_2} \, . \ldots . \, u_{\nu_h} = 0$.

Démonstration. Supposons que le symbole $\varkappa = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h)$ parcourt toutes les combinaisons pour lesquelles $u_{\nu_1} \, . \, u_{\nu_2} \, . \ldots . \, u_{\nu_h} = 0$. D'après le lemme h', il existe des ensembles $U_{\nu_1}^{(\varkappa)}, U_{\nu_2}^{(\varkappa)}, \ldots, U_{\nu_h}^{(\varkappa)}$ ouverts dans R et tels que $U_{\nu_1}^{(\varkappa)} \supset u_{\nu_1}, \ldots$ $\ldots, U_{\nu_h}^{(\varkappa)} \supset u_{\nu_h}$ et $U_{\nu_1}^{(\varkappa)} \, . \, U_{\nu_2}^{(\varkappa)} \, . \ldots . \, U_{\nu_h}^{(\varkappa)} = 0$. Pour une valeur arbitraire de ν $(1 \leqq \nu \leqq k)$ posons

$$V_\nu = \prod_\varkappa U_\nu^{(\varkappa)},$$

l'indice $\varkappa$ parcourant *celles* de ses valeurs $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h)$ qui contiennent l'indice donné ν. On voit sans peine que les ensembles $V_1, V_2, \ldots, V_k$ jouissent des propriétés demandées.

22. Un réseau $\mathfrak{U}$ dans R s'appelle *régulier* par rapport à un ensemble $A \subset R$ si chaque $(n, \mathfrak{U})$-simplexe S^n de $\mathfrak{U}$ jouit de la propriété suivante: *ou bien* aucun sommet

de S^n ne rencontre A, *ou bien* le noyau de S^n rencontre A. On voit (v. 3) que cette propriété dépend seulement de la *fermeture* $\bar{A}$ de A; on peut donc supposer A fermé.

23. Soit $A \subset R$. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R. Il existe un affinement $\mathfrak{W}$ de $\mathfrak{U}$ régulier par rapport à A et tels que $A \, . \, \mathfrak{U} = A \, . \, \mathfrak{W}$.

De plus, si $\alpha \subset R$ est un ensemble fermé donné, on peut s'arranger de façon que, pour chaque sommet W de $\mathfrak{W}$, on ait $WA = 0$, ou bien $W\alpha = 0$ ou enfin $WA\alpha \neq 0$.

Démonstration. On peut supposer A fermé. Désignons par $U_1, U_2, \ldots, U_k$ tous les sommets de $\mathfrak{U}$ rencontrant A et posons $u_\nu = A \, . \, U_\nu$. A ces ensembles $u_1, u_2, \ldots, u_k$ ouverts dans A associons des ensembles $V_1, V_2, \ldots, V_k$ ouverts dans R d'après le théorème du *n*° 21 et posons $W_\nu = U_\nu V_\nu$ si $u_\nu \alpha \neq 0$, $W_\nu = U_\nu V_\nu (R - \alpha)$ dans le cas contraire. Aux ensembles W ainsi définis ajoutons encore les $W = U \, . \, (R - A)$, U parcourant *tous* les sommets de $\mathfrak{U}$. On voit sans peine que les W constituent un affinement $\mathfrak{W}$ de $\mathfrak{U}$ possédant la propriété voulue.

IV. Homologies dans la somme de deux espaces

1. Soit R un espace topologique normal. Soient R_1 et R_2 deux sous-ensembles *fermés* de R tels que $R = R_1 + R_2$; posons $R_3 = R_1 R_2$. Soit α un sous-ensemble fermé de R; posons (pour $i = 1, 2, 3$) $\alpha_i = R_i \alpha$, de manière que α_i est un sous-ensemble fermé de R_i.

2. Désignons par N_3 la famille de tous les réseaux (ouverts) dans R_3 réguliers (v. III 22) par rapport à α_3. D'après III 23, N_3 est une famille complète (v. II 30) de réseaux ouverts dans R_3. Il en résulte sans peine que la famille N' constituée par tous les réseaux (ouverts). $\mathfrak{U}$ dans R tels que $R_3 \, . \, \mathfrak{U} \in N_3$ est aussi complète. Soit N'' la famille constituée par ceux des réseaux $\mathfrak{U} \in N'$ qui sont réguliers par rapport à R_3 et qui jouissent en outre de la propriété suivante: Si U est un sommet de $\mathfrak{U}$, on a $UR_3 = 0$ ou bien $U\alpha = 0$ ou enfin $U\alpha_3 \neq 0$. D'après III 23, N'' est une famille complète de réseaux dans R. De chaque réseau $\mathfrak{U} \in N''$ déduisons un nouveau réseau $\mathfrak{V}$ dans R de la manière suivante: si U est un sommet de $\mathfrak{U}$ tel que $UR_3 = 0$, on le remplace par les deux sommets $U_1 = U(R - R_1)$, $U_2 = U(R - R_2)$ [on a $U_1 + U_2 = U(R - R_3) = U$]; désignons par N la famille constituée par tous les réseaux $\mathfrak{V}$ ainsi déduits de tous les réseaux $\mathfrak{U} \in N''$.

Dans la suite, *nous considérons*, au lieu de la famille constituée par tous les réseaux ouverts dans R, *la famille N comme la famille fondamentale de réseaux dans R*. Ceci est permis (v. II 30 et III 2), car N est évidemment une famille complète de réseaux ouverts dans R.

3. La famille fondamentale N jouit donc des propriétés suivantes ($\mathfrak{U} \in N$):

1° Pour chaque sommet U de $\mathfrak{U}$ on a

$$UR_3 \neq 0 \quad \text{ou bien} \quad UR_1 = 0 \quad \text{ou enfin} \quad UR_2 = 0 \, .$$

2° Si chaque sommet d'un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe S^n recontre R_3, on a $R_3 \,.\, J(S^n) \neq 0$.
3° Si chaque sommet d'un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe S^n rencontre α_3, on a $\alpha_3 \,.\, J(S^n) \neq 0$.
4° Pour chaque sommet U de $\mathfrak{U}$ tel que $UR_3 \neq 0$, $U\alpha \neq 0$ on a $U\alpha_3 \neq 0$.

4. Des propriétés 1°, 2° du N° 3 il résulte pour $\mathfrak{U} \in N$: 1° Chaque $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $K^n(\mathfrak{U})$ peut se mettre sous la forme

$$K^n(\mathfrak{U}) = K_1^n(\mathfrak{U}) - K_2^n(\mathfrak{U})\,; \quad K_1^n(\mathfrak{U}) \subset R_1\,; \quad K_2^n(\mathfrak{U}) \subset R_2\,.$$

2° Si $K^n(\mathfrak{U}) \subset R_1$ et $K^n(\mathfrak{U}) \subset R_2$, alors $K^n(\mathfrak{U}) \subset R_3$.

5. Soit $C^n(\mathfrak{U})$ un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α dans R_i $(i = 1, 2, 3)$. Alors $C^n(\mathfrak{U})$ est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α_i dans R_i.

Démonstration. Posons $F(C^n(\mathfrak{U})) = \sum r_\nu S_\nu^{n-1}$ où nous pouvons supposer que dans chaque terme à droite on a $r_\nu \neq 0$, donc $S_\nu^{n-1} \subset R_i$, $S_\nu^{n-1} \subset \alpha$. Soit d'abord $i = 3$. Chaque sommet U de chaque S_ν^{n-1} rencontre R_3 et α, donc (d'après 4° dans N° 3) aussi α_3; il en résulte (d'après 3° dans N° 3) que $S_\nu^{n-1} \subset \alpha_3$, d'où $F(C^n(\mathfrak{U})) \subset \alpha_3$, $C^n(\mathfrak{U}) \to 0 \bmod \alpha_3$. En second lieu, soit $i = 1$ (le cas $i = 2$ se traite de la même manière). Si, pour une valeur de ν, le simplexe S_ν^{n-1} possède un sommet U tel que $UR_3 = 0$, d'après 1° du N° 3 on a $UR_1 = 0$ ou bien $UR_2 = 0$; or $S_\nu^{n-1} \subset R_1$ entraîne que $UR_1 \neq 0$; donc $J(S_\nu^{n-1}) \subset U \subset R - R_2 \subset R_1$, d'où $J(S_\nu^{n-1}) \,.\, \alpha = J(S_\nu^{n-1}) \,.\, \alpha_1$. Or $J(S_\nu^{n-1}) \,.\, \alpha \neq 0$, car $S_\nu^{n-1} \subset \alpha$; donc $J(S_\nu^{n-1}) \,.\, \alpha_1 \neq 0$. D'autre part, si chaque sommet de S_ν^{n-1} rencontre R_3, la relation $S_\nu^{n-1} \subset \alpha$ donne (d'après 4° du N° 3) que chaque sommet de S_ν^{n-1} rencontre α_3, donc (d'après 3° du N° 3) $0 \neq J(S_\nu^{n-1}) \,.\, \alpha_3 \subset \subset J(S_\nu^{n-1}) \,.\, \alpha_1$. En résumé, pour chaque valeur de l'indice ν on a l'inclusion $J(S_\nu^{n-1}) \subset \subset \alpha_1$, ce qui signifie que $C^n(\mathfrak{U}) \to 0 \bmod \alpha_1$.

6. Soit $C^{n+1}(\mathfrak{U})$ un $(n + 1, \mathfrak{U})$-cycle mod α arbitrairement donné $(\mathfrak{U} \in N)$. D'après 4, on peut poser

$$C^{n+1}(\mathfrak{U}) = K_1^{n+1}(\mathfrak{U}) - K_2^{n+1}(\mathfrak{U}) \tag{1}$$

avec

$$K_1^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R_1\,, \quad K_2^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R_2\,. \tag{2}$$

On a $F[K_1^{n+1}(\mathfrak{U})] = F[K_2^{n+1}(\mathfrak{U})] \bmod \alpha$. Désignons par $C^n(\mathfrak{U})$ une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne qui se déduit de $F(K_1^{n+1}(\mathfrak{U}))$ [et donc aussi de $F(K_2^{n+1}(\mathfrak{U}))$] en enlevant tous les $(n, \mathfrak{U})$-simplexes contenues dans α et en ajoutant ensuite une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne *contenue dans* α_3 arbitraire.

Evidemment

$$C^n(\mathfrak{U}) = F[K_1^{n+1}(\mathfrak{U})] \bmod \alpha_1\,, \quad C^n(\mathfrak{U}) = F[K_2^{n+1}(\mathfrak{U})] \bmod \alpha_2\,. \tag{3}$$

D'après (2) et (3), on a $C^n(\mathfrak{U}) \subset R_1$, $C^n(\mathfrak{U}) \subset R_2$, d'où (4) $C^n(\mathfrak{U}) \subset R_3$. D'après (3) $C^n(\mathfrak{U})$ est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α. Donc (v. 5) $C^n(\mathfrak{U})$ est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α_3

dans R_3. De plus les relations (2) et (3) donnent encore

(4) $$C^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod \alpha_1 \text{ dans } R_1\,, \quad C^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod \alpha_2 \text{ dans } R_3\,.$$

Pour abréger, écrivons

$$C^n(\mathfrak{U}) = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})]$$

pour indiquer que le cycle $C^n(\mathfrak{U})$ a été déduit du cycle $C^{n+1}(\mathfrak{U})$ de la manière qui vient d'être expliquée.

7. La fonction Φ n'est pas univoque. Au lieu de 6 (1), on peut poser généralement

$$C^{n+1}(\mathfrak{U}) = \bar{K}_1^{n+1}(\mathfrak{U}) - \bar{K}_2^{n+1}(\mathfrak{U})$$

où

$$\bar{K}_i^{n+1}(\mathfrak{U}) = K_i^{n+1}(\mathfrak{U}) + K_3^{n+1}(\mathfrak{U})\,, \quad (i = 1, 2)$$

$K_3^{n+1}(\mathfrak{U})$ étant une chaîne telle que $K_3^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R_1$, $K_3^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R_2$ et donc (4) $K_3^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R_3$. Au lieu de $C^n(\mathfrak{U})$ on a donc généralement

$$\bar{C}^n(\mathfrak{U}) = C^n(\mathfrak{U}) + F[K_3^{n+1}(\mathfrak{U})] \bmod \alpha_3\,.$$

Donc: Si $C^n(\mathfrak{U}) = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})]$, on a aussi $\bar{C}^n(\mathfrak{U}) = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})]$ si $\bar{C}^n(\mathfrak{U}) \sim C^n(\mathfrak{U})$ mod α_3 dans R_3 et dans ce cas seulement.

8. Réciproquement, soit $C^n(\mathfrak{U})$ un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α_3 dans R_3 tel que

$$C^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod \alpha_1 \text{ dans } R_1\,; \quad C^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod \alpha_2 \text{ dans } R_2\,.$$

Alors il existe pour $i = 1$ et pour $i = 2$ une $(n + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $K_i^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R_i$ telle que

$$F[K_i^{n+1}(\mathfrak{U})] = C^n(\mathfrak{U}) \bmod \alpha_i\,.$$

En posant

$$C^{n+1}(\mathfrak{U}) = K_1^{n+1}(\mathfrak{U}) - K_2^{n+1}(\mathfrak{U})$$

on a évidemment $C^n(\mathfrak{U}) = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})]$.

9. Si

$$C^{n+1}(\mathfrak{U}) = \sum_1^k r_\nu\, C_\nu^{n+1}(\mathfrak{U})\,, \quad C_\nu^n(\mathfrak{U}) = \Phi[C_\nu^{n+1}(\mathfrak{U})]\,,$$

évidemment

$$\sum_1^k r_\nu\, C_\nu^n(\mathfrak{U}) = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})]\,.$$

10. Soient $C^{n+1}(\mathfrak{U})$, $C_1^{n+1}(\mathfrak{U})$, $C_2^{n+1}(\mathfrak{U})$ des $(n + 1, \mathfrak{U})$-cycles mod α tels que

(1) $$C^{n+1}(\mathfrak{U}) = C_1^{n+1}(\mathfrak{U}) - C_2^{n+1}(\mathfrak{U})\,; \quad C_1^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R_1\,; \quad C_2^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R_2\,;$$

alors $0 = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})]$. Et réciproquement, si $0 = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})]$, il existe deux $(n + 1, \mathfrak{U})$-cycles mod α $C_i^{n+1}(\mathfrak{U})$ $(i = 1, 2)$ tels que l'on ait (1).

11. Soit $C^{n+1}(\mathfrak{U})$ un $(n+1, \mathfrak{U})$-cycle mod α homologue à zéro mod α. Alors $0 = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})]$.

Démonstration. Il existe une $(n+2, \mathfrak{U})$-chaîne $K^{n+2}(\mathfrak{U})$ et une $(n+1, \mathfrak{U})$-chaîne $\bar{K}^{n+1}(\mathfrak{U})$ telles que

$$C^{n+1}(\mathfrak{U}) = F[K^{n+2}(\mathfrak{U})] + \bar{K}^{n+1}(\mathfrak{U})\,; \quad \bar{K}^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset \alpha\,.$$

D'après 4 on peut poser

$$K^{n+2}(\mathfrak{U}) = K_1^{n+2}(\mathfrak{U}) - K_2^{n+2}(\mathfrak{U})\,; \quad \bar{K}^{n+1}(\mathfrak{U}) = \bar{K}_1^{n+1}(\mathfrak{U}) - \bar{K}_2^{n+1}(\mathfrak{U})$$

où

$$K_i^{n+2}(\mathfrak{U}) \subset R_i\,; \quad \bar{K}_i^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R_i \quad (i = 1, 2)\,.$$

Evidemment, on peut s'arranger de façon que $\bar{K}_i^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset \alpha$.

En posant

$$C_i^{n+1}(\mathfrak{U}) = F[K_i^{n+2}(\mathfrak{U})] + \bar{K}_i^{n+1}(\mathfrak{U})\,,$$

les conditions 10 (1) sont réalisées; en outre, $C_i^{n+1}(\mathfrak{U})$ est un $(n+1, \mathfrak{U})$-cycle mod α dans R_i.

12. Soit $\mathfrak{B} \in N$ un affinement d'un réseau $\mathfrak{U} \in N$; $\pi = \text{Pr.}(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Soit $C^{n+1}(\mathfrak{U})$ und $(n+1, \mathfrak{U})$-cycle mod α et $C^n(\mathfrak{U}) = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{B})]$. On vérifie sans peine que

$$\pi\, C^n(\mathfrak{U}) = \Phi[\pi\, C^{n+1}(\mathfrak{U})]\,.$$

13. Maintenant, soit $\{C^{n+1}(\mathfrak{U})\}$ un $(n+1, R)$-cycle mod α. Pour chaque réseau[23] $\mathfrak{U}$, soit $C^n(\mathfrak{U}) = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})]$. Chaque $C^n(\mathfrak{U})$ est un (n, R)-cycle mod α_3 dans R_3 (6) déterminé précisément à une homologie mod α_3 dans R_3 près .D'après (12), $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ est un (n, R)-cycle mod α_3 dans R_3. Posons $\{C^n(\mathfrak{U})\} = \Phi[\{C^{n+1}(\mathfrak{U})\}]$.

D'après 6 (4), on a

$$(1) \qquad \{C^n(\mathfrak{U})\} \sim 0 \text{ mod } \alpha_i \text{ dans } R_i \quad (i = 1, 2)\,.$$

14. Réciproquement, soit $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ un (n, R)-cycle mod α_3 dans R_3 tel que l'on ait les deux relations 13 (1). Pour chaque réseau $\mathfrak{U} \in N$, désignons par $L^{n+1}(\mathfrak{U})$ l'ensemble des $(n+1, R)$-cycles mod α dans R tels que $C^n(\mathfrak{U}) = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})]$. D'après (8), $L^{n+1}(\mathfrak{U}) \neq 0$. D'après 9 et 11, $L^{n+1}(\mathfrak{U})$ est un système linéaire de $(n+1, R)$-cycles mod α. Si $\mathfrak{B} \in N$ est un affinement de $\mathfrak{U} \in N$, $\pi = \text{Pr.}(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$, on a $\pi L^{n+1}(\mathfrak{B}) \subset L^{n+1}(\mathfrak{U})$. En vertu du théorème énoncé an Chap. II, N°21 on peut choisir $C^{n+1}(\mathfrak{U}) \in L^{n+1}(\mathfrak{U})$ de manière que l'on obtient un $(n+1, R)$-cycle mod α $\{C^{n+1}(\mathfrak{U})\}$ tel que

$$\{C^n(\mathfrak{U})\} = \Phi[\{C^{n+1}(\mathfrak{U})\}]\,.$$

[23] Rappelons que nous ne considérons que les réseaux $\mathfrak{U} \in N$.

15. Soit $\mu_n(R_3; \alpha_3)$ le sousmodule du module $M_n(R_3, R; \alpha_3)$ constitué par les (n, R)-cycles mod α_3 dans R_3 homologues à zéro mod α_1 dans R_1, ainsi que mod α_2 dans R_2. Moyennant la fonction Φ le module $\mu_n(R_3; \alpha_3)$ est (v. 9, 11, 13 et 14) une image homomorphe du module $M_{n+1}(R; \alpha)$. Plus précisément, d'après 10, le module $\mu_n(R_3, R; \alpha_3)$ est isomorphe au module (v. I 11) $M_{n+1}(R; \alpha) - M^*_{n+1}(R; \alpha)$ où $M^*_{n+1}(R; \alpha)$ est constitué par les $(n+1, R)$-cycles mod α de la forme $\{C_1^n(\mathfrak{U})\} - \{C_2^n(\mathfrak{U})\}$, $\{C_i^n(\mathfrak{U})\}$ $(i = 1, 2)$ étant un $(n+1, R)$-cycle mod α_i dans R_i. D'après I 12, le module $M_{n+1}(R; \alpha)$ est une somme directe du module $M^*_{n+1}(R; \alpha)$ est d'un module isomorphe à $\mu_n(R_3; \alpha_3)$; donc

$$P_{n+1}(R; \alpha) = P^*_{n+1}(R; \alpha) + \pi_n(R_3; \alpha_3)\,, \tag{1}$$

où $P^*_{n+1}(R; \alpha)$ est le rang du module $M^*_{n+1}(R; \alpha)$ et $\pi_n(R_3; \alpha_3)$ celui du module $\mu_n(R_3; \alpha_3)$.

16. Soit $\{C_i^{n+1}(\mathfrak{U})\}$ $(i = 1, 2)$ un $(n+1, R)$-cycle mod α_i dans R_i; soit $\{C_1^{n+1}(\mathfrak{U})\} \sim \{C_2^{n+1}(\mathfrak{U})\}$ mod α. Il existe un $(n+1, R)$-cycle $C_3^{n+1}(\mathfrak{U})$ mod α_3 dans R_3 tel que $\{C_i^{n+1}(\mathfrak{U})\} \sim \{C_3^{n+1}(\mathfrak{U})\}$ mod α_i dans R_i pour $i = 1$ et pour $i = 2$.

Démonstration. Pour chaque $\mathfrak{U} \in N$, il existe une $(n+2, \mathfrak{U})$-chaîne $K_1^{n+2}(\mathfrak{U}) - K_2^{n+2}(\mathfrak{U})$ telle que

$$C_1^{n+1}(\mathfrak{U}) - C_2^{n+1}(\mathfrak{U}) = F[K_1^{n+2}(\mathfrak{U}) - K_2^{n+2}(\mathfrak{U})] \bmod \alpha\,.$$

On peut supposer (v. 4) que $K_i^{n+2}(\mathfrak{U}) \subset R_i$ $(i = 1, 2)$. Il en résulte sans peine (cf. 6) qu'il existe un $(n+1, \mathfrak{U})$-cycle $C_3^{n+1}(\mathfrak{U})$ mod α_3 dans R_3 tel que l'on ait pour $i = 1, 2$

$$C_3^{n+1}(\mathfrak{U}) = C_i^{n+1}(\mathfrak{U}) - F[K_i^{n+2}(\mathfrak{U})] \bmod \alpha\,,$$

c'est-à-dire

$$C_3^{n+1}(\mathfrak{U}) \sim C_i^{n+1}(\mathfrak{U}) \bmod \alpha_i \text{ dans } R_i\,.$$

Le cycle $C_3^{n+1}(\mathfrak{U})$ n'est pas univoquement déterminé; or en désignant par $L^{n+1}(\mathfrak{U})$ l'ensemble de toutes ses valeurs, on voit sans peine que $L^{n+1}(\mathfrak{U})$ est un système linéaire de $(n+1, \mathfrak{U})$-cycles mod α_3 dans R_3; de plus, si $\mathfrak{B} \in N$ est un affinement de $\mathfrak{U} \in N$, $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$, on a manifestement $\pi L^{n+1}(\mathfrak{B}) \subset L^{n+1}(\mathfrak{U})$. Donc, d'après II 21, on peut choisir $C_3^{n+1}(\mathfrak{U}) \in L^{n+1}(\mathfrak{U})$ pour chaque $\mathfrak{U} \in N$ de manière que $\{C_3^{n+1}(\mathfrak{U})\}$ constitue un $(n+1, R)$-cycle mod α_3 dans R_3 qui jouit évidemment de la propriété demandée.

17. Désignons, pour un moment, par $\overline{M}_{n+1}(R_1, R_2)$ la somme directe (I 12) de deux modules respectivement isomorphes à

$$M_{n+1}(R_1, R; \alpha_1) \quad \text{et à} \quad M_{n+1}(R_2, R; \alpha_2)\,.$$

$\overline{M}_{n+1}(R_1, R_2)$ peut être considéré comme constitué par des couples $[\{C_1^{n+1}(\mathfrak{U})\}, \{C_2^{n+1}(\mathfrak{U})\}]$ où (pour $i = 1, 2$) $\{C_i^{n+1}(\mathfrak{U})\}$ est un $(n+1, R)$-cycle mod α_i dans R_i et où deux couples $[\{C_1^{n+1}(\mathfrak{U})\}, \{C_2^{n+1}(\mathfrak{U})\}]$ et $[\{\bar{C}_1^{n+1}(\mathfrak{U})\}, \{\bar{C}_2^{n+1}(\mathfrak{U})\}]$ sont égaux si et seulement si $\{\bar{C}_i^{n+1}(\mathfrak{U})\} \sim \{C_i^{n+1}(\mathfrak{U})\} \bmod \alpha_i$ dans R_i pour $i = 1$ et pour $i = 2$. Evidemment, le module $M_{n+1}^*(R; \alpha)$ est une image homomorphe de $\bar{M}_{n+1}(R; \beta)$ de manière que (v. I 13) $\bar{M}_{n+1}(R_1, R_2)$ est la somme directe d'un module isomorphe à $M_{n+1}^*(R; \alpha)$ et du module $M_{n+1}^0(R_1, R_2)$ constitué par les couples $[\{C_1^{n+1}(\mathfrak{U})\}, \{C_2^{n+1}(\mathfrak{U})\}]$ dont l'image dans $M_{n+1}^*(R; \alpha)$ est zéro. Donc (v. III 11)

$$(1) \qquad P_{n+1}(R_1, \alpha_1) + P_{n+1}(R_2; \alpha_2) = P_{n+1}^*(R; \alpha) + P_{n+1}^0(R_1, R_2)$$

où $P_{n+1}^0(R_1, R_2)$ désigne le rang du module $M_{n+1}^0(R_1, R_2)$. Or, d'après 16, le module $M_{n+1}(R_1, R_2)$ est constitué par les couples de la forme $[\{C_3^{n+1}(\mathfrak{U})\}, \{C_3^{n+1}(\mathfrak{U})\}]$, où $C_3^{n+1}(\mathfrak{U})$ est un $(n + 1, R)$-cycle mod α_3 dans R_3 et où le couple que nous venons d'écrire est considéré comme égal au couple $[\{\bar{C}_3^{n+1}(\mathfrak{U})\}, \{\bar{C}_3^{n+1}(\mathfrak{U})\}]$ si et seulement si

$$\{\bar{C}_3^{n+1}(\mathfrak{U})\} - \{C_3^{n+1}(\mathfrak{U})\} \sim 0 \bmod \alpha_i \text{ dans } R_i$$

pour $i = 1$ et pour $i = 2$. Donc le module $M_{n+1}^0(R_1, R_2)$ est une image homomorphe du module $M_{n+1}(R_3, R; \alpha_3)$ de sorte que les cycles du module $M_{n+1}(R_3, R; \alpha_3)$ dont l'image dans le module $M_{n+1}^0(R_1, R_2)$ est zéro constituent le module $\mu_{n+1}(R_3; \alpha_3)$ (la notation est celle du N° 15). Donc (v. III 11)

$$(2) \qquad P_{n+1}(R_3; \alpha_3) = P_{n+1}^0(R_1, R_2) + \pi_{n+1}(R_3; \alpha_3)\,.$$

18. De 15 (1) et de 17 (1), (2) on obtient le résultat définitif:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(R_1; \alpha_1) + P_{n+1}(R_2; \alpha_2) + \pi_n(R_3; \alpha_3) + \pi_{n+1}(R_3; \alpha_3) = \\ = P_{n+1}(R; \alpha) + P_{n+1}(R_3; \alpha_3)\,, \end{aligned}$$

où $\pi_n(R_3; \alpha_3)$ est le rang du module constitué par tous les (n, R)-cycles mod α_3 dans R_3 homologues à zéro mod α_1 dans R_1 ainsi que mod α_2 dans R_2, deux tels cycles étant considérés comme égaux s'ils sont homologues mod α_3 dans R_3.

V. Compléments

1. Dans ce qui précède, les coefficients de tous les cycles ont été pris dans l'ensemble $\mathfrak{R}$ des *nombres rationnels*. On ne peut remplacer $\mathfrak{R}$ par l'ensemble des *nombres entiers*, car alors les théorèmes I 7 et I 8 ne valent plus et, en conséquence, l'important théorème II 16 cesse d'être vrai. Or on peut choisir pour module un *module arithmétique* fixe $m = 2, 3, 4, \ldots$ et remplacer $\mathfrak{R}$ par l'ensemble $\mathfrak{R}_m$ constitué par tous les nombres entiers, *deux entiers congruents mod m étant considérés comme égaux*. Si $m = m_1 \,.\, m_2$, les deux facteurs m_1 et m_2 étant *sans facteur commun*, on voit sans peine que le module constitué par les cycles mod m d'une quelconque des diverses sortes considérées dans les Chapitres précédents est une *somme directe* du module

constitué par les cycles mod m_1 et de celui constitué par les cycles mod m_2. [Ceci résulte immédiatement du fait connu que l'anneau (Ring) $\mathfrak{R}_m$ est une somme directe des deux anneaux $\mathfrak{R}_{m_1}$, $\mathfrak{R}_{m_2}$]. On peut donc se borner au cas où $m = p^h$, p étant un nombre premier $k = 1, 2, 3, \ldots$ Dans le cas $k = 1$ $(m = p)$ la théorie mod m est *formellement* identique à celle exposée aux Chapitres précédents; la raison en est simplement que l'ensemble $\mathfrak{R}_p$ constitue un *corps* comme l'ensemble $\mathfrak{R}$. Dans le cas $m = p^k$, $k > 1$, il y a des différences qui consistent principalement en ce qu'un module n'est plus caractérisé par un nombre cardinal *unique* (son rang); outre les nombres de Betti, on a ici à considérer encore des coefficients de torsion. Néanmoins, le contenu essentiel de la théorie reste le même.

2. Au Chap. II, nous avons pris comme famille fondamentale des réseaux dans un espace topologique R celle constituée par tous les réseaux *ouverts*. On peut aussi fonder la théorie sur les réseaux *fermés* (ce sont naturellement les réseaux dont les sommets sont des sous-ensembles fermés de R). Or nous allons prouver (dans les n^{os} 3–8), que, *si R est un espace topologique complètement normal, les deux manières de procéder sont absolument équivalentes.*

3. Soit donc R un espace topologique complètement normal et soit α un sous-ensemble fermé de R donné d'avance. Un réseau fermé $\mathfrak{U}_f$ et un réseau ouvert $\mathfrak{U}_g$ dans R soient appelés *isologues*, s'il existe une correspondance biunivoque entre les sommets $u_1, u_2, \ldots, u_k$ de $\mathfrak{U}_f$ et ceux $U_1, U_2, \ldots, U_k$ de $\mathfrak{U}_g$ jouissant des propriétés suivantes:

1° $u_\nu \subset U_\nu \quad (1 \leqq \nu \leqq k)$;
2° $U_{\nu_1} . U_{\nu_2} . \ldots . U_{\nu_h} \neq 0$ entraîne $u_{\nu_1} . u_{\nu_2} . \ldots . u_{\nu_h} \neq 0$;
3° $\alpha . U_{\nu_1} . U_{\nu_2} . \ldots . U_{\nu_h} \neq 0$ entraîne $\alpha . u_{\nu_1} . \ldots . u_{\nu_h} \neq 0$.

On a alors évidemment une correspondance biunivoque entre les $(n, \mathfrak{U}_f)$-cycles mod α et les $(n, \mathfrak{U}_g)$-cycles mod α et cette correspondance conserve les homologies mod α; nous dirons qu'on *transporte* un cycle de $\mathfrak{U}_f$ à $\mathfrak{U}_g$ ou réciproquement.

4. Soit $\mathfrak{U}_f$ un réseau fermé dans R. Il existe un réseau ouvert $\mathfrak{U}_g$ isologue a $\mathfrak{U}_f$.

Démonstration. Désignons par $u_1, u_2, \ldots, u_k$ les sommets de $\mathfrak{U}_f$. En appliquant aux sous-ensembles fermés α, u_1 $u_2, \ldots, u_k$ de R le théorème du Chap. III, n° 21 ($A = R$), on obtient des sous-ensembles ouverts $V, U_1, U_2, \ldots, U_k$ de R. On voit sans peine que $U_1, U_2, \ldots, U_k$ constituent un réseau ouvert $\mathfrak{U}_g$ isologue à $\mathfrak{U}_f$.

5. Soient $\mathfrak{U}_g$ un réseau ouvert donné dans R. Il existe un réseau fermé $\mathfrak{U}_f$ isologue à $\mathfrak{U}_g$.

Démonstration. Désignons par $U_1, U_2, \ldots, U_k$ les sommets de $\mathfrak{U}_g$. D'après un lemme de M. Menger[24] il existe des ensembles ouverts $V_1, V_2, \ldots, V_k$ tels que 1° $\overline{V}_\nu \subset U_\nu$; 2° $\sum_1^k V_\nu = R$. Pour chaque combinaison $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h)$ des indices

[24] K. Menger, Dimensionstheorie, „Bemerkung" p. 156–160. M. Menger suppose l'espace R séparable; mais on voit bien que la démonstration est valable dans chaque espace complètement normal (même, plus généralement, dans chaque espace normal).

$1, 2, \ldots, k$ telle que l'ensemble $U_{\nu_1} . U_{\nu_2} . \ldots . U_{\nu_h}$ n'est pas vide, choisissons un point $p_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_h} \in U_{\nu_1} . U_{\nu_2} . \ldots . U_{\nu_h}$; ce point soit choisi dans α toujours lorsque cela est possible. Pour $\nu = 1, 2, \ldots, k$ désignons par I_ν l'ensemble fini constitué par les points $p_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_h}$ tels qu'un des indices $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h$ coïncide avec ν. Posons $u_\nu = \overline{V}_\nu + I_\nu$; on voit sans peine que $u_1, u_2, \ldots, u_k$ sont les sommets d'un réseau fermé $\mathfrak{U}_f$ isologue à $\mathfrak{U}_g$.

6. Soit $\{C^n(\mathfrak{U}_g)\}$ un $(n, R)_g$-cycle[25] mod α donné. A chaque réseau fermé $\mathfrak{U}_f$ attachons un réseau ouvert $\mathfrak{U}_g = I(\mathfrak{U}_f)$ isologue à $\mathfrak{U}_f$ et désignons par $C^n(\mathfrak{U}_f)$ le $(n, \mathfrak{U}_f)$-cycle mod α obtenu en transportant $C^n(\mathfrak{U}_g)$ de $\mathfrak{U}_g$ à $\mathfrak{U}_f$. Soit $\mathfrak{V}_f$ un affinement de $\mathfrak{U}_f$; soit $\mathfrak{U}_g = I(\mathfrak{U}_f)$, $\mathfrak{V}_g = I(\mathfrak{V}_f)$. Désignons par $u_1, u_2, \ldots, u_h$ $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ les sommets de $\mathfrak{U}_f(\mathfrak{V}_f)$ et par $U_1, U_2, \ldots, U_h$ $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ les sommets correspondants de $\mathfrak{U}_g(\mathfrak{V}_g)$. Soit $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{V}_f, \mathfrak{U}_f)$; $\pi v_\nu = u_{\pi(\nu)}$. Remplaçons chaque sommet V_ν de $\mathfrak{V}_g$ par l'ensemble ouvert $V . U_{\pi(\nu)}$; le réseau $\mathfrak{V}_g$ se transforme de cette manière en un nouveau réseau ouvert $\mathfrak{W}_g$ qui est évidemment un affinement simultané des deux réseaux $\mathfrak{U}_g$ et $\mathfrak{V}_g$; aussi on voit sans peine que $\mathfrak{W}_g$ est isologue à $\mathfrak{V}_f$. Posons

$$\pi'[V_\nu . U_{\pi(\nu)}] = V_\nu\,, \quad \pi''[V_\nu . U_{\pi(\nu)}] = U_{\pi(\nu)}\,,$$

de manière que $\pi' = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{W}_g, \mathfrak{V}_g)$, $\pi'' = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{W}_g, \mathfrak{U}_g)$. Posons

$$C'^n(\mathfrak{V}_g) = \pi'\, C^n(\mathfrak{W}_g)\,, \quad C''^n(\mathfrak{U}_g) = \pi''\, C^n(\mathfrak{W}_g)$$

de manière que

$$C^n(\mathfrak{V}_g) \sim C'^n(\mathfrak{V}_g) \bmod \alpha\,, \quad C^n(\mathfrak{U}_g) \sim C''^n(\mathfrak{U}_g) \bmod \alpha\,.$$

Il en résulte que

$$C^n(\mathfrak{V}_f) \sim C'^n(\mathfrak{V}_f) \bmod \alpha\,, \quad C^n(\mathfrak{U}_f) \sim C''^n(\mathfrak{U}_f) \bmod \alpha\,, \tag{1}$$

où les cycles $C'^n(\mathfrak{V}_f)$ et $C''^n(\mathfrak{U}_f)$ s'obtiennent en transportant $C'^n(\mathfrak{V}_g)$ de $\mathfrak{V}_g$ à $\mathfrak{V}_f$ et $C''^n(\mathfrak{U}_g)$ de $\mathfrak{U}_g$ à $\mathfrak{U}_f$. Or il est évident que $C''^n(\mathfrak{U}_f) = \pi\, C'^n(\mathfrak{U}_f)$ de manière que les homologies (1) entraînent

$$C^n(\mathfrak{U}_f) \sim \pi\, C^n(\mathfrak{V}_f) \bmod \alpha\,. \tag{2}$$

Donc $\{C^n(\mathfrak{U}_f)\}$ est un $(n, R)_f$-cycle mod α. Ce cycle n'est pas absolument déterminé, car l'opération $\mathfrak{U}_g = I(\mathfrak{U}_f)$ ne l'est pas. Or si l'on pose $\mathfrak{U}_f = \mathfrak{V}_f$ dans le raisonnement qui précède, la relation (2), (dans la quelle π est l'identité) montre que le cycle $\{C^n(\mathfrak{U}_f)\}$ est bien déterminé à une homologie mod α près.

7. Soit $\{C^n(\mathfrak{U}_f)\}$ un $(n, R)_f$-cycle mod α donné. A chaque réseau ouvert $\mathfrak{U}_g$ attachons un réseau fermé $\mathfrak{U}_f = I(\mathfrak{U}_g)$ isologue à $\mathfrak{U}_g$ et désignons par $C^n(\mathfrak{U}_g)$ le $(n, \mathfrak{U}_g)$-cycle mod α obtenu en transportant $C_n(\mathfrak{U}_f)$ de $\mathfrak{U}_f$ à $\mathfrak{U}_g$. Soit $\mathfrak{V}_g$ un affinement de $\mathfrak{U}_g$;

[25] L'indice $g(f)$ signifie tout partout que l'ou a pris les réseaux ouverts (fermés) comme famille fondamentale de réseaux.

soit $\mathfrak{U}_f = I(\mathfrak{U}_g)$, $\mathfrak{V}_f = I(\mathfrak{V}_g)$. Choisissons un affinement simultané $\mathfrak{W}_f$ des deux réseaux $\mathfrak{U}_f$ et $\mathfrak{V}_f$; soit $\pi' = \operatorname{Pr.}(\mathfrak{W}_f, \mathfrak{V}_f)$, $\pi'' = \operatorname{Pr.}(\mathfrak{W}_f, \mathfrak{U}_f)$. Soit $\mathfrak{W}_g^*$ un réseau ouvert isologue à $\mathfrak{W}_f$. Soit W^* un sommet arbitraire de $\mathfrak{W}_g^*$ et w le sommet correspondant de $\mathfrak{W}_f$; soit V le sommet de $\mathfrak{V}_g$ correspondant au sommet $\pi'\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{V}_f$; remplaçons W^* par l'ensemble $W = W^* \,.\, V$. En procédant ainsi avec tous les sommets W^* de $\mathfrak{W}_g^*$, ce réseau se transforme en un nouveau réseau ouvert $\mathfrak{W}_g$, qui est évidemment un affinement de $\mathfrak{W}_g$; on voit sans peine que $\mathfrak{W}_g$ est isologue à $\mathfrak{W}_f$.

Désignons par $C'^n(\mathfrak{V}_g)$ $[C''^n(\mathfrak{U}_g)]$ le cycle obtenu en transportant $\pi' C^n(\mathfrak{W}_f)$ $[\pi'' C^n(\mathfrak{W}_f)]$ de $\mathfrak{V}_f$ a $\mathfrak{V}_g$ [de $\mathfrak{U}_f$ a $\mathfrak{U}_g$]; on voit sans peine (cf. 6 (1)) que

$$C^n(\mathfrak{V}_g) \sim C'^n(\mathfrak{V}_g) \bmod \alpha\,, \quad C^n(\mathfrak{U}_g) \sim C''^n(\mathfrak{U}_g) \bmod \alpha\,. \tag{1}$$

Soit $\pi = \operatorname{Pr.}(\mathfrak{V}_g, \mathfrak{U}_g)$, $\bar{\pi} = \operatorname{Pr.}(\mathfrak{W}_g, \mathfrak{V}_g)$, donc $\pi\bar{\pi} = \operatorname{Pr.}(\mathfrak{W}_g, \mathfrak{U}_g)$. Désignons par $C_0^n(\mathfrak{W}_g)$ le cycle obtenu en transportant $C^n(\mathfrak{W}_f)$ de $\mathfrak{W}_f$ à $\mathfrak{W}_g$ et posons $C^n(\mathfrak{V}_g) = = \bar{\pi}\, C_0^n(\mathfrak{W}_g)$, $C_0^n(\mathfrak{U}_g) = \pi\,\bar{\pi} C_0^n(\mathfrak{W}_g)$, de manière que

$$C_0^n(\mathfrak{U}_g) = \pi\, C_0^n(\mathfrak{V}_g)\,. \tag{2}$$

Or le raisonnement du Chap. II, n^o 12 est évidemment applicable pour montrer que

$$C'^n(\mathfrak{V}_g) \sim C_0^n(\mathfrak{V}_g) \bmod \alpha\,, \quad C''^n(\mathfrak{U}_g) \sim C_0^n(\mathfrak{U}_g) \bmod \alpha\,. \tag{3}$$

Des relations (1), (2), (3) on déduit

$$C^n(\mathfrak{U}_g) \sim \pi\, C^n(\mathfrak{V}_g) \bmod \alpha\,. \tag{4}$$

Donc $\{C^n(\mathfrak{U}_g)\}$ est un $(n, R)_g$-cycle mod α. En posant $\mathfrak{U}_g = \mathfrak{V}_g$ dans le raisonnement qui précède, la relation (4) montre que ce cycle est bien déterminé à une homologie mod α près.

8. Les opérations considérées dans les deux n^{os} précédents étant évidemment inverses l'une à l'autre, on voit qu'il existe une correspondance biunivoque entre les deux modules $M_n(R; \alpha)_g$ et $M_n(R; \alpha)_f$. Or on voit sans peine que cette correspondance est une *isomorphie*, donc $P_n(R; \alpha)_g = P_n(R; \alpha)_f$. Les deux familles fondamentales composées respectivement de réseaux ouverts et de réseaux fermés sont donc bien équivalentes; or les réseaux ouverts sont peut-être plus commodes dans les applications; cf. le théorème III, 11 qui a joué un rôle si important au Chap. IV.

9. Revenons à la théorie générale de l'homologie exposée au Chap. II. Supposons que nous ayons choisi une certaine famille $\varkappa$ de sous-ensembles de R jouissant de la propriété que $A_1 \in \varkappa$, $A_2 \in \varkappa$ entraînent $A_1 + A_2 \in \varkappa$. Par un $(n, R)_\varkappa$-cycle mod α (α étant un sous-ensemble donné de R) nous voulons entendre un (n, R)-cycle $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ mod α tel qu'il existe un ensemble $A \in \varkappa$ jouissant de la propriété $C^n(\mathfrak{U}) \subset A$ (dans le sens du Chap. II, n^o 5) pour chaque réseau $\mathfrak{U}$. Un $(n, R)_\varkappa$-cycle $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ mod α ne sera considéré comme homologue à zéro mod α que s'il existe un ensemble $B \in \varkappa$

tel que pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ on ait $K^{n+1}(\mathfrak{U}) \to C^n(\mathfrak{U})$ mod α, *la* $(m + 1, \mathfrak{U})$*-chaîne étant contenue dans B.* En vertu de la propriété additive de la famille $\varkappa$, les $(n, R)_\varkappa$-cycles mod α constituent un *module* $M_n(R; \alpha)_\varkappa$, en considérant comme égaux deux cycles homologues dans le sens qui vient d'être précisé. Le rang $P_n(R; \alpha)_\varkappa$ de ce module est le $n^{\text{ième}}$ *nombre de Betti d'espèce* $\varkappa$ *de* R. Si $R \in \varkappa$, la nouvelle théorie ne diffère pas de la précédente.

10. Voici un cas particulier bien important des définitions qui viennent d'être posées. Soit R un espace *métrisable* où nous prenons les réseaux ouverts comme famille fondamentale; posons $\alpha = 0$. Soit $\varkappa$ la famille de sous-ensembles *compacts* de R, c'est-à-dire des ensembles $A \subset R$ tels que de chaque suite $x_n \in A$ on puisse extraire une autre y_n possédant un point limite $y \in A$, D'après un théorème connu de M. Hausdorff, les quasicomposantes d'un ensemble métrisable compact sont elles mêmes compactes et coïncident avec les composantes. Donc, d'après III, 14 et 17, on a $\{p\} \sim \{q\}$ au sens de la théorie d'espèce $\varkappa$ si et seulement s'il existe un *continu* (= ensemble compact et connexe) contenant p et q. Donc le nombre $P_0(R)_\varkappa$ est le nombre des *constituantes* de R, c'est-à-dire des semicontinus maximés, le nom semicontinu désignant un ensemble $A \subset R$ dont chaque couple de points appartient à un continu $C \subset A$.

8

LA NOTION DE VARIÉTÉ ET LES THÉORÈMES DE DUALITÉ

Verhandlungen des internationalen Mathematikerkongresses.
Zürich *2* (1932), 194

Toutes les définitions connues d'une variété (Mannigfaltigkeit, manifold) V supposent ou bien que V soit un complexe, ou du moins que chaque point de V possède un voisinage qui soit un complexe. On peut introduire une nouvelle définition de la variété V ne faisant usage que des propriétés topologiques intrinsèques de V. Les théorèmes de dualité de Poincaré et de M. Alexander sont valables pour les nouvelles variétés. Ma démonstration ne fait aucun usage des polyèdres. Un exposé complet paraîtra dans les *Annals of Mathematics*.

9

HÖHERDIMENSIONALE HOMOTOPIEGRUPPEN

Verhandlungen des internationalen
Mathematikerkongresses.
Zürich *2* (1932), 203

Sei a ein fester Punkt eines topologischen Raumes R; sei p eine natürliche Zahl. Sei G_p die Menge der a enthaltenden und in R gelegenen p-dimensionalen singulären Kugeln (= stetigen Bildern einer gewöhnlichen p-dim. Kugel); zwei Elemente von G_p werden als gleich betrachtet, wenn sie sich durch eine a festhaltende Homotopie in R ineinander überführen lassen. Es wird in G_p eine Multiplikation definiert, vermöge der G_p zu einer Gruppe wird. G_1 ist die klassische Wegegruppe Poincarés.

10

SUR LES CONTINUS PÉANIENS UNICOHÉRENTS

Fundamenta Mathematicae
20 (1933), 232–243

1. Un espace topologique R s'appelle unicohérent[1, 2, 3, 4] si, pour chaque décomposition $R = R_1 + R_2$ en deux sous-ensembles fermés et connexes, le produit $R_1 R_2$ est connexe.

2. **Théorème A.** *Si le premier nombre de Betti*[5] *d'un espace topologique R connexe et complètement normal est égal à zéro, l'espace R est unicohérent.*

Démonstration.[6] Soient p et q deux points de $R_3 = R_1 R_2$. Il s'agit de prouver (cf. Homologie, III, n^{os} 13–18) que $\{p\} \sim \{q\}$ dans R_3. Or les ensembles R_1 et R_2 étant connexes, on a $\{p\} \sim \{q\}$ et dans R_1 et dans R_2. Dans les notations de *Homologie*, IV, n^o 15 (où on pose $n = 0$ et $\alpha = 0$) on doit donc démontrer que $\pi_0(R_3; 0) = 0$, ce qui est une conséquence immédiate de la formule (1), l. c., car $P_1(R; 0) = 0$.

3. Le théorème inverse du théorème A est faux même si l'espace R est métrique et compact. Exemple: l. c. sub,[2] p. 148, remarque. Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant:

[1] L. Vietoris, *Über stetige Abbildungen einer Kugelfläche*, Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. XXIX, 1926, 443–453.

[2] C. Kuratowski, *Sur les continus de Jordan et le théorème de M. Brouwer*, Fund. Math. VIII, 1926, 137–150.

[3] C. Kuratowski, *Une caractérisation topologique de la surface de la sphère*, Fund. Math. XIII, 1929, 307–318.

[4] K. Borsuk, *Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents*, Fund. Math. XVII, 1931, 171–209.

[5] Pour la définition des nombres de Betti, v. mon Mémoire *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque*, Fund. Math. XIX, 1932, 149–183. Je citerai ce Mémoire: *Homologie* [7].

[6] Une autre démonstration (valable dans les espaces métriques et compacts) m'a été communiquée par M. Vietoris.

Théorème B.[6a] *R étant un continu Péanien (= espace métrique, compact, connexe et localement connexe) unicohérent, le premier nombre de Betti de R est égal à zéro.*

Pour la validité du théorème B, il est essentiel que les coefficients des cycles et des homologies soient des *nombres rationnels.* Le théorème B est faux pour les cycles mod $m = 2, 3, \ldots$; exemple: plan projectif.

4. Dans le cas où la dimension de R est égale à *un*, le théorème B a été démontré par M. Vietoris (l. c. sub,[1] p. 446, (5)). Dans le cas où R est immergé dans le *plan euclidien*, le théorème B est une conséquence d'un résultat de M. Kuratowski (l. c. sub,[2] p. 145, théorème II). Le théorème B peut être aussi regardé comme connu dans le cas où R est un *polyèdre.* En effet, on l'obtient dans ce cas en rapprochant un théorème de M. Borsuk (l. c. sub,[4] p. 190) d'un théorème de M. H. Hopf.[7] Or la démonstration de M. Hopf fait usage essentiel de la supposition que R soit un polyèdre; d'autre part dans ce qui suit je ne m'appuie nullement sur les résultats de MM. Borsuk et Hopf.[8]

5. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau ouvert[9] dans un espace R; soient $U_1, U_2, \ldots, U_m$ les sommets de $\mathfrak{U}$. Un réseau $\mathfrak{V}$ dans R soit appelé un *affinement*[10] *barycentrique*[11] de $\mathfrak{U}$, si on peut indiquer les sommets de $\mathfrak{V}$ par des symboles $V_{i_0, i_1, \ldots, i_k}$ $(0 \leqq k \leqq m)$, où $(i_0, i_1, \ldots \ldots, i_k)$ parcourt des combinaisons (sans répétition) des indices $1, 2, \ldots, m$ de manière que 1° $V_{i_0, i_1, \ldots, i_k} \subset U_{i_0} U_{i_1} \ldots U_{i_k}$; 2° si les sommets $V_{i_0, i_1, \ldots, i_k}$, $V_{j_0, j_1, \ldots, j_h}$ de $\mathfrak{V}$ ont un point commun, une des deux combinaisons $(i_0, i_1, \ldots, i_k)$, $(j_0, j_1, \ldots, j_h)$ fait partie de l'autre.

Ceci étant, je démontrerai le

Lemme. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans un espace complètement normal[12] R. Il existe un affinement barycentrique $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$.

Démonstration. Soit n l'ordre[13] du réseau $\mathfrak{U}$. Le théorème étant banal pour $n = 0$, on peut le supposer vrai pour les ordres $< n$. Désignons par G la somme de tous les ensembles $U_{i_0}, U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$, où $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$ parcourt toutes les combinaisons n à n parmi les indices $1, 2, \ldots, m$. Les ensembles $U_i' = U_i - G$ constituent un réseau

[6a] Le même théorème a été démontré simultanément et indépendamment, mais par une méthode complètement différente, par M. Borsuk. Voir, sa note publiée dans ce volume, p. 230, corollaire 1.

[7] Math. Annalen CIV, 1931, p. 641, théorème Va.

[8] Il serait aisé de déduire de ce qui suit une nouvelle démonstration du théorème cité de M. Borsuk (limité au continus péaniens) et par suite aussi du théorème cité de M. Hopf (étendu au continus péaniens).

[9] V. *Homologie,* III, 2. Dans ce qui suit, chaque réseau est ouvert, sauf avis contraire.

[10] V. *Homologie,* II, 9.

[11] Cf. la notion d'une sous-division barycentrique (régulière) d'un complexe, v. p. ex. E. R. v. Kampen, *Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze* (Dissertation Leiden, 1929), 1, § 2, n^{os} 2 et 7.

[12] Du reste, ce lemme est vrai dans chaque espace normal.

[13] C'est-à-dire la dimension maxima d'un $\mathfrak{U}$-simplexe.

$\mathfrak{U}'$ dans $R - G$ dont l'ordre est évidemment $<n$. Il existe donc des ensembles $W_{i_0, i_1, \ldots, i_k}$ $(0 \leqq k \leqq n-1)$ ouverts dans $R - G$ et constituant un affinement barycentrique de $\mathfrak{U}'$.

Il existe[14] des ensembles $V_{i_0, i_1, \ldots, i_k}$ ouverts dans R et tels que, 1° $V_{i_0, i_1, \ldots, i_k} \subset$ $\subset U_{i_0} U_{i_1} \ldots U_{i_k}$; 2° $V_{i_0, i_1, \ldots, i_k} \cdot V_{j_0, j_1, \ldots, j_h} \neq 0$ entraîne que $W_{i_0, i_1, \ldots, i_k} \cdot W_{j_0, j_1, \ldots, j_h} \neq$ $\neq 0$. En ajoutant à ces ensembles $V_{i_0, i_1, \ldots, i_k}$ $(0 \leqq k \leqq n-1)$ tous les ensembles non vides de la forme $V_{i_0, i_1, \ldots, i_n} = U_{i_0} \cdot U_{i_1} \cdot \ldots \cdot U_{i_n}$ on obtient un réseau $\mathfrak{V}$ dans R et on démontre sans peine que $\mathfrak{V}$ est un affinement barycentrique de $\mathfrak{U}$.

6. **Lemme.** Soit $\mathfrak{U}$ un réseau connexe.[15, 16] Soit Γ_0 un $(1, \mathfrak{U})$-cycle[17] qui n'est pas homologue à zéro. Soient σ_i^1 $(1 \leqq i \leqq \alpha_1)$ tous les $(1, \mathfrak{U})$-simplexes. On peut attacher à chaque σ_i^1 un nombre rationnel s_i et par suite à chaque $(1, \mathfrak{U})$-cycle $\Gamma =$ $= \sum_1^{\alpha_1} r_i \sigma_i^1$ le nombre $\varphi(\Gamma) = \sum_1^{\alpha_1} r_i s_i$ de manière que: 1° si Γ est un $(1, \mathfrak{U})$-cycle homologue à zéro, on a $\varphi(\Gamma) = 0$; 2° si Γ est un $(1, \mathfrak{U})$-cycle entier,[18] le nombre $\varphi(\Gamma)$ est entier; 3° $\varphi(\Gamma_0) = 0$.

Démonstration. Soit $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\mu$ une base du premier groupe de Betti de $\mathfrak{U}$, de manière qu'à chaque $(1, \mathfrak{U})$-cycle Γ il existe un et un seul groupe de nombres rationnels c_ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ tel que $\Gamma \sim \sum_1^\mu c_\nu \gamma_\nu$. Il est bien connu qu'on peut s'arranger de façon que les nombres c_ν soient entiers si le cycle Γ est entier. En particulier, on a $\Gamma_0 \sim \sum_1^\mu c_\nu^0 \gamma_\nu$ et on peut supposer que $c_1^0 \neq 0$. Soient U_j $(1 \leqq j \leqq \alpha_0)$ tous les sommets de $\mathfrak{U}$. Le réseau $\mathfrak{U}$ étant connexe, on peut attacher à chaque j $(1 \leqq j \leqq \alpha_0)$ une $(1, \mathfrak{U})$-chaîne entière C_j telle que $C_j \to U_j - U_1$. Soit donnée une valeur de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_1)$; soit $\sigma_i^1 = (U_j, U_k)$. On a $\sigma_i^1 \to U_k - U_j$ de manière que $\sigma_i^1 + C_j - C_k$ est un $(1, \mathfrak{U})$-cycle entier. Il existe donc des entiers $c_{i\nu}$ $(1 \leqq \nu \leqq \mu)$ tels que $\sigma_i^1 + C_j -$ $- C_k \sim \sum_{\nu=1}^{\mu} c_{i\nu} \gamma_\nu$. Posons $s_i = c_{i_1}$. On voit sans peine que les nombres s_i possèdent les propriétés voulues.

7. **Lemme.** Soit $\mathfrak{V}$ un affinement barycentrique d'un réseau $\mathfrak{U}$. Le réseau $\mathfrak{U}$ soit connexe.[15,16] Soit $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$.[19] Soit Δ_0 un $(1, \mathfrak{V})$-cycle tel que le $(1, \mathfrak{U})$-cycle $\Gamma_0 = \pi \Delta_0$ ne soit pas ~ 0.[20] Soient σ_i^1 et r_j^1 $(1 \leqq i \leqq \alpha_1;\ 1 \leqq j \leqq \beta_1)$ tous les 1-simplexes resp. de $\mathfrak{U}$ et de $\mathfrak{V}$. Supposons que l'on ait attaché à chaque σ_i^1 un nombre rationnel s_i et par suite à chaque $(1, \mathfrak{U})$-cycle $\Gamma = \sum r_i \sigma_i^1$ le nombre $\varphi(\Gamma) = \sum r_i s_i$ de

[14] V. *Homologie*, III, 21.
[15] Cela signifie que le $0^{\text{ème}}$ nombre de Betti de $\mathfrak{U}$ égale à un.
[16] L'hypothèse de connexité est d'ailleurs superflue.
[17] Cf. *Homologie*, II, 2–8.
[18] Cela signifie que tous les coefficients de I sont des entiers.
[19] V. *Homologie*, II, 10.
[20] Par suite Δ_0 n'est pas ~ 0 (v. *Homologie*, II, 11).

manière que 1° $|s_i| < M$ pour $1 \leqq i \leqq \alpha_1$; 2° $\varphi(\Gamma) = 0$ pour chaque $(1, \mathfrak{U})$-cycle $\Gamma \sim 0$; 3° $\varphi(\Gamma)$ est entier pour chaque $(1, \mathfrak{U})$-cycle entier[18] Γ; 4° $\varphi(\Gamma_0) \neq 0$. On peut attacher à chaque τ_j^1 un nombre rationnel t_j et par suite à chaque $(1, \mathfrak{U})$-cycle $\Delta = \sum r_j \tau_j^1$ le nombre $\psi(\Delta) = \sum r_j t_j$ de manière que: 1° $|t_j| < M[n/(n+1)]$ pour $1 \leqq j \leqq \beta_1$, où n désigne l'ordre[13] de $\mathfrak{U}$; 2° $\psi(\Delta) = 0$ pour chaque $(1, \mathfrak{U})$-cycle $\Delta \sim 0$; 3° $\psi(\Delta)$ est entier pour chaque $(1, \mathfrak{V})$-cycle entier[18] Δ; 4° $\psi(\Delta_0) = 0$.

Démonstration. Soient $U_1, U_2, \ldots, U_m$ tous les sommets de $\mathfrak{U}$; pour $1 \leqq i \leqq \alpha_1$, $\sigma_i^1 = (U_\lambda, U_\mu)$ posons $[\lambda, \mu] = -[\mu, \lambda] = s_i$; posons aussi $[\lambda, \lambda] = 0$ pour $1 \leqq \lambda \leqq m$. D'après la définition d'un affinement barycentrique, chaque $(1, \mathfrak{V})$-simplexe τ_j^1, convenablement orienté, a la forme $\tau_j^1 = (V_{i_0, i_1, \ldots, i_h}, V_{i_0, i_1, \ldots, i_k})$ $(0 \leqq h < k \leqq n)$, la combinaison $(i_0, i_1, \ldots, i_k)$ des indices $1, 2, \ldots, m$ étant telle que $(U_{i_0}, U_{i_1}, \ldots, U_{i_k})$ est un $(k, \mathfrak{U})$-simplexe. Posons

$$t = \frac{1}{(k+1)(h+1)} \sum_{\lambda=0}^{h} \sum_{\mu=h+1}^{k} [i_\lambda, i_\mu] = \frac{1}{(k+1)(h+1)} \sum_{\lambda=0}^{h} \sum_{\mu=0}^{k} [i_\lambda, i_\mu] .$$

Il en résulte que

$$|t_j| < \frac{(h+1)(k-h)}{(h+1)(k+1)} M \leqq \frac{k}{k+1} M \leqq \frac{n}{n+1} M .$$

Pour démontrer que $\psi(\Delta) = 0$ pour chaque $(1, \mathfrak{V})$-cycle $\Delta \sim 0$, il suffit de prouver que $\psi(\Delta) = 0$ si Δ est la frontière d'un $(2, \mathfrak{V})$-simplexe. Or chaque $(2, \mathfrak{V})$-simplexe τ^2, convenablement orienté, a la forme

$$\tau^2 = (V_{i_0, i_1, \ldots, i_h}, V_{i_0, i_1, \ldots, i_k}, V_{i_0, i_1, \ldots, i_l})$$

avec $0 \leqq h < k < 1 \leqq n$, la combination $(i_0, i_1, \ldots, i_l)$ des indices $1, 2, \ldots, m$ étant telle que $(U_{i_0}, U_{i_1}, \ldots, U_{i_l})$ soit un $(l, \mathfrak{U})$-simplexe. Donc[21]

$$\begin{aligned} \psi(F\tau^2) = {} & \frac{1}{(k+1)(l+1)} \sum_{\mu,\nu} [i_\mu, i_\nu] + \frac{1}{(l+1)(h+1)} \sum_{\nu,\lambda} [i_\nu, i_\lambda] + \\ & + \frac{1}{(h+1)(k+1)} \sum_{\lambda,\mu} [i_\lambda, i_\mu] \\ = {} & \frac{1}{(h+1)(k+1)(l+1)} \sum_{\lambda,\mu,\nu} ([i_\mu, i_\nu] + [i_\nu, i_\lambda] + [i_\lambda, i_\mu]) = 0 , \end{aligned}$$

car si p. ex. $\lambda = \mu$, on a $[i_\lambda, i_\mu] = 0$, $[i_\mu, i_\nu] = -[i_\nu, i_\lambda]$ tandis que dans le cas où les indices λ, μ, ν sont différents entre eux on a

$$[i_\mu, i_\nu] + [i_\nu, i_\lambda] + [i_\lambda, i_\mu] = \varphi[F(U_{i\lambda}, U_{i\mu}, U_{i\nu})] = 0$$

d'après la propriété 2° des nombres s_i.

[21] Les indices λ, μ, ν parcourent resp. les valeurs $0 \leqq \lambda \leqq h$, $0 \leqq \mu \leqq k$, $0 \leqq \nu \leqq l$.

Reste a prouver les propriétés 3° et 4° des nombres t_j. A cet effet il suffit évidemment de démontrer que $\psi(\Delta) = \varphi(\pi\Delta)$ pour chaque $(1, \mathfrak{B})$-cycle Δ. π_1 et π_2 étant deux projections de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{U}$, on a $\pi_1\Delta \sim \pi_2\Delta$ (v. *Homologie*, II, 12) et par suite $\varphi(\pi_1\Delta) = \varphi(\pi_2\Delta)$. On peut donc choisir π de manière que l'on ait pour chaque sommet $V_{i_0, i_1, \ldots, i_k}$ de $\mathfrak{B}$: $\pi V_{i_0, i_1, \ldots, i_k} = U_i$, l'indice i étant égal à un des indices $i_0, i_1, \ldots, i_k$. Les sommets $V_{i_0, i_1, \ldots, i_k}$ de $\mathfrak{B}$ étaient attachés à des combinaisons $(i_0, i_1, \ldots, i_k)$ telles que $U_{i_0} . U_{i_1} . \ldots . U_{i_k} \neq 0$. Attachons plus généralement à chaque combinaison $(i_0, i_1, \ldots, i_k)$ de ce genre un symbole $V_{i_0, i_1, \ldots, i_k}$. Ces symboles $V_{i_0, i_1, \ldots, i_k}$ peuvent être regardés comme les sommets d'un complexe abstrait Q, qui est une sous-division barycentrique (v.[11]) du complexe réalisé par le réseau $\mathfrak{U}$; et le réseau $\mathfrak{B}$ est un sous-complexe du complexe Q. On peut étendre la définition de $\psi(\Delta)$ à chaque 1-cycle du complexe Q et on voit sans peine que l'égalité $\psi(\Delta) = 0$ est vraie non seulement si $\Delta \sim 0$ dans $\mathfrak{B}$, mais plus généralement si $\Delta \sim 0$ dans Q. Or on sait[22] que $\Delta \sim \Delta_1$ dans Q, Δ_1 étant le sous-division barycentrique d'un $(1, \mathfrak{U})$-cycle Γ. Par suite $\psi(\Delta) = \psi(\Delta_1)$ et $\varphi(\pi\Delta) = \varphi(\Gamma)$ car $\pi\Delta \sim \pi\Delta_1 = \Gamma$. Il suffit donc de prouver que $\psi(\Delta_1) = \varphi(\Gamma)$. Or soit

$$\Gamma = \sum r . (U_\lambda U_\mu)$$

et par suite

$$\Delta_1 = \sum r . [(V_\lambda V_{\lambda\mu}) - (V_\mu V_{\lambda\mu})] ,$$

d'où

$$\varphi(\Gamma) = \sum r . [\lambda, \mu]$$
$$\psi(\Delta_1) = \sum r(\tfrac{1}{2}[\lambda, \mu] - \tfrac{1}{2}[\mu, \lambda]) = \varphi(\Gamma) .$$

8. **Lemme.** Soit R un espace connexe et complèment normal. Soit ε un nombre positif donné. Soit $\{\Gamma_0(\mathfrak{U})\}$ un $(1, R)$-cycle[23] qui n'est pas ~ 0. Il existe un réseau $\mathfrak{U}_0$ dans R jouissant de la propriété suivante: Soit $\mathfrak{B}$ un affinement[10] de $\mathfrak{U}_0$. On peut attacher à chaque $(1, \mathfrak{B})$-simplexe τ_i^1 un nombre rationnel t_i et par suite à chaque $(1, \mathfrak{B})$-cycle $\Gamma = \sum r_i \tau_i^1$ le nombre $\varphi(\Gamma) = \sum r_i t_i$ de manière que: 1° $|t_i| < \varepsilon$; 2° $\varphi(\Gamma) = 0$ si le $(1, \mathfrak{B})$-cycle Γ est ~ 0; 3° $\varphi(\Gamma)$ est entier si le $(1, \mathfrak{B})$-cycle Γ est entier;[18] 4° $\varphi(\Gamma_0(\mathfrak{B})) \neq 0$.

D é m o n s t r a t i o n. L'espace R étant connexe, chaque réseau dans R l'est aussi. Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau tel que $\Gamma_0(\mathfrak{U}_i)$ n'est pas ~ 0. D'après le lemme du *n*° 6, on peut attacher à chaque $(1, \mathfrak{U}_1)$-simplexe σ_{1i}^1 un nombre rationnel s_{1i} et par suite à chaque $(1, \mathfrak{U}_1)$-cycle $\Gamma_1 = \sum r_i \sigma_{1i}^1$ le nombre $\varphi_1(\Gamma_1) = \sum r_i s_{1i}$ de manière que 1° si $\Gamma_1 \sim 0$, $\varphi_1(\Gamma_1) = 0$, 2° si le cycle Γ_1 est entier,[18] le nombre $\varphi_1(\Gamma_1)$ est entier, 3° $\varphi_1(\Gamma_0(\mathfrak{U}_1)) \neq 0$. Soit n l'ordre[13] du réseau $\mathfrak{U}_1$. D après le lemme du *n*° 5, il existe des réseaux $\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3, \ldots$, tels que $\mathfrak{U}_{k+1}$ soit un affinement barycentrique de $\mathfrak{U}_k$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$; évidemment, l'ordre de chaque réseau $\mathfrak{U}_k$ est $\leqq n$. Soit M un nombre positif tel que

[22] L. c. sub. [11], I, § 4, n° 3 et 4 et II, § 3, n° 6.
[23] V. *Homologie*, II, 20.

$|s_{1i}| < M$ pour chaque $(1, \mathfrak{U}_1)$-simplexe σ^1_{1i}. D'après le lemme du n° 7, on peut attacher, pour $k = 2, 3, \ldots$, à chaque $(1, \mathfrak{U}_k)$-simplexe σ^1_{ki} un nombre rationnel s_{ki} et par suite à chaque $(1, \mathfrak{U}_k)$-cycle $\Gamma_k = \sum r_i \sigma^1_{ki}$ le nombre $\varphi_k(\Gamma_k) = \sum r_i s_{ki}$ de manière que 1° $|s^{ki}| < [n/(n+1)]^{k-1} M$ pour chaque $(1, \mathfrak{U}_k)$-simplexe σ^1_{ki}, 2° $\varphi_k(\Gamma_k) = 0$ pour $\Gamma_k \sim 0$, 3° $\varphi_k(\Gamma_k)$ est entier si le $(1, \mathfrak{U}_k)$-cycle Γ_k est entier[18]; 4° $\varphi_k(\Gamma(\mathfrak{U}_k)) \neq 0$. Choisissons une valeur de k si grande que $[n/(n+1)]^{k-1} . M < \varepsilon$ et posons $\mathfrak{U}_k = \mathfrak{U}_0$. Soit $\mathfrak{B}$ un affinement [10] de $\mathfrak{U}_k$; soit $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{B}, \mathfrak{U}_k)$.[19] Pour chaque $(1, \mathfrak{B})$-simplexe τ^1_i on a[24] ou $\pi\tau^1_i = 0$ ou bien il existe un $(1, \mathfrak{U}_k)$-simplexe σ^1_{kj} tel que $\pi\tau^1_i = \eta . \sigma^1_{kj}$ $(\eta = \pm 1)$; posons $t_i = 0$ dans le premier cas, $t_i = \eta s_{kj}$ dans le second cas. On voit sans peine que les nombres t_i jouissent des propriétés demandées.

9. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau[25] dans un espace R. Partageons les sommets U de $\mathfrak{U}$ en k $(= 2, 3, \ldots)$ groupes $T_1, T_2, \ldots, T_k$ sans éléments communs. Désignons par $R(T_i)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$ la somme de tous les $U \in T_i$; les $U \in T_i$ sont alors les sommets d'un réseau dans $R(T_i)$ que nous désignerons par $\mathfrak{U}(T_i)$. Désignons par $R(T_i, T_j)$ le produit $R(T_i) . R(T_j)$ $(1 \leqq i, j \leqq k)$. Soit T_{ij} l'ensemble des noyaux[26] $U_i . U_j$ de tous les $(1, \mathfrak{U})$-simplexes (U_i, U_j) tels que $U_i \in T_i$, $U_j \in T_j$; alors les $U_i . U_j \in T_{ij}$ sont les sommets d'un réseau dans $R(T_i, T_j)$ que nous désignerons par $\mathfrak{U}(T_i, T_j)$. Ceci étant je démontrerai deux lemmes.

Lemme α. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau connexe[15] dans un espace R. Partageons les sommets de $\mathfrak{U}$ en deux groupes T_1 et T_2. Supposons que le réseau $\mathfrak{U}(T_1, T_2)$ soit connexe.[15] Soit Γ un $(1, \mathfrak{U})$-cycle. Il existe un $[1, \mathfrak{U}(T_1)]$-cycle Γ_1 et un $[1, \mathfrak{U}(T_2)]$-cycle Γ_2 tels que $\Gamma \sim \Gamma_1 + \Gamma_2$ dans $\mathfrak{U}$.

Démonstration. On peut poser $\Gamma = C_1 + C_2 + C_{12}$, où C_1 est une $[1, \mathfrak{U}(T_1)]$-chaîne, C_2 est une $[1, \mathfrak{U}(T_2)]$-chaîne, tandis que

$$C_{12} = \sum r_i(U_i, V_i)$$

avec $U_i \in T_1$, $V_i \in T_2$. La frontière de C_ν $(\nu = 1, 2)$ a la forme $\sum s_{\nu i} U'_{\nu i}$, $U'_{\nu i} \in T_\nu$ avec $\sum_i s_{\nu i} = 0$; la frontière de Γ étant égale à zéro, on en déduit que $\sum r_i = 0$. Le noyau $U_i . V_i$ de (U_i, V_i) est un sommet du réseau $\mathfrak{U}(T_1, T_2)$. Puisque $\sum r_i = 0$, on a dans ce réseau

$$\sum r_i U_i V_i = \sum r_i (U_i V_i - U_1 V_1) .$$

Or le réseau $\mathfrak{U}(T_1, T_2)$ étant connexe, il existe pour chaque i une $[1, \mathfrak{U}(T_1, T_2)]$-chaîne dont le frontière est égale à $U_i V_i - U_1 V_1$. Par suite il existe une $[1, \mathfrak{U}(T_1, T_2)]$-chaîne

$$\sum a_{\lambda\mu}(U_\lambda V_\lambda, U_\mu V_\mu) \to \sum r_i U_i V_i . \tag{1}$$

[24] V. *Homologie*, II, 11.
[25] Tous les réseaux de ce n° sont supposés fermés (v. *Homologie*, V, 2).
[26] V. *Homologie*, II, 2.

Naturellement $U_\lambda, U_\mu \in T_1$; $V_\lambda, V_\mu \in T_2$. Puisque $(U_\lambda V_\lambda, U_\mu V_\mu)$ est un $(1, \mathfrak{U}(T_1, T_2))$-simplexe, on a $U_\lambda V_\lambda U_\mu V_\mu \neq 0$. Par suite $(U_\lambda, V_\lambda, V_\mu)$ et $(U_\lambda, U_\mu, V_\mu)$ sont des $(2, \mathfrak{U})$-simplexes et l'on a

$$(2) \qquad (U_\lambda, U_\mu, V_\mu) - (U_\lambda, V_\lambda, V_\mu) \to (U_\mu, V_\mu) - (U_\lambda, V_\lambda) + \\ + (U_\lambda, U_\mu) - (V_\lambda, V_\mu) .$$

Or on déduit de (1) que

$$\sum r_i U_i V_i = \sum a_{\lambda\mu}(U_\mu V_\mu - U_\lambda V_\lambda)$$

ce qui donne

$$C_{12} = \sum r_1(U_i, V_i) = \sum a_{\lambda\mu}|(U_\mu, V_\mu) - (U_\lambda, V_\lambda)] .$$

D'après (2), il en résulte qu'il existe une $(1, \mathfrak{U}(T_1))$-chaîne D_1 et une $(1, \mathfrak{U}(T_2))$-chaîne D_2 telles que

$$\sum a_{\lambda\mu}[(U_\lambda U_\mu V_\mu) - (U_\lambda V_\lambda V_\mu)] \to C_{12} + D_1 + D_2$$

où $C_{12} + D_1 + D_2 \sim 0$ et donc $\Gamma = C_1 + C_2 + C_{12} \sim \Gamma_1 + \Gamma_2$, où

$$\Gamma_1 = C_1 - D_1 , \quad \Gamma_2 = C_2 - D_2 ;$$

Γ_ν $(\nu = 1, 2)$ est une $(1, \mathfrak{U}(T_\nu))$-chaîne. Il suffit donc de prouver que Γ_1 et Γ_2 sont des cycles. Or $F(\Gamma_1 + \Gamma_2) = 0$, d'où $F(\Gamma_1) = - F(\Gamma_2) = 0$, car $F(\Gamma_\nu)$ est une $[0, \mathfrak{U}(T_\nu)]$-chaîne et les deux réseaux $\mathfrak{U}(T_1)$ et $\mathfrak{U}(T_2)$ n'ont aucun sommet commun.

Lemme β. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau connexe[15] dans un espace R. Partageons les sommets de $\mathfrak{U}$ en deux groupes T_1 et T_2 de manière que le réseau $\mathfrak{U}(T_1)$ soit connexe.[15] Supposons qu'il existe un $(1, \mathfrak{U})$-cycle Γ tel qu'il soit impossible d'indiquer un 1-cycle Γ_1 dans $\mathfrak{U}(T_1)$ et un 1-cycle Γ_2 dans $\mathfrak{U}(T_2)$ de manière que $\Gamma \sim \Gamma_1 + \Gamma_2$ dans $\mathfrak{U}$. On peut alors partager les sommets de $\mathfrak{U}$ en deux groupes T_1' et T_2' de manière que 1° les deux réseaux $\mathfrak{U}(T_1')$ et $\mathfrak{U}(T_2')$ soient connexes; 2° le réseau $\mathfrak{U}(T_1', T_2')$ ne soit ni vide ni connexe.

D é m o n s t r a t i o n.[27] Le réseau $\mathfrak{U}(T_2)$ n'est pas nécessairement connexe; or on peut évidemment partager les sommets de T_2 en un nombre fini de groupes $T_{21}, T_{22}, \ldots, T_{2k}$ sans éléments communs de manière que chaque réseau $\mathfrak{U}(T_{2i})$ $(1 \leqq i \leqq k)$ soit connexe. On voit sans peine que les réseaux $\mathfrak{U}(T_{2i}, T_{2j})$ $(1 \leqq i < j \leqq k)$ sont vides. Le réseau $\mathfrak{U}$ étant connexe, on voit sans peine que les réseaux $\mathfrak{U}(T_1, T_{2i})$ $(1 \leqq i \leqq k)$ ne sont pas vides.

Il n'est pas possible que tous les réseaux $\mathfrak{U}(T_1, T_{2i})$ $(1 \leqq i \leqq k)$ soient connexes. En effet, si cet énoncé n'était pas vrai, puisque $\mathfrak{U}(T_1, T_{2i}) = \mathfrak{U}(T_1 + T_{21} + \ldots \ldots + T_{2,i-1}, T_{2i})$, on déduirait par une application successive du lemme α qu'il existe

[27] Cf. la démonstration de M. Kuratowski du théorème II, l. c. sub,[2] p. 145.

pour $1 \leqq i \leqq k$, un 1-cycle Γ_{2i} dans $\mathfrak{U}(T_{2i})$ et un 1-cycle Γ_1 dans $\mathfrak{U}(T_1)$ tels que $\Gamma \sim \Gamma_1 + (\Gamma_{21} + \ldots + \Gamma_{2k})$ dans $\mathfrak{U}$, ce qui présente une contradiction. On peut donc supposer que le réseau $\mathfrak{U}(T_{2k})$ ne soit pas connexe. On voit sans peine qu'il suffit de poser

$$T'_1 = T_{2k}\,, \quad T'_2 = T_1 + T_{21} + \ldots + T_{2,k-1}\,.$$

10. Passons à la démonstration du théorème B. Soit donc R un continu Péanien et supposons qu'il existe un $(1, R)$-cycle $\{\Gamma_0(\mathfrak{U})\}$ qui n'est pas homologue à zéro. Il s'agit de prouver que le continu R n'est pas unicohérent.

Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et déterminons le réseau ouvert $\mathfrak{U}_0$ d'après le lemme du n° 8. Selon un théorème de M. Sierpiński,[28] il existe un réseau fermé $\mathfrak{K}$ qui est un affinement de $\mathfrak{U}_0$ et dont les sommets $K_1, K_2, \ldots, K_m$ sont des continus. R étant un continu, le réseau $\mathfrak{K}$ est connexe. D'après le lemme du n° 8, on peut[29] attacher à chaque $(1, \mathfrak{K})$-simplexe (K_i, K_j) un nombre rationnel s_{ij} et par suite à chaque $(1, \mathfrak{K})$-cycle $\Gamma = \sum r_{ij}(K_i, K_j)$ le nombre $\sum r_{ij} \,.\, s_{ij} = \varphi(\Gamma)$ de manière que 1° $|s_{ij}| < \frac{1}{2}$ pour chaque $(1, \mathfrak{K})$-simplexe (K_i, K_j); 2° $\varphi(\Gamma) = 0$ si le $(1, \mathfrak{K})$-cycle Γ est ~ 0; 3° $\varphi(\Gamma)$ est entier si Γ est entier; 4° $\varphi(\Gamma_0(\mathfrak{K})) \neq 0$.

Soit S la circonférence $e^{2\pi i x}$ $(0 \leqq x \leqq 1,\ i = \sqrt{-1})$. Attachons à chaque sommet K_ν de $\mathfrak{K}$ un point $f(K_\nu)$ de S de la manière suivante: Le réseau $\mathfrak{K}$ étant connexe, il existe une $(1, \mathfrak{K})$-chaîne entière[18]

$$C_\nu = \sum a_{\lambda\mu}(K_\lambda, K_\mu) \to K_\nu - K_1\,.$$

Posons

$$f(K_\nu) = e^{2\pi i \Sigma a_{\lambda\mu} s_{\lambda\mu}}\,.$$

La chaîne C_ν n'est pas déterminée sans ambiguité; or, C'_ν étant une autre valeur de C_ν, $C'_\nu - C_\nu$ est un $(1, \mathfrak{K})$-cycle entier[18]; les deux coefficients de $2\pi i$ différant l'un de l'autre par le nombre entier $\varphi(C_\nu - C_\nu)$, le point $f(K_\nu)$ est bien déterminé.

Pour $1 \leqq \mu,\ \nu \leqq m$, on a

$$C_\mu - C_\nu + (K_\mu, K_\nu) \to 0\,.$$

D'après la propriété 3° des nombres $s_{\mu\nu}$, on en déduit que

$$s_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi i} \log \frac{f(K_\nu)}{f(K_\mu)}\,, \tag{1}$$

la partie imaginaire du logarithme étant comprise entre $-\pi$ et $+\pi$ en vertu de la propriété 1° des nombres $s_{\mu\nu}$.

Soient A et B deux points diamétralement opposés de la circonférence S et différents de tous les points $f(K_\nu)$. Les points A et B partagent S en deux arcs I_1 et I_2;

[28] *Sur une condition pour qu'un continu soit une courbe jordanienne*, Fund. Math. I, 1920, pp. 44–60.

[29] On peut appliquer ce lemme bien que le réseau $\mathfrak{K}$ soit fermé, cf. *Homologie*, V, 4.

choisissons la notation de manière que, conformément à l'orientation positive de S, le point A soit le point initial de I_1. Partageons les sommets K_ν de $\mathfrak{K}$ en deux groupes T_1 dt T_2 en posant $K_\nu \in T_1(T_2)$ si le point $f(K_\nu)$ est situé dans $I_1(I_2)$. Partageons T_1 et T_2 resp. en groupes $T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{1u_1}$; $T_{21}, T_{22}, \ldots, T_{2u_2}$ sans éléments communs de manière que (dans les notations du n° 9) les réseaux $\mathfrak{U}(T_{r\nu})$ $(1 \leqq r \leqq 2, 1 \leqq \nu \leqq u_r)$ soient connexes. Chaque sommet de $\mathfrak{K}(T_1, T_2)$ (la notation étant la même que celle du n° 9) a la forme $K_\mu \,.\, K_\nu$ avec $K_\mu \in T_1, K_\nu \in T_2$. Partageons les sommets de $\mathfrak{K}(T_1, T_2)$ en deux groupes P, Q en posant $K_\mu \,.\, K_\nu \in P(Q)$ si le plus court chemin sur S du point $f(K_\mu)$ au point $f(K_\nu)$ passe par le point $A(B)$. Partageons de plus P en groupes $P_{\mu\nu}$ $(1 \leqq \mu \leqq u_1,\ 1 \leqq \nu \leqq u_2)$ en posant (pour $K_\mu K_\nu \in P$) $K_\mu K_\nu \in P_{\mu\nu}$ si $K_\mu \in T_{1\mu}$ et $K_\nu \in T_{2\nu}$.

Ceci étant, soit

$$\Gamma = \sum a_{\alpha\beta}(K_\beta, K_\alpha)$$

un $(1, \mathfrak{K})$-cycle; on peut choisir l'orientation des $(1, \mathfrak{K})$-simplexes de manière que $K_\alpha K_\beta \in \mathfrak{K}(T_1, T_2)$ entraîne que $K_\alpha \in T_1$ et $K_\beta \in T_2$. De (1) on déduit sans peine que le nombre $\varphi(\Gamma)$ est égal à la somme $\sum a_{\alpha\beta}$, la sommation étant étendue à toutes les valeurs telles que $K_\alpha K_\beta \in P$. Pour $1 \leqq \mu \leqq u_1$, $1 \leqq \nu \leqq u_2$, posons $\varphi_{\mu\nu}(\Gamma) = \sum a_{\alpha\beta}$, la sommation étant étendue à toutes les valeurs telles que $K_\alpha K_\beta \in P_{\mu\nu}$. Donc

$$\varphi(\Gamma) = \sum_{\mu=1}^{u_1} \sum_{\nu=1}^{u_2} \varphi_{\mu\nu}(\Gamma)\,. \tag{2}$$

Soit $(K_\alpha, K_\beta, K_\gamma)$ un $(2, \mathfrak{K})$-simplexe, On reconnait sans peine que $\varphi_{\mu\nu}[F(K_\alpha, K_\beta, K_\gamma)] = 0$ pour $1 \leqq \mu \leqq u_1$, $1 \leqq \nu \leqq u_2$. Il en résulte que $\varphi_{\mu\nu}(\Gamma) = 0$ pour chaque $(1, \mathfrak{K})$-cycle $\Gamma \sim 0$, d'où $\varphi_{\mu\nu}(\Gamma_1) = \varphi_{\mu\nu}(\Gamma_2)$ si $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ dans $\mathfrak{K}$.

D'après la propriété 4° des nombres s_{ij}, il existe un $(1, \mathfrak{K})$-cycle Γ tel que $\varphi(\Gamma) \neq 0$. D'après (2), il existe des valeurs de μ, ν telles que $\varphi_{\mu\nu}(\Gamma) \neq 0$. Soit p. ex. $\varphi_{11}(\Gamma) \neq 0$, d'où $\varphi_{11}(\Gamma') \neq 0$ pour $\Gamma' \sim I$ dans $\mathfrak{K}$. Or posons $U_1 = T_{11}$, et désignons par U_2 l'ensemble de tous les sommets de $\mathfrak{K}$ qui n'appartiennent pas à U_1. Si I_1 est un 1-cycle dans $\mathfrak{K}(U_1)$ et si Γ_2 est un 1-cycle dans $\mathfrak{K}(U_2)$ (notations du n° 9), on a évidemment $\varphi_{11}(\Gamma_1) = \varphi_{11}(\Gamma_2) = 0$, d'où $\varphi_{11}(I_1 + \Gamma_2) = 0$. Par suite on ne peut pas avoir $\Gamma \sim I_1 + \Gamma_2$ dans $\mathfrak{K}$. Le réseau $\mathfrak{K}(U_1) = \mathfrak{K}(T_{11})$ étant connexe, il résulte du lemme β (n° 9) que l'on peut partager les sommets de $\mathfrak{K}$ en deux groupes U_1' et U' de manière que 1° les deux réseaux $\mathfrak{K}(U_1')$ et $\mathfrak{K}(U_2')$ soient connexes, le réseau $\mathfrak{K}(U_1', U_2')$ ne soit ni vide ni connexe.

Soit R_i $(i = 1, 2)$ la somme de tous les sommets de $\mathfrak{K}(U_i')$; soit R_3 la somme de tous les sommets de $\mathfrak{K}(U_1', U_2')$; évidemment $R_1 + R_2 = R$, $R_1 \,.\, R_2 = R_3 \neq 0$. Les sommets de $\mathfrak{K}$ étant des continus et les réseaux $\mathfrak{K}(U_1')$ et $\mathfrak{K}(U_2')$ étant connexes, on voit que R_1 et R_2 sont des continus; le réseau $\mathfrak{K}(U_1', U_2')$ n'étant pas connexe, on voit que R_3 n'est pas un continu. Donc le continu R n'est pas unicohérent.

11

CONTRIBUTION À LA THÉORIE DE LA DIMENSION

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky
62 (1933), 277–291
(Traduit de tchèque:
Příspěvek k theorii dimense.)

Introduction. Soit $n = 1, 2, 3, \ldots$, soit C_n l'ensemble des „points" $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $0 \leqq x_i \leqq 1$, $(1 \leqq i \leqq n)$. $(1 \leqq i \leqq n)$. L'ensemble C_n est l'exemple le plus simple d'un ensemble de points de dimension n. En particulier, *si $m < n$, la dimension de l'ensemble C_m est inférieure à celle de l'ensemble C_n.* Cependant, le sens mathématique exact de la proposition imprimée en italique n'est pas très facile à préciser. Au premier coup d'oeil, il semble que l'ensemble C_n contient *plus de points* que l'ensemble C_m. Mais déjà en 1877 G. Cantor a montré[1] que ce n'est pas le cas, car il existe une application *biunivoque* de C_m sur C_n. Essayons donc une autre possibilité. Il est évident que (toujours pour $m < n$) C_m est une image *continue* (une projection par exemple) de l'ensemble C_n; par contre, il nous semble intuitivement que C_n ne peut être image continue de l'ensemble C_m. Mais ce chemin ne conduit pas non plus au but, car G. Peano a montré en 1890[2] qu'il existe vraiment une application continue de l'ensemble C_m sur l'ensemble C_n. En 1910, H. Lebesgue a énoncé[3] la proposition suivante (*lemme de Lebesgue*): *il est possible de recouvrir C_n par un nombre fini d'ensembles fermés aussi petits qu'on veut, et de telle manière que chaque point appartienne à $n + 1$ d'entre eux au maximum, ceci n'est pas possible si chaque point ne doit appartenir qu'à n ensembles recouvrant.*

Il est évident que le lemme de Lebesgue permet d'énoncer une définition générale de la dimension. Mais H. Lebesgue n'a pas fait cela et il s'est contenté d'affirmer que C_m et C_n $(m \neq n)$ ont des structures topologiques différentes.[4]

[1] Journal f. Math. 84 (1877), p. 242.

[2] Math. Annalen 36 (1890), p. 257.

[3] Voir Math. Annalen 70 (1911), p. 166. La démonstration qu'on y trouve esquissée n'est pas complète; Lebesgue l'a exposée d'une manière exacte seulement dans Fundamenta Math. 2 (1921), p. 256. La première démonstration exacte a été donnée par Brouwer dans so narticle cité ci-dessous (voir la note[5]). W. Hurewicz (Math. Annalen 101 (1929), p. 210) et E. Sperner (Hamburg. Abh. 6 (1928), p. 265) ont plus tard simplifié la démonstration de Lebesgue.

[4] La première démonstration exacte de ce fait a été donnée par Brouwer dans Math. Annalen 70 (1911), p. 161.

L. E. J. Brouwer a énoncé en 1913 la première définition générale de la dimension.[5] Mais le travail de Brouwer est resté isolé et l'on considère seulement K. Menger et P. Urysohn comme fondateurs de la *théorie* générale de la dimension.[6] Ces travaux datent environ des années 1921—23. Quant aux autres auteurs qui ont contribué au développement de cette théorie, il faut noter surtourt W. Hurewicz.

Cette théorie de la dimension est établie dans les espaces séparables[7], mais plusieurs théorèmes ne sont valables que dans les espaces compacts[8] ou semi-compacts[9]. Pour certains problèmes[10] il paraît être essentiel que l'on se borne au cas des espaces séparables. Pour d'autres problèmes la situation est différente. Comme j'ai montré déjà[11], on peut modifier la définition de la dimension, donnée par Menger et Urysohn, de telle manière que certains théorèmes deviennent valables dans le cas beaucoup plus général d'espaces parfaitement normaux[12], contenant les espaces métriques[13] comme cas particuliers.

P. Urysohn a montré[14] que dans le cas des espaces compacts, on peut définir la dimension à l'aide de-la propriété citée dans le lemme de Lebesgue; il fait remarquer en même temps que cette définition est limitée aux espaces compacts seulement. Cependant, Hurewicz a énoncé plus tard le lemme de Lebesque sous une forme telle qu'il rend la propriété caractéristique de la dimension même dans des espaces séparables arbitraires. On est donc porté à essayer d'établir des théorèmes de la théorie de la dimension en prenant la propriété mentionnée pour sa définition. Dans le présent article, je vais montrer comment on peut établir ainsi ce qu'on appelle *le théorème de l'addition.*[15] Cette démonstration est non seulement plus simple que la démonstration déjà connue, mais elle a encore l'avantage d'être valable dans tout espace normal.[16]

[5] Journal Math. 142 (1913), p. 146 (voir aussi 153 (1924), p. 253).

[6] Pour un exposé systématique de cette théorie voir le livre *Dimensionstheorie* (1928) de Menger; cf. le mémoire posthume de P. Urysohn publié dans Fundamenta Math. 7 (1925), p. 30—137 et 8 (1926), p. 225—351. Pour l'information première on peut se reporter à l'article de M. V. Jarník, Časopis pro pěst. mat. a fys., 58 (1929), p. 367.

[7] Un espace R est dit séparable s'il est métrique (voir le paragraphe 5) et que tout système d'ensembles ouverts en R recouvrant R (voir le paragraphe 1) contienne un sous-système au plus dénombrable recouvrant R.

[8] Un espace R est dit compact s'il est métrique et que tout système d'ensembles ouverts en R recouvrant R contienne un sous-système fini recouvrant R.

[9] Un espace R est dit semi-compact s'il est métrique et somme d'un système au plus dénombrable de sous-ensembles compacts.

[10] P. ex. pour les problèmes étudiés au chapître 4 du livre de Menger.

[11] Rozpravy II. tř. čes. Akad., 42 (1932), No. 13. Voir aussi Comptes rendus Acad. Paris, 193 (1931), p. 976—977 (voir [6], [3]).

[12] Voir le paragraphe 25.

[13] Voir le paragraphe 26.

[14] Fundamenta Math. 8 (1926), p. 301.

[15] Voir les paragraphes 23 et 24.

[16] Voir le paragraphe 9.

La définition choisie a deux défauts. D'abord, il n'est pas évident que la dimension d'un ensemble ne peut être inférieure à celle d'un sous-ensemble de cet ensemble; mais je montrerai que, dans les espaces parfaitement normaux du moins, ceci résulte du théorème de l'addition. Le second défaut est plus sérieux: on peut définir ainsi la dimension d'un espace pris comme un ensemble, mais on ne peut définir ainsi sa dimension en des points ou sous-ensembles particuliers. C'est à cela que se rattache mon hypothèse que pour les espaces parfaitement normaux la définition choisie ici coïncide avec celle de mon article cité dans la note[11]. Ce serait à mon avis un progrès important de la théorie de la dimension que de démontrer cette hypothèse.

A côté de ses défauts, notre définition a aussi deux avantages. Premièrement, la définition choisie est la mieux appropriée pour démontrer le fait que l'espace euclidien et ses parties élémentaires ont au sens de la théorie générale exactement la même dimension qu'on leur attribue depuis longtemps.[17] Deuxièmement, il existe des théorèmes importants qui pour leur démonstration n'exigent que la propriété de la dimension qui vient d'être choisie pour la définition de cette dernière. C'est le cas p. ex. du théorème dû à M. P. Alexandroff: *Un espace compact de dimension n peut être transformé par une déformation continue arbitrairement petite en un polyèdre de dimension n, mais non pas en polyèdre de dimension plus petite que n.*[18]

Je remarque encore que *pour comprendre intégralement le texte qui suit on n'a pas besoin de connaisances mathématiques spéciales*; il suffit d'avoir lu un certain nombre de paragraphes $(1-6)$ de mon article „*Sur les ensembles connexes irréductibles entre n points.*[19] Ce n'est pas par hasard qu'on a pu choisir une forme aussi élémentaire de l'exposé. En effet, la topologie moderne, en procédant à son analyse minutieuse de l'espace, n'a point recours aux connaisances détaillées des mathématiques classiques, mais réussit à résoudre ses problèmes à l'aide de moyens très simples, savoir des règles élémentaires du raisonnement logique, appliquées directement à de simples notions provenant de l'intuition et précisées axiomatiquement. Puisse cet article modeste contribuer un peu à répendre chez nous l'intérêt pour cette belle discipline mathématique, l'intérêt qu'elle mérite bien par sa beauté intrinsèque et par son importance pour l'ensemble des sciences mathématiques!

1. Soit A une partie d'un espace topologique R (voir M, 1). Soit $\mathfrak{S}$ un système de sous-ensembles de l'espace R. Nous disons que $\mathfrak{S}$ *recouvre* A si chaque point $a \in A$ [20] fait partie d'un $S \in \mathfrak{S}$.

[17] Un lecteur non initié pourrait regretter l'absence de la démonstration de ce fait intéressant; dans un autre article qui paraîtra dans ce même Časopis j'aurai l'occasion de présenter une telle démonstration.

[18] Voir Annals of Math. 30 (1929), p. 120 (Überführungssatz). On trouvera une démonstration simple dans l'article de M. C. Kuratowski „*Sur un théorème fondamental...*", dans Fundamenta Math., vol. 20.

[19] Časopis pro pěst. mat. a fys., 61 (1931), p. 109. Ce travail sera désigné par l'abréviation M. Voir [4].

[20] $a \in A$ signifie que a est un élément de l'ensemble A.

2. Soit $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$ Soit $\mathfrak{S}$ un système de sous-ensembles de l'espace R. Nous disons que $\mathfrak{S}$ est *d'ordre* $\leqq n$ si aucun point $a \in R$ n'est contenu dans plus de $n + 1$ éléments du système $\mathfrak{S}$. Nous disons que $\mathfrak{S}$ est de *l'ordre n* si 1° $\mathfrak{S}$ est d'ordre $\leqq n$, 2° soit $n = -1$, soit $\mathfrak{S}$ n'est pas d'ordre $\leqq n - 1$.

3. Soit $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$, soit R un espace topologique. Nous disons que R est de *dimension* $\leqq n$ et nous écrivons $\dim R \leqq n$, si à tout système fini[21] $\mathfrak{U}$ d'ensembles ouverts dans R, recouvrant R, on peut associer système fini $\mathfrak{V}$ d'ensembles ouverts dans R tel que 1° $\mathfrak{V}$ recouvre R; 2° chaque $V \in \mathfrak{V}$ fait partie d'un $U \in \mathfrak{U}$; 3° $\mathfrak{V}$ est d'ordre $\leqq n$. Nous disons que R est de *dimension* n, et nous écrivons $\dim R = n$, si 1° $\dim R \leqq n$; 2° soit $n = -1$, soit $\dim R \leqq n - 1$ n'a pas lieu.

D'une façon évidente, on a $\dim R = -1$ si et seulement si $R = \emptyset$. (Voir M. 2.)

D'après M 1, 2, la dimension de tout espace composé d'un seul point est égale à zéro.

Il est évident que $\dim R = n$ entraîne $\dim R^* = n$ pour tout espace R^* homéomorphe à R (voir M, 3).

4. *Soit R un espace topologique, soit* $S \subset R$ (cf. M, 6). *Supposons que S soit fermé en R. Si* $\dim R \leqq n$, *alors* $\dim S \leqq n$. [22]

Démonstration. Soit $\mathfrak{U}'$ un système fini d'ensembles ouverts dans S; supposons que $\mathfrak{U}'$ recouvre S. Nous avons alors à montrer qu'il existe un système fini $\mathfrak{V}'$ de sous-ensembles ouverts dans S et tel que 1° $\mathfrak{V}'$ recouvre S; 2° tout $V' \in \mathfrak{V}$ fait partie d'un $U' \in \mathfrak{U}$; 3° $\mathfrak{V}'$ est d'ordre $\leqq n$. D'après la définition des ensembles ouverts dans S (cf. M, 5), on peut associer à chaque $U' \in \mathfrak{U}'$ un ouvert U tel que $U' = S \,.\, U$ (cf. M, 5). Aux ensembles U ainsi définis nous ajoutons encore l'ensemble $R - A$ (voir M, 7) ouverts dans R (voir M, 5). Nous obtenons ainsi un système fini $\mathfrak{U}$ d'ensembles ouverts dans R; il est évident que $\mathfrak{U}$ recouvre R. Comme $\dim R \leqq n$, il existe un système fini $\mathfrak{V}'$ d'ensembles ouverts dans R et tel que 4° $\mathfrak{V}$ recouvre R; 5° tout $V \in \mathfrak{V}$ fait partie d'un $U \in \mathfrak{U}$; 6° $\mathfrak{V}$ est d'ordre $\leqq n$. A chaque $V \in \mathfrak{V}$ nous associons $V' = S \,.\, V$. Ces ensembles V' forment un système $\mathfrak{V}'$. Il est évident que $\mathfrak{V}'$ est un système fini d'ensembles ouverts dans S. Les propriétés 4°, 5°, 6° du système $\mathfrak{V}$ entraînent alors les propriétés 1°, 2°, 3° du système $\mathfrak{V}'$.

5. Un ensemble R (composé de n'importe quels éléments) sera appelé *espace métrique* (et ses éléments seront appelés *points*) si à toute paire a, b de points de R on a associ é un nombre réel $\varrho(a\ \ b)$ – appelé *distance* des points a, b dans l'espace R. Les trois a xiomes suivants doivent alors être satisfaits:

5,1. Si $a \in R$, on a $\varrho(a, a) = 0$.
5,2. Si $a \in R$, $b \in R$, $\varrho(a, b) = 0$, alors $a = b$.
5,3. Si $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$, alors $\varrho(a, b) + \varrho(c, b) \geqq \varrho(a, c)$.

[21] Cela signifie que le nombre de ses éléments est fini.
[22] S est un espace topologique d'après M, 5.

On a alors les théorèmes 5,4 et 5,5 que voici:[23]

5,4. Si $a \in R$, $b \in R$, $a \neq b$, alors $\varrho(a, b) > 0$.

Démonstration. D'après 5,3 on a $2\varrho(a, b) \geqq \varrho(a, a)$, donc $\varrho(a, b) \geqq 0$ d'après 5,1, d'où $\varrho(a, b) > 0$ en vertu de 5,2.

5,5. Si $a \in R$, $b \in R$, alors $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$. Démonstration. D'après 5,3 on a $\varrho(a, a) + \varrho(b, a) \geqq \varrho(a, b)$, donc $\varrho(b, a) \geqq \varrho(a, b)$ d'après 5,1. D'une manière analogue, on déduit $\varrho(a, b) \geqq \varrho(b, a)$, d'où l'énoncé.

6. Soit R un espace métrique. Nous définissons alors: un ensemble $A \subset R$ sera dit *ouvert* dans R s'il est possible d'associer à chaque $a \in A$ un nombre positif η tel que $x \in R$, $\varrho(a, x) < \eta$ implique $x \in A$. Il est aisé de voir que les théorèmes 1,5–1,8 de M ont alors lieu de sorte que *tout espace métrique est* (en vertu de notre définition des ensembles ouverts) *un espace topologique.*

7. Soit R un espace métrique. Soit $A \subset R$, $A \neq \emptyset$. Soit $r > 0$. Nous appellerons *sphère de centre A et de rayon r* et nous désignerons par $K(A, r)$ l'ensemble des $x \in R$ pour lesquels $\varrho(a, x) < r$, a étant un point de A, convenablement choisi. Lorsque $A = \{a\}$ est un ensemble composé d'un seul point, nous écrivons $K(A, r) = K(a, r)$.[24]

8. *Soit R un espace métrique. Soit $A \subset R$, $A \neq \emptyset$. Soit $r > 0$. Alors l'ensemble $K(A, r)$ est ouvert dans R.*

Démonstration. Nous avons à montrer qu'il est possible d'associer à chaque $x \in K(A, r)$ un nombre $\eta > 0$ tel que $y \in R$, $\varrho(x, y) < \eta$ implique $y \in K(A, r)$. Soit donc $x \in K(A, r)$. Il existe alors un point $a \in A$ tel que $\vartheta = \varrho(a, x) < r$. Le nombre $\eta = r - \vartheta$ est donc positif. Soit $y \in R$, $\varrho(x, y) < \eta$. D'après 5,5 nous avons $\varrho(y, x) < \eta$. D'après 5,3 nous avons donc $\varrho(a, y) \leqq \varrho(a, x) + \varrho(y, x) < \vartheta + \eta = r$. Donc $\varrho(a, y) < r$ de sorte que $y \in K(A, r)$.

9. Un espace topologique R sera dit *normal*[25] s'il jouit de la propriété suivante: *Si A, B sont deux ensembles fermés dans R et $A \,.\, B = \emptyset$, il existe dans R deux ensembles ouverts U, V tels que $A \subset U$, $B \subset V$, $U \,.\, V = \emptyset$.*

10. *Soit R un espace normal. Soit $A \subset U \subset R$, A étant fermé et U ouvert dans R. Il existe alors un V ouvert dans R tel que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$* (voir M, 4).

Démonstration. Les ensembles $A, R - U$ sont fermés dans R et l'on a $A \,.\, (R - U) = \emptyset$. L'espace R étant normal, il existe dans R deux ensembles ouverts V,

[23] Les propriétés 5,4 et 5,5 sont généralement postulées dans la définition de l'espace métrique. C'est A. Lindenbaum qui les a déduites à partir des propriétés 5,1, 5,2 et 5,3; voir Fundamenta Math. 8 (1926), p. 211.

[24] L'ensemble $K(A, r)$ ne détermine ni A ni r sans ambiguïté. Par example, si l'espace R ne contient que deux points a, b avec $\varrho(a\ b) = 1$, alors $K(a, 2) = K(b, 3)$.

[25] Cette notion se rencontre pour la première fois chez H. Tietze (Math. Annalen 88 (1923), p. 301); et c'est P. Urysohn (Math. Annalen 94 (1925), p. 265) qui emploie le premier le mot „normal".

W, tels que $A \subset V$, $R - U \subset W$, $V . W = \emptyset$. Comme $VW = \emptyset$, on a $V \subset R - W$, or $R - W$ est fermé dans R, donc (voir M, 4) $\bar{V} \subset R - W$, c'est-à-dire $\bar{V}W = \emptyset$. Comme $R - U \subset W$, on a $\bar{V}(R - U) = \emptyset$, c'est-à-dire $\bar{V} \subset U$.

11. *Soit R un espace topologique jouissant de la propriété suivante: Si $A \subset U \subset R$, A étant fermé et U ouvert dans R, il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $A \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Alors R est un espace normal.*

Démonstration. Soit $A \subset R$, $B \subset R$, $A . B = \emptyset$, A et B étant fermés dans R. Nous avons à montrer qu'il existe dans R des ouverts V, W tels que $A \subset V$, $B \subset W$, $VW = \emptyset$. Posons $U = R - B$. Comme B est fermé dans R, l'ensemble U est ouvert dans R. Comme $AB = \emptyset$, on a $A \subset U$. Il existe donc un ensemble V ouvert dans R, tel que $A \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Posons $W = R - \bar{V}$. Comme $\bar{V}$ est fermé dans R (cf. M, 4), l'ensemble W est ouvert dans R. Comme $V \subset \bar{V}$ nous avons $VW = \emptyset$. Comme $U = R - B$, $\bar{V} \subset U$, on a $\bar{V}B = \emptyset$, donc $B \subset R - \bar{V}$, c'est-à-dire $B \subset W$.

12. *Soit R un espace normal. Soient $F_1, F_2, \dots, F_m$ des ensembles fermés dans R, leur nombre étant fini. Alors, il est possible d'associer à chaque F_i $(1 \leqq i \leqq m)$ un ensemble $U_i \supset F_i$, ouvert dans R, de telle manière que si pour une combinaison d'indices $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ $(1 \leqq k \leqq m)$* on a $\prod_{r=1}^{k} \bar{U}_{i_r} \neq \emptyset$ *,on a aussi* $\prod_{r=1}^{k} F_{i_r} \neq \emptyset$.[26]

Démonstration. Soient $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{2^m-1}$ tous les produits de la forme $\prod_{r=1}^{k} F_{i_r}$ où $(i_1, \dots, i_k)$ sont respectivement toutes les combinaisons possibles d'indices $1, 2, \dots, m$.[27] Soit $S = \sum \Phi_j$, où j prend toutes les valeurs $(1 \leqq j \leqq 2^m - 1)$ pour lesquelles $F_1 \Phi_j = 0$. L'ensemble S ainsi que F_1 sont fermés dans R (voir M, 1, 3) et $F_1 . S = \emptyset$. L'espace R étant normal il existe dans R deux ouverts U_1, V_1 tels que $F_1 \subset U_1$, $S \subset V_1$, $U_1 V_1 = \emptyset$. Nous avons $U_1 \subset R - V_1$; l'ensemble $R - V_1$ étant fermé dans R, nous avons (voir M, 4) $\bar{U}_1 \subset R - V_1$ c'est-à-dire $\bar{U}_1 V_1 = \emptyset$, donc $\bar{U}_1 S = \emptyset$ de sorte que $\bar{U}_1 \Phi_j \neq \emptyset$ $(1 \leqq j \leqq 2^m - 1)$ implique $F_1 \Phi_j \neq \emptyset$. En modifiant ainsi le système $F_1, F_2, \dots, F_m$ pour la première fois, nous avons obtenu *le système* $\bar{U}_1, F_2, \dots, F_m$; nous procédons ensuite de façon analogue (mais en partant de F_2 au lieu de F_1) et nous obtenons *la deuxième modification* $\bar{U}_1, \bar{U}_2, F_3, \dots, F_m$, etc.; après m modifications nous arriverons au système $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_m$ cherché.

13. Il est clair que même dans le cas spécial de $m = 2$ le théorème du paragraphe 12 peut être en défaut si l'espace R n'est pas normal.

14. *Soit R un espace normal. Soient $U_1, U_2, \dots, U_m$ (m fini) des ensembles ouverts dans R et recouvrant R. Il est alors possible d'associer à chaque U_i $(1 \leqq i \leqq m)$*

[26] Voir W. Hurewicz et K. Menger, Math. Annalen 100 (1928).

[27] Le nombre de toutes les combinaisons possibles d'indices $1, 2, \dots, m$ est égal à $\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{m} = 2^m - 1$. D'ailleurs, ce qui importe ici c'est seulement le fait que ce nombre-là est fini.

un ensemble V_i ouvert dans R tel que 1° $\overline{V}_i \subset U_1$ *pour* $1 \leqq i \leqq m$; 2° *les ensembles* $V_1, V_2, \ldots, V_m$ *recouvrent* R.[28]

Démonstration.[29] Posons $F_i = R - U_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Les ensembles F_i sont donc fermés dans R et l'on a $\prod_{i=1}^{m} F_i = R - \sum_{i=1}^{m} U_i = \emptyset$ (cf. M, 4). D'après le paragraphe 12, il existe alors des ensembles W_i ouverts dans R, $W_i \supset F_i$, tels que $\prod_{i=1}^{m} \overline{W}_i = \emptyset$. Posons $V_i = R - \overline{W}_i$, de sorte que $V_i \subset R - W_i$. Comme $R - W_i$ est fermé dans R, on a également $\overline{V}_i \subset R - W_i$, donc $\overline{V}_i W_i = \emptyset$; comme $W_i \supset F_i$, on a $\overline{V}_i F_i = \emptyset$, donc $\overline{V}_i \subset R - F_i$, c'est-à-dire $\overline{V}_i \subset U_i$. De plus $\sum_{i=1}^{m} V_i = \sum_{i=1}^{m} (R - \overline{W}_i) = R - \prod_{i=1}^{m} \overline{W}_i = R - \emptyset = R$.

15. Le théorème du paragraphe précédent lui-aussi n'est plus valable si R n'est pas normal. On a même le theoreme suivant: *Supposons que l'espace topologique donné R jouisse de la propriété suivante: A tout système fini $\mathfrak{U}$ d'ensemble ouverts dans R et recouvrant R on peut associer un système fini $\mathfrak{F}$ d'ensembles fermés dans R tel que* 1° $\mathfrak{F}$ *recouvre* R, 2° *chaque* $F \in \mathfrak{F}$ *fait partie d'un certain* $U \in \mathfrak{U}$. *Alors R est un espace normal.*

Démonstration. Soit $A \subset U \subset R$. Soit A fermé dans R, U ouvert dans R. En vertu du paragraphe 11, il suffit de montrer qu'il existe un V ouvert dans R tel que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Les deux ensembles U et $R - A$ forment évidemment un système fini $\mathfrak{U}$ d'ensembles ouverts dans R, recouvrant R. Il existe donc un système fini $\mathfrak{F}$ d'ensembles fermés dans R, recouvrant R, et tel que pour chaque $F \in \mathfrak{F}$ la relation $AF \neq 0$ entraîne $F \subset U$. Soient $F'_1, F'_2, \ldots, F'_h$ les éléments $F \in \mathfrak{F}$ pour lesquels $AF = \emptyset$; soient $F''_1, F''_2, \ldots, F''_k$ les éléments $F \in \mathfrak{F}$ pour lesquels $AF \neq \emptyset$, donc $F \subset U$. Posons $\Phi' = \sum_{i=1}^{h} F'_i$, $\Phi'' = \sum_{j=1}^{k} F''_j$. Les ensembles Φ' et Φ'' sont fermés dans R et l'on a $A\Phi' = \emptyset$, $\Phi'' \subset U$ et $\Phi' + \Phi'' = R$, car $\mathfrak{F}$ recouvre R. Posons $V = R - \Phi'$, alors V sera ouvert dans R. Comme $A\Phi' = \emptyset$, nous avons $A \subset V$. Or, $\Phi' + \Phi'' = R$, de sorte que $V \subset \Phi''$. Comme Φ'' est fermé dans R, nous avons aussi $\overline{V} \subset \Phi''$. Or $\Phi'' \subset U$; donc $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

16. *Soit R un espace métrique. Alors R est un espace normal.*

Démonstration. Soient A, B deux ensembles fermés dans R, $AB = \emptyset$. Nous avons à montrer qu'il existe dans R des ensembles ouverts U, V tels que $A \subset U$, $B \subset V$, $UV = \emptyset$. Comme l'ensemble $R - B$ est ouvert dans R et $A \subset R - B$, on peut associer, d'après 6, à chaque $a \in A$ un nombre $\eta_a > 0$ tel que $K(a, 2\eta_a) \subset$

[28] Voir K. Menger: *Dimensionstheorie*, p. 159–160 (Bemerkung).

[29] Voir K. Kuratowski: *Topologie* (*Monografie Matematyczne*).

$\subset R - B$ (voir 7). De même, on peut associer à chaque $b \in B$ un nombre $\zeta_b > 0$ tel que $K(b, 2\zeta_b) \subset R - A$. Posons

$$U = \sum_{a \in A} K(a, \eta_a) \, ; \quad V = \sum_{b \in B} K(b, \zeta_b) \, .$$

D'après 5,1, nous avons $a \in K(a, \eta_a)$, donc $A \subset U$; et, analogiquement, $B \subset V$. D'après 8 et M, 1,8 les ensembles U, V sont ouverts dans R. Il reste donc à montrer que $UV = \emptyset$. La démonstration sera faite par l'absurde; supposons $c \in UV$. Il existe alors des points $a \in A$, $b \in B$ tels que $c \in K(a, \eta_a)$, $c \in K(b, \zeta_b)$, c'est-à-dire $\varrho(a, c) < < \eta_a$, $\varrho(b, c) < \zeta_b$. Soit pour fixer les idées $\eta_a \geqq \zeta_b$. D'après 5,3 nous avons $\varrho(a, b) \leqq \leqq \varrho(a, c) + \varrho(b, c) < \eta_a + \zeta_b \leqq 2\eta_a$ donc $b \in K(a, 2\eta_a)$, ce qui est une contradiction car $b \in B$, et $K(a, 2\eta_a) \subset R - B$.

17. Soit R un espace topologique, soit $A \subset R$. Nous disons que A est un F_σ dans R (un G_δ dans R) lorsqu'il existe des ensembles A_ν fermés (ouverts) dans R tels que $A = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ $(A = \prod_{\nu=1}^{\infty} A_\nu)$.

A est un G_δ dans R (un F_σ dans R) si et seulement si $R - A$ est un F_σ (un G_δ) dans R. En effet, $A = \prod_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ signifie la même chose que $R - A = \sum_{\nu=1}^{\infty} (R - A_\nu)$.

Si A est ouvert dans R (fermé dans R), alors A est un G_δ (un F_σ) dans R. En effet, pour $A_\nu = A$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, on a $\prod_{\nu=1}^{\infty} A_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu = A$.

18. *Soit R un espace normal. Soit $A \subset R$, $B \subset R$ deux ensembles F_σ dans R. Soit $A \, . \, \bar{B} = \bar{A} \, . \, B = \emptyset$. Alors il existe dans R deux ouverts U, V tels que $A \subset U$, $B \subset V$, $UV = \emptyset$.*[30]

Démonstration. Comme A, B sont des F_σ dans R, il existe des ensembles A_ν, B_ν, fermés dans R, tels que $A = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$, $B = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu$, donc $A_\nu \subset A$, $B_\nu \subset B$. Comme $AB \subset A\bar{B} = \emptyset$, nous avons $A_\nu B_\nu = \emptyset$. Comme les ensembles A_ν, B_ν sont fermés dans l'espace normal R, et que $A_\nu B_\nu = \emptyset$, il existe dans R des ensembles ouverts G_ν, H_ν tels que $A_\nu \subset G_\nu$, $B_\nu \subset H_\nu$, $G_\nu H_\nu = \emptyset$. Comme $A_\nu \subset A$, $A\bar{B} = \emptyset$, nous avons $A_\nu \bar{B} = \emptyset$; de manière semblable nous trouvons aussi $B_\nu \bar{A} = \emptyset$. Donc $A_\nu \subset G_\nu - \bar{B}$, $B_\nu \subset H_\nu - \bar{A}$. L'ensemble $G_\nu - \bar{B} = G_\nu \, . \, (R - \bar{B})$ est, d'après M, 1, 7, ouvert dans R; comme $A_\nu \subset G_\nu - \bar{B}$, il existe d'après 10 un ensemble P_ν ouvert dans R, tel que $A_\nu \subset P_\nu \subset \bar{P}_\nu \subset G_\nu - \bar{B}$. De même, il existe dans R un ouvert Q_ν tel que $B_\nu \subset Q_\nu \subset \bar{Q}_\nu \subset H_\nu - \bar{A}$. Posons

$$U_1 = P_1 \, , \quad V_1 = Q_1 - \bar{P}_1 \, ; \quad U_\nu = P_\nu - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \bar{Q}_\mu \, ,$$

$$V_\nu = Q_\nu - \sum_{\mu=1}^{\nu} \bar{P}_\mu \quad (\nu = 2, 3, \ldots) \, ; \quad U = \sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu \, , \quad V = \sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu \, .$$

[30] Les théorèmes 18, 19 et 27 sont dus à Urysohn; loc. cit. sub[32]; p. 285–288.

Les ensembles P_ν, Q_ν étant ouverts dans R, nous voyons d'après M, 1,3 et M, 1,7 que U_ν, V_ν sont aussi ouverts dans R; d'après M, 1,8, les ensembles U, V seront donc ouverts dans R également. Comme $\bar{Q}_\mu \subset H_\mu - \bar{A} \subset R - \bar{A}, A_\nu \subset P_\nu, A_\nu \subset A \subset \bar{A}$, nous avons $A_\nu \subset U_\nu$, et d'une manière analogue nous trouvons $B_\nu \subset V_\nu$. Donc $A = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \subset U$ et $B \subset V$. Il nous reste à montrer que $UV = \emptyset$, c'est-à-dire que $U_\mu V_\nu = \emptyset$ pour $\mu, \nu = 1, 2, \ldots$ *Soit d'abord* $\mu \leqq \nu$. Alors $U_\mu \subset P_\mu$, $V_\nu = Q_\nu - \sum_{\mu=1}^{\nu} \bar{P}_\mu \subset R - \bar{P}_\mu \subset R - P_\mu$, donc $U_\mu V_\nu = \emptyset$. *Soit maintenant* $\mu > \nu$. Alors $V_\nu \subset Q_\nu$, $U_\mu = P_\mu - \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \bar{Q}_\nu \subset P - \bar{Q}_\nu \subset R - Q_\nu$, donc $U_\mu V_\nu = \emptyset$.

19. *Soit R un espace normal, soit $S \subset R$. Supposons que S soit un F_σ dans R. Alors S est un espace normal.* (cf. [30]).

Démonstration. Comme S est un F_σ dans R, il existe dans R des ensembles fermés S_ν tels que $S = \sum_{\nu=1}^{\infty} S_\nu$. Soient A, B deux ensembles fermés dans S, soit $AB = \emptyset$. Nous avons à montrer qu'il existe dans S deux ensembles ouverts (dans S) U_0, V_0 tels que $A \subset U_0$, $B \subset V_0$, $U_0 V_0 = \emptyset$. Comme A est fermé dans S, on a d'après M, 6 $A = \bar{A}S$. Or $S = \sum_{\nu=1}^{\infty} S_\nu$, donc $A = \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{A}S_\nu$. Les ensembles S_ν étant fermés dans R, nous voyons d'après M, 1,4 que les ensembles $\bar{A}S_\nu$ sont fermés dans R. Donc A est un F_σ dans R; de façon analogue nous trouvons que B est un F_σ dans R. Comme $A = \bar{A}S$, $AB = \emptyset$, $B \subset S$, nous avons $\bar{A}B = \emptyset$, et par analogie $A\bar{B} = \emptyset$. D'après 18 il existe donc deux ensembles U, V ouverts dans R, tels que $A \subset U$, $B \subset V$, $UV = \emptyset$. Posons $U_0 = US$, $V_0 = VS$, nous voyons (cf. M, 5) que U_0, V_0 sont ouverts dans S et $U_0 V_0 = \emptyset$. Comme $A \subset S$, $B \subset S$, on a $A \subset U_0$, $B \subset V_0$.

20. *Soit R un espace normal, soit* $\dim R \leqq n$. *Soient $U_1, U_2, \ldots, U_m$ $(m < \infty)$ des ensembles ouverts dans R et recouvrant R. Alors on peut associer à chaque U_i $(1 \leqq i \leqq m)$ un ensemble V_i ouvert dans R, tel que* 1° *$\bar{V}_i \subset U_i$ pour $1 \leqq i \leqq m$;* 2° *les ensembles $V_1, V_2, \ldots, V_m$ recouvrent R;* 3° *le système d'ensembles $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots, \bar{V}_m$ est d'ordre $\leqq n$.*

Démonstration. D'après 3 il existe un système fini $\mathfrak{W}$ d'ensembles ouverts dans R tel que 1° $\mathfrak{W}$ recouvre R; 2° chaque $W \in \mathfrak{W}$ fait parti d'un certain U_i $(1 \leqq i \leqq m)$; 3° le système $\mathfrak{W}$ est d'ordre $\leqq n$. Soient $W_1, W_2, \ldots, W_k$ les éléments du système $\mathfrak{W}$. A chaque indice j $(1 \leqq j \leqq k)$ nous associons un indice $\varphi(j) = i$ $(1 \leqq i \leqq m)$ de telle façon que nous ayons $W_j \subset U_i$. Pour $1 \leqq i \leqq m$ posons $Z_i = \sum_j W_j$ avec $1 \leqq j \leqq k$, $\varphi(j) = i$. Les ensembles $Z_1, \ldots, Z_m$ sont manifestement ouverts dans R, forment un système d'ordre $\leqq n$, recouvrent R; on a de plus $Z_i \subset U_i$ pour $1 \leqq i \leqq m$. D'après 14, nous trouvons des ensembles V_i $(1 \leqq i \leqq m)$ ouverts dans R, recouvrant R et tels que $\overline{V}_i \subset Z_i$ pour $1 \leqq i \leqq m$. Les ensembles $V_1, \ldots, V_m$ jouissent alors évidemment des propriétés demandées.

21. *Soit* $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$ *Supposons que l'espace topologique* R *jouisse de la propriété suivante: A tout système fini* $\mathfrak{U}$ *d'ensembles ouverts dans* R*, recouvrant* R *on peut associer un système fini* $\mathfrak{F}$ *d'ensembles fermés dans* R *tel que* 1° $\mathfrak{F}$ *recouvre* R; 2° *chaque* $F \in \mathfrak{F}$ *fait partie d'un* $U \in \mathfrak{U}$; 3° $\mathfrak{F}$ *est d'ordre* $\leqq n$. *Alors* R *est un espace normal et* $\dim R \leqq n$.

Démonstration. R est un espace normal en vertu de 15. Il nous reste donc à montrer qu'il est possible d'associer à tout système $\mathfrak{U}$ un système $\mathfrak{V}$ d'ensembles ouverts dans R, tel que 1° $\mathfrak{V}$ recouvre R; 2° chaque $V \in \mathfrak{V}$ fait partie d'un $U \in \mathfrak{U}$; 3° $\mathfrak{V}$ est d'ordre $\leqq n$. D'après nos hypothèse, nous pouvons associer au système $\mathfrak{U}$ donné un système $\mathfrak{F}$. Soient $F_1, F_1, \ldots, F_m$ tous les éléments du système $\mathfrak{F}$. A chaque $F_i\,(1 \leqq i \leqq m)$ nous pouvons associer un ensemble $U_i \in \mathfrak{U}$ tel que $F_i \subset U_i$. D'après 12 on peut associer à chaque $F_i\,(1 \leqq i \leqq m)$ un ensemble W_i ouvert dans R, $W_i \supset F_i$, tel que $\prod_{r=1}^{k} \overline{W}_{i_r} \neq \emptyset$ entraîne $\prod_{r=1}^{k} F_{i_r} \neq \emptyset$ pour toute combinaison $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ $(1 \leqq k \leqq m)$ d'indices $1, 2, \ldots, m$. Il est aisé de voir que les ensembles $V_i = U_i W_i$ forment le système $\mathfrak{V}$ cherché.

22. *Soit* R *un espace normal. Soit* $A \subset R$, A *fermé dans* R; *soit* $\dim A \leqq n$. *Soit* $U_1, \ldots, U_m$ *un système fini d'ensembles ouverts dans* R*, recouvrant* A. *Alors on peut associer à chaque* $U_i\,(1 \leqq i \leqq m)$ *un ensemble* V_i *ouvert dans* R *tel que* 1° $\overline{V}_i \subset U_i$; 2° *les ensembles* $V_1, \ldots, V_m$ *recouvrent* A; 3° *le système des ensembles* $\overline{V}_1, \overline{V}_2, \ldots, \overline{V}_m$ *est d'ordre* $\leqq n$.

Démonstration. Soit $U'_i = AU_i\ (1 \leqq i \leqq m)$. Les ensembles $U'_1, U'_2, \ldots, U'_m$ sont ouverts dans A et recouvrent A. D'après 19, A est un espace normal. Comme $\dim A \leqq n$, on peut, d'après 20, associer à chaque $U'_i\ (1 \leqq i \leqq m)$ un ensemble F_i fermé dans A et tel que 1° $F_i \subset U'_i$ pour $1 \leqq i \leqq m$; 2° les ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_m$ recouvrent A; 3° le système $F_1, F_2, \ldots, F_m$ est d'ordre $\leqq n$. Comme les ensembles F_i sont fermés dans A et que A est fermé dans R, les ensembles F_i sont (cf. M, 5) fermés dans R. Comme $F_i \subset U'_i \subset U_i$ il existe d'après 10 des ensembles Z_i ouverts dans R tels que $F_i \subset Z_i \subset \overline{Z}_i \subset U_1$. Or le système $F_1, F_2, \ldots, F_m$ est d'ordre $\leqq n$, il existe donc d'après 12 des ensembles $W_i\,(1 \leqq i \leqq m)$ ouverts dans R et tels que 1° $F_i \subset W_i$; 2° le système $\overline{W}_1, \overline{W}_2, \ldots, \overline{W}_m$ est d'ordre $\leqq n$. Les ensembles $V_i = Z_i W_i\,(1 \leqq i \leqq m)$ jouissent alors manifestement des propriétés demandées.

23. *Soit* R *un espace normal. Soit* $R = \sum_{v=1}^{\infty} A_v$. *Supposons que les ensembles* A_v, $v = 1, 2, 3, \ldots$, *sont fermés dans* R *et que* $\dim A_v \leqq n$. *Alors* $\dim R \leqq n$.

Démonstration. Soit $U_i\,(1 \leqq i \leqq m)$ des ensembles ouverts dans R, recouvrant R. Il suffit alors de trouver des ensembles $V_i\,(1 \leqq i \leqq m)$ ouverts dans R et tels que 1° le système $V_1, V_1, \ldots, V_m$ recouvre R et soit d'ordre $\leqq n$; 2° $V_i \subset U_i$.

D'après 22 il existe un système $\mathfrak{B}^1$ d'ensembles V_i^1 $(1 \leqq i \leqq m)$ ouverts dans R, tel que 1° $\bar{V}_i^1 \subset U_i$; 2° $\mathfrak{B}^1$ recouvre A_1; 3° le système $\bar{\mathfrak{B}}^1$ d'ensembles $\bar{V}_i^1$ [31] est d'ordre $\leqq n$. D'une manière plus générale, supposons que pour un ν donné $(\nu = 1, 2, \ldots)$ nous ayons déjà trouvé un système $\mathfrak{B}^\nu$ d'ensembles V_i^ν $(1 \leqq i \leqq m)$ ouverts dans R tel que 1° $\mathfrak{B}^\nu$ recouvre $\sum_{\lambda=1}^{\nu} \bar{A}_\lambda$; 2° $\bar{V}_i^\nu \subset U_i$; 3° $\bar{\mathfrak{B}}^\nu$ soit d'ordre $\leqq n$. Nous allons montrer qu'il est alors possible de trouver un système analogue $\mathfrak{B}^{\nu+1}$.

Comme $\bar{\mathfrak{B}}^\nu$ est un système fini d'ordre $\leqq n$ d'ensembles fermés dans R, il existe d'après 12 des ensembles S_i $(1 \leqq i \leqq m)$ ouverts dans R tels que 1° $\bar{V}_i^\nu \subset S_i$; 2° le système $S_1, S_2, \ldots, S_m$ est d'ordre $\leqq n$. Comme $\bar{V}_i^\nu \subset U_i$, il existe d'après 10 des ensembles T_i ouverts dans R tels que $\bar{V}_i^\nu \subset T_i \subset \bar{T}_i \subset U_i$. Posons $W_i = S_i T_i$. Le système $\mathfrak{W}$ des ensembles $W_1, W_2, \ldots, W_m$ est un système fini d'ordre $\leqq n$ d'ensembles ouverts dans R, et l'on a $\bar{V}_i^\nu \subset W_i \subset \bar{W}_i \subset U_i$. D'après 10 il existe des ensembles P_i $(1 \leqq i \leqq m)$ ouverts dans R tels que $\bar{V}_i^\nu \subset P_i \subset \bar{P}_i \subset W_i$.

Pour $1 \leqq i \leqq m$ soit: 1° $\mathfrak{M}_i$ le système des deux ensembles P_i, $R - \bar{V}_i^\nu$; 2° $\mathfrak{N}_i$ le système des deux ensembles W_i, $R - \bar{P}_i$. Il est évident que chacun de ces $2m$ systèmes $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N}_i$ recouvre R. Désignons par $\mathfrak{H}$ le système des $m \cdot 4^m$ ensembles ouverts dans R qui sont de la forme $U_i \prod_{j=1}^{m} M_j \prod_{k=1}^{m} N_k$, où $1 \leqq i, j, k \leqq m$, $M_j \in \mathfrak{M}_j$, $N_k \in \mathfrak{N}_k$. Alors $\mathfrak{H}$ sera un système fini d'ensembles ouverts dans R, recouvrant R. Comme $A_{\nu+1}$ est fermé dans R et dim $A_{\nu+1} \leqq n$ il existe d'après 22 un système fini $\mathfrak{Z}$ d'ensembles Z_r $(1 \leqq r \leqq t = m \cdot 4^m)$ ouverts dans R, tel que 1° chaque $\bar{Z}_r$ fait partie d'un élément du système $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{Z}$ recouvre $A_{\nu+1}$; 3° $\mathfrak{Z}$ est d'ordre $\leqq n$. En vertu de la définition des systèmes $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N}_i$, $\mathfrak{H}$, la propriété 1° de $\mathfrak{Z}$ entraîne: 4° si $\bar{Z}_r \bar{V}_i^\nu \neq \emptyset$, alors $\bar{Z}_r \subset P_i$; 5° si $\bar{Z}_r \bar{P}_i \neq \emptyset$, alors $\bar{Z}_r \subset W_i$.

Nous allons distinguer trois espèces des ensembles Z_r $(1 \leqq r \leqq t)$: nous dirons que Z_r est de la *première* espèce, lorsqu'il existe un i $(1 \leqq i \leqq m)$ tel que $\bar{Z}_r \bar{V}_i^\nu \neq \emptyset$; nous dirons que Z_r est de la *deuxième* espèce, lorsqu'il n'est pas de la première espèce et qu'il existe un i $(1 \leqq i \leqq m)$ tel que $\bar{Z}_r \bar{P}_i \neq \emptyset$. Enfin, Z_r sera dit de la *troisième* espèce s'il n'est ni de la première ni de la deuxième espèce.

Nous associons tout Z_r de la première espèce à *tout* indice i tel que $Z_r \bar{V}_i^\nu \neq \emptyset$, tout Z_r de la deuxième espèce sera associé à *un seul* indice i choisi de telle façon que l'on ait $Z_r \bar{P}_i \neq \emptyset$. Enfin, tout Z_r de la troisième espèce sera associé à *un seul* indice i choisi de telle façon que l'on ait $\bar{Z}_r \subset U_i$.[32]

Pour $1 \leqq i \leqq m$ posons $W_i' = V_i^\nu + \sum Z_r$ où la somme s'étend à tous les éléments de la première et de la seconde espèces du système $\mathfrak{Z}$, associés à l'indice i. On a évidemment $V_i^\nu \subset W_i'$ et la propriété 5° du système $\mathfrak{Z}$ entraîne $\bar{W}_i' \subset W_i$. Posons ensuite $V_i^{\nu+1} = W_i' + \sum Z_r$ où la somme s'étend à tous les éléments de la troisième espèce

[31] Le symbole $\bar{\mathfrak{B}}^\nu$ dans la suite a une signification analogue.

[32] C'est toujours possible en vertu de la définition du système $\mathfrak{H}$ et de la propriété 1° du système $\mathfrak{Z}$.

du système $\mathfrak{Z}$ associés à l'indice i. Il est évident que les ensembles $V_i^{\nu+1}$ sont ouverts dans R et que l'on a $V_i^\nu \subset V_i^{\nu+1} \subset \bar{V}_i^{\nu+1} \subset U_i$. Comme $\mathfrak{V}^\nu$ recouvre $\sum_{\lambda=1}^{\nu} A_\lambda$ et que $\mathfrak{Z}$ recouvre $A_{\nu+1}$, le système $\mathfrak{V}^{\nu+1}$ des ensembles $V_1^{\nu+1}, V_2^{\nu+1}, \ldots, V_m^{\nu+1}$ recouvre évidemment $\sum_{\lambda=1}^{\nu+1} A_\lambda$.

Il nous reste à montrer que $\mathfrak{V}^{\nu+1}$ est d'ordre $\leqq n$, c'est-à-dire que tout point $a \in R$ appartient à $n + 1$ éléments du système $\mathfrak{V}^{\nu+1}$ au plus. Nous allons distinguer deux cas. *Supposons d'abord* qu'il existe un indice j $(1 \leqq j \leqq m)$ tel que $a \in \bar{P}_j$. Alors $a \in Z_r$ entraîne $Z_r \bar{P}_j \neq \emptyset$, donc Z_r n'est pas de la troisième espèce. Donc, $a \in V_i^{\nu+1}$ entraîne $a \in W_i' \subset W_i$. Il existe donc au plus autant de $V_i^{\nu+1}$ contenant le point a qu'il existe de W_i contenant a; or le système $\mathfrak{W}$ est d'ordre $\leqq n$, donc le point a est contenu dans $n + 1$ ensembles $V_i^{\nu+1}$ au plus. *Supposons maintenant* qu'il n'existe pas d'indice i pour lequel on ait $a \in \bar{P}_i$. En vertu de la propriété 4° du système $\mathfrak{Z}$ la relation $a \in Z_r$ entraîne $Z_r \bar{V}_i^\nu = \emptyset$, de sorte que le point a ne se trouve dans aucun ensemble V_i^ν ni dans aucun ensemble Z_r de la première espèce. Donc $a \in W_i'$ entraîne $a \in Z_r$ où Z_r est un ensemble de la deuxième espèce associé à l'indice i. Comme tout Z_r de la deuxième espèce n'est associé qu'à un seul i, le point a est contenu dans au plus autant des W_i' qu'il y a de Z_r de la deuxième espèce qui le contiennent. De même, a se trouve dans au plus autant des ensembles $V_i^{\nu+1} - W_i'$ qu'il y a d'ensembles Z_r de la troisième espèce qui le renferment. Donc il existe au plus autant d'ensembles $V_i^{\nu+1}$ contenant a qu'il y a de Z_r qui le contiennent; or le système $\mathfrak{Z}$ est d'ordre $\leqq n$, donc il existe au plus $n + 1$ ensembles $V_i^{\nu+1}$ qui contiennent le point a.

Nous avons ainsi démontré qu'il est possible de déterminer par récurrence des systèmes $\mathfrak{V}^\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ d'ensembles V_i^ν $(1 \leqq i \leqq m)$ ouverts dans R, tels que 1° $V_i^\nu \subset V_i^{\nu+1}$; 2° $V_i^\nu \subset U_i$; 3° $\mathfrak{V}^\nu$ recouvre A_ν; 4° $\mathfrak{V}^\nu$ est d'ordre $\leqq n$.

Posons $V_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} V_i^\nu$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Alors les ensembles V_i sont ouverts dans R. D'après 2° nous avons $V_i \subset U_i$. Comme $R = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$, la propriété 3° entraîne que le système $\mathfrak{V}$ des ensembles $V_1, V_2, \ldots, V_m$ recouvre R. Il reste à montrer que $\mathfrak{V}$ est d'ordre $\leqq n$. Si ce n'était pas le cas, il serait possible de trouver $n + 2$ indices différents $i_1, i_2, \ldots, i_{n+2}$ et un point $a \in R$ tels que $a \in V_{i_s}$ $(1 \leqq s \leqq n + 2)$. D'après 1°, il existerait alors un indice ν tel que $a \in V_{i_s}^\nu$ $(1 \leqq s \leqq n + 2)$. Or c'est en contradiction avec 4°.

24. *Soit R un espace normal. Supposons que les ensembles A_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ soient des F_σ dans R,* dim $A_\nu \leqq n$. *Alors* dim $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \leqq n$.

Démonstration. Soit $S = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$. Comme les ensembles A_ν sont des F_σ dans R, il existe des ensembles $B_{\nu\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ fermés dans R tels que $A_\nu = \sum_{\mu=1}^{\infty} B_{\nu\mu}$. Comme $B_{\nu\mu} \subset A_\nu$ et $B_{\nu\mu}$ est fermé dans R, nous voyons que $B_{\nu\mu}$ est fermé dans A_ν. Comme $\dim A_\nu \leqq n$, nous avons d'après 4 $\dim B_{\nu\mu} \leqq n$ également. Réarrangeons la suite double $B_{\nu\mu}$ $(\nu, \mu = 1, 2, 3, \ldots)$ en une suite simple B_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$[33]. Alors $S = \sum_{\lambda=1}^{\infty} B_\lambda$ et les ensembles B_λ sont fermés dans R, donc aussi dans S, et l'on a $\dim B_\lambda \leqq n$. Or S est un F_σ dans R, donc S est un espace normal d'après 19. Nous voyons alors d'après 23 que $\dim S \leqq n$.

25. Soit R un espace topologique. Nous dirons que R est *parfaitement normal* lorsque: 1° R est normal; 2° tout ensemble ouvert dans R est un F_σ dans R. La condition 2° peut être formulée de la façon suivante: tout ensemble fermé dans R est un G_δ dans R.

26. *Soit R un espace métrique. Alors R est un espace parfaitement normal.*

Démonstration. En vertu de 16 il suffit de faire voir que tout ensemble fermé dans R est un G_δ dans R. Soit donc A un ensemble fermé dans R; nous pouvons évidemment supposer $A \neq \emptyset$. Soit (voir 7) $U_\nu = K(A, 1/\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ D'après 8, les ensembles U_ν sont ouverts dans R, il suffit donc de montrer que $A = \prod_{\nu=1}^{\infty} U_\nu$. Il est évident que $A \subset \prod_{\nu=1}^{\infty} U_\nu$, il reste donc à montrer que pour chaque $x \in R - A$ il existe un indice ν tel que $x \in R - U_\nu$. Or l'ensemble $R - A$ étant ouvert dans R, il existe un $\eta > 0$ tel que $y \in R$, $\varrho(x, y) < \eta$ entraîne $y \in R - A$. Pour un ν convenablement choisi nous aurons $1/\nu < \eta$, donc $x \in R - U_\nu$ en raison de la définition de U_ν.

27. *Soit R un espace parfaitement normal. Soit $S \subset R$. Alors S est un espace parfaitement normal* (cf. [30]).

Démonstration. Soit Z un ensemble ouvert dans S; il existe alors un ensemble G ouvert dans R tel que $Z = SG$. L'espace R étant parfaitement normal, il existe des ensembles F_ν fermés dans R tels que $G = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$. Posons $\Phi_\nu = SF_\nu$; nous avons alors $Z = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi_\nu$ et les ensembles Φ_ν soit fermés dans S. Donc tout ensemble ouvert dans S est un F_σ dans S. Il reste à montrer que S est un espace normal. Soient donc A, B deux ensembles fermés dans S, $AB = \emptyset$. Nous avons à montrer qu'il existe des ensembles U', V' ouverts dans S tels que $A \subset U'$, $B \subset V'$, $U'V' = \emptyset$. Les deux ensembles A, B étant fermés dans S, nous avons d'après M, 6 $A = \bar{A}S$, $B = \bar{B}S$. Comme $AB = \emptyset$, on a aussi $\bar{A}\bar{B}S = \emptyset$. Posons $A_0 = \bar{A} - \bar{B}$, $B_0 = \bar{B} - \bar{A}$; il est

[33] P. ex. de la façon suivante: $B_{11} = B_1$; $B_{21} = B_2$, $B_{12} = B_3$; $B_{31} = B_4$, $B_{22} = B_5$, $B_{13} = B_6$; $B_{41} = B_7$, etc.

alors aisé de voir que $A \subset A_0$, $B \subset B_0$. Comme $A_0 \subset \bar{A}$, on a d'après M, 4,2, $\bar{A}_0 \subset \bar{A}$ donc $\bar{A}_0 B_0 = \emptyset$, et par analogie $A_0 \bar{B}_0 = \emptyset$. L'espace R étant parfaitement normal, l'ensemble $R - \bar{B}$ est un F_σ dans R; il en résulte facilement que $A_0 = \bar{A}(R - \bar{B})$ est un F_σ dans R; de même B_0 est un F_σ dans R. Or $A_0 \bar{B}_0 = \bar{A}_0 B_0 = \emptyset$, donc d'après 18 il existe deux ensembles U, V ouverts dans R tels que $A_0 \subset U$, $B_0 \subset V$ (donc aussi $A \subset U$, $B \subset V$), $UV = \emptyset$. Il suffit alors de poser $U' = SU$, $V' = SV$.

28. *Soit R un espace parfaitement normal,* $\dim R \leqq n$. *Soit $S \subset R$. Alors* $\dim S \leqq n$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{U}'$ un système fini d'ensembles ouverts dans S, recouvrant S. Nous avons à montrer qu'il existe un système fini $\mathfrak{V}'$ d'ensembles ouverts dans S tel que 1° $\mathfrak{V}'$ recouvre S; 2° tout $V' \in \mathfrak{V}'$ fait partie d'un $U' \in \mathfrak{U}'$; 3° $\mathfrak{V}'$ est d'ordre $\leqq n$. Soient U_i' $(1 \leqq i \leqq m)$ les éléments de $\mathfrak{U}'$. Il existe alors des ensembles U_i ouverts dans R, tels que $U_i' = SU_i$. Posons $A = \sum_{i=1}^{m} U_i$. L'ensemble A est ouvert dans R, il est donc aussi un F_σ dans R, car l'espace R est parfaitement normal. Il existe donc des ensembles A_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ fermés dans R tels que $A = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$. Comme $\dim R \leqq n$, nous avons d'après 4 $\dim A_\nu \leqq n$. Donc, d'après 24, $\dim A \leqq n$ également. Comme les ensembles $U_1, \ldots, U_m$ recouvrent A, il existe un système fini $\mathfrak{V}$ d'ensembles fermés dans A, tels que 1° $\mathfrak{V}$ recouvre A; 2° tout $V \in \mathfrak{V}$ fait partie d'un U_i; 3° $\mathfrak{V}$ est d'ordre $\leqq n$. Nous obtenons alors le système $\mathfrak{V}'$ cherché en posant $V' = SV$, $V \in \mathfrak{V}$.

12

ÜBER EINEN KURVENTHEORETISCHEN SATZ VON AYRES

Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums.
Wien 5 (1933), 24–25

Für einen metrischen Raum K sei K_ν^n die Menge derjenigen Punkte von K, die eine Umgebung U mit $\delta(U) < 1/\nu$ und mit höchstens n-punktigem $K \cdot B(U)$ besitzen.[1] Der Durchschnitt $\prod_{\nu=1}^{\infty} K_\nu^n$ ist die Menge K^n aller Punkte höchstens n-ter Ordnung von K. Ayres bewies folgenden Satz:[2] *Für jeden metrischen Raum K und für n* $= 3, 4, \ldots$ *ist die Menge* $K^{2n-3} - K^{n-1}$ *nulldimensional*[3] *oder leer*. Der Ayressche Beweis wurde von Menger in seinem Buche „*Kurventheorie*" (1932), S. 115, ausführlich dargestellt. Im Folgenden möchte ich darauf hinweisen, daß im Falle eines separablen Raumes K unter Verwendung des Summensatzes der Dimensionstheorie für separable Räume der ganze Beweis schon mit Hilfe der von Menger zum Beweise eines Hilfssatzes (Kurventheorie, S. 117), verwendeten Methode ohne die bei Menger folgende rekursive Konstruktion geführt werden kann. Da die Menge K_ν^{n-1} in K offen ist, ist $K^{2n-3} - K_\nu^{n-1}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$ ad inf.) in $K^{2n-3} - K^{n-1} = \sum_{\nu=1}^{\infty}(K^{2n-3} - K_\nu^{n-1})$ abgeschlossen. Nach dem Summensatz der Dimensionstheorie[4] hat man also nur zu beweisen, dass $K^{2n-3} - K_\nu^{n-1}$ für jedes ν nulldimensional oder leer ist. Sei also p ein Punkt von K^{2n-3} und sei Z_0 eine vorgelegte Umgebung von p. Man hat eine Umgebung Z' von p mit den Eigenschaften $Z' \subset Z_0$ und $K^{2n-3} \cdot B(Z') \subset K_\nu^{n-1}$ anzugeben. Es gibt eine Umgebung $Z \subset\subset Z_0$ von p, deren Begrenzung mit K einen endlichen (sogar höchstens $(2n-3)$-punktigen) Durchschnitt hat. Falls $K^{2n-3} \cdot B(Z)$ leer ist, setzen wir $Z' = Z$. Sonst seien q_j $(1 \leqq j \leqq c)$ die endlich vielen Punkte von $K^{2n-3} \cdot B(Z)$. Wie bei Menger (l.c. S. 117) bestimmen wir Umgebungen Q_j von q_j mit den Eigenschaften 1*), 2*), 3*), 4*), wobei jedoch 1*) jetzt aussagt, dass p

[1] $\delta(U)$ bedeutet den Durchmesser, $B(U)$ die Begrenzung von U.

[2] Trans. Amer. Math. Soc., *33* (1931), S. 253–256.

[3] Im Menger-Urysohnschen Sinn.

[4] Die Voraussetzung der Separabilität brauche ich, da sonst die Gültigkeit des Summensatzes nicht feststeht.

nicht in $\bar{Q}_j$ liegt und in 2*) $\varepsilon = 1/v$ zu setzen ist. Man hat dann (l.c., S. 118) $\delta(V_{h_j}) < < 1/v$, $\delta(W_{i_j}) < 1/v$ und die Mengen $K \,.\, B(V_{h_j})$, $K \,.\, B(W_{i_j})$ sind höchstens $(n-1)$-punktig; folglich ist $K \,.\, V_{h_j} \subset K_v^{n-1}$, $K \,.\, W_{i_j} \subset K_v^{n-1}$. Wir definieren Z' wie l.c., S. 118 (**). Dann ist $(p) \subset Z' \subset Z_0$ und (l.c., S. 119, Zeile 17) $K^{2n-3} \,.\, B(Z') \subset \subset \sum_{j=1}^{a} K \,.\, V_{h_j} + \sum_{j=1}^{b} K \,.\, W_{i_j} \subset K_v^{n-1}$.

13

EINE VERALLGEMEINERUNG DES JORDAN-BROUWERSCHEN SATZES

Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums.
Wien 5 (1933), 29–31

Sei R eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren $(n-1)^{\text{te}}$ Bettische Zahl verschwindet und S eine abgeschlossene Teilmenge von R $(0 \neq S \neq R)$. Dann besagt der einfachste und wichtigste Fall des Dualitätssatzes, dass die um eins verminderte Komponentenzahl von $R - S$ gleich der $(n-1)^{\text{ten}}$ Bettischen Zahl von S ist.

Es ist bemerkenwert, dass in diesem Satze, der bekanntlich den Jordan-Brouwerschen Satz als Spezialfall enthält, die Voraussetzung, R sei eine Mannigfaltigkeit, wesentlich abgeschwächt werden darf. Es genügt nämlich, Folgendes über R anzunehmen (in der Theorie mod 2, auf die ich mich hier beschränke; sonst kommt noch die Orientierbarkeitsannahme hinzu): R ist ein zusammenhängendes Polyeder, das Summe ist von einer endlichen Anzahl abgeschlossener (simplizialer) n-Zellen. Jede $(n-1)$-Zelle ist Randzelle von genau zwei n-Zellen. Sind σ_1 und σ_2 zwei beliebige n-Zellen mit gemeinsam Eckpunkt p, so kann man σ_1 und σ_2 durch eine Kette von n-Zellen mit dem Eckpunkt p verbinden so, dass je zwei benachbarte Glieder der Kette eine gemeinsame $(n-1)$-Zelle haben. Ausserdem wird, wie gesagt, vorausgesetzt, dass die $(n-1)^{\text{te}}$ Bettische Zahl von R gleich Null sei.

Der Beweis des angeführten Satzes möge in dem Falle hier durchgeführt werden, dass S ein Unterkomplex der gegebenen Zelleneinteilung von R ist. Sei Z^n die Summe sämtlicher n-Zellen von R. Dann ist Z^n der einzige n-Zyklus in R. Seien K_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ die Komponenten von $R - S$. Sei C_i^n die Summe derjenigen n-Zellen von R, deren Inneres in K_i liegt. Sei $C_i^n \to \Gamma_i^{n-1}$. Dann sind die Γ_i^{n-1} $(n-1)$-Zykeln in S. Da jeder $(n-1)$-Zyklus in $R \sim 0$ ist, schliesst man leicht, dass jeder $(n-1)$-Zyklus in S von den Γ_i^{n-1} linear abhängt. u beweisen bleibt, dass zwischen den Γ_i^{n-1} genau eine lineare Abhängigkeit besteht. Sei $\sum a_i \Gamma_i^{n-1} \sim 0$ in S $(a_i = 0$ oder $1)$. Es gibt also einen n-Komplex D^n in S so, dass $D^n \to \sum a_i \Gamma_i^{n-1}$ ist. Dann ist $D^n + \sum a_i C_i^n \to 0$, folglich $D^n = \sum a_i C_i^n + aZ^n$ $(a = 0$ oder $1)$. Der n-Komplex aC_i^n unterscheidet sich daher von aZ^n nur in den Zellen $\subset S$. Dasselbe gilt aber auch für den n-Komplex $a \,.\, \sum C_i^n$; also ist $a_1 = a_2 = \ldots a_r = a$. Umgekehrt ist $\sum \Gamma_i^{n-1} \sim 0$ in S.

Der Beweis für den Fall, das S eine beliebige kompakte Teilmenge von R ist, ist gegenüber dem durchgeführten Fall nur insofern komplizierter, als es schon für den Wortlaut des Satzes (Begriff der $(n-1)^{\text{ten}}$ Bettischen Zahl von S!) der Fall ist. Indem man sich auf die von mir angegebene (*Fund. Math.*, 19, [7]) Definition der Bettischen Zahl stützt, führt man für beliebiges S den Beweis völlig analog und direkt (es wird also nicht etwa S polyedral approximiert!) durch. Der einzige Unterschied besteht darin, dass man nicht mit der gegebenen Zelleneinteilung von R auskommt, sondern gleichzeitig deren sukzessive baryzentrische Unterteilungen (die eine „famille complète de réseaux dans R" definieren) in Betracht ziehen muss.

Wichtig ist nun, dass auch der polyedrale Charakter von R für den Beweis gar nicht wesentlich ist und leicht durch mengentheoretische (den Homologiecharakter von R betreffende) Annahmen ersetzt werden kann, wobei der Beweis noch ganz durchsichtig bleibt.

Die naheliegende Frage, ob auch in den höheren Fällen des Dualitätssatzes die Annahmen über R analog abgeschwächt werden dürfen, ist zu bejahen. Doch ist der allgemeine Fall ungemein komplizierter (Vgl. meine ausführliche Darstellung in den *Annals of Math.*, *Oktober* 1933, [*15*]).

14

INTRODUCTION À LA THÉORIE DE L'HOMOLOGIE

Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou
Masarykovy university.
Brno *184* (1933), 36 pp.
(Traduit de tchèque:
Úvod do theorie homologie.)

I. Modules

1. $\mathfrak{R}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.

2. Soit $\mathfrak{M}$ un ensemble d'éléments quelconques. Nous disons que $\mathfrak{M}$ est un *module* lorsque 1° $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ (c'est-à-dire l'ensemble $\mathfrak{M}$ n'est pas vide: il contient un élément au moins); 2° pour $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$ [1] on a défini une *somme* $A + B \in \mathfrak{M}$; 3° pour $A \in \mathfrak{M}$, $a \in \mathfrak{R}$ on a défini un *produit* $aA = a\,.\,A \in \mathfrak{M}$; les deux opérations étant définies de façon à satisfaire aux conditions (axiomes) suivantes (2.1 – 2.7)[2]:

2.1. $A + B = B + A$;
2.2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
2.3. $a(A + B) = aA + aB$;
2.4. $(a + b) A = aA + bA$;
2.5. $a(bA) = (ab) A$;
2.6. $1A = A$;
2.7. Il existe un *élément neutre* $O \in \mathfrak{M}$ tel que $A + O = A$, $0A = O$, $aO = O$ pour tous $A \in \mathfrak{M}$, $a \in \mathfrak{R}$.

3. La *somme générale* $\sum_{i=1}^{n} A_i$ $(n = 0, 1, \ldots)$ est définie par récurrence: $\sum_{i=1}^{0} A_i = O$, $\sum_{i=1}^{n+1} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i + A_{n+1}$. Donc $\sum_{i=1}^{1} A_i = A_1$, $\sum_{i=1}^{2} A_i = A_1 + A_2$. De l'axiome 2.2 on déduit p. ex. $\sum_{i=1}^{m+n} A_i = \sum_{i=1}^{m} A_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} A_i$ où $\sum_{i=m+1}^{m+n} A_i$ signifie, bien entendu $\sum_{i=1}^{n} A_{m+i}$. Il résulte de l'axiome 2.1 que l'on a $\sum_{i=1}^{n} A_{\nu_i} = \sum_{i=1}^{n} A_i$ où $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ est une permutation arbitraire des nombres $(1, 2, \ldots, n)$. L'axiome 2.3. entraîne l'égalité $a \sum_{i=1}^{n} A_i =$

[1] $A \in \mathfrak{M}$ signifie que A est élément de l'ensemble $\mathfrak{M}$.
[2] Ici et dans tout ce chapître les lettres minuscules désignent les nombres rationnels, les lettres majuscules désignent les éléments du module donné.

$= \sum_{i=1}^{n} aA_i$; l'axiome 2.4 entraine $(\sum_{i=1}^{n} a_i) A = \sum_{i=1}^{n} (a_i A)$. En vertu de l'axiome 2.5 nous pouvons écrire p. ex. abA sans craindre l'ambiguité.

4. D'après l'axiome 2.7 nous avons $0A = O$, $aO = O$, et réciproquement, si $aA = O$ on a ou bien $a = 0$ ou bien $A = O$. En effet soit $aA = O$, $a \neq 0$. Alors $A = 1A = (1/a \,.\, a) A = 1/a(aA) = 1/a\, O = O$, donc $A = O$.

5. Au lieu de $(-1) A$ nous écrivons $-A$, au lieu de $B + (-A)$ nous écrivons $B - A$.

6. On a $X + A = B$ si et seulement si $X = B - A$: I. Soit $X + A = B$. Alors $B - A = (X + A) - A = X + (A - A) = X + [1A + (-1) A] = X + (1 - 1) A = X + 0A = X + O = X$, donc $X = B - A$. II. Soit $X = B - A$. Alors $X + A = (B - A) + A = B + (-A + A) = B + [(-1) A + 1A] = B + (-1 + 1) A = B + 0A = B + O = B$, donc $X + A = B$.

7. Il découle de 6 en particulier que si pour un élément O' du module $\mathfrak{M}$ il existe au moins un élément A tel que $A + O' = A$, alors $O' = O$. Car d'après 6 l'équation $A + X = A$ a une seule solution.

8. Dans la suite, les simples règles déduites en 3–7 seront appliquées couramment sans explications; elles sont d'ailleurs bien connues du domaine des nombres.

9. Un exemple simple de module est fourni par $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}$, la somme $A + B$ et le produit aA étant interprétés de la manière usuelle. L'élément neutre O c'est le nombre 0.

Un exemple plus général est donné par l'ensemble $\mathfrak{M}$ des vecteurs à m composantes $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ soit $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ si nous définissons

$$(a_1, a_2, \ldots, a_m) + (b_1, b_2, \ldots, b_m) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m)\,,$$
$$a(a_1, a_2, \ldots, a_m) = (aa_1, aa_2, \ldots, aa_m)\,,$$

la somme et le produit des seconds membres sont interprétées arithmétiquement. L'élément neutre est le vecteur $(0, 0, \ldots, 0)$.

10. Soit $\mathfrak{M}$ un module, soit $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$.[3] Nous disons que $\mathfrak{N}$ est un *sous-module* du module $\mathfrak{M}$ si l'ensemble $\mathfrak{N}$ forme un module par rapport aux opérations d'addition et de multiplication, telles qu'elles ont été définies dans le module $\mathfrak{M}$. Evidemment, il faut pour cela et il suffit que l'on ait: 1° $\mathfrak{N} \neq \emptyset$; 2° si $A \in \mathfrak{N}$, $B \in \mathfrak{N}$, alors $A + B \in \mathfrak{N}$; 3° si $A \in \mathfrak{N}$, alors $aA \in \mathfrak{N}$.

D'après 1°, il existe un $A \in \mathfrak{N}$; d'après 3° on a $O = 0A \in \mathfrak{N}$. Donc, l'élément neutre O du module $\mathfrak{M}$ appartient à tout sous-module $\mathfrak{N}$; il est évidemment l'élément neutre de celui-ci également.

11. Soient $A_1, \ldots, A_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ des éléments donnés d'un module $\mathfrak{M}$.[4]

[3] $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ ou $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{N}$ signifie que l'ensemble $\mathfrak{N}$ est sous-ensemble de l'ensemble $\mathfrak{M}$. (Les cas de $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N} = \emptyset$ ne sont pas exclus.)

[4] Pour $m = 0$ rien n'est donné.

L'ensemble $\mathfrak{N}$ de tous les $X = \sum_{i=1}^{m} a_i A_i$ où chaque a_i peut prendre toutes les valeurs de $\mathfrak{R}$, forme évidemment un sous-module, que nous désignerons par $\{A_1, \ldots, A_m\}$. (Si $m = 0$, l'ensemble $\mathfrak{N}$ ne contient que l'élément neutre O).

Nous dirons d'un élément X de $\mathfrak{M}$ qu'il est *dépendant des* éléments $A_1, \ldots, A_m$ lorsque $X \in \mathfrak{N}$.

12. Etant donné m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ éléments $A_1, \ldots, A_m$ du module $\mathfrak{M}$, nous dirons qu'ils sont *indépendants l'un de l'autre* lorsque $\sum_{i=1}^{m} a_i A_i = O$ implique $a_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, m$; cela a toujours lieu pour $m = 0$. Dans le cas contraire nous dirons que $A_1, \ldots, A_m$ sont *dépendants.*

13. Les élements $A_1, \ldots, A_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ d'un module $\mathfrak{M}$ forment une *base* de ce module lorsque 1° ils sont indépendents; 2° $\mathfrak{M} = \{A_1, \ldots, A_m\}$. Pour $m = 0$ cela a lieu si et seulement si $\mathfrak{M}$ ne contient que l'élément neutre O.

14. Soit $\mathfrak{M} = \{A_1, \ldots, A_m\}$. Si $A_1, \ldots, A_m$ ne forment pas une base de $\mathfrak{M}$, nous avons $m > 0$ et $\sum_{i=1}^{m} a_i A_i = O$ où p. ex. $a_m \neq 0$. Alors $A_m = \sum_{i=1}^{m-1} b_i A_i$ où $b_i = -a_i/a_m$. Il en résulte aisément que $\mathfrak{M} = \{A_1, \ldots, A_{m-1}\}$.

En répétant le raisonnement de ci-dessus nous voyons que: Lorsque $\mathfrak{M} = \{A_1, \ldots, A_m\}$, *alors ou bien* $A_1, \ldots, A_m$ *forment une base du module* $\mathfrak{M}$, *ou bien nous obtenons une base en éliminant certians éléments* $A_1, \ldots, A_m$.

15. Le module $\mathfrak{M}$ sera appelé *fini* si $\mathfrak{M} = \{A_1, \ldots, A_m\}$, $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. D'après 14, tout module fini a une base. Par contre, tout module qui a une base est fini, d'après 13, 2°.

16. *Soit* $A_1, \ldots, A_m$ *une base du module* $\mathfrak{M}$. *Soit* $n > m$. *Soient* $B_1, \ldots, B_n$ *des éléments du module* $\mathfrak{M}$. *Alors* $B_1, \ldots, B_n$ *sont dépendents.*

Démonstration. Comme $\mathfrak{M} = \{A_1, \ldots, A_m\}$, il existe des nombres rationnels a_{ik} tels que $B_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} A_i$ $(1 \leqq k \leqq n)$. Le système de m équations linéaires homogènes $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = 0$ à $n > m$ inconnues a une solution $(x_1, \ldots, x_n)$[5] où un au moins des nombres rationnels x_k est $\neq 0$. Or $\sum_{k=1}^{n} x_k B_k = O$ évidemment.

17. Il résulte de 13, 1° et 15 que si $A_1, \ldots, A_m$ est une base du module $\mathfrak{M}$, on peut trouver dans $\mathfrak{M}$ m, mais pas plus de m, éléments indépendants. Le nombre m est donc égal pour toutes les bases. On l'appelle *rang du module fini* $\mathfrak{M}$. Il est évident que $m = 0$ si et seulement si $\mathfrak{M}$ ne contient que O. *Par le rang d'un module infini* nous entendons le symbole ∞ que nous considérons plus grand que tout $m = 0, 1, 2, \ldots$.

[5] Voir p. ex. B. Bydžovský, *Základy teorie determinantů*, p. 71.

18. *Supposons que les éléments* $A_1, \ldots, A_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ *d'un module* $\mathfrak{M}$ *soient indépendants mais qu'il n'existe pas dans* $\mathfrak{M}$ $m + 1$ *éléments indépendants. Alors* $A_1, \ldots, A_m$ *est une base du module* $\mathfrak{M}$ (et $\mathfrak{M}$ est alors un module fini).

Démonstration. La condition 13, 1° étant vérifiée, il nous reste à montrer que tout élément B du module $\mathfrak{M}$ est dépendant de $A_1, \ldots, A_m$. Les éléments $A_1, \ldots, A_m$, B sont au nombre de $m + 1$, donc dépendants. Il existe donc des nombres rationnels $a_1, \ldots, a_m, b$ dont un au moins est $\neq 0$, tels que $\sum_{i=1}^{m} a_i A_i + bB = O$. Les éléments $A_1, \ldots, A_m$ étant indépendents, on a forcément $b \neq 0$. Donc $B = \sum_{i=1}^{m} c_i A_i$ où $c_i = -a_i/b$.

19. *Soit* $\mathfrak{N}$ *un sous-module d'un module fini* $\mathfrak{M}$. *Alors* $\mathfrak{N}$ *est un module fini. De plus, le rang* n *du module* $\mathfrak{N}$ *est plus petit que ou égal au rang* m *du module* $\mathfrak{M}$; *l'égalité* $n = m$ *n'a lieu que si* $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$.

Démonstration. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des éléments indépendants du module $\mathfrak{N}$ (ce qui est possible pour $n = 0$) choisis de telle façon que le nombre n soit le plus grand possible (ce qui est possible, car $n \leqq m$ d'après 16). D'après 18 nous avons alors $\mathfrak{N} = \{A_1, \ldots, A_n\}$, donc $A_1, \ldots, A_n$ est une base du module $\mathfrak{N}$. Si $n = m$, 18 entraîne $\mathfrak{N} = \{A_1, \ldots, A_n\} = \mathfrak{M}$.

20. Soient $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ deux modules. Soit φ une fonction ayant $\mathfrak{M}$ pour son domaine[6] telle que: 1° $\varphi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}'$;[7] 2° pour $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$, on a $\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B)$; 3° pour $A \in \mathfrak{M}$, $a \in \mathfrak{R}$ on a $\varphi(aA) = a\varphi(A)$. Nous disons alors que φ est une *application homomorphe du module* $\mathfrak{M}$ *sur le module* $\mathfrak{M}'$, ou bien que $\mathfrak{M}$ est une *image homomorphe du module* $\mathfrak{M}$.

Nous avons $\varphi(A) + \varphi(O) = \varphi(A + O) = \varphi(A)$. Donc d'après 7 $\varphi(O)$ est l'élément neutre du module $\mathfrak{M}'$.

21. Lorsque $\varphi(A) = \varphi(B)$ implique $A = B$, nous disons que les modules $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sont *isomorphes*. Deux modules isomorphes sont essentiellement identiques: ils ne diffèrent que par la notation des éléments. Ils ont p. ex. toujours le même rang.

22. Lorsque $\mathfrak{M} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ et que $\mathfrak{M}_m$ désigne le module des vecteurs à m composantes (voir 9), posons $\varphi(a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{m} a_i A_i$. Alors φ est évidemment une application homomorphe du module $\mathfrak{M}_m$ sur le module $\mathfrak{M}$. Si $A_1, \ldots, A_m$ est une base du module $\mathfrak{M}$, alors $\mathfrak{M}_m$ et $\mathfrak{M}$ sont isomorphes.

23. *Toute image homomorphe* $\varphi(\mathfrak{M})$ *d'un module fini* $\mathfrak{M}$ *est un module fini.* Car $\mathfrak{M} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ implique $\varphi(\mathfrak{M}) = \{\varphi(A_1), \ldots, \varphi(A_m)\}$. De plus, le *rang* m'

[6] Cela veut dire que φ associe à tout élément $A \in \mathfrak{M}$ un élément $\varphi(A)$ d'un autre ensemble.

[7] $\varphi(\mathfrak{M})$ est l'ensemble des $\varphi(A)$ lorsque A parcourt $\mathfrak{M}$. De façon plus générale, si $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, $\varphi(\mathfrak{N})$ est l'ensemble de tous les $\varphi(A)$ où A parcourt $\mathfrak{N}$.

du module $\varphi(\mathfrak{M})$ est évidemment $\leqq m$, le rang du module $\mathfrak{M}$, et l'on a $m = m'$ si et seulement si l'application φ est isomorphe.

24. Soit $\mathfrak{N}$ un sous-module du module $\mathfrak{M}$. Nous pouvons diviser les éléments du module $\mathfrak{M}$ en classes $[A]$ en définissant pour $A \in \mathfrak{M}$ donné: $B \in [A]$ si et seulement si $B - A \in \mathfrak{N}$. Nous voyons aisément que tout élément A du module $\mathfrak{M}$ appartient à une seule classe, savoir à $[A]$. De plus, si $[A] = [A']$, $[B] = [B']$, on a $[A + B] = [A' + B']$, $[aA] = [aA']$. Nous pouvons donc définir sans ambiguité:

$$[A] + [B] = [A + B] , \quad a[A] = [aA] .$$

Par rapport à ces définitions, l'ensemble des classes forme un module que nous désignerons par $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$. L'élément neutre du module $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ est la classe $[O] = \mathfrak{N}$. Si nous posons $\varphi(A) = [A]$, φ est une application homomorphe du module $\mathfrak{M}$ sur le module $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$.

Aux chapîtres suivants nous n'emploirons pas le symbole $[A]$ mais nous écrirons tout simplement A au lieu de $[A]$. Pour faire voir qu'il s'agit des classes, nous dirons: Les éléments $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$ sont considérés égaux si $B - A \in \mathfrak{N}$.[8]

25. *Soit $\mathfrak{N}$ un sous-module d'un module fini $\mathfrak{M}$. Alors il est possible d'étendre toute base du module $\mathfrak{N}$[9] en une base du module $\mathfrak{M}$.*

Démonstration. Soit $A_1, \ldots, A_n$ une base du module $\mathfrak{N}$. Le module $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ est en vertu de 24 image homomorphe du module $\mathfrak{M}$. Donc (d'après 23), $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ est un module fini de sorte qu'il existe des éléments $A_{n+1}, \ldots, A_m$ $(m = n, n + 1, \ldots)$ du module $\mathfrak{M}$ tels que $[A_{n+1}], \ldots, [A_m]$ est une base du module $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$. Nous avons à montrer que $A_1, \ldots, A_m$ est une base du module $\mathfrak{M}$, c'est-à-dire que 1° $A_1, \ldots, A_m$ sont indépendants; 2° tout élément B du module $\mathfrak{M}$ est dépendant de $A_1, \ldots, A_m$.

I. Soit $\sum_{i=1}^{m} a_i A_i = O$. Alors $\sum_{i=1}^{m} a_i[A_i] = [O]$. Pour $1 \leqq i \leqq n$ on a $A_i \in \mathfrak{N}$, donc $[A_i] = [O]$, de sorte que $\sum_{i=m+1}^{n} a_i[A_i] = [O]$. Comme $[A_{n+1}], \ldots, [A_m]$ est une base du module $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$, on a $a_i = 0$ pour $n + 1 \leqq i \leqq m$, de sorte que $\sum_{i=1}^{n} a_i A_i = O$. Comme $A_1, \ldots, A_n$ est une base du module $\mathfrak{N}$, on a $a_i = 0$ pour $1 \leqq i \leqq n$ également.

II. Comme $[A_{n+1}], \ldots, [A_m]$ est une base du module $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$, il existe des nombres rationnels a_i $(n + 1 \leqq i \leqq m)$ tels que $[B] = \sum_{i=n+1}^{m} a_i[A_i]$, d'où $[B - \sum_{i=n+1}^{m} a_i A_i] = [O]$, c'est-à-dire $B - \sum_{i=n+1}^{m} a_i A_i \in \mathfrak{N}$. Comme $A_1, \ldots, A_n$ est une base du module $\mathfrak{N}$

[8] En effet, $B - A \in \mathfrak{N}$ si et seulement si $[A] = [B]$.

[9] $\mathfrak{N}$ en a bien une d'après 19.

il existe des nombres rationnels $a_i \, (1 \leqq i \leqq n)$ tels que $B - \sum_{i=n+1}^{m} a_i A_i = \sum_{i=1}^{n} a_i A_i$, donc $B = \sum_{i=1}^{m} a_i A_i$.

26. Soit $\mathfrak{L}$ une partie du module $\mathfrak{M}$. Nous dirons que $\mathfrak{L}$ est un *système linéaire par rapport à* $\mathfrak{M}$, lorsqu'il existe un élément $A_0 \in \mathfrak{L}$ et un sous-module $\mathfrak{N}$ du module $\mathfrak{M}$ tels que $A \in \mathfrak{L}$ si et seulement si $A - A_0 \in \mathfrak{N}$.

Le sous-module $\mathfrak{N}$ est d'ailleurs déterminé univoquement par le système linéaire $\mathfrak{L}$: $\mathfrak{N}$ est l'ensemble des $A - B$ où $A \in \mathfrak{L}$, $B \in \mathfrak{L}$. Car 1° si $A \in \mathfrak{L}$, $B \in \mathfrak{L}$, on a $A - A_0 \in \mathfrak{N}$, $B - A_0 \in \mathfrak{N}$, donc $A - B = (A - A_0) - (B - A_0) \in \mathfrak{N}$ en vertu de 10, 2° et 3°. 2° Si $C \in \mathfrak{N}$, $A = A_0 + C$, on a $A - A_0 \in \mathfrak{N}$, donc $A \in \mathfrak{L}$ et $C = A - A_0$.

L'élément A_0 ne joue, dans le système $\mathfrak{L}$, aucun rôle important: Soit A_1 un élément quelconque du système $\mathfrak{L}$. Alors $A \in \mathfrak{L}$ si et seulement si $A - A_1 \in \mathfrak{N}$. Car: 1° Comme $A_1 \in \mathfrak{L}$, il existe un élément $C_0 \in \mathfrak{N}$ tel que $A_1 - A_0 = C_0$. 2° Lorsque $A \in \mathfrak{L}$, on a $C = A - A_0 \in \mathfrak{N}$, donc $A - A_1 = C - C_0 \in \mathfrak{N}$. 3° Lorsque $C' = A - A_1 \in \mathfrak{N}$, on a $A - A_0 = C' + C_0 \in \mathfrak{N}$, donc $A \in \mathfrak{L}$.

27. *Soit Λ une classe*[10] *non-vide de systèmes linéaires par rapport au module $\mathfrak{M}$. Soit $\mathfrak{Q}$ l'intersection*[11] *de tous les éléments de la classe Λ. Il existe alors des éléments $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ de la classe Λ*[12] *tels que $\mathfrak{Q} = \prod \mathfrak{L}_k$. Si l'ensemble $\mathfrak{Q}$ n'est pas vide, c'est un système linéaire par rapport à $\mathfrak{M}$.*

Démonstration. Lorsqu'on peut trouver dans Λ un nombre fini d'éléments dont l'intersection est vide, nous avons $\mathfrak{Q} = \emptyset$ et l'énoncé est évident. Supposons donc le contraire. Soit $\mathfrak{L}_1$ un ensemble quelconque de la classe Λ. Lorsque $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_k$ sont des ensembles de la classe Λ, donc des systèmes linéaires par rapport à $\mathfrak{M}$, en nombre fini, soient $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_k$ les sous-modules correspondants et soit $\mathfrak{P}_k = \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{N}_i$, $\mathfrak{Q}_k = \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{L}_i$. Nous trouvons aisément que $\mathfrak{Q}_k$ est un système linéaire par rapport à $\mathfrak{M}$ et que $\mathfrak{P}_k$ est le sous-module correspondant. $\mathfrak{M}$ étant un module fini, $\mathfrak{P}_k$ en est un aussi (cf. 19) et pour le rang n_k du module $\mathfrak{P}_k$ nous avons $0 \leqq n_{k+1} \leqq n_k$. Il en résulte qu'en choisissant successivement $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots$ dans la classe Λ de façon à avoir $n_{k+1} < n_k$ tant que c'est possible, nous arrivons forcément à une valeur k telle que cela ne sera plus possible et que l'on aura $n_{k+1} = n_k$ pour tout choix de $\mathfrak{L}_{k+1}$. D'après 19, nous avons alors pour tout $\mathfrak{L}_{k+1} \in \Lambda$: $\mathfrak{P}_{k+1} = \mathfrak{P}_k$. Or si $A_0 \in \mathfrak{Q}_{k+1}$, donc $A_0 \in \mathfrak{Q}_k$, alors $\mathfrak{Q}_k$ est l'ensemble des A pour lesquels $A - A_0 \in \mathfrak{P}_k$ et $\mathfrak{Q}_{k+1}$ est l'ensemble des A pour lesquels $A - A_0 \in \mathfrak{P}_{k+1}$. Donc $\mathfrak{Q}_k = \mathfrak{Q}_{k+1}$, c'est-à-dire $\mathfrak{L}_{k+1} \supset \mathfrak{Q}_k$ pour tout $\mathfrak{L}_{k+1} \in \Lambda$ et $\mathfrak{Q}$ coïncide avec le système linéaire $\mathfrak{Q}_k$.

[10] Une classe, c'est un ensemble dont les éléments sont des ensembles.

[11] L'intersection de tout les éléments d'une classe Λ est l'ensemble des éléments communs à tous les ensembles de la classe Λ. La notation est la même que pour le produit de nombres.

[12] Ce qui est essentiel c'est que leur nombre k est fini.

28. Sans crainte de malentendu, nous désignons dans la suite l'élément neutre de tout module tout simplement par le chiffre 0.

II. Complexes

1. Soit $\mathfrak{K}$ un ensemble fini (peut-être vide). Soit Ω une classe dont les éléments sont des sous-ensembles de l'ensemble $\mathfrak{K}$. Supposons vérifiés les deux axiomes suivants:

1.1. Si $A \in \mathfrak{K}$, alors $(A) \in \Omega$.[13]

1.2. Si $\mathfrak{B} \in \Omega$, $\emptyset \neq \mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, alors $\mathfrak{A} \in \Omega$.

Nous appelons alors l'ensemble $\mathfrak{K}$ *complexe*, les éléments de $\mathfrak{K}$ seront appelés *sommets* du complexe $\mathfrak{K}$. Nous dirons que $\mathfrak{A}$ est *simplexe* du complexe $\mathfrak{K}$, lorsque $\mathfrak{A} \in \Omega$; lorsque $\mathfrak{A}$ contient $p + 1$ sommets nous dirons que le simplexe $\mathfrak{A}$ est de *dimension p*, ou que $\mathfrak{A}$ est un $(p, \mathfrak{K})$-simplexe. En particulier, un $(0, \mathfrak{K})$-simplexe est, d'après notre définition, un ensemble composé d'un seul élément, sommet du complexe $\mathfrak{K}$. Toutefois, il importe de faire la distinction entre un sommet du complexe $\mathfrak{K}$ et le $(0, \mathfrak{K})$-simplexe qui lui correspond, voir pour cela la note 20) de la partie III, paragraphe 3.

La dimension du complexe $\mathfrak{K}$ sera par définition la dimension maximum de ses simplexes, soit resp. le nombre -1 si $\mathfrak{K} = \emptyset$.

2. Soit $p = 1, 2, \ldots$; soit $\mathfrak{A}$ un $(p, \mathfrak{K})$-simplexe. Les sommets du simplexe $\mathfrak{A}$ peuvent être ordonnés de $(p + 1)!$ manières. Comme on le sait bien[14] on peut diviser ces permutations en deux catégories ψ_1, ψ_2, chacune contenant $\frac{1}{2}(p + 1)!$ permutations, avec la propriété suivante: si nous interchangeons deux sommets du simplexe $\mathfrak{A}$, nous passons de ψ_1 en ψ_2, ou inversement. Si nous choisissons und de ces catégories, nous disons que nous avons orienté le simplexe $\mathfrak{A}$. Il est donc possible d'orienter tout $(p, \mathfrak{K})$-simplexe de deux manières différentes (et de deux seules), à condition que $p \geqq 1$; pour $p = 0$, l'orientation ne sera pas définie. Lorsque $A_0, A_1, \ldots, A_p$ sont les sommets de $\mathfrak{A}$ ordonnés suivant une orientation ψ_1 ou ψ_2, nous écrivons $\mathfrak{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_p)$. On a donc p. ex. pour $p = 2$: $(A_0, A_1, A_2) = (A_1, A_2, A_0)$, mais non pas $(A_0, A_1, A_2) = (A_0, A_2, A_1)$.

3. Soit $\mathfrak{K}$ un complexe, soit $p = 0, 1, 2, \ldots$ Nous appellerons $(p, \mathfrak{K})$-*chaîne* toute fonction φ qui associe à chaque $(p, \mathfrak{K})$-simplexe $\mathfrak{A}$ (orienté si $p \geqq 1$) un certain nombre rationnel $\varphi(\mathfrak{A})$, et telle que (pour $p \geqq 1$) si $\mathfrak{A}'$ est le même $(p, \mathfrak{K})$-simplexe que $\mathfrak{A}$, mais orienté autrement, on ait $\varphi(\mathfrak{A}') = -\varphi(\mathfrak{A})$.

Si $a \in \mathfrak{K}$, alors $a\varphi$ désigne, bien entendu, la fonction qui associe à chaque $\mathfrak{A}$ le nombre $a \, . \, \varphi(\mathfrak{A})$; si φ et ψ sont deux fonctions du type considéré, alors $\varphi + \psi$

[13] (A) est l'ensemble composé d'un seul élément, à savoir de A tout seul.

[14] Voir p. ex. Bydžovský, loc. cit., § 2, 6; p. 9–13.

désigne la fonction qui associe à chaque $\mathfrak{A}$ le nombre $\varphi(\mathfrak{A}) + \psi(\mathfrak{A})$. Par rapport à ces définitions, *l'ensemble $\mathfrak{M}_p$ de toutes les $(p, \mathfrak{K})$-chaînes forme un module.*

Soient $\sigma_1^p, \sigma_2^p, \ldots, \sigma_{\alpha_p}^p$ tous les $(p, \mathfrak{K})$-simplexes.[15] Chaque simplexe σ_i^p ($p \geqq 1$, $1 \leqq i \leqq \alpha_p$) soit orienté d'une façon arbitraire. Sans craindre l'équivoque, nous entendrons par σ_i^p ($p \geqq 0$) aussi la fonction φ (c'est-à-dire la $(p, \mathfrak{K})$-chaîne) pour laquelle $\varphi(\sigma_i^p) = 1$ et $\varphi(\sigma_j^p) = 0$ pour $1 \leqq j \leqq \alpha_p$, $j \neq i$.[16] Alors toute $(p, \mathfrak{K})$-chaîne est de la forme $\sum_{i=1}^{\alpha_p} r_i \sigma_i^p$, $r_i \in \mathfrak{R}$, et les nombres r_i sont déterminés sans équivoque par la $(p, \mathfrak{K})$-chaîne donnée (car $r_i = \varphi(\sigma_i^p)$). Autrement dit, les $(p, \mathfrak{K})$-chaînes σ_i^p ($1 \leqq i \leqq \alpha_p$) forment une base du module $\mathfrak{M}_p$. Donc $\mathfrak{M}_p$ est un module fini de rang α_p.

Les $(p, \mathfrak{K})$-chaînes seront désignées par les symboles tels que $C^p(\mathfrak{K})$, $C_1^p(\mathfrak{K})$, $D^p(\mathfrak{K})$, $\Gamma^p(\mathfrak{K})$, etc.

4. Soit $p \geqq 1$. Soit σ^p un $(p, \mathfrak{K})$-simplexe orienté. Soit σ^{p-1} un $(p-1, \mathfrak{K})$-simplexe (orienté si $p \geqq 2$). Nous dirons que σ^p et σ^{p-1} sont *incidents,* lorsque tout sommet du simplexe σ^{p-1} est aussi sommet du simplexe σ^p.

Supposons σ^p, σ^{p-1} incidents. Soient $A_1, \ldots, A_p$ les sommets du simplexe σ^{p-1}: en dehors des sommets $A_1, \ldots, A_p$, σ^p a encore un autre sommet, désignons le par A_0. Soit $\sigma^{p-1} = (A_1, \ldots, A_p)$ (compte tenu de l'orientation également si $p \geqq 2$). Alors (compte tenu de l'orientation), nous avons $\sigma^p = \eta(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ où $\eta = \pm 1$. Soit $B_1, \ldots, B_p$ une permutation quelconque des sommets $A_1, \ldots, A_p$; on a alors $\sigma^{p-1} = \zeta(B_1, \ldots, B_p)$, où $\zeta = \pm 1$ (pour $p = 1$, on a $\zeta = 1$, bien entendu). Il est aisé de voir[17] que $\sigma^p = \eta\zeta(A_0, \ldots, A_p)$. En particulier $\sigma^p = \eta(A_0, \ldots, A_p)$ chaque fois que $\zeta = 1$. Donc, le signe de η est déterminé sans ambiguité par les simplexes (orientés) σ^p et σ^{p-1}. De plus, nous voyons qu'en changeant l'orientation du simplexe σ^p (et pour $p \geqq 2$ aussi celle du simplexe σ^{p-1}) nous obtenons $-\eta$ au lieu de η. Ecrivons pour préciser $\eta = \eta(\sigma^p, \sigma^{p-1})$ et posons $\eta(\sigma^p, \sigma^{p-1}) = 0$ si les simplexes σ^p, σ^{p-1} ne sont pas incidents.

5. Soient de nouveau σ_i^p ($p = 0, 1, 2, \ldots$) comme au paragraphe 3. Soit $p \geqq 1$ et soit σ_i^p un $(p, \mathfrak{K})$-simplexe orienté. Nous posons

$$F\sigma^p = \sum_{i=1}^{\alpha_{p-1}} \eta(\sigma^p, \sigma_i^{p-1}) \, . \, \sigma_i^{p-1} \, . \tag{1}$$

Si $\sigma^p = (A_0, A_1, \ldots, A_p)$, nous trouvons aisément

$$F\sigma^p = \sum_{i=0}^{\alpha_p} (-1)^i \sigma_i^{p-1} \, , \tag{2}$$

[15] Nous avons évidemment $\alpha_p = 0$ si et seulement si le nombre p est plus grand que la dimension du complexe $\mathfrak{K}$.

[16] En vertu de cette convention le symbole $-\sigma_i^p$ ($p \geqq 1$) désigne le $(p, \mathfrak{K})$-simplexe, égal à σ_i^p mais orienté inversement.

[17] Cf. Bydžovský, loc. cit., § 2, 6, d (p. 12).

où σ_i^{p-1} provient de $(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ lorsqu'on en élimine A_i sans changer l'ordre des autres sommets.

Donc $F(\sigma^p)$ est une $(p-1, \mathfrak{K})$-chaîne qui est (pour $p \geqq 2$) indépendent du choix de l'orientation des simplexes σ_i^{p-1}. En changeant l'orientation du simplexe σ^p nous obtenons $F(-\sigma^p) = -F(\sigma^p)$.

Soit maintenant

$$C^p(\mathfrak{K}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} r_i \sigma_i^p \quad (r_i \in \mathfrak{K})$$

une $(p, \mathfrak{K})$-chaîne arbitraire. En généralisant la notation que nous venons d'introduire, nous posons

$$F\, C^p(\mathfrak{K}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} r_i F \sigma_i^p .$$

Donc, $FC^p(\mathfrak{K})$ est une $(p-1, \mathfrak{K})$-chaîne qui ne dépend évidemment pas du choix de l'orientation des simplexes σ_i^p. Nous l'appelons *frontière de la* $(p, \mathfrak{K})$*-chaîne* $C^p(\mathfrak{K})$.

Au lieu de $FC^p(\mathfrak{K}) = \Gamma^{p-1}(\mathfrak{K})$ nous écrivons souvent $C^p(\mathfrak{K}) \to \Gamma^{p-1}(\mathfrak{K})$.

Signalons les règles évidentes que voici: Si $C^p(\mathfrak{K})$ et $D^p(\mathfrak{K})$ sont deux $(p, \mathfrak{K})$-chaînes et $a \in \mathfrak{K}$, nous avons

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} F[C^p(\mathfrak{K}) + D^p(\mathfrak{K})] &= F\, C^p(\mathfrak{K}) + F\, D^p(\mathfrak{K}) , \\ F[a\, C^p(\mathfrak{K})] &= aF\, C^p(\mathfrak{K}) . \end{aligned}$$

Autrement dit: *L'opération F est une application homomorphe* (voir I, 20) *du module* $\mathfrak{M}_p$ *de toutes les* $(p, \mathfrak{K})$*-chaînes sur un certain sous-module* $\mathfrak{N}_{p-1}$ *du module* $\mathfrak{M}_{p-1}$ *de toutes les* $(p-1, \mathfrak{K})$*-chaînes.*

6. Lorsque $C^0(\mathfrak{K})$ est une $(0, \mathfrak{K})$-chaîne, nous prenons pour la *frontière* le zéro et nous écrivons $F\, C^0(\mathfrak{K}) = 0$, ou $C^0(\mathfrak{K}) \to 0$.

Soient σ_i^0 $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ tous les $(0, \mathfrak{K})$-simplexes. Alors $C^0(\mathfrak{K}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} r_i \sigma_i^0$, les r_i étant déterminés de façon univoque. Le nombre $\sum_{i=1}^{\alpha_0} r_i \in \mathfrak{K}$ sera appelé *indice* (*indice de Kronecker*) de la $(0, \mathfrak{K})$-chaîne $C^0(\mathfrak{K})$ et désigné par $J[C^0(\mathfrak{K})]$. Lorsque $C^0(\mathfrak{K})$ et $D^0(\mathfrak{K})$ sont deux $(0, \mathfrak{K})$-chaînes et $a \in \mathfrak{K}$, on a manifestement

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} J[C^0(\mathfrak{K}) + D^0(\mathfrak{K})] &= J[C^0(\mathfrak{K})] + J[D^0(\mathfrak{K})] , \\ J[a\, C^0(\mathfrak{K})] &= aJ[C^0(\mathfrak{K})] . \end{aligned}$$

Autrement dit, *l'opération J est une application homomorphe du module* $\mathfrak{M}_0$ *sur le module* $\mathfrak{R}$.

7. Soient $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{K}$ deux complexes. Si tout simplexe du complexe $\mathfrak{H}$ est aussi simplexe du complexe $\mathfrak{K}$ (donc, en particulier, tout sommet du complexe $\mathfrak{H}$ est aussi

sommet du complexe $\mathfrak{K}$), nous disons que $\mathfrak{H}$ *est sous-complexe du complexe* $\mathfrak{K}$. Mais si tous les sommets d'un simplexe σ du complexe $\mathfrak{K}$ sont sommets du sous-complexe $\mathfrak{H}$, il n'est pas nécessaire que σ soit un simplexe du complexe $\mathfrak{H}$.

Soient σ_i^p $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$ comme d'habitude tous les $(p, \mathfrak{K})$-simplexes. Soit $C^p(\mathfrak{K}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} r_i \sigma_i^p$ une $(p, \mathfrak{K})$-chaîne. Nous disons que $C^p(\mathfrak{K})$ est située dans le sous complexe $\mathfrak{H}$ si pour tout i $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$ soit $r_i = 0$, soit σ_i^p est un $(p, \mathfrak{H})$-simplexe; nous écrivons alors $C^p(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{H}$ ou bien $C^p(\mathfrak{K}) = 0 \bmod \mathfrak{H}$. D'une manière plus générale, $C^p(\mathfrak{K}) = D^p(\mathfrak{K}) \bmod \mathfrak{H}$ signifie que $C^p(\mathfrak{K}) - D^p(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{H}$. Au lieu de $F\, C^{p+1}(\mathfrak{K}) = C^p(\mathfrak{K}) \bmod \mathfrak{H}$ nous écrivons souvent $C^{p+1}(\mathfrak{K}) \to C^p(\mathfrak{K}) \bmod \mathfrak{H}$.

Il est évident que l'ensemble $\mathfrak{M}_p(\mathfrak{H})$ de toutes les $(p, \mathfrak{K})$-chaînes situées dans $\mathfrak{H}$ est un module isomorphe au module de toutes les $(p, \mathfrak{H})$-chaînes. Sans craindre l'équivoque, nous pouvons identifier les deux modules.

8. Soit $\mathfrak{H}$ un sous-complexe du complexe $\mathfrak{K}$. Soit $p \geqq 1$. Soit $C^p(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{H}$. Alors $F\, C^p(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{H}$.

Il suffit de faire la démonstration seulement pour le cas où $C^p(\mathfrak{K}) = \sigma^p$ est un $(p, \mathfrak{H})$-simplexe. D'après 1.2 tout $(p - 1, \mathfrak{K})$- simplexe incident avec σ^p est un $(p - 1, \mathfrak{H})$-simplexe. Donc $F\sigma^p \subset \mathfrak{H}$.

9. Une $(p, \mathfrak{K})$-chaîne $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ sera appelée $(p, \mathfrak{K})$-*cycle absolu*, lorsque $F\, \Gamma^p(\mathfrak{K}) = 0$. Donc, un $(0, \mathfrak{K})$-cycle absolu est la même chose qu'une $(0, \mathfrak{K})$-chaîne.

D'après 5(3) *l'ensemble* $\mathfrak{G}_p$ *de tous les* $(p, \mathfrak{K})$-*cycles absolus est un sous-module du module* $\mathfrak{M}_p$ *de toutes les* $(p, \mathfrak{K})$-*chaînes.*

Si $p \geqq 1$, *le module* $\mathfrak{N}_{p-1}$ (voir fin du paragraphe 5) *des frontières des* $(p, \mathfrak{K})$-*chaînes est un sous-module du module* $\mathfrak{G}_{p-1}$.

Comme, dans la notation usuelle (voir I, 11), on a $\mathfrak{H}_{p-1} = \{F\sigma_1^p, \ldots, F\sigma_{\alpha_p}^p\}$, il suffit de montrer que si σ^p est une $(p, \mathfrak{K})$-simplexe orienté, $F\sigma^p$ est un $(p - 1, \mathfrak{K})$-cycle absolu, c'est-à-dire que $F\sigma^p \to 0$. C'est évident pour $p = 1$. Soit donc $p \geqq 2$. D'après 5(1) nous avons, dans la notation usuelle,

$$F(\sigma^p) \to \sum_{i=1}^{\alpha_{p-1}} \sum_{j=1}^{\alpha_{p-2}} \eta(\sigma^p, \sigma_i^{p-1}) \,.\, \eta(\sigma_i^{p-1}, \sigma_j^{p-2}) \,.\, \sigma_j^{p-2} \,.$$

Nous avons donc à montrer que pour tout $(p - 2, \mathfrak{K})$-simplexe σ^{p-2} on a

$$\sum_{i=1}^{\alpha_{p-1}} \eta(\sigma^p, \sigma_i^{p-1}) \,.\, \eta(\sigma_i^{p-1}, \sigma^{p-2}) = 0 \,. \tag{1}$$

Soit $\sigma^{p-2} = (A_2, \ldots, A_p)$. Si $A_2, \ldots, A_p$ ne sont pas tous sommets du simplexe σ^p, alors dans la somme (1) chaque terme est égal à zéro. Soit donc

$$\sigma^p = (A_0, A_1, A_2, \ldots, A_p) = - (A_1, A_0, A_2, \ldots, A_p) \,.$$

Nous pouvons supposer $\sigma_1^{p-1} = (A_1, A_2, \ldots, A_p)$, $\sigma_2^{p-1} = (A_0, A_2, \ldots, A_p)$. Alors

(voir 4)

$$\eta(\sigma^p, \sigma_1^{p-1}) = 1\,, \quad \eta(\sigma^p, \sigma_2^{p-1}) = -1\,, \quad \eta(\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}) = \eta(\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}) = 1\,,$$
$$\eta(\sigma^p, \sigma_i^{p-1}) \,.\, \eta(\sigma_i^{p-1}, \sigma^{p-2}) = 0$$

pour $3 \leqq i \leqq \alpha_{p-1}$ d'où (1).

10. Soit $p \geqq 0$. Soit $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ un $(p, \mathfrak{K})$-cycle absolu. S'il existe une $(p+1, \mathfrak{K})$-chaîne $C^{p+1}(\mathfrak{K})$ dont la frontière est $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ (donc si $\Gamma^p(\mathfrak{K}) \in \mathfrak{N}_p$) nous disons que $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ *est homologue à zéro* et nous écrivons $\Gamma^p(\mathfrak{K}) \sim 0$. Plus généralement, lorsque $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ et $\Delta^p(\mathfrak{K})$ sont deux $(p, \mathfrak{K})$-cycles absolus et que $\Gamma^p(\mathfrak{K}) - \Delta^p(\mathfrak{K}) \sim 0$, nous disons que $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ *et* $\Delta^p(\mathfrak{K})$ *sont homologues* et nous écrivons $\Gamma^p(\mathfrak{K}) \sim \Delta^p(\mathfrak{K})$.

L'ensemble de tous les $(p, \mathfrak{K})$-cycles absolus où nous identifions les cycles homologues, n'est rien d'autre que le module $\mathfrak{G}_p - \mathfrak{N}_p$ (voir I, 24). Comme $\mathfrak{M}_p$ est un module fini, $\mathfrak{G}_p - \mathfrak{N}_p$ est aussi un module fini (cf. I, 19, 23, 24). Son rang s'appelle $p^{\text{ème}}$ *nombre absolu de Betti du complexe* $\mathfrak{K}$; il est désigné par $B^p(\mathfrak{K})$.

11. *Soit* $\Gamma^0(\mathfrak{K}) \sim 0$. *Alors* $J[\Gamma^0(\mathfrak{K})] = 0$.

Démonstration. Nous avons à montrer que $J[F\, C^1(\mathfrak{K})] = 0$ pour toute $(1, \mathfrak{K})$-chaîne $C^1(\mathfrak{K})$. En vertu du 5(3) et 6(1) il suffit de le faire pour le cas où $C^1(\mathfrak{K}) = (A_0, A_1)$ est un $(1, \mathfrak{K})$-simplexe. Mais alors $F\, C^1(\mathfrak{K}) = (A_1) - (A_0)$, donc $J[F\, C^1(\mathfrak{K})] = 1 - 1 = 0$.

12. Soit $\mathfrak{H}$ un sous-complexe du complexe $\mathfrak{K}$. Une $(p, \mathfrak{K})$-chaîne $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ sera appelée $(p, \mathfrak{K})$-*cycle* mod $\mathfrak{H}$ lorsque $F\, \Gamma^p(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{H}$ (voir 7). Il est évident que *l'ensemble* $\mathfrak{G}_p(\mathfrak{H})$ *de tous les* $(p, \mathfrak{K})$-*cycles* mod $\mathfrak{H}$ *forme un sous-module du module* $\mathfrak{M}_p$ *de toutes les* $(p, \mathfrak{K})$-*chaînes*. On a $\mathfrak{G}_0(\mathfrak{H}) = \mathfrak{M}_0$ pour tout choix de $\mathfrak{H}$.

Evidemment, un $(p, \mathfrak{K})$-cycle absolu est la même chose qu'un $(p, \mathfrak{K})$-cycle mod 0. Lorsque $\mathfrak{H}'$ est un sous-complexe du complexe $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}$ est un sous-complexe du complexe $\mathfrak{K}$, alors évidemment tout $(p, \mathfrak{K})$-cycle mod $\mathfrak{H}'$ est aussi un $(p, \mathfrak{K})$-cycle mod $\mathfrak{H}$. En particulier, tout $(p, \mathfrak{K})$-cycle absolu est un $(p, \mathfrak{K})$-cycle mod $\mathfrak{H}$ pour tout choix de $\mathfrak{H}$.

Lorsque $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ est un $(p, \mathfrak{K})$-cycle mod $\mathfrak{H}$, $C^p(\mathfrak{K})$ est une $(p, \mathfrak{K})$-chaîne et $C^p(\mathfrak{K}) = \Gamma^p(\mathfrak{K})$ mod $\mathfrak{H}$ (voir 7), alors d'après 8 $C^p(\mathfrak{K})$ est aussi un $(p, \mathfrak{K})$-cycle mod $\mathfrak{H}$. En particulier, $C^p(\mathfrak{K})$ est un $(p, \mathfrak{K})$-cycle mod $\mathfrak{H}$, lorsqu'il existe une $(p+1, \mathfrak{K})$-chaîne $C^{p+1}(\mathfrak{K})$ telle que $F\, C^{p+1}(\mathfrak{K}) = C^p(\mathfrak{K})$ mod $\mathfrak{H}$.

13. Soit $\mathfrak{H}$ un sous-complexe du complexe $\mathfrak{K}$. Soit $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ un $(p, \mathfrak{K})$-cycle mod $\mathfrak{H}$. S'il existe une $(p+1, \mathfrak{K})$-chaîne $C^{p+1}(\mathfrak{K})$ telle que $F\, C^{p+1}(\mathfrak{K}) = \Gamma^p(\mathfrak{K})$ mod $\mathfrak{H}$, nous disons que $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ *est homologue à zéro* mod $\mathfrak{H}$ et nous écrivons $\Gamma^p(\mathfrak{K}) \sim 0$ mod $\mathfrak{H}$. Plus généralement, si $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ et $\Delta^p(\mathfrak{K})$ sont deux $(p, \mathfrak{K})$-cycles mod $\mathfrak{H}$ et que $\Gamma^p(\mathfrak{K}) - \Delta^p(\mathfrak{K}) \sim 0$ mod $\mathfrak{H}$, alors nous disons que $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ et $\Delta^p(\mathfrak{K})$ *sont homologues* mod $\mathfrak{H}$ et nous écrivons $\Gamma^p(\mathfrak{K}) \sim \Delta^p(\mathfrak{K})$ mod $\mathfrak{H}$.

Si $\mathfrak{H} = 0$, nous retrouvons les définitions du paragraphe 10.

Lorsque $\mathfrak{H}'$ est un sous-complexe $\mathfrak{H}$ du complexe et $\mathfrak{H}$ est un sous-complexe du complexe $\mathfrak{K}$, que $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ et $\Delta^p(\mathfrak{K})$ sont des $(p, \mathfrak{K})$-cycles mod $\mathfrak{H}'$, et que $\Gamma^p(\mathfrak{K}) \sim \Delta^p(\mathfrak{K})$ mod $\mathfrak{H}'$, alors aussi $\Gamma^p(\mathfrak{K}) \sim \Delta^p(\mathfrak{K})$ mod $\mathfrak{H}$. Considérons le cas où $\mathfrak{H}' = 0$.

Si nous désignons par $\mathfrak{N}_p(\mathfrak{H})$ le module de toutes les $(p, \mathfrak{K})$-chaînes égales mod $\mathfrak{H}$ à la frontière d'une $(p + 1, \mathfrak{K})$-chaîne, alors l'ensemble de tous les $(p, \mathfrak{K})$-cycles mod $\mathfrak{H}$ où nous identifions les cycles homologues mod $\mathfrak{H}$, n'est rien d'autre que le module $\mathfrak{G}_p(\mathfrak{H}) - \mathfrak{N}_p(\mathfrak{H})$. C'est aussi (voir 10) un module fini. Son rang s'appelle $p^{\text{ème}}$ *nombre de Betti relatif du complexe* $\mathfrak{K}$ mod $\mathfrak{H}$; il sera désigné par $B^p(\mathfrak{K}, \mathfrak{H})$. Donc $B^p(\mathfrak{K}, 0) = B^p(\mathfrak{K})$.

14. Soit $\mathfrak{H}$ un sous-complexe d'un complexe $\mathfrak{L}$, soit $\mathfrak{L}$ un sous-complexe du complexe $\mathfrak{K}$. Soit $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ un $(p, \mathfrak{K})$-cycle mod $\mathfrak{H}$, et supposons $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ situé dans $\mathfrak{L}$ (voir 7). Nous disons que $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ *est homologue à zéro* mod $\mathfrak{H}$ *dans* $\mathfrak{L}$, lorsqu'il existe une $(p + 1, \mathfrak{K})$-chaîne $C^{p+1}(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{L}$ telle que $C^{p+1}(\mathfrak{K}) \to \Gamma^p(\mathfrak{K})$ mod $\mathfrak{H}$; nous écrivons $\Gamma^p(\mathfrak{K}) \sim 0$ mod $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{L}$. Plus généralement, lorsque $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ et $\Delta^p(\mathfrak{K})$ sont deux $(p, \mathfrak{K})$-cycles mod $\mathfrak{H}$ situés dans $\mathfrak{L}$, nous disons que $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ *et* $\Delta^p(\mathfrak{K})$ *sont homologues* mod $\mathfrak{H}$ *dans* $\mathfrak{L}$ et nous écrivons $\Gamma^p(\mathfrak{K}) \sim \Delta^p(\mathfrak{K})$ mod $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{L}$ si $\Gamma^p(\mathfrak{K}) - \Delta^p(\mathfrak{K}) \sim 0$ mod $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{L}$. Considérons le cas particulier où $\mathfrak{H} = 0$; nous écrivons alors $\Gamma^p(\mathfrak{K}) - \Delta^p(\mathfrak{K}) \sim 0$ dans $\mathfrak{L}$ en omettant mod $\mathfrak{H}$.

15. Les sommets du complexe $\mathfrak{K}$ soient répartis parmi m groupes $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_m$ de telle manière que chaque sommet se trouve dans un groupe et un seul.[18] Lorsque tout $(1, \mathfrak{K})$-simplexe a ses deux sommets dans le même groupe[19], nous disons que *les groupes* $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_m$ *sont séparés.*

Le nombre $B^0(\mathfrak{K})$ *est le nombre maximum de groupes non-vides séparés, parmi lesquels on peut répartir les sommets du complexe* $\mathfrak{K}$.

Démonstration. I. Répartissons tous les sommets du complexe $\mathfrak{K}$ de telle manière que deux sommets A, B soient dans le même groupe si et seulement si $(A) \sim (B)$. Manifestement, chaque sommet appartient alors à un groupe et à un seul; désignons ces groupes par $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_n$. Si (A, B) est un $(1, \mathfrak{K})$-simplexe, nous avons $(A, B) \to (A) - (B)$, donc $(A) \sim (B)$. Donc les groupes $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_n$ sont séparés. Choisissons un sommet A_i dans chaque groupe $\mathfrak{T}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Alors tout $(0, \mathfrak{K})$-simplexe est homologue à un des $(0, \mathfrak{K})$-simplexes (A_i), de sorte que tout $(0, \mathfrak{K})$-cycle est homologue à un $(0, \mathfrak{K})$-cycle de la forme $\sum_{i=1}^{n} r_i(A_i)$. Donc $B^0(\mathfrak{K}) \leqq n$.

II. Il nous reste à montrer que si les sommets du complexe $\mathfrak{K}$ sont répartis — n'importe comment — parmi m groupes séparés non-vides $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_m$, nous avons forcément $B^0(\mathfrak{K}) \geqq m$. Si $C^0(\mathfrak{K}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} r_i\sigma_i^0$, alors pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$, $1 \leqq j \leqq m$, soit $r_{ij} = r_i$ lorsque σ_i^0 appartient au groupe $\mathfrak{S}_j$ et $r_{ij} = 0$ lorsque σ_i^0 n'appartient

[18] On a $m = 0$ si et seulement si $\mathfrak{K} = 0$.

[19] Cette condition est toujours vérifiée si la dimension du complexe $\mathfrak{K}$ (voir 1) est égale à zéro.

pas à $\mathfrak{S}_j$. Pour $1 \leqq j \leqq m$ soit $J_j[C^0(\mathfrak{K})] = \sum_{i=1}^{\alpha_0} r_{ij}$. Si $\sigma^1 = (A, B)$ est un $(1, \mathfrak{K})$-simplexe arbitraire, ses deux sommets appartiennent au même groupe $\mathfrak{S}_j$. Donc $J_j[F\sigma^1] = 0$. Il en résulte aisément que $J_j[F\, C^1(\mathfrak{K})] = 0$ pour $1 \leqq j \leqq m$ et pour toute $(1, \mathfrak{K})$-chaîne $C^1(\mathfrak{K})$; c'est-à-dire que $C^0(\mathfrak{K}) \sim 0$ implique $J_j[C^0(\mathfrak{K})] = 0$ pour $1 \leqq j \leqq m$. Soit A_i le sommet choisi du groupe $\mathfrak{S}_j$. Alors $J_j[\sum_{k=1}^{m} r_k(A_k)] = r_k$, de sorte que $\sum_{k=1}^{m} r_k(A_k) \sim 0$ seulement si $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Donc $B^0(\mathfrak{K}) \geqq m$.

16. Le symbole $(A_0, A_1 \ldots, A_p)$ a un sens si $A_0, A_1, \ldots, A_p$ sont des sommets (différents l'un de l'autre) d'un simplexe du complexe $\mathfrak{K}$. Il est parfois utile d'attribuer une signification à ce symbole même si $A_0, A_1, \ldots, A_p$ sont des sommets d'un simplexe du complexe $\mathfrak{K}$, mais non pas tous différents. Dans ce cas-là, le symbole $(A_0, A_1, \ldots \ldots, A_p)$ sera égal à zéro (ou plus exactement à l'élément neutre du module de toutes les $(p, \mathfrak{K})$-chaînes.

La formule 5(2) est valable chaque fois que $(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ a un sens. En effet, si les sommets $A_0, A_1, \ldots, A_p$ ne sont pas tous différents, on a $\sigma^p = 0$, donc $F\sigma^p = 0$. Soit p. ex. $A_j = A_k$ $(0 \leqq j < k \leqq m)$. Alors $\sigma_i^{p-1} = 0$ pour $0 \leqq i \leqq p$, $i \neq j$, $i \neq k$; de plus $\sigma_j^{p-1} = \sigma_k^{p-1}$ de sorte que le second membre de la formule 5(2) égale zéro.

17. Soient $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{L}$ deux complexes. Si nous associons à chaque sommet A du complexe $\mathfrak{L}$ un certain sommet πA du complexe $\mathfrak{K}$ d'une telle manière que chaque fois que $A_0, A_1, \ldots, A_m$ sont des sommets d'un simplexe du complexe $\mathfrak{L}$, les sommets $\pi A_0, \pi A_1, \ldots, \pi A_m$ soient aussi des sommets d'un simplexe du complexe $\mathfrak{K}$, alors nous disons que π est une *application simplicielle du complexe $\mathfrak{L}$ dans le complexe $\mathfrak{K}$.* Lorsque B est un sommet donné du complexe $\mathfrak{K}$, il n'est pas nécessaire que l'on ait $\pi A = B$ pour un sommet A du complexe $\mathfrak{L}$.

Soit $\tau^p = (A_0, \ldots, A_p)$ un $(p, \mathfrak{L})$-simplexe. Nous posons $\pi\tau^p = (\pi A_0, \pi A_1, \ldots, \pi A_p)$. En vertu de la convention adoptée au paragraphe 16 le symbole $\pi\tau^p$ a toujours un sens et d'après 5(2) (cf. 16) nous avons $F\pi\tau^p = \pi F\tau^p$.

Soient $\tau_1^p, \tau_2^p, \ldots, \tau_{\alpha_p}^p$ tous les $(p, \mathfrak{L})$-simplexes (orientés d'une certaine façon si $p > 0$). Si $C^p(\mathfrak{L}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} r_i \tau_i^p$ est une $(p, \mathfrak{L})$-chaîne, alors le symbole $\pi\, C^p(\mathfrak{L})$ désignera la $(p, \mathfrak{K})$-chaîne

$$\pi\, C^p(\mathfrak{L}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} r_i \,.\, \pi\tau_i^p \,.$$

Il est évident que la valeur du symbole $\pi\, C^p(\mathfrak{L})$ ne dépend pas du choix de l'orientation des simplexes τ_i^p. On a évidemment

$$(1) \qquad \begin{aligned} \pi[C^p(\mathfrak{L}) + D^p(\mathfrak{L})] &= \pi\, C^p(\mathfrak{L}) + \pi\, D^p(\mathfrak{L})\,, \\ \pi[a\, C^p(\mathfrak{L})] &= a \,.\, \pi\, C^p(\mathfrak{L})\,. \end{aligned}$$

Autrement dit, *l'opération π est une application homomorphe du module de toutes les $(p, \mathfrak{L})$-chaînes sur un certain sous-module du module de toutes les $(p, \mathfrak{K})$-chaînes.*

Comme $F\pi\tau^p = \pi F\tau^p$, nous avons

$$F\pi\, C^p(\mathfrak{L}) = \pi F\, C^p(\mathfrak{L}) \tag{2}$$

pour toute $(p, \mathfrak{L})$-chaîne $C^p(\mathfrak{L})$.

Lorsque τ^0 est un $(0, \mathfrak{L})$-simplexe arbitraire, $\pi\tau^0$ est un $(0, \mathfrak{K})$-simplexe, donc $J(\tau^0) = J(\pi\tau^0) = 1$. Donc

$$J[\pi\, C^0(\mathfrak{L})] = J[C^0(\mathfrak{L})] \tag{3}$$

pour toute $(0, \mathfrak{L})$-chaîne $C^0(\mathfrak{L})$.

18. Soient π_1 et π_2 deux applications simplicielles du complexe $\mathfrak{L}$ dans le complexe $\mathfrak{K}$. Nous disons que π_1 et π_2 sont *voisines* si chaque fois que $A_0, A_1, \ldots, A_p$ sont des sommets d'un simplexe du complexe $\mathfrak{L}$, alors aussi

$$\pi_1 A_0, \pi_1 A_1, \ldots, \pi_1 A_p, \pi_2 A_0, \pi_2 A_1, \ldots, \pi_2 A_p$$

sont des sommets d'un simplexe du complexe $\mathfrak{K}$.

Soient π_1, π_2 deux applications simplicielles voisines du complexe $\mathfrak{L}$ dans le complexe $\mathfrak{K}$. Arrangeons tous les sommets du complexe $\mathfrak{L}$ d'une manière mais fixe de façon qu'ils forment une suite finie

$$A_1, A_2, \ldots, A_\alpha\,. \tag{1}$$

Alors tout $(p, \mathfrak{L})$-simplexe peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme

$$\tau^p = (A_{\nu_0}, A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_p})\,, \quad 1 \leqq \nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_p \leqq \alpha\,. \tag{2}$$

Nous posons alors

$$P\tau^p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \left(\pi_1 A_{\nu_0}, \ldots, \pi_1 A_{\nu_i}, \pi_2 A_{\nu_i}, \ldots, \pi_2 A_{\nu_p}\right). \tag{3}$$

En vertu de la convention faite au paragraphe 16, le second membre de (3) est toujours une $(p + 1, \mathfrak{K})$-chaîne [dépendant essentiellement du choix de l'arrangement (1)].

Soient $\tau_1^p, \ldots, \tau_\beta^p$ tous les $(p, \mathfrak{L})$-simplexes, rangés arbitrairement mais orientés (pour $p \geqq 1$) en accord avec (2). Lorsque $C^p(\mathfrak{L}) = \sum_{k=1}^{\beta} r_k \tau_k^p$ est une $(p, \mathfrak{L})$-chaîne arbitraire, nous posons

$$P\, C^p(\mathfrak{L}) = \sum_{k=1}^{\beta} r_k\,.\, P\tau_k^p\,, \tag{4}$$

de sorte que $P\,C^p(\mathfrak{L})$ est une $(p+1, \mathfrak{K})$-chaîne. Nous avons

$$P[C^p(\mathfrak{L}) + D^p(\mathfrak{L})] = P\,C^p(\mathfrak{L}) + P\,D^p(\mathfrak{L}),\qquad (5)$$
$$P[a\,C^p(\mathfrak{L})] = a[P\,C^p(\mathfrak{L})].$$

Revenons aux formules (2) et (3).

D'après 5(2) (cf. 16), nous avons

$$F(\pi_1 A_{v_0}, \ldots, \pi_1 A_{v_i}, \pi_2 A_{v_i}, \ldots, \pi_2 A_{v_p}) =$$
$$= \sum_{j=0}^{i} (-1)^j (\pi_1 A_{v_0}, \ldots, \pi_1 A_{v_i}, \pi_2 A_{v_i}, \ldots, \pi_2 A_{v_p})_j -$$
$$- \sum_{j=i}^{p} (-1)^j (\pi_1 A_{v_0}, \ldots, \pi_1 A_{v_i}, \pi_2 A_{v_i}, \ldots, \pi_2 A_{v_p})^j,$$

où l'indice j signifie s'il se trouve en bas qu'il faut omettre le sommet $\pi_1 A_{v_j}$, et s'il se trouve en haut qu'il faut omettre le sommet $\pi_2 A_{v_j}$. Donc

$$FP\tau^p = \sum_{i=0}^{p} (\pi_1 A_{v_0}, \ldots, \pi_1 A_{v_i}, \pi_2 A_{v_i}, \ldots, \pi_2 A_{v_p})_i -$$
$$- \sum_{i=0}^{p} (\pi_1 A_{v_0}, \ldots, \pi_1 A_{v_i}, \pi_2 A_{v_i}, \ldots, \pi_2 A_{v_p})^i +$$
$$+ \sum_{0 \leqq j < i \leqq p} (-1)^{i+j} (\pi_1 A_{v_0}, \ldots, \pi_1 A_{v_i}, \pi_2 A_{v_i}, \ldots, \pi_2 A_{v_p})_j -$$
$$- \sum_{0 \leqq j < i \leqq p} (-1)^{i+j} (\pi_1 A_{v_0}, \ldots, \pi_1 A_{v_i}, \pi_2 A_{v_i}, \ldots, \pi_2 A_{v_p})^j =$$
$$= S_1 - S_2 + S_3 - S_4.$$

Evidemment

$$S_1 - S_2 = \pi_2 \tau^p - \pi_1 \tau^p.$$

Si $p = 0$, nous avons $S_3 - S_4 = 0$. Si $p \geqq 1$, le somme des termes de $S_3 - S_4$ qui correspondent à une certaine valeur de l'indice est manifestement égale à $(-1)^{j+1} P\tau_j^{p-1}$, où $\tau_j^{p-1} = (A_{v_0}, \ldots, A_{v_p})_j$; l'indice j signifie qu'il faut omettre le sommet A_{v_j}. D'après (4) et 5(2), nous avons donc $S_3 - S_4 = -PF\tau^p$, de sorte que pour $p \geqq 1$ nous avons

$$FP\tau^p = \pi_2 \tau^p - \pi_1 \tau^p - PF\tau^p.$$

Donc, en général, nous avons pour toute $(p, \mathfrak{L})$-chaîne $C^p(\mathfrak{L})$: 1° si $p = 0$, alors

$$FP\,C^0(\mathfrak{L}) = \pi_2\,C^0(\mathfrak{L}) - \pi_1\,C^0(\mathfrak{L}),\qquad (6)$$

2° si $p \geqq 1$, alors

$$FP\,C^p(\mathfrak{L}) = \pi_2\,C^p(\mathfrak{L}) - \pi_1\,C^p(\mathfrak{L}) - PF\,C^p(\mathfrak{L}).\qquad (7)$$

III. Réseaux

1. J'ai fait l'exposé de la notion générale *d'espace* (*topologique*) R au paragraphe 1 de non travail *Sur les ensembles connexes irréductibles entre n points* (ce vol., p. 49). Rappelons (cf. loc. cit., § 5) que chaque partie d'un espace forme elle-même un espace.

2. Soit R un espace. *Un réseau* (*dans l'espace* R) c'est une classe finie $\mathfrak{U}$ d'ensembles non-vides $U_1, U_2, \ldots, U_m$, ouverts dans R, (appelés *sommets du réseau*) telle que $\sum_{i=1}^{m} U_i = R$. Les sommets $U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \ldots, U_{\nu_p}$ (distincts) du réseau de R forment un $(p, \mathfrak{U})$-*simplexe* si et seulement si l'ensemble

$$\prod_{i=0}^{p} U_{\nu_i} \tag{1}$$

est $\neq \emptyset$. Les conditions II 1.1 et 1.2 sont satisfaites de sorte que *le réseau est un complexe*. L'ensemble (1) s'appelle *noyau du* $(p, \mathfrak{U})$-*simplexe* $(U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \ldots, U_{\nu_p})$.

3. Soit S un ensemble fermé dans R. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R. Par $\mathfrak{U}(S)$ nous désignons le sous-complexe (voir II, 7) du réseau $\mathfrak{U}$ défini comme suit: un $(p, \mathfrak{U})$-simplexe est simplexe du complexe $\mathfrak{U}(S)$ si et seulement si son noyau K coupe S (c'est-à-dire si $KS \neq \emptyset$). Nous voyons aisément que $\mathfrak{U}(S)$ est vraiment un sous-complexe du réseau $\mathfrak{U}$.

Soit $C^p(\mathfrak{U})$ une $(p, \mathfrak{U})$-chaîne (voir II 3). Au lieu de $C^p(\mathfrak{U}) \subset \mathfrak{U}(S)$ (cf. II 7) nous écrivons $C^p(\mathfrak{U}) \subset S$ et nous disons que $C^p(\mathfrak{U})$ *est situé dans* S.[20] Donc $[\sigma_1^p, \ldots, \sigma_{\alpha_p}^p$ désignant, comme dans II, 3, tous les $(p, \mathfrak{U})$-simplexes$]$ on a $\sum_{i=1}^{\alpha_p} r_i \sigma_i^p \subset S$ si et seulement si pour tout i on a ou bien $r_i = 0$, ou bien $SK_i \neq \emptyset$ où K_i est le noyau du simplexe σ_i^p. Evidemment, lorsque $S \subset T \subset R$ (S et T étant fermés dans R), alors $C^p(\mathfrak{U}) \subset S$ implique $C^p(\mathfrak{U}) \subset T$. Par contre, si $C^p(\mathfrak{U}) \subset S_1$, $C^p(\mathfrak{U}) \subset S_2$ (S_1 et S_2 étant fermés dans R), on peut ne pas avoir $C^p(\mathfrak{U}) \subset S_1 S_2$. Au lieu d'écrire $C^p(\mathfrak{U}) = D^p(\mathfrak{U}) \bmod \mathfrak{U}(S)$ (cf. II 7) nous écrivons $C^p(\mathfrak{U}) = D^p(\mathfrak{U}) \bmod S$.

D'une manière analogue, $C^p(\mathfrak{U})$ est un $(p, \mathfrak{U})$-cycle mod S si c'est un $(p, \mathfrak{U})$-cycle mod $\mathfrak{U}(S)$ (voir II, 12). Si $C^p(\mathfrak{U})$, $D^p(\mathfrak{U})$ sont deux $(p, \mathfrak{U})$-cycles mod S, alors $C^p(\mathfrak{U}) \sim D^p(\mathfrak{U}) \bmod S$ signifie que $C^p(\mathfrak{U}) \sim D^p(\mathfrak{U}) \bmod \mathfrak{U}(S)$ (voir II, 13). Si $C^p(\mathfrak{U})$ et $D^p(\mathfrak{U})$ sont deux $(p, \mathfrak{U})$-cycles mod S dans T (S et T étant fermés dans R, $S \subset T$), alors $C^p(\mathfrak{U}) \sim D^p(\mathfrak{U}) \bmod S$ dans T signifie que $C^p(\mathfrak{U}) \sim D^p(\mathfrak{U}) \bmod \mathfrak{U}(S)$ dans $\mathfrak{U}(T)$ (voir II, 14).

Remarquons le cas particulier de $(p, \mathfrak{U})$-cycles absolus ($S = \emptyset$).

4. Un réseau $\mathfrak{B}$ s'appelle *raffinement du réseau* $\mathfrak{U}$, lorsque chaque sommet du réseau $\mathfrak{B}$ fait partie d'un sommet du réseau $\mathfrak{U}$.

[20] Lorsque U est un sommet du réseau $\mathfrak{U}$ et $\sigma^0 = (U)$ le $(0, \mathfrak{U})$-simplexe qui lui correspond [en raison de la convention adoptée dans II, 3, σ^0 est une $(0, \mathfrak{U})$-chaîne], alors $\sigma^0 \subset S$ ne signifie point que $U \subset S$, mais seulement $US \neq \emptyset$.

4.1. *Si* $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_m$ *est un système fini de réseaux donné, il existe un réseau* $\mathfrak{V}$ *qui est le raffinement de chacun des réseaux donnés.*

Démonstration. Nous pouvons prendre pour $\mathfrak{V}$ le réseau dont les sommets sont $\prod_{i=1}^{m} U_i$, les U_i étant tous les sommets du réseau $\mathfrak{U}_i$, mais où nous éliminons les valeurs pour lesquelles $\prod_{i=1}^{m} U_i = \emptyset$.

5. Soit R un espace, soit S un ensemble fermé dans R. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R; soient $U_1, U_2, \ldots, U_\alpha$ ses sommets. Si nous prenons alors les ensembles $SU_1, SU_2, \ldots$ $\ldots, SU_\alpha$, ommettons les ensembles vides et éliminons toutes les répétitions, ces ensembles formeront un réseau dans l'espace S; nous le désignerons par $S\mathfrak{U}$.

La proposition suivante est évidente:

5.1. *Soit* $\mathfrak{V}$ *un raffinement du réseau* $\mathfrak{U}$ *dans l'espace* R; *alors* $S\mathfrak{V}$ *est un raffinement du réseau* $S\mathfrak{U}$.

5.2. *Soit* $\mathfrak{U}_0$ *un réseau dans* S; *il existe alors un réseau* $\mathfrak{U}$ *dans* R *tel que* $\mathfrak{U}_0 = S\mathfrak{U}$.

Démonstration. Soient $U_{01}, U_{02}, \ldots, U_{0\alpha}$ les sommets du réseau $\mathfrak{U}_0$. Alors il existe des ensembles $U_1, U_2, \ldots, U_\alpha$ ouverts dans R et tels que $U_{0\iota} = SU_i$. Les ensembles $U_1, U_2, \ldots, U_\alpha$ et $R - S$ (dont le dernier disparaît dans le cas banal de $R = S$) sont les sommets du réseau $\mathfrak{U}$ cherché.

5.3. *Soit* $\mathfrak{U}$ *un réseau dans* R; *soit* $\mathfrak{U}_0 = S\mathfrak{U}$, *soit* $\mathfrak{V}_0$ *un raffinement de* $\mathfrak{U}_0$. *Il existe alors un raffinement* $\mathfrak{V}$ *du réseau* $\mathfrak{U}$ *tel que* $\mathfrak{V}_0 = S\mathfrak{V}$.

Démonstration. Soient $V_{01}, V_{02}, \ldots, V_{0\beta}$ tous les sommets du réseau $\mathfrak{V}_0$. Alors pour $1 \leqq i \leqq \beta$ on peut trouver un sommet U_{0i} du réseau $\mathfrak{U}_0$ tel que $V_{0\iota} \subset U_{0i}$ puis un sommet U'_i du réseau $\mathfrak{U}$ tel que $U_{0i} = SU'_i$ et enfin un ensemble W_i ouvert dans R tel que $V_{0i} = SW_i$. Soient $U_1, U_2, \ldots, U_\alpha$ tous les sommets du réseau $\mathfrak{U}$. Les ensembles

$$U'_1 W_1, U'_2 W_2, \ldots, U'_\beta W_\beta, U_1 - S, U_2 - S, \ldots, U_\alpha - S\,,$$

(nous omettons les ensembles vides et ne comptons chacun qu'une seule fois) sont les sommets du réseau $\mathfrak{V}$ cherché.

6. Soit $\mathfrak{V}$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$ dans l'espace R. A chaque sommet V du réseau $\mathfrak{V}$ nous pouvons associer un sommet $U = \pi V$ du réseau $\mathfrak{U}$ tel que $V \subset U$. L'opération π s'appelle *projection du réseau* $\mathfrak{V}$ *dans le réseau* $\mathfrak{U}$; nous employons la notation $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Les réseaux $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ étant donnés, il peut exister plusieurs projections π.

La projection π *est une application simplicielle* (voir II, 17) *du réseau* $\mathfrak{V}$ *dans le réseau* $\mathfrak{U}$. Quand S est fermé dans R et que τ^p est un $(p, \mathfrak{V})$-simplexe, alors $\pi\tau^p$ (voir II, 17) est ou bien vide, ou bien c'est un $(p, \mathfrak{V})$-simplexe, dont le noyau coupe S, car il contient, en tant qu'un sous-ensemble, le noyau du simplexe τ^p. Donc si $C^p(\mathfrak{B})$ est une $(p, \mathfrak{B})$-chaîne située dans S (voir 2), alors la $(p, \mathfrak{U})$-chaîne $\pi\, C^p(\mathfrak{B})$ est située dans S. Compte tenu de la formule II, 17, (2), il en résulte ensuite:

Soit $S \subset T \subset R$, les ensembles S et T étant fermés dans R. Si $C^p(\mathfrak{B})$ est un $(p, \mathfrak{B})$-cycle mod S dans T, alors $\pi\, C^p(\mathfrak{B})$ est un $(p, \mathfrak{U})$-cycle mod S dans T. Si $C^p(\mathfrak{B}) \sim$ $\sim D^p(\mathfrak{B})$ mod S dans T, alors $\pi\, C^p(\mathfrak{B}) \sim \pi\, D^p(\mathfrak{B})$ mod S dans T.

En particulier: Soit S fermé dans R. Lorsque $C^p(\mathfrak{B})$ est un $(p, \mathfrak{B})$-cycle mod S, alors $\pi\, C^p(\mathfrak{B})$ est un $(p, \mathfrak{U})$-cycle mod S. Lorsque $C^p(\mathfrak{B}) \sim D^p(\mathfrak{B})$ mod S, alors $\pi\, C^p(\mathfrak{B}) \sim \pi\, D^p(\mathfrak{B})$ mod S.

Lorsque $C^p(\mathfrak{B})$ est un $(p, \mathfrak{B})$-cycle absolu, alors $\pi\, C^p(\mathfrak{B})$ est un $(p, \mathfrak{U})$-cycle absolu. Si $C^p(\mathfrak{B}) \sim D^p(\mathfrak{B})$, alors $\pi\, C^p(\mathfrak{B}) \sim \pi\, D^p(\mathfrak{B})$. Lorsque S est fermé dans R et que $C^p(\mathfrak{B})$ est un $(p, \mathfrak{B})$-cycle absolu dans S, alors $\pi\, C^p(\mathfrak{B})$ est un $(p, \mathfrak{U})$-cycle absolu dans S. Si $C^p(\mathfrak{B}) \sim D^p(\mathfrak{B})$ dans, S, alors $\pi\, C^p(\mathfrak{B}) \sim \pi\, D^p(\mathfrak{B})$ dans S.

7. *Soit $S \subset T \subset R$, les ensembles S, T étant fermés dans R. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R, soit $\mathfrak{B}$ un de ses raffinements. Soit* $\pi_1 = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$, $\pi_2 = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. *Soit enfin $C^p(\mathfrak{B})$ un $(p, \mathfrak{B})$-cycle* mod S *dans T. Alors*

$$\pi_1\, C^p(\mathfrak{B}) \sim \pi_2\, C^p(\mathfrak{B}) \bmod S \text{ dans } T. \tag{1}$$

Remarquons les cas spéciaux: 1° $T = R$; 2° $S = \emptyset$; 3° $S = \emptyset$, $T = R$.

Démonstration. Il est aisé de voir que π_1 et π_2 sont deux applications simplicielles voisines (voir II, 18) du réseau $\mathfrak{B}$ dans le réseau $\mathfrak{U}$. Donc, d'après II, 18, (7) et (6) nous avons

$$P\, C^p(\mathfrak{B}) \to \pi_2\, C^p(\mathfrak{B}) - \pi_1\, C^p(\mathfrak{B}) - PF\, C^p(\mathfrak{B})\,,$$

où le dernier terme disparaît pour $p = 0$. Comme $C^p(\mathfrak{B}) \subset T$ et (pour $p > 0$) $F\, C^p(\mathfrak{B}) \subset S$, il résulte facilement de II, 18, (3) que $P\, C^p(\mathfrak{B}) \subset T$ et (pour $p > 0$) $PF\, C^p(\mathfrak{B}) \subset S$. Donc (1) a lieu.

8. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R. Soit $S \subset T \subset R$, les ensembles S et T étant fermés dans R. Nous disons que $C^p(\mathfrak{U})$ est un $(p, \mathfrak{U})$-*cycle essentiel* mod S dans T (pour $T = R$: un $(p, \mathfrak{U})$-*cycle essentiel* mod S; pour $S = \emptyset$: un $(p, \mathfrak{U})$-cycle essentiel absolu dans T; pour $S = \emptyset$, $T = R$: un $(p, \mathfrak{U})$-cycle essentiel absolu) lorsque non seulement $C^p(\mathfrak{U})$ est un $(p, \mathfrak{U})$-cycle mod S dans T mais qu'il existe pour chaque raffinement $\mathfrak{B}$ du réseau $\mathfrak{U}$ un $(p, \mathfrak{B})$-cycle $C^p(\mathfrak{B})$ mod S dans T tel que $\pi\, C^p(\mathfrak{B}) \sim$ $\sim C^p(\mathfrak{U})$ mod S dans T. Ici $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$, le choix propre de la projection π ne joue ici (et pour la plupart dans la suite non plus) aucun rôle important, en vertu de 7 (1).

Manifestement, les $(p, \mathfrak{U})$-*cycles essentiels* mod S *dans T forment un sous-module du module des $(p, \mathfrak{U})$-cycles* mod S *dans T.*

8.1. *Tout $(0, \mathfrak{U})$-cycle* mod S *dans T est essentiel.*

Démonstration. Soient $U_1, \ldots, U_m$ les sommets du réseau $\mathfrak{U}$ qui coupent T. Pour $1 \leqq i \leqq m$ choisissons un point $a_i \in U_i T$. Soit $C^0(\mathfrak{U})$ un $(0, \mathfrak{U})$-cycle mod S

dans T, alors $C^0(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{m} r_i(U_i)$. Soit $\mathfrak{V}$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$, soit $\pi = $ $= \mathrm{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Pour $1 \leqq i \leqq m$, choisissons le sommet V_i du réseau $\mathfrak{V}$ de façon à avoir $a_i \in V_i$, donc $V_i T \neq \emptyset$, et $C^0(\mathfrak{V}) = \sum_{i=1}^{m} r_i(V_i)$ est un $(0, \mathfrak{V})$-cycle mod S dans T. Comme $a_i \in U_i \,.\, \pi V_i$, nous avons ou bien $(U_i, \pi V_i) = \emptyset$ (voir II, 16), ou bien $(U_i, \pi V_i)$ est un $(1, \mathfrak{U})$-simplexe situé dans T. D'après 5(2) nous avons

$$\sum_{i=1}^{m} r_i(U_i, \pi V_i) \to \pi\, C^0(\mathfrak{V}) - C^0(\mathfrak{U})\,,$$

donc $\pi\, C^0(\mathfrak{V}) \sim C^0(\mathfrak{U})$ dans T, donc a fortiori $\pi\, C^0(\mathfrak{V}) \sim C^0(\mathfrak{U})$ mod S dans T.

8.2. *Soit $\mathfrak{U}_2$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_1$; soit $\pi_{21} =$ Pr. $(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$. Si $C^p(\mathfrak{U}_2)$ est un $(p, \mathfrak{U}_2)$-cycle essentiel* mod *S dans T, alors $\pi_{21}\, C^p(\mathfrak{U}_2)$ est un $(p, \mathfrak{U}_1)$-cycle essentiel* mod *S dans T.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{U}_3$ un raffinement arbitraire du réseau $\mathfrak{U}_1$; soit $\pi_{31} = $ $= \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_1)$. Nous avons à montrer qu'il existe un $(p, \mathfrak{U}_3)$-cycle mod S dans T tel que $\pi_{31}\, C^p(\mathfrak{U}_3) \sim \pi_{21}\, C^p(\mathfrak{U}_2)$ mod S dans T. Soit (voir 4.1) $\mathfrak{U}_4$ un réseau, raffinement commun des réseaux $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_3$; soit $\pi_{42} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{43} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_3)$. Comme $C^p(\mathfrak{U}_2)$ est un $(p, \mathfrak{U}_2)$-cycle essentiel mod S dans T, il existe un $(p, \mathfrak{U}_4)$-cycle $C^p(\mathfrak{U}_4)$ mod S dans T tel que $\pi_{42}\, C^p(\mathfrak{U}_4) \sim C^p(\mathfrak{U}_2)$ mod S dans T. D'après 6 nous avons $\pi_{21}\pi_{42}\, C^p(\mathfrak{U}_4) \sim \pi_{21}\, C^p(\mathfrak{U}_2)$ mod S dans T[21]. D'après 7(1) nous avons $\pi_{21}\pi_{42}\, C^p(\mathfrak{U}_4) \sim \pi_{31}\pi_{43}\, C^p(\mathfrak{U}_4)$ mod S dans T, car $\pi_{21}\pi_{42} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{31}\pi_{43} = $ $= \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_1)$. Donc $\pi_{31}\pi_{43}\, C^p(\mathfrak{U}_4) \sim \pi_{21}\, C^p(\mathfrak{U}_2)$ mod S dans T, de sorte qu'il suffit de poser $C^p(\mathfrak{U}_3) = \pi_{43}\, C^p(\mathfrak{U}_4)$.

9. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R. Soit $S \subset T \subset R$, les ensembles S et T étant fermés dans R. Nous disons que $\mathfrak{V}$ est un *raffinement du réseau $\mathfrak{U}$ normal par rapport aux p-cycles* mod *S dans T* [pour $T = R$: *par rapport aux p-cycles* mod S; pour $S = \emptyset$: *par rapport aux p-cycles absolus dans T*; pour $S = \emptyset$, $T = R$: *par rapport aux p-cycles absolus*] lorsque non seulement $\mathfrak{V}$ est un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$, mais aussi chaque fois que $C^p(\mathfrak{V})$ est un $(p, \mathfrak{V})$-cycle mod S dans T, alors $\pi\, C^p(\mathfrak{V})$, où $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, est un $(p, \mathfrak{U})$-cycle essentiel mod S dans T. Le choix de π n'a aucune importance en vertu de 7(1).

Il découle de 8.1:

9.1. *Tout raffinement du réseau $\mathfrak{U}$ est normal par rapport aux $(0, \mathfrak{U})$-cycles* mod *S dans T.*

Il s'ensuit de 8.2:

9.2. *Soit $\mathfrak{U}_2$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_1$. Soit $\mathfrak{U}_3$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_2$, normal par rapport aux p-cycles* mod *S dans T. Alors $\mathfrak{U}_3$ est un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_1$ normal par rapport aux p-cycles* mod *S dans T.*

[21] $\pi_{21}\pi_{42}$ signifie qu'on procède d'abord à la projection π_{42} et puis à la projection π_{21}.

La proposition suivante est évidente:

9.3. *Soit* $\mathfrak{U}_2$ *un raffinement du réseau* $\mathfrak{U}_1$ *normal par rapport aux p-cycles* mod S *dans* T. *Soit* $\mathfrak{U}_3$ *un raffinement du réseau* $\mathfrak{U}_2$. *Alors* $\mathfrak{U}_3$ *est un raffinement du réseau* $\mathfrak{U}_1$ *normal par rapport aux p-cycles* mod S *dans* T.

10. *Soit* $\mathfrak{U}$ *un réseau dans* R. *Soient* S, T *deux ensembles fermés dans* R, $S \subset \subset T \subset R$. *Soit* $p = 0, 1, 2, \ldots$ *Il existe alors un raffinement du réseau* $\mathfrak{U}$, *normal par rapport aux p-cycles* mod S *dans* T.

Démonstration. Pour tout raffinement $\mathfrak{V}$ du réseau $\mathfrak{U}$ soit $\mathfrak{M}(\mathfrak{V})$ l'ensemble de tous les $(p, \mathfrak{U})$-cycles $C^p(\mathfrak{U})$ mod S dans T tels que pour toute $\pi = \mathfrak{P}\mathrm{r}.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$ [le choix de π n'étant pas important, en vertu de 7(1)] il existe un $(p, \mathfrak{V})$-cycle $C^p(\mathfrak{V})$ mod S dans T tel que $\pi\, C^p(\mathfrak{V}) \sim C^p(\mathfrak{U})$ mod S dans T. Il est évident que $\mathfrak{M}(\mathfrak{V})$ est un sous-module du module $\mathfrak{M}_p$ de toutes les $(p, \mathfrak{U})$-chaînes. Comme (voir II, 3) $\mathfrak{M}_p$ est un module fini, $\mathfrak{M}(\mathfrak{V})$ est aussi un module fini (voir I, 19). Soit $h(\mathfrak{V})$ le rang du module $\mathfrak{M}(\mathfrak{V})$.

Si $\mathfrak{V}$ est un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{W}$ un raffinement du réseau $\mathfrak{V}$, il est évident que $\mathfrak{M}(\mathfrak{W})$ est un sous-module du module $\mathfrak{M}(\mathfrak{V})$, de façon que (cf. I, 19) $h(\mathfrak{W}) \leqq \leqq h(\mathfrak{V})$.

Choisissons maintenant un raffinement $\mathfrak{U}_1$ du réseau $\mathfrak{U}$ d'une telle manière que le nombre $h(\mathfrak{U}_1)$ soit le plus petit possible. Nous allons démontrer que $\mathfrak{U}_1$ est un raffinement de $\mathfrak{U}$ normal par rapport aux p-cycles mod S dans T.

Soit $\pi_{10} = \mathrm{Pr}.(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U})$. Soit $C^p(\mathfrak{U}_1)$ un $(p, \mathfrak{U}_1)$-cycle mod S dans T. Nous avons à montrer que $\pi_{10}\, C^p(\mathfrak{U}_1)$ est un $(p, \mathfrak{U})$-cycle essentiel mod S dans T, c'est-à-dire: si $\mathfrak{U}_2$ est un raffinement arbitraire du réseau $\mathfrak{U}$ et $\pi_{20} = \mathrm{Pr}.(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U})$, il existe un $(p, \mathfrak{U}_2)$-cycle $C^p(\mathfrak{U}_2)$ mod S dans T tel que $\pi_{20}\, C^p(\mathfrak{U}_2) \sim \pi_{10}\, C^p(\mathfrak{U}_1)$ mod S dans T. Soit (voir 4.1) $\mathfrak{U}_3$ un raffinement commun des deux réseaux $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$. Alors le module $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_3)$ est sous-module des deux modules $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_1)$ et $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_2)$, de sorte que $h(\mathfrak{U}_3) \leqq h(\mathfrak{U}_1)$, $h(\mathfrak{U}_3) \leqq h(\mathfrak{U}_2)$. Mais le nombre $h(\mathfrak{U}_1)$ est le plus petit possible, nous ne pouvons donc avoir $h(\mathfrak{U}_3) < h(\mathfrak{U}_1)$, donc $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_3) = \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_1)$, d'après I, 19. Or, $\pi_{10}\, C^p(\mathfrak{U}_1) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_1)$, donc $\pi_{10}\, C^p(\mathfrak{U}_1) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_3)$; d'où il résulte que $\pi_{10}\, C^p(\mathfrak{U}_1) \in \in \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_2)$, car $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_3)$ est un sous-module du module $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_2)$. Il existe donc un $(p, \mathfrak{U}_2)$-cycle $C^p(\mathfrak{U}_2)$ mod S dans T tel que $\pi_{20}\, C^p(\mathfrak{U}_2) \sim \pi_{10}\, C^p(\mathfrak{U}_1)$ mod S dans T.

IV. Caractères combinatoires d'un espace

1. Soit R un espace. Soient S, T deux ensembles fermés dans R, $S \subset T$. Soit $p = 0, 1, 2, \ldots$ Nous appelons (p, R)-*cycle* mod S *dans* T [pour $T = R$: (p, R)-*cycle* mod S; pour $S = \emptyset$: (p, R)-*cycle absolu dans* T; pour $S = \emptyset$, $T = R$: (p, R)-*cycle absolu*] toute fonction ayant pour son domaine l'ensemble de tous les réseaux dans R et dont la valeur $C^p(\mathfrak{U})$ en chaque réseau $\mathfrak{U}$ est un $(p, \mathfrak{U})$-cycle mod S dans T, la condition suivante étant vérifiée: Si $\mathfrak{V}$ est un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$ et $\pi = \mathrm{Pr}.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$,

alors $\pi\, C^p(\mathfrak{U}) \sim C^p(\mathfrak{U})$ mod S dans T. Le choix de la projection π est sans importance en raison de III, 7.

Nous dénoterons les (p, R)-cycles par C^p, C_1^p, D^p, Γ^p, etc. Si p. ex. C^p est un (p, R)-cycle mod S dans T, alors, pour tout réseau $\mathfrak{U}$, $C^p(\mathfrak{U})$ désigne le $(p, \mathfrak{U})$-cycle mod S dans T correspondant (c'est la valeur de la fonction C^p en $\mathfrak{U}$).

1.1. *Soit* C^0 *un* $(0, R)$*-cycle absolu. Le nombre* $J[C^0(\mathfrak{U})]$ (voir II, 6) *ne dépend pas du choix du réseau* $\mathfrak{U}$.

Nous écrirons donc $J(C^0) = J[C^0(\mathfrak{U})]$.

Démonstration. Soient $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ deux réseaux donnés. Soit $\mathfrak{U}_3$ un raffinement des deux réseaux $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$; soit $\pi_1 = \text{Pr.}\ (\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_2 = \text{Pr.}\ (\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$. Alors $\pi_1 C^0(\mathfrak{U}_3) \sim C^0(\mathfrak{U}_1)$, $\pi_2\, C^0(\mathfrak{U}_3) \sim C^0(\mathfrak{U}_2)$, donc $J[C^0(\mathfrak{U}_3)] = J[C^0(\mathfrak{U}_2)]$, $J[C^0(\mathfrak{U}_3)] = J[C^0(\mathfrak{U}_1)]$ d'après II, 6 (1), 11 et 17(3).

Si C^p et D^p sont deux (p, R)-cycles mod S dans T et $a \in \mathfrak{R}$, nous définissons les (p, R)-cycles $E^p = C^p + D^p$, $\Gamma^p = aC^p$ mod S dans T de la façon suivante:

$E^p(\mathfrak{U}) = C^p(\mathfrak{U}) + D^p(\mathfrak{U})$, $\Gamma^p(\mathfrak{U}) = a\, C^p(\mathfrak{U})$ pour tout réseau $\mathfrak{U}$. Par rapport à ces définitions les (p, R)-cycles mod S dans T forment un module.

2. Si C^p est un (p, R)-cycle mod S dans T, alors $C^p \sim 0$ mod S dans T signifie que $C^p(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod S dans T pour tout réseau $\mathfrak{U}$. Si C^p et D^p sont deux (p, R)-cycles mod S dans T, alors $C^p \sim D^p$ mod S dans T signifie que $C^p - D^p \sim 0$ mod S dans T, donc que $C^p(\mathfrak{U}) \sim D^p(\mathfrak{U})$ mod S dans T pour tout réseau $\mathfrak{U}$.

L'ensemble $\mathfrak{N}^p$ de tous les (p, R)-cycles mod S dans T homologues à zéro mod S dans T est évidemment un sous-module du module $\mathfrak{M}^p$ de tous les (p, R)-cycles mod S dans T. Donc (voir I, 24) $\mathfrak{M}^p - \mathfrak{N}$ est aussi un module; soit $B^p(R, T, S)$ son rang. Nous posons $B^p(R, S) = B^p(R, R, S)$, $B^p(R) = B^p(R, \emptyset) = B^p(R, R, \emptyset)$. Le nombre $B^p(R, S)$ s'appelle $p^{\text{ème}}$ *nombre de Betti relatif de l'espace* R mod S. Le nombre $B^p(R)$ s'appelle $p^{\text{ème}}$ *nombre de Betti absolu de l'espace* R.

En vertu de I, 13, 16 et 17, nous avons:

2.1. *On a* $B^p(R, T, S) = 0$ *si et seulement si chaque* (p, R)*-cycle* mod S *dans* T *est homologue à zéro* mod S *dans* T.

2.2. *On a* $B^p(R, T, S) = m\ (= 1, 2, \ldots)$ *si et seulement si, il existe des* (p, R)*-cycles* C_i^p $(1 \leqq i \leqq m)$ mod S *dans* T *tels que*: 1° *à tout* (p, R)*-cycle* Γ^p mod S *dans* T *on peut associer des nombres rationnels* $r_1, \ldots, r_m$ *tels que* $\Gamma^p \sim \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p$ mod S *dans* T; 2° $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p \sim 0$ mod S *dans* T *implique* $r_1 = \ldots = r_m = 0$.

2.3. *On a* $B^p(R, T, S) = \infty$ *si, et seulement si, il existe une suite infinie* C_1^p, C_2^p, $C_3^p, \ldots$ *de* (p, R)*-cycles* mod S *dans* T *telle que* $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p \sim 0$ mod S *dans* T *implique toujours* $r_1 = \ldots = r_m = 0$ $(m = 1, 2, \ldots, r_i \in \mathfrak{R})$.

3. Soient S, T deux ensembles fermés dans R, $S \subset T$.

Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R; $\mathfrak{U}_0$ un réseau dans T, $\mathfrak{U}_0 = T\mathfrak{U}$ (voir III, 5). Soient $U_1, U_2, \ldots, U_m$ les sommets du réseau $\mathfrak{U}$ qui coupent T; alors $TU_1, TU_2, \ldots, TU_m$ sont tous sommets du réseau $\mathfrak{U}_0$; pour $i \neq k$ on a $U_i \neq U_k$, mais on peut avoir $TU_i = TU_k$. Lorsque $C^p(\mathfrak{U}) = \sum r_{v_0v_1\ldots v_p}(U_{v_0}, U_{v_1}, \ldots, U_{v_p})$ est une $(p, \mathfrak{U})$-chaîne arbitraire dans T, alors (voir II, 16) $\sum r_{v_0v_1\ldots v_p}(TU_{v_1}, TU_{v_2}, \ldots, TU_{v_p})$ est une $(p, \mathfrak{U}_0)$-chaîne que nous désignerons par $(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U})$. Evidemment, l'opération $(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)$ est une application homomorphe du module de toutes les $(p, \mathfrak{U})$-chaînes situées dans T sur le module de toutes les $(p, \mathfrak{U}_0)$-chaînes. Manifestement

(1) $$J[C^0(\mathfrak{U})] = J[(\mathfrak{U}) \mid \mathfrak{U}_0)\, C^0(\mathfrak{U})]\,.$$

Evidemment:

si $C^p(\mathfrak{U})$ *est un* $(p, \mathfrak{U})$*-cycle* mod S *dans* T, *alors*

(2) $$(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}) \textit{ est un } (p, \mathfrak{U}_0)\textit{-cycle} \bmod S\,.$$

La réciproque n'est pas toujours vraie, mais, évidemment,

à tout $(p, \mathfrak{U}_0)$*-cycle* $C_0^p(\mathfrak{U}_0)$ mod S *on peut associer un* $(p, \mathfrak{U})$*-cycle* $C^p(\mathfrak{U})$ mod S *dans* T *tel que*

(3) $$(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}) = C_0^p(\mathfrak{U}_0)\,.$$

Ensuite nous avons:

lorsque $C^p(\mathfrak{U})$ *et* $D^p(\mathfrak{U})$ *sont deux* $(p, \mathfrak{U})$*-cycles* mod S *dans* T, *alors* $C^p(\mathfrak{U}) \sim$ $\sim D^p(\mathfrak{U})$ mod S *dans* T *si et seulement si*

(4) $$(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}) \sim (\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, D^p(\mathfrak{U}) \bmod S\,.$$

Démonstration. Si $C^p(\mathfrak{U}) \sim D^p(\mathfrak{U})$ mod S dans T, alors évidemment $(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)$ . . $C^p(\mathfrak{U}) \sim (\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, D^p(\mathfrak{U})$ mod S. Soit donc $(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}) \sim (\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, D^p(\mathfrak{U})$ mod S. Soit $T(\mathfrak{U})$ le sous-complexe du réseau $\mathfrak{U}$ défini comme dans III, 3; soient $U_1, U_2, \ldots$ $\ldots, U_m$ ses sommets. Nous pouvons supposer que les ensembles $TU_1, TU_2, \ldots$ $\ldots, TU_n$ sont tous différents et qu'on peut associer à chaque i, $(1 \leqq i \leqq m)$, un indice $f(i)$ $(1 \leqq f(i) \leqq n)$ tel que $TU_i = TU_{f(i)}$; on a bien entendu $f(i) = i$ pour $1 \leqq i \leqq n$. Pour $1 \leqq i \leqq m$ soit $\pi_1 U_i = U_i$, $\pi_2 U_i = U_{f(i)}$. Il est aisé de voir que π_1 et π_2 sont deux applications simplicielles voisines du complexe $T(\mathfrak{U})$ dans le complexe $T(\mathfrak{U})$, donc d'après II 18 (6) et (7) il existe une $(p + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $P[C^p(\mathfrak{U}) -$ $- D^p(\mathfrak{U})]$ et une $(p, \mathfrak{U})$-chaîne $PF[C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U})]$ (qui disparaît si $p = 0$) tels que

$$P[C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U})] \to \pi_2[C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U})] -$$
$$- [C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U})] - PF[C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U})]\,.$$

Comme $C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U}) \subset T$, $F[C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U})] \subset S$, nous avons

$$C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U}) \sim \pi_2[C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U})] \bmod S \text{ dans } T\,.$$

Comme $(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\,[C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U})] \sim 0 \bmod S$, il s'ensuit de la définition de l'opération π_2 que $\pi_2[C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U})] \sim 0 \bmod S$ dans T de sorte que $C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U}) \sim$ $\sim 0 \bmod S$ dans T.

Soit $\mathfrak{V}$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}_0 = T\mathfrak{V}$ est (voir III 5.1) *un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_0$.*

Soit $\pi =$ Pr. $(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, $\pi' =$ Pr. $(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{U}_0)$. *Soit $C^p(\mathfrak{V})$ un $(p, \mathfrak{V})$-cycle* mod *S dans T. Alors*

$$(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, \pi\, C^p(\mathfrak{V}) \sim \pi'(\mathfrak{V} \mid \mathfrak{V}_0)\, C^p(\mathfrak{V}) \bmod S\,. \tag{5}$$

Démonstration. Soient $V_1, V_2, \ldots, V_m$ les sommets du réseau $\mathfrak{V}$ qui coupent T. Ce sont donc les sommets du complexe $T(\mathfrak{V})$ (voir III, 3). Nous pouvons supposer que $TV_1, TV_2, \ldots, TV_n$ sont tous différents et que l'on peut associer à tout i $(1 \leqq$ $\leqq i \leqq m)$ un indice $f(i)$ $(1 \leqq f(i) \leqq n)$ tel que $TV_i = TV_{f(i)}$; on a $f(i) = i$ pour $1 \leqq i \leqq n$. Pour $1 \leqq i \leqq m$ soit $\pi_1 V_i = T\pi V_i$, $\pi_2 V_i = T\pi V_{f(i)}$. Il est évident que π_1 et π_2 sont deux applications simplicielles voisines du complexe $T\mathfrak{V}$ dans le réseau $\mathfrak{U}_0$. Pour $1 \leqq i \leqq n$ posons $\pi' TV_i = T\pi V_{f(i)}$; alors $\pi' =$ Pr. $(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{U}_0)$; en vertu de III. 7 il suffit de faire la démonstration pour ce choix particulier de la projection π'.

D'après II, 18 on a

$$FP\, C^p(\mathfrak{V}) = \pi_2\, C^p(\mathfrak{V}) - \pi_1\, C^p(\mathfrak{V}) - PF\, C^p(\mathfrak{V})\,,$$

où le dernier terme disparaît si $p = 0$. Mais $PF\, C^p(\mathfrak{V}) \subset S$, $\pi_1\, C^p(\mathfrak{V}) = (\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\,.$ $.\, \pi\, C^p(\mathfrak{V})$, $\pi_2\, C^p(\mathfrak{V}) = \pi'(\mathfrak{V} \mid \mathfrak{V}_0)\, C^p(\mathfrak{V})$.

Soit C^p un (p, R)-cycle mod *S dans T. Soient $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ deux réseaux R tels que $T\mathfrak{U}_1 = T\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_0$. Alors on a*

$$(\mathfrak{U}_1 \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}_1) \sim (\mathfrak{U}_2 \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}_2) \bmod S\,. \tag{6}$$

Démonstration. Soit (voir III, 4.1) $\mathfrak{U}_3$ un raffinement des deux réseaux $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$, de sorte que (voir III, 5.1) le réseau $\mathfrak{V}_0 = T\mathfrak{U}_3$ est un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_0$. Soit $\pi_1 =$ Pr. $(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_2 =$ Pr. $(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$, $\pi' =$ Pr. $(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{U}_0)$. Comme C^p est un (p, R)-cycle mod S dans T, nous avons $C^p(\mathfrak{U}_1) \sim \pi_1\, C^p(\mathfrak{U}_3) \bmod S$ dans T, $C^p(\mathfrak{U}_2) \sim \pi_2\, C^p(\mathfrak{U}_3) \bmod S$ dans T, donc d'après (4)

$$(\mathfrak{U}_1 \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}_1) \sim (\mathfrak{U}_1 \mid \mathfrak{U}_0)\, \pi_1\, C^p(\mathfrak{U}_3) \bmod S\,,$$
$$(\mathfrak{U}_2 \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}_2) \sim (\mathfrak{U}_2 \mid \mathfrak{U}_0)\, \pi_2\, C^p(\mathfrak{U}_3) \bmod S\,.$$

Or, d'après (5)

$$(\mathfrak{U}_1 \mid \mathfrak{U}_0)\, \pi_1\, C^p(\mathfrak{U}_3) \sim \pi'(\mathfrak{U}_3 \mid \mathfrak{V}_0)\, C^p(\mathfrak{U}_3) \bmod S\,,$$
$$(\mathfrak{U}_2 \mid \mathfrak{U}_0)\, \pi_2\, C^p(\mathfrak{U}_3) \sim \pi'(\mathfrak{U}_3 \mid \mathfrak{V}_0)\, C^p(\mathfrak{U}_3) \bmod S\,,$$

d'où

$$(\mathfrak{U}_1 \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}_1) \sim (\mathfrak{U}_2 \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}_2) \bmod S\,.$$

4. Soient à nouveau S, T deux ensembles fermés dans R, $S \subset T$. En vertu de III 5.2 nous pouvons associer à tout réseau $\mathfrak{U}_0$ dans T un réseau $\varphi\mathfrak{U}_0$ dans R d'une telle manière que nous ayons $\mathfrak{U}_0 = T\varphi\mathfrak{U}_0$. Bien entendu, la fonction φ n'est pas déterminée d'une façon univoque.

Soit C^p un (p, R)-cycle mod S dans T. A tout réseau $\mathfrak{U}_0$ dans T faisons correspondre la $(p, \mathfrak{U}_0)$-chaîne $C_0^p(\mathfrak{U}_0) = (\varphi\mathfrak{U}_0 \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\varphi\mathfrak{U}_0)$. D'après 3 (2) $C_0^p(\mathfrak{U}_0)$ est un $(p, \mathfrak{U}_0)$-cycle mod S. Soit $\mathfrak{V}_0$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_0$; soit $\pi' = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{U}_0)$. D'après III, 5.3, il existe un raffinement $\mathfrak{W}$ du réseau $\varphi\mathfrak{U}_0$ tel que $T\mathfrak{W} = \mathfrak{V}_0$. Soit $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{W}, \varphi\mathfrak{U}_0)$, donc $\pi\, C^p(\mathfrak{W}) \sim C^p(\varphi\mathfrak{U}_0)$ mod S dans T. Il en résulte d'après 3 (4)

$$(\varphi\mathfrak{U}_0 \mid \mathfrak{U}_0)\, \pi\, C^p(\mathfrak{W}) \sim C_0^p(\mathfrak{U}_0) \bmod S\,.$$

Or 3(5) entraîne

$$(\varphi\mathfrak{U}_0 \mid \mathfrak{U}_0)\, \pi\, C^p(\mathfrak{W}) \sim \pi'(\mathfrak{W} \mid \mathfrak{V}_0)\, C^p(\mathfrak{W}) \bmod S\,,$$

et d'après 3(6) nous avons $(\mathfrak{W} \mid \mathfrak{V}_0)\, C^p(\mathfrak{W}) \sim C_0^p(\mathfrak{V}_0)$ mod S, donc d'après III 6

$$\pi'(\mathfrak{W} \mid \mathfrak{V}_0)\, C^p(\mathfrak{W}) \sim \pi'\, C_0^p(\mathfrak{V}_0) \bmod S\,.$$

d'où $\pi'\, C_0^p(\mathfrak{V}_0) \sim C_0^p(\mathfrak{U}_0)$ mod S. Les chaînes $C_0^p(\mathfrak{U}_0)$ définissent donc un (p, T)-cycle C_0^p mod S; nous écrivons $C_0^p = (R \mid T)\, C^p$.

Réciproquement, soit C_0^p un (p, T)-cycle mod S. Si $\mathfrak{U}$ est un réseau arbitraire dans R choisissons d'après 3(3) un $(p, \mathfrak{U})$-cycle $C^p(\mathfrak{U})$ mod S dans T de façon

$$(\mathfrak{U} \mid T\mathfrak{U})\, C^p(\mathfrak{U}) = C_0^p(T\mathfrak{U})\,.$$

Soit $\mathfrak{V}$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$; soit $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, soit (voir III, 5.1) $\pi' = \mathrm{Pr.}\,(T\mathfrak{V}, T\mathfrak{U})$. Alors

$$\pi'\, C_0^p(T\mathfrak{V}) \sim C_0^p(T\mathfrak{U}) \bmod S\,,$$

C'est-à-dire

$$\pi'(\mathfrak{V} \mid T\mathfrak{V})\, C^p(\mathfrak{V}) \sim (\mathfrak{U} \mid T\mathfrak{U})\, C^p(\mathfrak{U}) \bmod S\,.$$

Or 3(5) entraîne

$$\pi'(\mathfrak{V} \mid T\mathfrak{V})\, C^p(\mathfrak{V}) \sim (\mathfrak{U} \mid T\mathfrak{U})\, \pi\, C^p(\mathfrak{V}) \bmod S\,,$$

d'où

$$(\mathfrak{U} \mid T\mathfrak{U})\, \pi\, C^p(\mathfrak{V}) \sim (\mathfrak{U} \mid T\mathfrak{U})\, C^p(\mathfrak{U}) \bmod S\,.$$

donc d'après 3(4) $\pi\, C^p(\mathfrak{V}) \sim C^p(\mathfrak{A})$ mod S dans T, c'est-à-dire les chaînes $C^p(\mathfrak{U})$ définissent un (p, R)-cycle C^p mod S dans T. Evidemment $(R \mid T)\, C^p = C_0^p$.

Nous voyons donc que l'opération $(R \mid T)$ est une application du module $\mathfrak{M}_p$ de tous les (p, R)-cycles C^p mod S dans T sur le module $\mathfrak{M}'_p$ de tous les (p, T)-cycles C_0^p mod S; cette application (dépendant du choix de la fonction φ) est évidemment homomorphe. Soit $\mathfrak{N}_p$ le module des C^p qui sont ~ 0 mod S dans T; soit $\mathfrak{N}'_p$ le module des C_0^p qui sont $\sim 0 \bmod S$. Si $C^p \in \mathfrak{N}_p$, 3(4) entraîne évidemment que $(R \mid T)\, C^p \in \mathfrak{N}'_p$. Réciproquement, soit $C_0^p = (R \mid T)\, C^p \in \mathfrak{N}'_p$; nous allons démontrer que $C^p \in \mathfrak{N}_p$. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau arbitraire dans R; nous avons à montrer que $C^p(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod S$ dans T. Soit $\mathfrak{U}_0 = T\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_1 = \varphi\mathfrak{U}_0$. D'après 3(6) nous avons $(\mathfrak{U}_1 \mid \mathfrak{U}_0) \,.\, C^p(\mathfrak{U}_1) \sim (\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\; C^p(\mathfrak{U}) \bmod S$; mais $(\mathfrak{U}_1 \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}_1) = C_0^p(\mathfrak{U}_0) \sim 0 \bmod S$, donc $(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}) \bmod S$, d'où $C^p(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod S$ dans T en vertu de 3(4).

Le résultat que nous venons de démontrer entraîne immédiatement que l'opération $(R \mid T)$ définit une application isomorphe du module $\mathfrak{M}_p - \mathfrak{N}_p$ sur le module $\mathfrak{M}'_p - \mathfrak{N}'_p$. Il découle de 3(6) que cet isomorphisme est indépendant du choix de la fonction φ. Or le rang du module $\mathfrak{M}_p - \mathfrak{N}_p$ égale $B^p(R, T, S)$ et le rang du module $\mathfrak{M}'_p - \mathfrak{N}'_p$ égale $B^p(T, S)$, Nous avons donc

$$B^p(T, S) = B^p(R, T, S) \tag{1}$$

et en particulier

$$B^p(T) = B^p(R, T, 0)\,. \tag{2}$$

5. *Soit R un espace. Soient S, T deux ensembles fermés dans R, $S \subset T$. A tout réseau $\mathfrak{U}$ de l'espace R soit associé un système linéaire $\Phi(\mathfrak{U})$ (voir* I, 26) *par rapport au module $\mathfrak{M}_p(\mathfrak{U})$ de tous les $(p, \mathfrak{U})$-cycles* mod *S dans T. Si $\mathfrak{B}$ est un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$, $\pi =$* Pr. $(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$ *et $C^p(\mathfrak{B}) \in \Phi(\mathfrak{B})$, alors il doit exister un $C^p(\mathfrak{U}) \in \Phi(\mathfrak{U})$ tel que $C^p(\mathfrak{U}) \sim \pi\, C^p(\mathfrak{B})$* mod *$S$ dans T.*[22] *Dans ces conditions, il existe un (p, R)-cycle Γ^p* mod *S dans T tel que pour tout réseau $\mathfrak{U}$ il existe un $C^p(\mathfrak{U}) \in \Phi(\mathfrak{U})$ tel que $\Gamma^p(\mathfrak{U}) \sim C^p(\mathfrak{U})$* mod *$S$ dans T.*

Pour faire une démonstration générale de ce théorème on a besoin des nombres transfinis; on trouve une telle démonstration au chapitre II, paragraphes 21–27 du Mémoire *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque* (Fundamenta Math., 19 (1932), 149–183; [7] 49.). Ici je vais donner la démonstration en supposant que R est un espace métrique compact.[23] Alors il existe[24] une suite $\{\mathfrak{Z}_n\}$ de réseaux telle que: 1° $\mathfrak{Z}_{n+1}$ est un raffinement de $\mathfrak{Z}_n$ (et $\pi_{n,1} =$ Pr. $(\mathfrak{Z}_{n+1}, \mathfrak{Z}_n)$); 2° si $\mathfrak{U}$ est un réseau quelconque et n suffisamment grand, alors $\mathfrak{Z}_n$ est un raffinement de $\mathfrak{U}$. Soit $\pi_{n,2} = \pi_{n,1}\pi_{n+1,1}$, $\pi_{n,3} = \pi_{n,2}\pi_{n+2,1}, \ldots$

Soit $n = 1, 2, 3, \ldots$; $k = 1, 2, 3, \ldots$ Soit $\Psi_{n,k}$ l'ensemble de tous les $(p, \mathfrak{Z}_n)$-cycles $C^p(\mathfrak{Z}_n)$ mod S dans T tels qu'il existe un $(p, \mathfrak{Z}_{n+k})$-cycle $C^p(\mathfrak{Z}_{n+k}) \in \Phi(\mathfrak{Z}_{n+k})$ mod S dans T tel que $C^n(\mathfrak{Z}_n) \sim \pi_{n,k}\, C^p(\mathfrak{Z}_{n+k})$ mod S dans T. L'ensemble $\Psi_{n,k}$ jouit évidemment de la propriété suivante, que nous exploiterons dans la suite: à chaque $C^p(\mathfrak{Z}_n) \in \Psi_{n,k}$ on peut associer $D^p(\mathfrak{Z}_n) \in \Phi(\mathfrak{Z}_n)$ d'une telle manière que l'on ait $C^p(\mathfrak{Z}_n) \sim$

[22] D'après III, 7, cette hypothèse est indépendante du choix de la projection π.

[23] On trouvera une définition de l'espace métrique compact p. ex. au chapître II, paragraphe 1 de mon article *Sur l'application de la théorie de l'homologie à la théorie de la connexité*, qui paraître sous peu (voir [16]).

[24] Voir le même article, chap. II., paragraphe 11.

$\sim D^p(\mathfrak{Z}_n)$ mod S dans T. Comme $C^p(\mathfrak{Z}_{n+k}) \in \Phi(\mathfrak{Z}_{n+k})$, il existe alors $C^p(\mathfrak{Z}_{n+k+1}) \in \in \Phi(\mathfrak{Z}_{n+k+1})$ tel que $C^p(\mathfrak{Z}_{n+k}) \sim \pi_{n+k,1}\, C^p(\mathfrak{Z}_{n+k+1})$ mod S dans T d'ou il résulte que $C^p(\mathfrak{Z}_n) \sim \pi_{n,k+1}\, C^p(\mathfrak{Z}_{n+k+1})$ mod S dans T. Donc $\Psi_{n,k} \supset \Psi_{n,k+1}$. Il est évident que chaque $\Psi_{n,k}$ est un système linéaire par rapport au module $\mathfrak{M}_p(\mathfrak{Z}_n)$. Comme $\Psi_{n,k} \supset \Psi_{n,k+1}$, il résulte de I, 27 qu'on peut associer à chaque entier $n = 1, 2, 3, \ldots$ un autre entier $f(n) = 1, 2, 3, \ldots$ tel que pour $k \geqq f(n)$ on ait $\Psi_{n,k} = \Psi_{n,f(n)}$. Posons $\Psi_n = \Psi_{n,f(n)}$.

Soit $C^p(\mathfrak{Z}_n) \in \Psi_n$. Alors pour chaque $k = 1, 2, 3, \ldots$ on a $C^p(\mathfrak{Z}_n) \in \Psi_{n,k}$, de sorte qu'il existe $C^p_k(\mathfrak{Z}_{n+k}) \in \Phi(\mathfrak{Z}_{n+k})$ tel que $C^p(\mathfrak{Z}_n) \sim \pi_{n,k}\, C^p_k(\mathfrak{Z}_{n+k})$ mod S dans T. Posons $D^p(\mathfrak{Z}_{n+1}) = \pi_{n+1,f(n+1)}\, C^p_{f(n+1)+1}(\mathfrak{Z}_{n+1+f(n+1)})$. Nous avons alors $D^p(\mathfrak{Z}_{n+1}) \in \in \Psi_{n+1}$ et $C^p(\mathfrak{Z}_n) \sim \pi_{n,1}\, D^p(\mathfrak{Z}_{n+1})$ mod S dans T.

Fixons arbitrairement $\Gamma^p(\mathfrak{Z}_1) \in \Psi_1$. Si nous avons déjà construit $\Gamma^p(\mathfrak{Z}_n) \in \Psi_n$, nous pouvons, en raison du résultat qui vient d'être établi, trouver un $\Gamma^p(\mathfrak{Z}_{n+1}) \in \in \Psi_{n+1}$ tel que $\Gamma^p(\mathfrak{Z}_n) \sim \pi_{n,1}\, \Gamma^p(\mathfrak{Z}_{n+1})$ mod S dans T. De cette façon, nous formons par récurrence une suite $\{\Gamma^p(\mathfrak{Z}_n)\}$ telle que $\Gamma^p(\mathfrak{Z}_n) \in \Psi_n$, $\Gamma^p(\mathfrak{Z}_n) \sim \pi_{n,k}\, \Gamma^p(\mathfrak{Z}_{n+k})$ mod S dans T, pour $n, k = 1, 2, 3, \ldots$ En vertu de la propriété précitée des ensembles $\Psi_{n,k}$, nous pouvons associer à chaque n un $C^p(\mathfrak{Z}_n) \in \Phi(\mathfrak{Z}_n)$ tel que $\Gamma^p(\mathfrak{Z}_n) \sim C^p(\mathfrak{Z}_n)$ mod S dans T.

Soit maintenant $\mathfrak{U}$ un réseau arbitraire dans R. Si $\mathfrak{U} = \mathfrak{Z}_n$ pour un certain n, $\Gamma^p(\mathfrak{U})$ est déjà défini. Dans le cas contraire, fixons un n tel que $\mathfrak{Z}_n$ soit un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$ et posons $\Gamma^p(\mathfrak{A}) = \pi\, \Gamma^p(\mathfrak{Z}_n)$ où $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{Z}_n, \mathfrak{U})$. Nous avons alors $\Gamma^p(\mathfrak{U}) \sim \pi\, C^p(\mathfrak{Z}_n)$ mod S dans T, $C^p(\mathfrak{Z}_n) \in \Phi(\mathfrak{Z}_n)$ de sorte qu'il existe $C^p(\mathfrak{U}) \in \Phi(\mathfrak{U})$ tel que $\Gamma^p(\mathfrak{U}) \sim C^p(\mathfrak{U})$ mod S dans T.

Soit $\mathfrak{B}$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$; soit $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Alors il existe deux entiers n, m tels que $\mathfrak{Z}_n$ est un raffinement de $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{Z}_m$ un raffinement de $\mathfrak{B}$ et que $\Gamma^p(\mathfrak{U}) = \pi'\, \Gamma^p(\mathfrak{Z}_n)$, $\Gamma^p(\mathfrak{B}) = \pi''\, \Gamma^p(\mathfrak{Z}_m)$, où $\pi' = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{Z}_n, \mathfrak{U})$, $\pi'' = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{Z}_m, \mathfrak{B})$. Soit $h > n$, $h > m$. Alors nous avons $\Gamma^p(\mathfrak{Z}_n) \sim \pi_{n,h-n}\, \Gamma^p(\mathfrak{Z}_h)$, $\Gamma^p(\mathfrak{Z}_m) \sim \pi_{m,h-m}(\mathfrak{Z}_h)$, donc $\Gamma^p(\mathfrak{B}) \sim \pi''\pi_{m,h-m}\, \Gamma^p(\mathfrak{Z}_h)$ mod S dans T, $\Gamma^p(\mathfrak{U}) \sim \pi'\pi_{n,h-n}\, \Gamma^p(\mathfrak{Z}_h)$ mod S dans T. D'après III, 7, nous avons $\pi''\pi_{n,h-n}\, \Gamma^p(\mathfrak{Z}_h) \sim \pi\pi''\pi_{m,h-m}\, \Gamma^p(\mathfrak{Z}_h)$ mod S dans T, donc $\Gamma^p(\mathfrak{U}) \sim \pi\, \Gamma^p(\mathfrak{B})$ mod S dans T. Les chaînes $\Gamma^p(\mathfrak{U})$ définissent donc le (p, R)-cycle Γ^p mod S dans T cherché.

6. Il s'ensuit de 1, III, 8 et 10: *lorsque C^p est un (p, R)-cycle* mod *S dans T et que $\mathfrak{U}$ est un réseau arbitraire dans R, alors $C^p(\mathfrak{U})$ est un $(p, \mathfrak{U})$-cycle essentiel* mod *S dans T.* Réciproquement:

6.1. *Soit $\mathfrak{U}_0$ un réseau dans R. Soit $C^p_0(\mathfrak{U}_0)$ un $(p, \mathfrak{U}_0)$-cycle essentiel* mod *S dans T. Alors il existe un (p, R)-cycle Γ^p* mod *S dans T tel que $\Gamma^p(\mathfrak{U}_0) = C^p_0(\mathfrak{U}_0)$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{B}$ un réseau arbitraire. Soit $\Phi(\mathfrak{B})$ l'ensemble de tous les $(p, \mathfrak{B})$-cycles $C^p(\mathfrak{B})$ mod S dans T jouissant de la propriété suivante: Il existe un réseau $\mathfrak{B}'$, raffinement des deux réseaux $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{U}_0$, et un $(p, \mathfrak{B}')$-cycle $D^p(\mathfrak{B}')$ mod S dans T tels que $C^p(\mathfrak{B}) \sim \pi'\, D^p(\mathfrak{B}')$ mod S dans T, $C^p_0(\mathfrak{U}_0) \sim \pi'_0\, D^p(\mathfrak{B}')$ mod S dans T, où $\pi' = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}', \mathfrak{B})$, $\pi'_0 = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}', \mathfrak{U}_0)$. Comme $C^p_0(\mathfrak{U}_0)$ est un $(p, \mathfrak{U}_0)$-cycle essentiel mod S dans T, nous avons évidemment $\Phi(\mathfrak{B}) \neq \emptyset$. $\Phi(\mathfrak{B})$ est évidemment und système linéaire par rapport au module de tous les $(p, \mathfrak{B})$-cycles mod S dans T. Evidemment $C^p(\mathfrak{U}_0) \in \Phi(\mathfrak{U}_0)$ si et seulement si $C^p(\mathfrak{U}_0) \sim C_0^p(\mathfrak{U}_0)$ mod S dans T.

Soit $\mathfrak{B}$ un raffinement au réseau $\mathfrak{U}$; quant à $\mathfrak{B}$, nous gardons la notation de ci-dessus. Soit $\pi = \text{Pr.}\ (\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. D'après III, 6 nous avons $\pi\, C^p(\mathfrak{B}) \sim \pi\pi'\, D^p(\mathfrak{B}')$ mod S dans T. Donc $C^p(\mathfrak{B}) \in \Phi(\mathfrak{B})$ implique $\pi\, C^p(\mathfrak{B}) \in \Phi(\mathfrak{U})$.

D'après 5 il existe un (p, R)-cycle Γ^p mod S dans T tel que $\Gamma^p(\mathfrak{U}) \in \Phi(\mathfrak{U})$ pour tout réseau $\mathfrak{U}$. En particulier, $\Gamma^p(\mathfrak{U}_0) \sim C_0^p(\mathfrak{U}_0)$ mod S dans T, de sorte que nous pouvons supposer $\Gamma^p(\mathfrak{U}_0) = C_0^p(\mathfrak{U}_0)$.

7. Si $\mathfrak{U}$ est un réseau dans R, désignons par $\mathfrak{M}_p(\mathfrak{U})$ le module de tous les $(p, \mathfrak{U})$-cycles essentiels mod S dans T; soit $\mathfrak{N}^p(\mathfrak{U})$ le sous-module du module $\mathfrak{M}_p(\mathfrak{U})$ contenant ceux des $C^p(\mathfrak{U}) \in \mathfrak{M}_p(\mathfrak{U})$ qui sont ~ 0 mod S dans T. Soit $\mathfrak{M}_p$ le module de tous les (p, R)-cycles mod S dans T; soit $\mathfrak{N}_p$ le sous-module du module $\mathfrak{M}_p$ contenant les $C^p \in \mathfrak{M}_p$ qui sont ~ 0 mod dans T. Le module $\mathfrak{M}_p(\mathfrak{U}) - \mathfrak{N}_p(\mathfrak{U})$ (voir I, 24) est évidemment fini; soit $B_r^p(\mathfrak{U}, S, T)$ son rang. Nous écrivons $B_r^p(\mathfrak{U}, S) = B_r^p(\mathfrak{U}, S, R)$, $B_r^p(\mathfrak{U}) = B_r^p(\mathfrak{U}, \emptyset, R)$. Nous appelons le nombre $B_r^p(\mathfrak{U}, S)$ $p^{\text{ème}}$ *nombre de Betti relatif réduit du réseau* $\mathfrak{U}$ mod S; le nombre $B_r^p(\mathfrak{U})$ sera appelé $p^{\text{ème}}$ *nombre de Betti absolu réduit du réseau* $\mathfrak{U}$. Le mot de *réduit* signifie que le module $\mathfrak{M}_p(\mathfrak{U})$ contient seulement les $(p, \mathfrak{U})$-cycles *essentiels* mod S dans T.

En vertu de 6 nous voyons aisément que le module $\mathfrak{M}_p(\mathfrak{U}) - \mathfrak{N}_p(\mathfrak{U})$ est une image homomorphe du module $\mathfrak{M}_p - \mathfrak{N}_p$ de sorte que d'après I, 23 nous avons $B_r^p(\mathfrak{U}, S, T) \leqq B^p(R, S, T)$, [2]. On démontre aisément les théorèmes suivants:

7.1. *Si $B^p(R; S, T)$ est fini alors $B_r^p(\mathfrak{U}, S, T) = B^p(R; S, T)$ pour tout réseau $\mathfrak{U}$ suffisamment fin.*

7.2. *Si $B^p(R; S, T) = \infty$ et $m = 1, 2, 3, \ldots$, alors $B^p(\mathfrak{U}, S, T) > m$ pour tout réseau $\mathfrak{U}$ suffisamment fin.*

D'après III 9.1 nous avons (v. II, 13 et III, 3)

$$B_r^0(\mathfrak{U}, S, T) = B^0[\mathfrak{U}(T), \mathfrak{U}(S)]\,, \tag{1}$$

en particulier

$$B_r^0(\mathfrak{U}, S) = B^0[\mathfrak{U}, \mathfrak{U}(S)]\,, \quad B_r^0(\mathfrak{U}) = B^0(\mathfrak{U})\,. \tag{2}$$

8. *Le nombre de composantes de l'espace R égale $B^0(R)$.*

Démonstration. I. Supposons que R ait un nombre infini de composantes. Soit $m = 1, 2, 3, \ldots$. D'après M 18[25] il existe une décomposition $R = \sum_{i=1}^{n} U_i$ aux termes non-vides séparés (voir M 7) avec $n > m$. $U_1, \ldots, U_n$ sont les sommets du réseau $\mathfrak{U}$.

[25] M désigne l'article cité au paragraphe 1 de III.

D'après II, 15 nous avons $\boldsymbol{B}^0(\mathfrak{U}) = n$. Donc $\boldsymbol{B}^0(R) = \infty$ en vertu de 7.1, 7.2 et (2).

II. Supposons que R ait un nombre fini de composantes; désignons les par K_i $(1 \leqq i \leqq m)$. D'après M 19, on a $R = \sum_{i=1}^{m} K_i$ aux termes non vides séparés. Donc $\boldsymbol{B}^0(\mathfrak{K}) = m$, où $\mathfrak{K}$ est le réseau ayant $K_1, \ldots, K_m$ pour sommets. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau arbitraire dans R; répartissons les sommets du réseau $\mathfrak{N}$ en groupes séparés (voir II, 15); soient $S_1, \ldots, S_n$ les sommes des sommets des différents groupes. Alors évidemment $R = \sum_{i=1}^{n} S_i$ aux termes séparés, donc $n \leqq m$, d'où $\boldsymbol{B}^0(\mathfrak{U}) \leqq m$ d'après II, 15. Donc $\boldsymbol{B}^0(R) = m$ en vertu de 7.1, 7.2 et (2).

9. Soit R un espace. Soit $\mathfrak{M}_0$ le module de tous les $(0, R)$-cycles absolus C^0. Soit $\mathfrak{M}_{00}$ le module des C^0 pour lesquels $J(C^0) = 0$ (voir 1.1). Soit $\mathfrak{N}_0$ le module des C^0 qui sont ~ 0. Alors $\mathfrak{M}_{00}$ est sous-module du module $\mathfrak{M}_0$ et (d'après II, 11) $\mathfrak{N}_0$ est sous-module du module $\mathfrak{M}_{00}$. Désignons par $\boldsymbol{B}_0^0(R)$ le rang du module $\mathfrak{M}_{00} - \mathfrak{N}_0$.

9.1. *Si* $R = \emptyset$, *alors* $\boldsymbol{B}_0^0(R) = \boldsymbol{B}^0(R) = 0$. *Si* $\boldsymbol{B}_0^0(R) = \infty$, *alors* $\boldsymbol{B}^0(R) = \infty$. *Si* $R \neq \emptyset$ *et* $\boldsymbol{B}_0^0(R) = m \; (= 0, 1, 2, \ldots)$, *alors* $\boldsymbol{B}^0(R) = m + 1$.

Démonstration. La première proposition est évidente, la deuxième découle de I, 19. Soit donc $R \neq \emptyset$ et soit $\mathfrak{M}_{00} - \mathfrak{N}_0$ un module fini. Soit $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_m^0$ une base du module $\mathfrak{M}_{00} - \mathfrak{N}_0$, soit $a \in R$. Dans chaque réseau $\mathfrak{U}$ fixons un sommet U tel que $a \in U$ et posons $C^0(\mathfrak{U}) = (U)$. Les chaînes $C^0(\mathfrak{U})$ définissent évidemment un $(0, R)$-cycle absolu C^0 tel que $J(C^0) = 1$. Il est évident que $C^0, C_1^0, \ldots, C_m^0$ forment une base du module $\mathfrak{M}_0 - \mathfrak{N}_0$, donc $\boldsymbol{B}^0(R) = m + 1$.

De manière analogue pour T fermé dans R définissons le nombre $\boldsymbol{B}_0^0(R; T, \emptyset)$. D'après 3(1) et 7(2) nous avons

$$\boldsymbol{B}_0^0(R; T, \emptyset) = \boldsymbol{B}_0^0(T) \,. \tag{1}$$

10. Soit R un espace, soit S fermé dans R. Soit $p = 0, 1, 2, \ldots$. Soit $a \in S$. Par U, V, W nous désignerons des ensembles ouverts dans R et contenant le point a.

Soit $V \subset U$. Soit $\mathfrak{A}_p$ l'ensemble de tous les (p, R)-cycles $C^p \bmod (S - U)$ dans S; soit $\mathfrak{B}_p$ l'ensemble de tous les C^p qui sont $\sim 0 \bmod (S - V)$ dans S. Alors $\mathfrak{A}_p$ est un module et $\mathfrak{B}_p$ son sous-module. Soit $\beta_p(V, U; S, R)$ le rang du module $\mathfrak{A}_p - \mathfrak{B}_p$.

Si $W \subset V \subset U$, alors évidemment $\beta_p(W, U; S, R) \leqq \beta_p(V, U; S, R)$. Il en découle aisément que, U étant donné, on peut trouver $V \subset U$ tel que pour tous $W \subset V$ le nombre $\beta_p(W, U; S, R)$ a une certaine valeur fixe, indépendente de W; nous la désignerons par $\beta_p(a, U; S, R)$.

Si $W \subset V \subset U$, alors évidemment $\beta_p(W, V; S, R) \geqq \beta_p(W, U; S, R)$. Donc si $V \subset U$, on a $\beta_p(a, V; S, R) \geqq \beta_p(a, U; S, R)$. Il en résulte que les trois cas suivants sont possibles.:

I. Il existe un nombre $m \; (= 0, 1, 2, \ldots)$ et un ensemble U tels que $\beta_p(a, V; S, R) = m$ pour tous $V \subset U$. Nous posons alors $\beta_p(a; S, R) = m$.

II. Le nombre $\beta_p(a, V; S, R)$ est fini pour tout V, mais pour n'importe quel nombre m ($= 0, 1, 2, \ldots$) on peut trouver U tel que $\beta_p(a, V; S, R) > m$ pour tous $V \subset U$. Nous posons alors $\beta_p(a; S, R) = \omega$.

III. Il existe un ensemble U tel que $\beta_p(a, V; S, R) = \infty$ pour tous $V \subset U$. Nous posons alors $\beta_p(a; S, R) = \infty$.

Nous considérons le symbole ω comme étant plus petit que ∞, mais plus grand que tout entier m ($= 0, 1, 2, \ldots$).

Nous écrivons $\beta_p(V, U; R, R) = \beta_p(V, U; R)$, $\beta_p(a, U; R, R) = \beta_p(a, U; R)$, $\beta_p(a; R, R) = \beta_p(a, R)$.

Il découle de la discussion des paragraphes 3 et 4 que $\beta_p(V, U; S, R) = \beta_p(V, U; S)$, $\beta_p(a, U; S, R) = \beta_p(a, U; S)$, $\beta_p(a; S, R) = \beta_p(a, S)$.

Le nombre $\beta_p(a, R)$ s'appelle $p^{\text{ème}}$ *nombre de Betti local de l'espace R au point a.*

Soient S_1, S_2 deux ensembles fermés dans R, $a \in S_1S_2$, soit U un ensemble ouvert dans R tel que $a \in U$, $US_1 = US_2$; alors on démontre aisément que $\beta_p(V, U; S_1, R) = \beta_p(V, U; S_2, R)$ pour tous les ensembles V tels que $a \in V \subset U$. Il en découle

$$\beta_p(a, S_1) = \beta_p(a, S_2)\,. \tag{1}$$

11. Soit R un espace, soit $a \in R$. Nous appelons *quasicomposante de l'espace R déterminée par le point a* l'ensemble (dénoté par $Q(a)$) des points $x \in R$ jouissant de la propriété suivante: Si $R = A + B$ aux termes séparés (voir M 7) et $a \in A$, alors $x \in A$. Evidemment $a \in Q(a)$.

Il s'ensuit de M 11:

11.1. *La composante de l'espace R déterminée par le point a est une partie de la quasicomposante de l'espace R déterminée par le point a.*

11.2. *Toute quasicomposante de l'espace R est fermée dans R.*

Démonstration. Evidemment $Q(a) = \prod A$ où le produit s'étend à tous les sous-ensembles de R tels que 1° $a \in A$, 2° la somme $R = A + (R - A)$ a les termes séparés. Comme (voir M 7) tout A est fermé dans R, en vertu de M 1.4 $Q(a)$ est aussi fermé dans R.

11.3. *Chaque point $a \in R$ n'appartient qu'à une seule quasicomposante de l'espace R.*

Démonstration. Soit $b \in Q(a)$. Il suffit de démontrer que $Q(a) = Q(b)$. Il suffit même de démontrer que $Q(a) \subset Q(b)$, car alors $a \in Q(b)$, donc aussi $Q(b) \subset Q(a)$. Soit donc $x \in Q(a)$ et soit $R = A + B$ aux termes séparés, $b \in A$. Nous avons à montrer que $x \in A$. Si l'on avait $a \in B$, on aurait $Q(a) \subset B$, d'après la définition de $Q(a)$, donc $b \in B$, ce qui est une contradiction. Donc $a \in A$, donc, d'après la définition de $Q(a)$, nous avons $Q(a) \subset A$, donc $x \in A$.

11.4. *Lorsque l'espace R a un nombre fini de quasicomposantes,*[26] *alors ses composantes sont identiques avec ses quasicomposantes.*

[26] Donc (voir 11.1) a fortiori, lorsque R a un nombre fini de composantes.

Démonstration. Soit $R = \sum_{i=1}^{m} Q(a_i)$, les quasicomposantes figurant au second membre étant supposées distinctes. D'après 11.1 et d'après la définition de la composante, il suffit de démontrer que p. ex. l'ensemble $Q(a)$, est connexe. Supposons le contraire. Alors $Q(a_1) = A + B$, où A, B sont fermés dans $Q(a_1)$, $a_1 \in A$, $B \neq \emptyset$, $AB = \emptyset$. D'après 11.2 et M 5, les ensembles A et B sont fermés dans R. Donc $R = A + [B + \sum_{i=2}^{m} Q(a_i)]$ aux termes séparés (voir 11.2). Comme $a_1 \in A$, nous avons d'après la définition de $Q(a_1)$ la relation $Q(a_1) \subset A$, donc $B \subset A$ ce qui est une contradiction, car $B \neq \emptyset$, $AB = \emptyset$.

11.5. *Lorsque R est un espace métrique compact, alors ses composantes sont identiques avec ses quasicomposantes.*

Démonstration. D'après S II 9 (S désigne l'article: *Sur l'application de la théorie de l'homologie* ... cité au paragraphe 8), il est possible de choisir dans tout système infini d'ensembles ouverts dans R recouvrant R un système fini d'ensembles recouvrant R. D'après S II 3, tout ensemble fermé dans R jouit de la même propriété.

Une fois de plus, il suffit de démontrer que l'ensemble $Q(a)$ est connexe. Supposons le contraire. Alors $Q(a) = A + B$ aux termes non-vides séparés, $a \in A$. Les ensembles A, B sont fermés dans $Q(a)$, donc d'après 11.2 ils le sont dans R également. De plus $AB = \emptyset$. Si $x \in B$, alors l'ensemble (x) est fermé dans R, l'ensemble $R - A$ est ouvert dans R et $(x) \subset R - A$. Donc en vertu des paragraphes 10 et 16 de mon article *Contribution à la théorie de la dimension* (Časopis pěst. mat. a fys. 62 (1933), 277–291; [11]) il existe un ouvert U_x dans R tel que $x \in U_x \subset \overline{U}_x \subset R - A$. Lorsque x parcourt B les ensembles BU_x sont ouverts dans B et recouvrent B. L'ensemble B étant fermé dans R, il existe un nombre fini de points $x_1, x_2, \ldots, x_m \in B$ tels que $B \subset \sum_{i=1}^{m} U_{x_i}$. Soit $C = \sum_{i=1}^{m} \overline{U}_{x_i} - \sum_{i=1}^{m} U_{x_i}$. Alors l'ensemble C est fermé dans R et l'on a $AC = BC = \emptyset$, donc $C \subset R - Q(a)$. On peut donc associer à chaque $y \in C$ une décomposition $R = H_y + K_y$ aux termes séparés, telle que $y \in K_y$, $a \in H_y$; donc $Q(a) \subset H_y$. Les ensembles K_y sont (voir M 7) ouverts dans R et recouvrent C. L'ensemble C étant fermé dans R, il existe un nombre fini de points $y_1, y_2, \ldots, y_n \in C$ tels que $C \subset \sum_{j=1}^{n} K_{y_j}$. Comme

$$C = \sum_{i=1}^{m} \overline{U}_{x_i} - \sum_{i=1}^{m} U_{x_i} \subset \sum_{j=1}^{n} K_{y_j}$$

nus pouvons poser

$$M = \sum_{i=1}^{m} U_{x_i} + \sum_{j=1}^{n} K_{y_j} = \sum_{i=1}^{m} \overline{U}_{x_i} + \sum_{j=1}^{n} K_{y_j}\,.$$

Les ensembles U_x et K_y étant ouverts dans R, l'ensemble M est ouvert dans R. Les ensembles $\overline{U}_x$ et K_y étant fermés dans R, l'ensemble M est aussi fermé dans R. Donc

$R = M + (R - M)$ aux termes séparés. Comme $a \in A$, $U_x \subset R - A$, $a \in H_y$, $H_y K_y = \emptyset$, on a $a \in R - M$. Donc $Q(a) \subset R - M$ d'après la définition de $Q(a)$. Il en résulte $B \subset R - M$, car $B \subset Q(a)$. Mais $B \subset \sum_{i=1}^{m} U_{x_i} \subset M$. Donc $B \subset \subset M(R - M)$, c'est-à-dire $B = \emptyset$, ce qui est une contradiction.

11.6. *Soit K une composante d'un espace métrique compact R. Soit G ouvert dans R, $K \subset G$. Il existe alors une décomposition $R = A + B$ aux termes séparés telle que $K \subset A \subset G$.*

Démonstration. Soit $a \in K$, donc $K = Q(a)$ d'après 11.5. Si $x \in R - G$, on a $x \in R - Q(a)$, de sorte qu'il existe une décomposition $R = U_x + V_x$ aux termes séparés telle que $x \in V_x$, $a \in U_x$, donc $K = Q(a) \subset U_x$. Lorsque x parcourt l'ensemble $R - G$, les ensembles $(R - G)\, V_x$ sont ouverts dans $R - G$ et recouvrent $R - G$. Comme l'ensemble $R - G$ est fermé dans R, il existe d'après S II 3 et S II 9 un nombre fini de points $x_1, x_2, \ldots, x_m \in R - G$ tels que $R - G \subset \sum_{i=1}^{m} V_{x_i}$. Posons $\prod_{i=1}^{m} U_{x_i} = A$, $\sum_{i=1}^{m} V_{x_i} = B$. Les ensembles U_x et V_x étant ouverts dans R, A et B sont aussi ouverts dans R. Comme $R = U_x + V_x$, on a $R = A + B$. Comme $U_x V_x = \emptyset$, on a $AB = \emptyset$. Donc $R = A + B$ aux termes séparés. Comme $K \subset U_x$, on a $K \subset A$. Comme $B \supset R - G$, $AB = \emptyset$, on a $A \subset G$.

12. Soit R un espace, $a \in R$. Dans chaque réseau $\mathfrak{U}$ on peut choisir un sommet U tel que $a \in U$. Lorsque $\mathfrak{U}$ parcourt tous les réseaux dans R, nous voyons aisément que les $(0, \mathfrak{U})$-simplexes (U) définissent un $(0, R)$-cycle absolu que nous désignerons par $\{a\}$. Evidemment $\{a\}$ fait partie de (a), où (a) désigne l'ensemble composé d'un seul point a.

Le $(0, R)$-cycle $\{a\}$ n'est pas déterminé univoquement par le point a; mais si $\{a\}_1$, $\{a\}_2$ sont deux de ses valeurs, il est facile de démontrer que $\{a\}_1 \sim \{a\}_2$ dans (a).

Evidemment $J(\{a\}) = 1$.

12.1. *Soit R un espace; $a \in R$, $b \in R$. Les deux points a et b appartiennent à la même quasicomposante de l'espace R si et seulement si $\{a\} \sim \{b\}$.*

Démonstration. Soit $\{a\} = C^0$, $\{b\} = D^0$.

I. Soit $C^0 \sim D^0$. Soit $R = U_1 + U_2$ aux termes séparés; $a \in U_1$. Nous avons à montrer que $b \in U_1$. Les ensembles U_1, U_2, sont ouverts dans R, ils forment donc un réseau $\mathfrak{U}$ dans R. Comme $C^0 \sim D^0$, il existe une $(1, \mathfrak{U})$-chaîne $E^1(\mathfrak{U}) \to C^0(\mathfrak{U}) - D^0(\mathfrak{U})$. Or le réseau $\mathfrak{U}$ est d'ordre 0, donc $E^1(\mathfrak{U}) = 0$, donc $C^0(\mathfrak{U}) = D^0(\mathfrak{U})$. Comme $a \in U_1$ et $U_1 U_2 = \emptyset$, nous avons $C^0(\mathfrak{U}) = (U_1)$. Donc $D^0(\mathfrak{U}) = (U_1)$ d'où $b \in U_1$.

II. Soit $Q(a) = Q(b)$. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R. Nous avons à démontrer que $C^0(\mathfrak{U}) \sim D^0(\mathfrak{U})$. Soit $C^0(\mathfrak{U}) = (U')$. Soit Φ_1 le système des sommets U du réseau $\mathfrak{U}$

pour lesquels $(U) \sim (U')$; soit Φ_2 le système des autres sommets du réseau $\mathfrak{U}$. Soit A la somme de tous les éléments du système Φ_1, B la somme des éléments de Φ_2. Alors les ensembles A et B sont ouverts dans R et $R = A + B$. Si $c \in AB$, il existe $U_1 \in \Phi_1$, $U_2 \in \Phi_2$ tels que $c \in U_1 U_2$. Alors (U_1, U_2) est un $(1, \mathfrak{U})$-simplexe et $(U_1, U_2) \to$ $\to (U_2) - (U_1)$, donc $(U_2) \sim (U_1)$. Comme $U_1 \in \Phi_1$, on a $(U_1) \sim (U')$, donc aussi $(U_2) \sim (U')$, c'est-à-dire $U_2 \in \Phi_1$, ce qui est une contradiction. Il en résulte que $AB = \emptyset$, donc $R = A + B$ aux termes séparés. Comme $a \in U' \subset A$, on a $Q(a) \subset A$ d'après la définition de $Q(a)$. Comme $Q(a) = Q(b)$, nous avons $b \in A$. Il, existe donc $U'' \in \Phi_1$, tel que $b \in U''$. Comme $b \in U''$, on a $(U'') \sim D^0(\mathfrak{U})$. Comme $U'' \in \Phi_1$, on a $(U'') \sim (U') = C^0(\mathfrak{U})$. Donc $C^0(\mathfrak{U}) \sim D^0(\mathfrak{U})$.

13. Soit $p = 0, 1, 2, \ldots$. Nous dirons que l'espace R est acyclique d'ordre p si 1° $p = 0$ et $B_0^0(R) = 0$ (voir 9), ou bien si 2° $p \geqq 1$ et $B^p(R) = 0$ (voir 2).

D'après 8 et 9.1 *un espace R est acyclique d'ordre* 0 *si et seulement si il est vide ou connexe.*

14. Soit R un espace. Soit S fermé dans R. Soit $p = 0, 1, 2, \ldots$. Soit $a \in S$. Les lettres U, V, W désignent à nouveau des ensembles ouverts dans R et contenant le point a.

Soit $V \subset U$. Soit $\mathfrak{C}_p$ l'ensemble de tous les (p, R)-cycles absolus Γ^p dans $\overline{SV}$; pour $p = 0$ nous supposons de plus $J(\Gamma^0) = 0$. Soit $\mathfrak{D}_p$ l'ensemble des Γ^p qui sont ~ 0 dans $\overline{SU}$. Alors $\mathfrak{C}_p$ est un module et $\mathfrak{D}_p$ son sous-module. Le rang du module $\mathfrak{C}_p - \mathfrak{D}_p$ sera désigné par $\gamma_p(V, U; S, R)$.

Lorsque $W \subset V \subset U$, on a évidemment $\gamma_p(W, U; S, R) \leqq \gamma_p(V, U; S, R)$. Il en résulte aisément que, l'ensemble U étant donné, on peut trouver $V \subset U$ tel que pour tous $W \subset V$ le nombre $\gamma_p(W, U; S, R)$ a une valeur fixe (indépendante de W) que nous dénoterons par $\gamma_p(a, U; S, R)$.

Lorsque $W \subset V \subset U$, on a évidemment $\gamma_p(W, V; S, R) \geqq \gamma_p(W, U; S, R)$. Donc, si $V \subset U$, on a $\gamma_p(a, V; S, R) \geqq \gamma_p(a, U; S, R)$. Il en résulte aisément que les trois cas suivants sont possibles:

I. Il existe un entier m $(= 0, 1, 2, \ldots)$ et un ensemble U tels que $\gamma_p(a, V; S, R) = m$ pour tous $V \subset U$. Nous posons alors $\gamma_p(a; S, R) = m$.

II. Le nombre $\gamma_p(a, V; S, R)$ est fini pour tous les V, mais pour tout m $(= 0, 1, 2, \ldots)$ il existe U tel que $\gamma_p(a, V; S, R) > m$ pour tous $V \subset U$. Nous posons alors $\gamma_p(a;$ $S, R) = \omega$.

III. Il existe un ensemble U tel que $\gamma_p(a, V; S, R) = \infty$ pour tous $V \subset U$. Nous posons alors $\gamma_p(a; S, R) = \infty$.

Nous écrivons $\gamma_p(V, U; R, R) = \gamma_p(V, U; R)$, $\gamma_p(a, U; R, R) = \gamma_p(a, U; R)$, $\gamma_p(a; R, R) =$ $= \gamma_p(a, R)$.

Il découle aisément de la discussion des paragraphes 3 et 4 que l'on a $\gamma_p(V, U; S, R) = \gamma_p(V, U; S)$, $\gamma_p(a, U; S, R) = \gamma_p(a, U; S)$, $\gamma_p(a; S, R) = \gamma_p(a, S)$.

Nous disons que l'espace R est localement acyclique d'ordre p au point a, lorsque $\gamma_p(a, R) = 0$.

On démontre aisément la proposition suivante: si S_1, S_2 sont deux ensembles fermés dans R, $a \in S_1S_2$ et qu'il existe un ensemble U ouvert dans R et tel que $a \in U$, $US_1 = US_2$, alors on a $\gamma_p(V, U; S_1, R) = \gamma_p(V, U; S_2, R)$ pour tous les ensembles V tels que $a \in V \subset U$. Il en résulte

$$\gamma_p(a, S_1) = \gamma_p(a, S_2)\,. \tag{1}$$

15. Nous disons que l'espace R est *régulier au point* $a \in R$ s'il jouit de la propriété suivante: Si U est ouvert dans R et $a \in U$, il existe un ensemble V ouvert dans R et tel que $a \in V \subset \overline{V} \subset U$.

D'après D 10 (D désigne le mémoire cité dans la démonstration du théorème 11.5) on a:

15.1. *Tout espace normal est régulier en chaque point.*

D'après D 16 nous avons ensuite:

15.2. *Tout espace métrique est régulier en chaque point.*

16. *Soit* $p = 0, 1, 2, \ldots$. *Si l'espace* R *est régulier au point* a, *on a ou bien* $\gamma_p(a, R) = 0$, *ou bien* $\gamma_p(a, R) = \infty$.

Démonstration. Soit $\gamma_p(a, R) \geqq 1$. Il existe alors dans R un ouvert U contenant le point a et tel que $\gamma_p(a, U; R) \geqq 1$. Nous avons à démontrer que $\gamma_p(a, U; R) = \infty$. Soit V un ensemble ouvert dans R, $a \in V \subset U$. Nous avons donc à démontrer que $\gamma_p(V, U; R) = \infty$. Soit au contraire $\gamma_p(V, U; R) = m$ $(= 0, 1, 2, \ldots)$; il existe alors des (p, R)-cycles absolus Γ_i^p $(1 \leqq i \leqq m$, $J(\Gamma_i^0) = 0$ pour $p = 0)$ dans $\overline{V}$ tels que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p \sim 0$ dans $\overline{U}$ $(r_i \in \mathfrak{R})$ implique $r_1 = \ldots = r_m = 0$.

Pour tout réseau $\mathfrak{U}$ soit $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$ l'ensemble de tous les vecteurs $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ (voir I, 9) tels que $\sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^p(\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $\overline{U}$. Il est évident que $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$ est un module fini de rang $h(\mathfrak{U}) \leqq m$. Lorsque $\mathfrak{B}$ est un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$, alors évidemment $\mathfrak{M}(\mathfrak{B})$ est un sous-module du module $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$, donc (voir I, 19) $h(\mathfrak{B}) \leqq h(\mathfrak{U})$. Il existe évidemment un réseau $\mathfrak{U}_0$ tel que $h(\mathfrak{U}) \geqq h(\mathfrak{U}_0)$ pour tout réseau $\mathfrak{U}$, de sorte que pour tout raffinement $\mathfrak{U}$ du réseau $\mathfrak{U}_0$ on a $h(\mathfrak{U}) = h(\mathfrak{U}_0)$, donc (voir I, 19) $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_0)$, donc pour tout réseau $\mathfrak{U}$ on a $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_0) \subset \mathfrak{M}(\mathfrak{U})$. Lorsque $(r_1, \ldots, r_m) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_0)$, on a $(r_1, \ldots, r_m) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{U})$ pour tout réseau $\mathfrak{U}$, donc $\sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^p \sim 0$ dans $\overline{U}$, donc $r_1 = \ldots = r_m = 0$. L'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_0) \sim 0$ dans $\overline{U}$ implique donc $r_1 = \ldots = r_m = 0$.

Soit U_0 le sommet du réseau $\mathfrak{U}_0$ pour lequel $a \in U_0$. Comme R est régulier au point a, il existe un ensemble W ouvert dans R et tel que $a \in W \subset \overline{W} \subset U_0U$. Les deux ensembles ouverts U_0 et $R - \overline{W}$ forment un réseau $\mathfrak{U}_1$. Soit (voir II, 4.1) $\mathfrak{U}_2$ un raffinement des deux réseaux $\mathfrak{U}_0$ et $\mathfrak{U}_1$. Comme $\mathfrak{U}_2$ est un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_1$, on a $U_2 \subset U_0$ pour tout sommet U_2 du réseau $\mathfrak{U}_2$ tel que $U_2\overline{W} \neq \emptyset$. Il existe donc une projection $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_0)$ telle que $\pi U_2 = U_0$ pour tout sommet U_2 du réseau $\mathfrak{U}_2$ tel que $U_2\overline{W} \neq 0$.

Comme $\gamma_p(a, U; R) \geqq 1$, nous avons $\gamma_p(W, U; R) \geqq 1$. Il existe donc un (p, R)-cycle absolu Γ_0^p dans $\overline{W}$ [avec $J(\Gamma_0^0) = 0$ si $p = 0$], qui n'est pas ~ 0 dans $\overline{U}$. Il suffit de démontrer que l'homologie $\sum_{i=0}^{m} r_i \Gamma_i^p \sim 0$ dans $\overline{U}$ implique $r_0 = r_1 = \ldots = r_m = 0$, car alors on aura $\gamma_p(V, U; R) \geqq m + 1$, ce qui est une contradiction.

Soit donc $\sum_{i=0}^{m} r_i \Gamma_i^p \sim 0$ dans $\overline{U}$. Alors $\sum_{i=0}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_0) \sim 0$ dans $\overline{U}$. Or $\Gamma_0^p \subset \overline{W}$, donc $\Gamma_0^p(\mathfrak{U}_2) \subset \overline{W}$. Cela signifie que le noyau de tout simplexe de la chaîne $\Gamma_0^p(\mathfrak{U})$ coupe $\overline{W}$, de sorte que pour tout sommet U_2 d'un tel simplexe on a $U_2\overline{W} \neq \emptyset$, donc $\pi U_2 = U_0$. Il en résulte pour $p \geqq 1$ que $\pi\sigma^p = 0$ pour tout simplexe σ^p de la chaîne $\Gamma_0^p(\mathfrak{U}_2)$, d'où $\pi\, \Gamma_0^p(\mathfrak{U}_2) = 0$. Pour $p = 0$ nous avons $\pi\, \Gamma_0^0(\mathfrak{U}_2) = r(U_0)$ $(r \in \mathfrak{R})$; comme $J[\pi\, \Gamma_0^0(\mathfrak{U}_2)] = J[\Gamma_0^0(\mathfrak{U}_2)] = 0$, nous avons $r = 0$. Donc $\pi\, \Gamma_0^p(\mathfrak{U}_2) = 0$ pour toutes les valeurs de p. Mais $\pi\, \Gamma_0^p(\mathfrak{U}_2) \sim \Gamma_0^p(\mathfrak{U}_0)$ dans $\overline{U}$, de sorte que $\Gamma_0^p(\mathfrak{U}_0) \sim 0$ dans $\overline{U}$. Comme $\sum_{i=0}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_0) \sim 0$ dans $\overline{U}$, nous avons $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_0) \sim 0$ dans $\overline{U}$, donc $r_1 = \ldots = r_m = 0$ d'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_0$. Comme $\sum_{i=0}^{m} r_i\Gamma_i^p \sim 0$ dans $\overline{U}$, on a $r_0\Gamma_0^p \sim 0$ dans $\overline{U}$, donc $r_0 = 0$ d'après la définition du cycle Γ_0^p.

17. *L'espace R est localement acyclique d'ordre* 0 *dans le point $a \in R$ si et seulement si à chaque ensemble U ouvert dans R et contenant a on peut associer un ensemble $V \subset U$ ouvert dans R, $a \in V$, et tel que $\overline{V}$ soit une partie de la quasicomposante de $\overline{U}$ déterminée par le point a.*

Démonstration. Il est évident que R est localement acyclique d'ordre 0 en a si et seulement si à chaque ensemble U ouvert dans R et contenant a on peut associer un ensemble $V \subset U$ ouvert dans R contenant a et tel que $\Gamma^0 \sim 0$ dans $\overline{U}$ pour tout $(0, R)$-cycle absolu Γ^0 dans $\overline{V}$ tel que $J(\Gamma^0) = 0$.

I. Soit $\overline{V}$ une partie de la quasicomposante de l'espace $\overline{U}$ déterminée par le point a. Soit Γ^0 un $(0, R)$-cycle absolu dans $\overline{V}$ tel que $J(\Gamma^0) = 0$. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R. Nous avons à démontrer que $\Gamma^0(\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $\overline{U}$. Soit $\Gamma^0(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{m} r_i(U_i)$, $U_i \in \mathfrak{U}$. Comme $J(\Gamma^0) = 0$, nous avons $\sum_{i=1}^{m} r_i = 0$. Comme $\Gamma^0 \subset \overline{V}$, il existe des points $a_i \in \overline{V}U_i$. Comme $a_i \in \overline{V}$, on a d'après 12.1 (voir aussi 3 et 4) $\{a_i\} \sim \{a\}$ dans $\overline{U}$, donc $\sum_{i=1}^{m} r_i\{a_i\} \sim 0$ dans $\overline{U}$, puisque $\sum_{i=1}^{m} r_i = 0$. Si $\{a_i\} = C_i$, alors évidemment $(U_i) \sim$

$\sim C_i(\mathfrak{U})$ dans $\bar{V}$, donc aussi dans $\bar{U}$. Donc $\sum_{i=1}^{m} r_i(U_i) \sim 0$ dans $\bar{U}$, c'est-à-dire $\Gamma^0 \sim 0$ dans $\bar{U}$.

II. Soit maintenant $\Gamma^0 \sim 0$ dans $\bar{U}$ pour tout $(0, R)$-cycle absolu Γ^0 dans $\bar{V}$ tel que $J(\Gamma^0) = 0$. Soit $b \in \bar{V}$. Alors $\{a\} - \{b\}$ est un $(0, R)$-cycle absolu dans $\bar{V}$ et $J(\{a\} - \{b\}) = 0$. Donc $\{a\} \sim \{b\}$ dans $\bar{U}$, et d'après 12.1 (voir aussi 3 et 4) b appartient à la quasicomposante de l'espace $\bar{U}$ déterminée par le point a.

18. Nous disons que l'espace R est *localement connexe en un point* $a \in R$, lorsque à chaque ensemble U ouvert dans R et contenant a on peut associer un ensemble $V \subset U$ ouvert dans R, contenant a et tel que $\bar{V}$ soit une partie de la composante de l'espace $\bar{U}$ déterminée par le point a.

D'après 11.1 et 17 nous avons:

18.1. *Si l'espace R est localement connexe dans le point a, alors R est localement acyclique d'ordre* 0 *en a.*

D'après 11.5 (voir aussi S II 3) nous avons:

18.2. *Lorsqu'un espace métrique compact R est localement acyclique d'ordre* 0 *en un point a, alors R est localement connexe en a.*

Nous disons que l'espace R est *localement connexe* lorsqu'il est localement connexe en chacun de ses points.

18.3. *L'espace R est localement connexe si et seulement si chaque composante de tout ensemble ouvert dans R est ouverte dans R.*

Démonstration. I. Soit R un espace localement connexe. Soit U un ensemble ouvert dans R. Soit K une composante de l'ensemble U. Nous avons à démontrer que K est ouvert dans R. Dans le cas contraire il existerait un point $a \in K \,.\, \overline{R - K}$. Comme $a \in K$, on a $a \in U$. Comme U est ouvert dans R et R est localement connexe en a, il existe un ensemble $V \subset U$ ouvert dans R, $a \in V$, tel que $V \subset K$. Donc $R - K \subset \subset R - V$, d'où $\overline{R - K} \subset \overline{R - V} = R - V$, ce qui est en contradiction avec $a \in V \,.\, \overline{R - K}$.

II. Supposons maintenant que chaque composante de chaque ensemble ouvert dans R soit elle aussi ouverte dans R. Soit $a \in U$, U ouvert dans R. Soit K la composante de l'ensemble U qui contient a. Alors K est ouvert dans R, et $a \in K \subset U$. Donc R est localement connexe dans le point a.

L'éspace R est dit *localement acyclique d'ordre* p $(= 0, 1, 2, \ldots)$ s'il l'est en chacun de ses points.

18.4. *L'espace R est localement acyclique d'ordre* 0 *si et seulement si chaque quasicomposante de chaque ensemble ouvert dans R est ouverte dans R.*

La démonstration de 18.4 ne diffère de celle de 18.3 que par le fait qu'on y remplace la définition de la connexité locale par le théorème 17.

18.5. *Si l'espace R est localement connexe, alors ses composantes coïncident avec ses quasicomposantes.*

Démonstration. Soit K une composante de l'espace R, soit $a \in R$. Nous avons à démontrer que $K = Q(a)$. D'après 18.3 K est ouvert dans R; comme $R - K$ est la somme des autres composantes de l'espace R, nous voyons d'après 18.3 que $R - K$ est aussi ouvert dans R. Donc $R = K + (R - K)$ aux termes séparés. Comme $a \in K$, la définition de $Q(a)$ entraîne $Q(a) \subset K$. Or $K \subset Q(a)$ d'après 11.1. Il en résulte $Q(a) = K$.

15

THÉORIE GÉNÉRALE DES VARIÉTÉS ET DE LEURS THÉORÈMES DE DUALITÉ[1]

Annals of Mathematics
(2) *34* (1933), 621–730

La topologie combinatoire a fait dans les dernières annés des progrès très remarquables et elle constitue, tant intrinsèquement qu'au point de vue des applications, un des plus importants chapitres de la topologie. Ceci est vrai tout particulièrement pour la théorie de l'homologie; c'est en effet la branche la plus avancée de la topologie combinatoire[2]. D'autre part, la topologie générale, fondée sur la théorie abstraite des ensembles, constitue désormais un édifice immense occupant une des places centrales dans le vaste champ des mathématiques modernes.

A mon avis, on peut espérer d'arriver à étendre d'une manière inattendue le champ de recherches topologiques si on réussit à approcher mutuellement le plus près possible les méthodes combinatoires et celles de la théorie générale des ensembles. Le premier pas essentiel et général dans cette direction et qui a déjà eu des conséquences très remarquables a été fait par M. Vietoris qui a réussi à fonder la théorie de l'homologie dans chaque espace métrique et compact.[3] Néanmoins il y a encore un profond abîme entre les recherches combinatoires et celles abstraites dans la topologie. Mon opinion est *d'une part* que la topologie combinatoire doit complètement abandonner l'usage des polyèdres, c'est-à-dire des figures dont la nature topologique (au sens d'une description axiomatique complète) nous restera probablement pour longtemps cachée; *d'autre part* qu'il est impossible d'étudier profondément déjà p. ex. la topologie des sous-ensembles de l'espace ordinaire si on s'obstine à négliger systématiquement les notions combinatoires.

Un des plus beaux sujets de la topologie combinatoire est sans doute la

[1] Received February 15, 1933. — J'ai exposé quelques résultats de ce Mémoire dans une communication au Congrès Int. de Zurich (septembre 1932) ainsi que dans un cycle de quatre conférences que j'ai faites, à l'Université de Varsovie (novembre 1932).

[2] Une exposition complète de cette théorie se trouve dans l'excellent livre de M. Lefschetz, Topology, Amer. Math. Soc., Coll. Publ. vol. 12, 1930.

[3] Math. Annalen, 97, 1927, pp. 454–472. Cf. déjà L. E. J. Brouwer, Math. Annalen, 72, 1912, pp. 422–425.

théorie des *variétés* (Mannigfaltigkeiten, manifolds). Or toutes les définitions connues[4] d'une variété V supposent ou que V soit homéomorphe à un polyèdre ou du moins que chaque point de V possède un entourage[5] homéomorphe à un polyèdre. *Il n'existe donc jusqu'à présent aucune définition purement topologique de la notion de variété.*[6] Dans le présent Ouvrage, je donne justement une telle définition comprenant du reste, comme on pourrait le démontrer sans difficulté, toutes les définitions connues comme des cas particuliers.

Je m'appuie dans ce qui suit très essentiellement sur mon Mémoire *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque*[7] dont la connaissance est indispensable au lecteur; je le cite par l'abréviation *Homologie.* Outre ce quit a été exposé dans l'*Homologie*, je ne suppose de la topologie *combinatoire* que la connaissance des nombres de Betti d'un simplexe. Je suppose d'ailleurs quelques connaissances de la topologie générale, en particulier de la théorie de la dimension (v. n° 2.2). Relativement à l'*Homologie*, quatre remarques sont nécéssaires:

I. Pour un (p, R)-cycle, j'emploie ici la courte notation C^p (p. ex.) au lieu de $\{C^p(\mathfrak{U})\}$ (*Homologie* II, 20). Donc C^p est l'ensemble de tous les $C^p(\mathfrak{U})$, $\mathfrak{U}$ parcourant tous les réseaux dans R.

II. La famille fondamentale de réseaux (*Homologie*, II, 1) est dans ce qui suit toujours la famille de tous les réseaux ouverts (v. *Homologie*, III, 2).

III. La notion d'un *affinement normal* (*Homologie*, II, 15) dépend essentiellement des deux ensembles A et α (v. l. c.); je parle donc toujours explicitement d'un *affinement normal rel. aux cycles mod* α *dans* A (l'attribut dans A sera omis si $A = R$; l'attribut mod α sera omis si $\alpha = 0$).

IV. Dans ce qui suit, les coefficients de toutes les chaînes appartiennent à l'ensemble $\mathfrak{R}$ des *nombres rationnels* (v. *Homologie*, I, 1 et II, 3); du reste, toute la théorie vaut sans aucune modification si $\mathfrak{R}$ désigne l'ensemble des entiers réduits mod p, p étant un nombre *premier*[8] (v. *Homologie*, V, 1).

Le présent Ouvrage est divisé en huit Chapitres.

Au Chap. I, j'introduis successivement les axiomes A_1 (n° 1), A_2 (n° 2), A_3 (n° 3) et A_4 (n° 7). Les deux axiomes A_1 et A_2 sont vérifiés en particulier si R est un espace

[4] La plus générale de ces définitions est celle de MM. Lefschetz et Flexner (v. Proc. Nat. Acad. Sci., 16, 1930, pp. 530—533, et Annals of Math., 32, 1931, pp. 393—406 et 539—548).

[5] Un entourage d'un point a ou d'un ensemble A est un ensemble ouvert contenant a ou A.

[6] Après avoir terminé cet Ouvrage, j'ai pris connaissance d'un manuscript de M. Lefschetz intitulé *On generalized manifolds* (à paraître dans le Amer. Journal of Math.). L'illustre géomètre americain y étudie, avec une méthode entièrement différente, presque la même notion. Je voudrais insister sur une différence essentielle: pour démontrer le théorème de dualité entre les p-cycles et les $(n - p)$-cycles $(0 \leqq p \leqq n - p \leqq n)$, je n'ai besoin d'aucun axiome relatif aux cycles de dimensions $< n - p - 1$.

[7] Fund. Math., 19, 1932, pp. 149—183 (voir [7]).

[8] J'espère de revenir ailleurs sur la possibilité d'étendre ma théorie des variétés au cas d'autres domaines $\mathfrak{R}$.

métrique et compact. Bien que ce soit le cas le plus important, je n'ai pas voulu introduire explicitement la métrisabilité de R, d'autant mieux que cette hypothèse ne simplifie guère les démonstrations. On pourrait se passer entièrement de l'ensemble S introduit dans l'axiome A_3, en remplaçant A_1 et A_3 par l'axiome unique que $R - S$ soit un espace *localement* bicompact[9]; ce procédé, logiquement équivalent à celui du texte, introduirait peut-être quelques difficultés d'exposition. L'axiome A_4 dit que la *dimension* n (au sens de Menger-Urysohn) de l'espace $R - S$ est finie (et >0). En appliquant le *allgemeiner Zerlegungssatz* de M. Menger[10] je prouve au n° 8 que, un réseau $\mathfrak{Z}$ étant donné, on peut définir une famille complète de réseaux „*commodes*" $\mathfrak{U}$ jouissant de la propriété suivante: chaque $(k, \mathfrak{U})$-simplexe τ^k est situé dans un certain sens sur un $(h, \mathfrak{Z})$-simplexe σ^h [11] de manière qu'on ait toujours $k \leqq n - h$. On voit que les σ^h sont pour notre variété abstraite ce que les faces sont pour une variété polyèdrale (à un σ^h correspondant une $(n - h)$-face du polyèdre).

Au Chap. II, j'introduis successivement les axiomes B (n° 9), D_1 (n° 11), D_2 (n° 12), E (n° 13) et F (n° 16) relatifs à la manière dont se comportent les cycles à n ou à $n - 1$ dimensions de l'espace $R - S$. A l'aide de ces axiomes on démontre (n° 17) l'existence d'un (n, R)-cycle G^n mod S, recouvrant tout l'espace R et appelé le *cycle principal.* En considérant un réseau $\mathfrak{Z}$ et les réseaux commodes $\mathfrak{U}$ relatifs, on attache (n° 19) à chaque $(0, \mathfrak{Z})$-simplexe σ^0 une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $K^n(\sigma^0, \mathfrak{U})$ située dans σ^0 de manière que la somme de tous les K^n soit égale à $G^n(\mathfrak{U})$. Successivement, on attache alors à chaque $(h, \mathfrak{Z})$-simplexe σ^h une $(n - h, \mathfrak{U})$-chaîne $K^{n-h}(\sigma^h, \mathfrak{U})$ située dans σ^h de manière que *les relations d'incidence entre les σ^h soient duelles de celles entre les* $K^{n-h}(\sigma^h, \mathfrak{U})$. On voit déjà que le théorème de dualité subsiste entre les $(p, \mathfrak{Z})$-chaînes et entre les $(n - p, \mathfrak{U})$-*chaînes élémentaires*, c'est-à-dire de la forme $\sum c_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$. Ce théorème de dualité n'a d'ailleurs encore aucune signification géométrique et on doit encore vaincre trois différentes difficultés:

α. On doit prouver que l'on peut s'arranger de façon que $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \neq 0$.

β. On doit prouver que, C^{n-p} étant un $(n - p, R)$-cycle, $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ est homologue à une chaîne élémentaire.

γ. On doit prouver que si la chaîne élémentaire $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ est homologue à zéro, il existe une $(n - p + 1)$-chaîne *élémentaire* $D^{n-p+1}(\mathfrak{U})$ telle que $D^{n-p+1}(\mathfrak{U}) \rightarrow \rightarrow C^{n-p}(\mathfrak{U})$.[12]

Pour vaincre les difficultés α, β et γ, on a besoin de nouveaux axiomes (le nombre de ces axiomes croit avec p; pour $p = 0$ aucun nouvel axiome n'est plus nécessaire).

La difficulté α est résolue au Chap. III (n° 25) à l'aide des axiomes G^k (v. n° 21), où $n - p \leqq k \leqq n - 1$. L'axiome G^k dit que, dans $R - S$, les petits cycles à k dimensions sont ~ 0.

[9] Tous les axiomes ultérieurs se rapportent uniquement à l'espace $R - S$.

[10] C'est peut-être la première application de ce théorème très important à mon avis.

[11] τ^k est d'espèce σ^h dans la terminologie du texte (v. n° 8.3).

[12] En réalité, je démontrerai un énoncé un peu plus compliqué que γ.

La difficulté β est résolue au Chap. IV (n° 31) à l'aide des axiomes G^k ($n - p \leqq \leqq k \leqq n - 1$) et des nouveaux axiomes H^k (v. n° 27), où $\max(0, n - p - 1) \leqq \leqq k \leqq n - 2$. La démonstration est très compliquée et presque entièrement combinatoire.

La difficulté γ ést résolue au Chap. V (n° 44); on n'a plus besoin d'aucun nouvel axiome. La démonstration est très analogue à celle du Chap. IV.

Au Chap. VI, j'introduis (n° 56) l'indice de Kronecker d'un couple de cycles dont les dimensions sont resp. p et $n - p$. Cette théorie est complète à l'exception de la loi commutative que je démontrerai dans un Mémoire qui fera suite au présent, et où j'exposerai la théorie complète des *intersections des cycles* sur une variété abstraite.

Au Chap. VII, je démontre le théorème général de dualité dans une variété abstraite; pour une variété polyèdrale, c'est la formule (7), p. 142 de la *Topology* deM. Lefschetz.

Au Chap. VIII je prouve d'abord que les axiomes $G^k[0 \leqq k \leqq (n - 1)/2]$ et $H^k(0 \leqq k \leqq n/2 - 1)$·sont des conséquences des autres axiomes. Ensuite, je généralise à mes variétés quelques autres théorèmes de dualité (théorèmes de Poincaré et de MM. Alexander, Lefschetz et Pontrjagin).

I.

1. **Axiome** A_1: *L'espace R est bicompact.*[13] Cela signifie que de chaque famille $\mathfrak{F}$ de sous-ensembles ouverts on peut extraire une famille finie recouvrant R (= réseau dans R).

1.1. *Un sous-ensemble A de R est bicompact si et seulement si A est fermé dans R.*

Démonstration. Supposons en premier lieu que $A = \bar{A}$. Soit $\mathfrak{F}_0$ un recouvrement de A. A chaque $U_0 \in \mathfrak{F}_0$ attachons un ensemble U ouvert dans R et tel que $U_0 = U \,.\, A$; en ajoutant $R - A$ à ces ensembles U, on obtient un recouvrement $\mathfrak{F}$ de R. L'espace R étant bicompact, il existe un recouvrement fini $\mathfrak{F}_1$ extrait de $\mathfrak{F}$. Les $U_0 = U \,.\, A$, où $U \in \mathfrak{F}_1$, forment un recouvrement fini de A extrait de $\mathfrak{F}_0$. Supposons en second lieu que l'ensemble $A \subset R$ soit bicompact. Alors $A = \bar{A}$ (v. Alexandroff et Urysohn, l. c. sub[13], p. 47, corollaire 1).

1.2. *L'espace R est normal.* Cela signifie que, U étant un entourage d'un sous-ensemble fermé A de R, il existe un entourage V de A tel que $\bar{V} \subset U$.

Pour la démonstration, v. Alexandroff et Urysohn, l. c., p. 26, I.

1.3. *Chaque réseau (dans R) $\mathfrak{U}$ possède un affinement $\mathfrak{V}$ jouissant de la propriété suivante: A chaque sommet V de $\mathfrak{V}$ on peut attacher un sommet U de $\mathfrak{U}$ de manière*

[13] L. Vietoris, *Stetige Mengen*, Monatshefte f. Math. u. Phys., t. 31, 1921; P. Alexandroff et P. Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Verhandelingen Akad. Amsterdam, 1929.

que non seulement $V \subset U$ mais aussi $V' \subset U$ pour chaque sommet V' de $\mathfrak{V}$ tel que $VV' \neq 0$.

Démonstration. Soient U_i $(1 \leqq i \leqq m)$ les sommets de $\mathfrak{U}$. D'après un lemme de M. Menger[14] on peut trouver des ensembles ouverts U'_i $(1 \leqq i \leqq m)$ tels que $\overline{U}'_i \subset U_i$, $\sum_{1}^{m} U'_i = R$. A chaque point a de R attachons un entourage V si petit que 1° $a \in U'_i$ entraîne $V \subset U'_i$; 2° $a \in \overline{U}'_i$ entraîne $V \subset U_i$; 3° $a \in R - \overline{U}'_i$ entraîne $VU'_i = 0$. D'après l'axiome A_1, il existe des points a_ν en nombre fini tels que les entourages V_ν correspondants constituent un réseau $\mathfrak{V}$. Pour chaque valeur de ν, il existe une valeur de i telle que $a_\nu \in U'_i$, d'où (d'après 1°) $V_\nu \subset U'_i$. Il suffit de montrer que $V_\mu V_\nu \neq 0$ entraîne $V_\mu \subset U_i$. Or soit $b \in V_\mu V_\nu$; alors $b \in V_\mu U'_i$, d'où $V_\mu U'_i \neq 0$ et donc (d'après 3°) $a_\mu \in \overline{U}'_i$ et par suite (d'après 2°) $V_\mu \subset U_i$.

2. **Axiome** A_2: *Chaque sous-ensemble ouvert de R est un F_σ dans R.*

2.1. *Chaque sous-ensemble de R satisfait à l'axiome A_2.*[15]

2.2. Nous allons rappeler les théorèmes de la théorie de la dimension dont nous ferons usage dans ce qui suit. Ces théorèmes sont vrais dans chaque espace satisfaisant aux axiomes A_1 et A_2, et même plus généralement dans chaque espace topologique normal satisfaisant à l'axiome A_2. Pour les démonstrations je renvoie au livre de M. Menger: *Dimensionstheorie* (cité par M) pour le cas particulier d'un espace métrique séparable ainsi qu'à mon Mémoire: *Sur la dimension des espaces parfaitement normaux*[16] (cité par Č) pour le cas général.

2.21.[17] $\dim R = -1$ signifie que $R = 0$. A étant un sous-ensemble fermé de R, $\dim_A R \leqq n$ signifie qu'à chaque entourage U de A on peut attacher un entourage $V \subset U$ de A tel qu'on ait $\dim \Phi \leqq n - 1$, où $\Phi = \overline{V} - V$. $\dim R = n$ signifie que: 1° $\dim_A R \leqq n$ pour chaque sous-ensemble fermé A de R; 2° la relation $\dim_A R \leqq n - 1$ n'est pas vraie pour chaque sous-ensemble fermé A de R.[18]

2.22.[19] $S \subset R$ entraîne que $\dim S \leqq \dim R$.

2.23.[20] Soit $R = \sum_{\nu=1}^{\infty} R_\nu$, les R_ν étant fermés dans R. Alors $\dim R = \max \dim R_\nu$.

[14] *Dimensionstheorie*, pp. 159–160, „Bemerkung". Le lemme est évidemment vrai dans chaque espace normal.

[15] V. Urysohn, *Über die Mächtigkeit zusammenhängender Mengen*, Math. Annalen, t. 94, p. 286, note [41] au bas de la page.

[16] Bull. intern. de l'Acad. des Sc. de Bohème, 1932, (voir [6]).

[17] M, Chap. II (v. aussi p. 116); Č. Chap. II, (voir [6]).

[18] Dans cette définition, il est permis de limiter A aux points de R, si l'espace R jouit de la propriété suivante: de chaque famille de sous-ensembles ouverts recouvrant R on peut extraire une famille dénombrable recouvrant R (cette propriété vaut si R est un sous-ensemble d'un espace satisfaisant aux axiomes A_1 et A_2).

[19] M, p. 81; Č, n° 23 (voir [6]).

[20] M, Chap. III; Č, chap. III (voir [6]).

2.24.[21] Soit $\dim R \leqq n$; soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R. Il existe un affinement $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{U}$ dont l'ordre (v. cet Ouvrage, n° 7.2) est $\leqq n$.

2.25.[22] Soit $\dim R \leqq n$. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R; soient $U_1, U_2, \ldots, U_m$ les sommets de $\mathfrak{U}$. Il existe des sous-ensembles fermés $F_1, F_2, \ldots, F_m$ de R tels que 1° $F_\nu \subset U_\nu$; 2° $\dim F_{\nu_0} \,.\, F_{\nu_1} \,.\, \ldots \,.\, F_{\nu_h} \leqq n - h$ pour $0 \leqq h \leqq n + 1$; 3° $\sum_1^m F_\nu = R$.[23]

2.26.[24] Soit $R = R_0 \supset R_1 \supset \ldots \supset R_k$, les R_i étant fermés dans R. Soit $\dim R_i = n_i$. Soit $a \in R_k$. Soit U un entourage de a. Il existe un entourage $V \subset U$ de a tel que $\dim R_i(\bar{V} - V) \leqq n_i - 1$ pour $0 \leqq i \leqq k$.

2.3. Si $R = R_0 \supset R_1 \supset \ldots \supset R_n$, les R_k étant des sous-ensembles fermés de R tels que $\dim R_k \leqq n - k$ pour $0 \leqq k \leqq n$, alors chaque réseau $\mathfrak{U}$ dans R possède un affinement $\mathfrak{B}$ jouissant de la propriété suivante: Si chaque sommet d'un $(h, \mathfrak{B})$-simplexe σ^h rencontre R_k $(0 \leqq k \leqq n)$, on a $h \leqq n - k$.

Démonstration. Le théorème étant évident pour $n = 0$ (v. 2.24), supposons le vrai pour la dimension $n - 1$ (= l'hypothèse H). Soit donné le réseau $\mathfrak{U}$. A chaque point a de R attachons un entourage $V \subset U \in \mathfrak{U}$ tel que (v. 2.26) $\dim R_k F(V) \leqq n - k - 1$ pour $0 \leqq k \leqq n$, en particulier $R_n F(V) = 0$. D'après l'axiome A_1, il existe des points a_ν $(1 \leqq \nu \leqq s)$ en nombre fini tels que $\sum_1^s V_\nu = R$. Posons

$$V_1' = V_1\,, \quad V_\nu' = V_\nu - \sum_{i=1}^{\nu-1} \bar{V}_i \quad \text{pour} \quad 2 \leqq \nu \leqq s\,.$$

On a alors $\sum_1^s \bar{V}_\nu' = R$, $V_\mu' V_\nu' = 0$, d'où $V_\mu' F(V_\nu') = 0$ et enfin $F(V_\nu') \subset \sum_{i=1}^{\nu} F(V_\nu)$ et par suite (v. 2.23) $\dim R_k F(V_\nu') \leqq n - k - 1$ pour $0 \leqq k \leqq n$, $1 \leqq \nu \leqq s$, en particulier $R_n \,.\, F(V_\nu') = 0$. Posons $R_0' = \sum_1^s F(V_\nu')$, $R_k' = R_k \,.\, R_0'$ $(1 \leqq k \leqq n - 1)$. Alors $\dim R_k' \leqq n - 1 - k$ pour $0 \leqq k \leqq n - 1$. En vertu de 1.1 et 2.1, l'espace R_0' satisfait aux axiomes A_1 et A_2. Donc, d'après l'hypothèse H, il existe des ensembles v_μ $(1 \leqq \mu \leqq t)$ en nombre fini ouverts dans R_0' et tels que: 1° $\sum_1^t v_\mu = R_0'$; 2° chaque v_μ fait partie d'un sommet U_μ de $\mathfrak{U}$; 3° si les indices $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_h$ différents l'un de l'autre sont tels que $\prod_0^h v_{\mu_i} \neq 0$ et que (pour une certaine valeur de k, $0 \leqq k \leqq n - 1$) $R_k' v_{\mu_i} \neq 0$ pour $0 \leqq i \leqq h$, alors $h \leqq n - k - 1$. Pour $1 \leqq \mu \leqq t$, soit V_μ'' un sous-

[21] M, pp. 158–161; Č, n° 26 (voir [6]).
[22] M, pp. 161–174; Č, n° 26 (voir [6]).
[23] En réalité on trouve l. c. seulement la démonstration de l'existence d'un réseau fermé $\mathfrak{F}$ qui est un affinement de $\mathfrak{U}$ et tel que $\dim \Phi_{i_0} \Phi_{i_1} \ldots \Phi_{i_h} \leqq n - h$ pour $\Phi_i \in \mathfrak{F}$. Or il suffit de partager les sommets Φ de $\mathfrak{F}$ en m groupes de manière que $\Phi \subset U_\nu$ pour chaque Φ du $\nu^{\text{ème}}$ groupe et de désigner par F_ν la somme de tous les Φ de $\nu^{\text{ème}}$ groupe.
[24] M, p. 169; Č, n° 24.2 (voir [6]).

ensemble ouvert de R tel que 1° $v_\mu \subset V''_\mu \subset U_\mu - R_n$; 2° si $v_\mu \, . \, R'_k = 0$ $(1 \leqq \mu \leqq t,$ $1 \leqq k \leqq n - 1)$, alors $V''_\mu \, . \, R_k = 0$; 3° si $\prod_0^h v_{\mu_i} = 0$ alors $\prod_0^h V''_{\mu_i} = 0$.[25] Les ensembles V'_ν $(1 \leqq \nu \leqq s)$ et V''_μ $(1 \leqq \mu \leqq t)$ constituent l'affinement cherché $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$.

3. **Axiome** A_3: *S est un sous-ensemble fermé de R; $S \neq R$.*

3.1. *Il existe une suite dénombrable $\{F_i\}$ de sous-ensembles bicompacts de $R - S$ telle que* 1° $F_{i+1} \supset F_i$; 2° $R - S = \sum_1^\infty F_i$; 3° *pour chaque sous-ensemble bicompact A de $R - S$ il existe une valeur de i telle que $A \subset F_i$. On peut même supposer $F_i = \bar{G}_i$, G_i étant un sous-ensemble ouvert de $R - S$, $\bar{G}_i \subset G_{i+1}$.*

Démonstration. D'après les axiomes A_2 et A_3, il existe une suite $\{\Phi_i\}$ de sous-ensembles bicompacts (v. 1.1) de $R - S$ telle que $R - S = \sum_1^\infty \Phi_i$. S et Φ_1 sont deux sous-ensembles fermés disjoints de l'espace R. D'après 1.2, il existe un ensemble ouvert G_1 tel que $\Phi_1 \subset \bar{G}_1 \subset R - S$. Plus généralement, supposons que, pour une certaine valeur de k $(= 2, 3, \ldots)$, on ait déjà construit des ensembles ouverts G_i $(1 \leqq i \leqq k - 1)$ tels que $\bar{G}_{i-1} \subset G_i$, $\Phi_i \subset G_i \subset \subset R - S$. Les ensembles $\Phi_k + \bar{G}_{k-1}$ et S étant fermés dans l'espace normal R et disjoits, il existe un ensemble ouvert G_k tel que $\Phi_k + \bar{G}_{k-1} \subset G_k \subset \subset R - S$. La suite $\{G_i\}$ étant ainsi construite par récurrence, il suffit de poser $F_i = \bar{G}_i$. En effet, si A est un sous-ensemble bicompact de $R - S$, on a $\sum_1^\infty AG_i = A$, d'où, d'après la définition même de la bicompacticité, $A = \sum_1^k AG_i$ pour une certaine valeur de k, et donc $A \subset \sum_1^k G_i = G_k \subset F_k$.

4. Un *réseau gén.* (= généralisé) $\mathfrak{P}$ est une famille $\{P_i\}$ au plus dénombrable de sous-ensembles uoverts et non vides de $R - S$ telle que: 1° $R - S = \sum_1^\infty P_i$; 2° pour chaque sous-ensemble bicompact A de $R - S$ on a $AP_i = 0$ pour presque toutes les valeurs de i. En particulier, un point $a \in R - S$ ne peut appartenir qu'à un nombre fini des P_i. Les P_i sont les *sommets* du réseau gén. $\mathfrak{P}$.

Dans le cas particulier $S = 0$ [ou, plus généralement, si $R - S$ est fermé dans R] l'ensemble $R - S$ est bicompact; en vertu de la condition 2°, les ensembles P_i sont alors en nombre fini et le réseau gén. est simplement un réseau dans $R - S$.

4.1. Soit $\mathfrak{P}$ une famille de sous-ensembles ouverts de $R - S$ (en particulier, $\mathfrak{P}$ peut être un réseau gén.). Soit $\mathfrak{Q}$ un réseau gén. On dit que $\mathfrak{Q}$ constitue un *affinement* de $\mathfrak{P}$, si chaque sommet Q de $\mathfrak{Q}$ est contenu dans un élément (sommet) de $\mathfrak{P}$.

4.2. *Soit $\mathfrak{P}$ une famille comme dans* 4.1. *Il existe un réseau gén. $\mathfrak{Q}$ qui soit un affinement de $\mathfrak{P}$.*

[25] V. *Homologie*, III, 21 (voir [7]). L'hypothèse que l'espace soit complètement normal est ici vérifiée en vertu de 1.3 et 2.3 (v. Urysohn, l. c. sub [15]).

Démonstration. Déterminons $\{F_i\}$ d'après 3.1. Les ensembles F_i étant bicompacts et $\subset R - S$, pour chaque valeur de i il existe un nombre fini d'éléments $P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{i\lambda_i}$ de $\mathfrak{P}$ recouvrant F_i. Posons $Q_{ik} = P_{ik} - F_{i-1}$ $(1 \leqq k \leqq \lambda_i)$, où $F_0 = 0$. La suite Q_{ik} $(i = 1, 2, 3, \ldots; k = 1, 2, \ldots, \lambda_i)$ dont on supprime les membres vides, constitue le réseau gén. $\mathfrak{Q}$ cherché.

4.3. *Chaque réseau gén.* $\mathfrak{P}$ *possède un affinement* $\mathfrak{Q}$ *jouissant de la propriété suivante: Pour chaque* $Q \in \mathfrak{Q}$ *il existe un* $P \in \mathfrak{P}$ *tel que* $\bar{Q} \subset P$. *En particulier* $\bar{Q} \subset R - S$ *pour chaque sommet* Q *de* $\mathfrak{Q}$.

Démonstration. Déterminons les P_{ik} $(i = 1, 2, 3, \ldots; k = 1, 2, \ldots, \lambda_i)$ comme dans 4.2. Pour chaque valeur de i les ensembles ouverts $P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{i\lambda_i}$ recouvrent le sous-ensemble fermé F_i de l'espace normal R. Il existe donc (v. [14]) des ensembles Q_{ik} $(k = 1, 2, \ldots, \lambda_i)$ tels que $\bar{Q}_{ik} \subset P_{ik}$, $\sum_{k=1}^{\lambda_i} Q_{ik} \supset F_i$. Les Q_{ik} $(i = 1, 2, 3, \ldots; k = 1, 2, \ldots, \lambda_i)$ constituent le réseau gén. $\mathfrak{Q}$ cherché.

4.4. *Chaque réseau gén.* $\mathfrak{P}$ *possède un affinement* $\mathfrak{Q}$ *jouissant de la propriété suivante: A chaque sommet* Q *de* $\mathfrak{Q}$ *on peut attacher un sommet* P *de* $\mathfrak{P}$ *de manière que non seulement* $Q \subset P$ *mais aussi* $Q' \subset P$ *pour chaque sommet* Q' *de* $\mathfrak{Q}$ *tel que* $QQ' \neq 0$.

Démonstration. Déterminons $\{F_i\}$ d'après 3.1. On peut (v. 4.3) déterminer deux suites $\{P_i\}$ et $\{P'_i\}$ d'ensembles ouverts telles que $P_i \in \mathfrak{P}$, $\bar{P}'_i \subset P_i$, $\sum_1^\infty P'_i = \sum_1^\infty P_i = R - S$. A chaque point a de $R - S$ attachons un entourage Q si petit que: 1° $a \in P'_i$ entraîne $Q \subset P'_i$; 2° $a \in \bar{P}'_i$ entraîne $Q \subset P_i$; 3° $a \in R - \bar{P}'_i$ entraîne $QP'_i = 0$;[26] 4° $a \in R - F_i$ entraîne $QF_i = 0$. Les ensembles F_i étant bicompacts, de la relation $R - S = \sum_1^\infty F_i$ on voit qu'il existe une suite dénombrable $\{a_\nu\}$ de points de $R - S$ telle que les Q_ν correspondants recouvrent $R - S$; de plus, pour une valeur donnée de k, on a $a_\nu \in F_k$ pour un nombre fini d'indices ν, d'où, en vertu de 4°, $Q_\nu F_k = 0$ pour presque toutes les valeurs de ν. Les Q_ν constituent donc (v. 3.1) un réseau gén. $\mathfrak{Q}$. Pour chaque valeur de ν, il existe une valeur de i telle que $a_\nu \in P'_i$, d'où $Q_\nu \subset P'_i$ d'après 1°. Si $Q_\mu Q_\nu \neq 0$, on a $Q_\mu P'_i \neq 0$ et donc (d'après 3°) $a_\mu \in \bar{P}'_i$ et par suite (d'après 2°) $Q_\mu \subset P_i$.

[26] On ne peut préscrire qu'un nombre fini de telles conditions à l'entourage Q. Or d'après la définition même du réseau gén., la relation $a \in P_i$ (et a *fortiori* $a \in P'_i$ ou $a \in \bar{P}'_i$) ne peut avoir lieu que pour un nombre fini d'indices i de manière que 1° et 2° n'imposent qu'un nombre fin de conditions. Quant à 3°, déterminons un entourage U de a tel que $\bar{U} \subset R - S$ et posons la nouvelle condition 5°: $Q \subset U$. La condition 3° est alors vérifiée pour tous les indices i tels que $0 = \bar{U}P_i \supset \bar{U}P'_i$. Or $\bar{U}$ étant un sous-ensemble bicompact de $R - S$, l'inégalité $\bar{U}P_i \neq 0$ n'a lieu que pour un nombre fini d'indices i. Enfin, d'après 3.1 on a $a \in F_i$ pour presque toutes les valeurs de i.

5.1. On dit qu'un réseau $\mathfrak{U}$ est un *affinement mod S* d'un réseau gén. $\mathfrak{P}$, si chaque sommet U de $\mathfrak{U}$ tel que $US = 0$ est un sous-ensemble d'un sommet de $\mathfrak{P}$.

5.2. Une famille Φ de réseaux dans R s'appellera *parfaitement complète* si, $\mathfrak{U}$ étant un réseau et $\mathfrak{P}$ étant un réseau gén., il existe dans Φ un affinement de $\mathfrak{U}$ qui soit un affinement mod S de $\mathfrak{P}$. Une famille parfaitement complète est complète (dans le sens de *Homologie*, II, 30 et relativement à la famille fondamentale Z constituée par tous les réseaux ouverts dans R).

5.3. *Soit $\mathfrak{U}$ un réseau; soit $\mathfrak{P}$ un réseau gén. Il existe un réseau $\mathfrak{V}$ tel que* 1° $\mathfrak{V}$ *est un affinement de* $\mathfrak{U}$; 2° $\mathfrak{V}$ *est un affinement mod S de* $\mathfrak{P}$; 3° *les sommets rencontrant S sont les mêmes dans les deux réseaux* $\mathfrak{U}$ *et* $\mathfrak{V}$; 4° $V \in \mathfrak{V}$, $VS = 0$ *entraîne* $\overline{V}S = 0$.

Démonstration. Soit G la somme de tous les sommets de $\mathfrak{U}$ rencontrant S. Soient U_i $(1 \leqq i \leqq k)$ les autres sommets de $\mathfrak{U}$. Soit P_ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ les sommets de $\mathfrak{P}$ rencontrant $R - G$ (ces sommets sont en nombre fini, car $R - G$ est un sous-ensemble bicompact de $R - S$). L'ensemble $R - G$ étant fermé dans l'espace normal R et recouvert par les ensembles $U_i \,.\, P_\nu$ $(1 \leqq i \leqq k,\ 1 \leqq \nu \leqq m)$, il existe, d'après le lemme,[14] des ensembles ouverts $V_{i\nu}$ tels que $\overline{V}_{i\nu} \subset U_i \,.\, P_\nu$, $\sum V_{i\nu} \supset R - G$. Le réseau $\mathfrak{V}$ s'obtient de $\mathfrak{U}$ en remplaçant chaque U_i $(1 \leqq i \leqq k)$ par les $V_{i\nu}$ $(1 \leqq \nu \leqq m)$, dont on omet ceux qui sont vides.

5.4. *Soit $\mathfrak{U}$ un réseau; soit $\mathfrak{P}$ un réseau gén.; soit Φ une famille parfaitement complète de réseaux. La famille de tous les réseaux $\mathfrak{V}$ tels que* 1° $\mathfrak{V} \in \Phi$; 2° $\mathfrak{V}$ *est un affinement de* $\mathfrak{U}$; 3° $\mathfrak{V}$ *est un affinement mod S de* $\mathfrak{P}$, *est parfaitement complète.*

La démonstration est banale.

5.5. *Soit Φ la famille de tous les réseaux $\mathfrak{U}$ tels que:* 1° $\mathfrak{U}$ *est régulier par rapport à S* (v. *Homologie*, III, 22); 2° $U \in \mathfrak{U}$, $US = 0$ *entraîne* $\overline{U}S = 0$. *La famille Φ est parfaitement complète.*

Cela résulte de 5.3 et de *Homologie*, III, 23.

6.1. *Déterminons $\{G_i\}$ d'après 3.1. Soit $p = 0, 1, 2, \ldots$. Pour chaque valeur de i soit L_i un système linéaire de (p, R)-cycles mod $(R - G_i)$ tel que $C^p \in L_i$ pour chaque (p, R)-cycle C^p mod $(R - G_i)$ jouissant de la propriété que, pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ d'une famille complète donnée il existe un $C_i^p \in L_i$ tel que $C^p(\mathfrak{U}) \sim C_i^p(\mathfrak{U})$ mod $(R - G_i)$. Si $i < k$, supposons qu'à chaque $C_k^p \in L_k$ on puisse attacher un $C_i^p \in L_i$ de manière que $C_i^p \sim C_k^p$ mod $(R - G_i)$. Il existe un (p, R)-cycle C^p mod S tel que pour chaque valeur de i il existe un $C_i^p \in L_i$ jouissant de la propriété $C^p \sim C_i^p$ mod $(R - G_i)$.*

Démonstration. Soit Φ la famille complète du n° 5.5. Soit $\mathfrak{U} \in \Phi$. Soit K la somme de tous les sommets de $\mathfrak{U}$ disjoints à S. D'après la définition de la famille Φ, on a $\overline{K} \subset R - S$, de manière qu'il existe (v. 3.1) un indice i_0 tel que $K \subset G_i$ pour $i \geqq i_0$. Alors si un sommet U de $\mathfrak{U}$ rencontre $R - G_i$ $(i \geqq i_0)$, il rencontre aussi S;

le réseau $\mathfrak{U}$ étant (v. 5.5) régulier par rapport à S, on a plus généralement: si le noyau d'un $\mathfrak{U}$-simplexe rencontre $R - G_i$ $(i \geqq i_0)$, il rencontre aussi S. Donc les frontières, cycles, homologies mod S et mod $(R - G_i)$ $(i \geqq i_0)$ coïncident dans le réseau $\mathfrak{U}$.

Pour $i \geqq i_0$, soit $\Lambda_i^p(\mathfrak{U})$ la famille de tous les $(p, \mathfrak{U})$-cycles $C^p(\mathfrak{U})$ mod S (ou, ce qui est la même chose, mod $(R - G_i)$) tels qu'il existe un $C_i^p \in L_i$ tel que $C^p(\mathfrak{U}) \sim C_i^p(\mathfrak{U})$ mod $(R - G_i)$ (et donc mod S). On voit sans peine que $\Lambda_i^p(\mathfrak{U}) \neq 0$ et que $\Lambda_k^p(\mathfrak{U}) \subset \Lambda_i^p(\mathfrak{U})$ pour $k > i \geqq i_0$. Donc

$$\prod_{i \in N} \Lambda_i^p(\mathfrak{U}) = \prod(N) \neq 0$$

pour chaque ensemble fini N d'indices $i \geqq i_0$, car $\prod(N) = \Lambda_k^p(\mathfrak{U})$ pour $k = \max N$. $\Lambda_i^p(\mathfrak{U})$ est évidemment un système linéaire contenu dans le module fini de toutes les $(p, \mathfrak{U})$-chaînes. Par suite (v. *Homologie*, I, 15) la partie commune $\Lambda^p(\mathfrak{U})$ de tous les $\Lambda_i^p(\mathfrak{U})$ $(i \geqq i_0)$ est non vide; c'est donc un système linéaire.

Or, soit $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B} \in \Phi$ et supposons que $\mathfrak{B}$ soit un affinement de $\mathfrak{U}$, $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. On voit sans peine que $\pi \Lambda^p(\mathfrak{B}) \subset \Lambda^p(\mathfrak{U})$. Donc (v. *Homologie*, II, 21) il existe un (p, R)-cycle C^p mod S tel que $C^p(\mathfrak{U}) \in \Lambda^p(\mathfrak{U})$ pour chaque réseau $\mathfrak{U} \in \Phi$. Soit donnée une valeur de i; on doit prouver que $C^p \sim C_i^p$ mod $(R - G_i)$, $C_i^p \in L_i$. On peut même démontrer que $C^p \in L_i$. Il suffit de prouver que pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$ il existe un $C_i^p \in L_i$ tel que $C^p(\mathfrak{U}) \sim C_i^p(\mathfrak{U})$ mod $(R - G_i)$. Or soit $\mathfrak{U} \in \Phi$; soit $k \geqq i_0$. On a $C^p(\mathfrak{U}) \in \Lambda^p(\mathfrak{U}) \subset \Lambda_k^p(\mathfrak{U})$, d'où $C^p(\mathfrak{U}) \sim C_k^p(\mathfrak{U})$ mod S avec $C_k^p \in L_k$. Or on peut attacher à C_k^p un $C_i^p \in L_i$ tel que $C_k^p \sim C_i^p$ mod $(R - G_i)$, d'où $C^p(\mathfrak{U}) \sim C_i^p(\mathfrak{U})$ mod $(R - G_i)$.

6.2. *Déterminons G_i d'après* 3.1. *Soit* $p = 0, 1, 2, \ldots$. *Soit C^p un (p, R)-cycle mod S tel que $C^p \sim 0$ mod $(R - G_i)$ pour chaque i. Alors $C^p \sim 0$ mod S.*

Démonstration. La famille Φ du n° 5.5 étant complète, il suffit de voir que $C^p(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod S pour chaque réseau $\mathfrak{U} \in \Phi$. Or nous venons de voir que, $\mathfrak{U}$ étant donné, il existe une valeur de i telle que $C^p(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod $(R - G_i)$ (ce qui a été supposé pour chaque i) entraîne $C^p(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod S.

6.3. *Soient R_1, R_2 deux espaces; soit $S_1 \subset R_1$, $S_2 \subset R_2$. Supposons que R_1 et S_1, ainsi que R_2 et S_2, vérifient les axiomes A_1, A_2, A_3. Supposons de plus que $R_1 - S_1$ soit homéomorphe à $R_2 - S_2$. Alors, pour* $p = 0, 1, 2, \ldots$, *le* p$^{\text{ème}}$ *groupe de Betti de R_1 mod S_1 est isomorphe au* p$^{\text{ème}}$ *groupe de Betti de R_2 mod S_2.*

Démonstration. Soit φ l'homéomorphie donnée entre $R_1 - S_1$ et $R_2 - S_2$. Dans l'espace $R_1 - S_1$, définissons la suite $\{G_i\}$ comme dans 3.1. La suite $\{G_i'\}$, où $G_i' = \varphi G_i$, jouit de propriétés analogues par rapport à $R_2 - S_2$. Soit C^p un (p, R_1)-cycle mod S_1. Pour $i = 1, 2, \ldots$, soit C_i^p un $(p, \bar{G}_i)$-cycle mod $(\bar{G}_i - G_i)$ tel qu'on ait $C^p \sim C_i^p$ mod $(R_1 - G_i)$. On voit sans peine que de tels cycles existent. Posons $*C_i^p = \varphi C_i^p$; c'est un $(p, \bar{G}_i')$-cycle mod $(\bar{G}_i' - G_i')$ que l'on peut considérer aussi comme un (p, R_2)-cycle mod $(R_2 - G_i')$. Evidemment on a pour $i < k$: $*C_i^p = *C_k^p$ mod $(R_2 - G_i')$. D'après 6.1 il existe un (p, R_2)-cycle mod S_2: $*C^p$ tel que $*C^p \sim *C_i^p$ mod $(R_2 - G_i')$ pour chaque i. Posons $*C^p = \psi C^p$. De 6.2 il résulte aisément que ψ définit une isomorphie entre les deux groupes de Betti considérés.

7. **Axiome** A_4: *La dimension* (v. 2.21) *de* $R - S$ *est égale à* n $(= 1, 2, 3, \ldots)$.

7.1. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R. Un $\mathfrak{U}$-simplexe (en particulier un sommet de $\mathfrak{U}$) sera dit *intérieur* si aucun de ses sommets ne rencontre S, *extérieur* dans le cas contraire.

7.2. L'*ordre* d'un réseau $\mathfrak{U}$ dans R est la plus grande dimension d'un $\mathfrak{U}$-simplexe. L'*ordre mod S* de $\mathfrak{U}$ est la plus grande dimension m d'un $\mathfrak{U}$-simplexe intérieur; si chaque sommet de $\mathfrak{U}$ rencontre S, on pose $m = -1$.

7.3. *Soit* $\mathfrak{U}$ *un réseau; soit* $\mathfrak{P}$ *un réseau gén. Il existe un réseau* $\mathfrak{V}$ *tel que* 1° $\mathfrak{V}$ *est un affinement de* $\mathfrak{U}$; 2° $\mathfrak{V}$ *est un affinement mod S de* $\mathfrak{P}$; 3° *les sommets rencontrant S sont les mêmes dans les deux réseaux* $\mathfrak{U}$ *et* $\mathfrak{V}$; 4° *l'ordre mod S de* $\mathfrak{V}$ *est* $\leqq n$.

Démonstration. Soit G la somme des sommets extérieures de $\mathfrak{U}$. Soient U_i $(1 \leqq i \leqq k)$ les sommets intérieurs de $\mathfrak{U}$. Les ensembles $(R - G)\, U_i$ constituent un réseau $\mathfrak{U}'$ dans $R - G$. Soient $P_1, P_2, \ldots, P_m$ les sommets de $\mathfrak{P}$ rencontrant $R - G$; les ensembles $P_\nu - G$ $(1 \leqq \nu \leqq m)$ constituent un réseau $\mathfrak{W}'$ dans $R - G$. Puisque $R - G$ est un espace bicompact de dimension $\leqq n$, il existe un affinement $\mathfrak{V}'$ simultané de $\mathfrak{U}'$ et de $\mathfrak{W}'$ dont l'ordre est $\leqq n$. Soient V_j' $(1 \leqq j \leqq h)$ les sommets de $\mathfrak{V}'$. Déterminons (v. *Homologie*, III, 21) des sous-ensembles ouverts V_j de $R - S$ de manière que $(R - G)\, V_j = V_j'$ et que $\prod V_{j_\nu}' = 0$ entraîne $\prod V_{j_\nu} = 0$. $\mathfrak{V}'$ étant un affinement de $\mathfrak{U}'$ et de $\mathfrak{W}'$ on peut s'arranger de manière que chaque V_j fasse partie d'un U_i et d'un sommet de $\mathfrak{P}$. En ajoutant aux V_j les sommets extérieurs de $\mathfrak{U}$, on obtient le réseau cherché $\mathfrak{V}$.

7.4. *Soit* Φ_1 *la famille de tous les réseaux* $\mathfrak{U}$ *de la famille* Φ *du n° 5.5 dont l'ordre mod S est* $\leqq n$. *La famille* Φ_1 *est parfaitement complète.*

D'après 5.5 et 7.3.

8. Soit $\mathfrak{Z}$ un réseau de la famille Φ_1 du n° 7.4 possédant des sommets intérieurs. Soit G la somme de tous les sommets extérieurs de $\mathfrak{Z}$. Pour $h = 0, 1, 2, \ldots$ soient σ_i^h $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ tous les $(h, \mathfrak{Z})$-simplexes intérieurs rangés dans un ordre déterminé. (On a $\alpha_h = 0$ pour $h > n$.) En particulier σ_i^0 $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ sont les sommets intérieurs de $\mathfrak{Z}$ de manière que les $\sigma_i^0 - G$ constituent un réseau dans l'espace bicompact $R - G$. Puisque $\dim (R - S) \leqq n$, d'après 2.25 il existe des sous-emsembles bicompacts T_i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ de $R - S$ tels que $T_i \subset \sigma_i^0$, $\sum_1^{\alpha_0} T_i \supset T - G$ [27] et enfin $\dim R_k \leqq n - k$ pour $0 \leqq k \leqq n + 1$, où R_k désigne l'ensemble de tous les points de R appartenant à $k + 1$ au moins parmi les ensembles T_i. (On a en particulier $R_0 = \sum_1^{\alpha_0} T_i$, $R_{n+1} = 0$.)

[27] On pourrait même supposer que $\sum T_i = R - G$; mais ce ne serait pas commode plus tard (v. n° 40).

Désignons par $\mathfrak{T}$ le réseau fermé dans R_0 aux sommets T_i. Pour $0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \leqq \alpha_h$, $\sigma_i^h = (\sigma_{i_0}^0, \sigma_{i_1}^0, \ldots, \sigma_{i_h}^0)$ soit $T(\sigma_i^h) = \prod_0^h T_{i_\nu}$. En particulier $T(\sigma_i^0) = T_i$. Les $T(\sigma_i^h)$ sont d'ailleurs les noyaux des $\mathfrak{T}$-simplexes (si on exclut les $T(\sigma_i^h) = 0$).

8.1. $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{T}$ étant donnés, un réseau $\mathfrak{U}$ dans R s'appellera *commode par rapport à* $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$, ou *commode* tous court,[28] s'il jouit des propriétés suivantes: 1° $\mathfrak{U}$ appartient à la famille Φ du n° 5.5; 2° aucun sommet de $\mathfrak{U}$ ne rencontre simultanément R_0 et S; 3° l'ordre mod S de $\mathfrak{U}$ est $\leqq n$; 4° pour $1 \leqq k \leqq n$, si chaque sommet d'un $(h, \mathfrak{U})$-simplexe rencontre R_k, on a $h \leqq n - k$; 5° pour $U \in \mathfrak{U}$, $0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \leqq \alpha_h$ la relation $U\, T(\sigma_i^h) = 0$ entraîne $\overline{U}\, T(\sigma_i^h) = 0$; 6° si le sommet U de $\mathfrak{U}$ recontre $T_{i_0}, T_{i_1}, \ldots, T_{i_h}$, alors les $\sigma_{i_0}^0, \sigma_{i_1}^0, \ldots, \sigma_{i_h}^0$ sont les sommets d'un $(h, \mathfrak{Z})$-simplexe σ_i^h et on a $U\, T(\sigma_i^h) \neq 0$.

8.2. *Les réseaux commodes forment une famille parfaitement complète.*

La démonstration fera l'objet des n$^{\text{os}}$ 8.21 – 8.22.

8.21. Soit R_0^* un ensemble bicompact tel que $R_0 \subset R_0^* \subset R - S$. D'après 2.1, l'espace R_0^* satisfait à l'axiome A_2.

Lemme L_p $(0 \leqq p \leqq n)$: Soit $\mathfrak{V}$ un réseau dans R_0^*. Il existe un affinement $\mathfrak{V}_p$ de $\mathfrak{V}$ jouissant des propriétés P_1, P_2, P_3 et P_4^q $(p \leqq q \leqq n)$ ci-après. *Propriété* P_1: L'ordre (7.2) du réseau $\mathfrak{V}_p$ est $\leqq n$. *Propriété* P_2: Pour $1 \leqq k \leqq n$, chaque $\mathfrak{V}_p$-simplexe dont tous les sommets rencontrent R_k a la dimension $\leqq n - k$. *Propriété* P_3: $V_0, V_1, \ldots, V_k$ étant des sommets de $\mathfrak{V}_p$, la relation $\prod_0^k V_\nu = 0$ entraîne $\prod_0^k \overline{V}_\nu = 0$; en outre, pour $0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$, la relation $\prod_0^k V_\nu\, T(\sigma_i^h) = 0$ entraîne $\prod_0^k \overline{V}_\nu\, T(\sigma_i^h) = 0$. Nous exprimerons cette propriété comme il suit: Les incidences dans $\overline{\mathfrak{V}}_p + \mathfrak{T}$ sont les mêmes que dans $\mathfrak{V}_p + \mathfrak{T}$. [Une *incidence* dans $\mathfrak{V}_p + \mathfrak{T}$, p. ex., est un groupe de sommets de $\mathfrak{V}_p$ et de $\mathfrak{T}$ dont le produit n'est pas vide.] *Propriété* P_4^q: Soit V_p un sommet de $\mathfrak{V}_p$ tel que 1° pour $q + 1 \leqq Q \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_Q$, on a $V_p T(\sigma_i^Q) = 0$; 2° il existe une valeur i_0, $1 \leqq i_0 \leqq \alpha_q$ telle que $V_p\, T(\sigma_{i_0}^q) \neq 0$; alors, pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$, ou bien $V_p T_i = 0$, ou bien σ_i^0 est un sommet du simplexe $\sigma_{i_0}^q$. La démonstration du lemme L_p sera donnée dans 8.211 et 8.212.

8.211. Démontrons d'abord le lemme L_n. Pour chaque couple i, j tel que $1 \leqq i \leqq \alpha_0$, $1 \leqq j \leqq \alpha_n$ et tel que σ_i^0 ne soit pas un sommet de σ_j^n, on a $T_i\, T(\sigma_j^n) = 0$ (car autrement on aurait $R_{n+1} \neq 0$). Il existe un affinement $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{V}$ tel qu'aucun sommet de $\mathfrak{U}$ ne rencontre simultanément T_i et $T(\sigma_j^n)$, pour aucun de nos couples i, j.[29] Puisque

[28] Cette définition est provisoire. Plus tard (dans 18.1) nous allons un peu restreindre cette notion.

[29] En effet, les ensembles disjoints T_i et $T(\sigma_j^n)$ étant fermés dans l'espace normal R_0^*, il existe deux sous-ensembles ouverts U_{ij}' et U_{ij}'' de R_0 tels que $U_{ij}' \supset T_i$, $U_{ij}'' \supset T(\sigma_j^n)$, $U_{ij}' \,.\, U_{ij}'' = 0$. Les ensembles U_{ij}', U_{ij}'' et $R_0 - (T_i + T(\sigma_j^n))$ constituent un réseau $\mathfrak{U}_{ij}$ dans R_0. Il suffit de prendre comme $\mathfrak{U}$ un affinement simultané de $\mathfrak{V}$ et de tous les réseaux $\mathfrak{U}_{ij}$.

$R_0^* \supset R_1 \supset \ldots \supset R_n$, $\dim R_0^* \leqq n$, $\dim R_k \leqq n - k$, $R_k = \bar{R}_k$, d'après 2.3 il existe un affinement $\mathfrak{V}_n'$ du réseau $\mathfrak{U}$ jouissant des propriétés P_1 et P_2. Le réseau $\mathfrak{U}$, et donc évidemment aussi son affinement $\mathfrak{V}_n'$, jouit de la propriété P_4^n. Il ne reste qu'à satisfaire à P_3. Or les propriétés P_1, P_2, et P_4^n du réseau $\mathfrak{V}_n'$ restent évidemment intactes si l'on rapetisse[30] les sommets de $\mathfrak{V}_n'$. On peut donc choisir le réseau $\mathfrak{V}_n'$ de manière que, si $\mathfrak{V}_n''$ en est un repetissement quelconque, les incidences dans $\mathfrak{V}' + \mathfrak{T}$ (qui sont en nombre fini) soient les mêmes que dans $\mathfrak{V}_n'' + \mathfrak{T}$. Le réseau $\mathfrak{V}_n'$ étant ainsi choisi, on voit sans peine que chaque rapetissement fort $\mathfrak{V}_n$ de $\mathfrak{V}_n'$ jouit de la propriété P_3.

8.212. Le lemme L_n étant démontré, supposons pour une certaine valeur de p $(0 \leqq p \leqq n - 1)$ la validité du lemme L_{p+1}. Il s'agit d'en déduire le lemme L_p. Soit donc $\mathfrak{V}$ un réseau donné dans R_0^*. Soit $\mathfrak{V}'$ un rapetissement fort de $\mathfrak{V}$. D'après L_{p+1}, déterminons un affinement $\mathfrak{V}_{p+1}$ de $\mathfrak{V}'$ jouissant des propriétés P_1, P_2, P_3 et P_4^q $(p + 1 \leqq q \leqq n)$.

Soit $V_1, V_2, \ldots, V_r$ la suite de tous les sommets de $\mathfrak{V}_{p+1}$, $M_1 = \bar{V}_1$, $M_2 = \bar{V}_2, \ldots$ $\ldots, M_r = \bar{V}_r$ celle de tous les sommets de $\bar{\mathfrak{V}}_{p+1}$ et $M_{r+1}, M_{r+2}, \ldots, M_{r+s}$ celle de tous les noyaux $T(\sigma_i^h)$ des $\mathfrak{T}$-simplexes. D'après *Homologie*, III, 21 il existe des sous-ensembles ouverts $U_1', U_2', \ldots, U_{r+s}'$ de R_0^* tels que 1° $U_\nu' \supset M_\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq r + s)$; 2° pour chaque combinaison $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h)$ d'indices $1, 2, \ldots, r + s$ $(1 \leqq h \leqq r + s)$ la relation $\prod_{i=1}^{h} M_{\nu_i} = 0$ entraîne $\prod_{i=1}^{h} U_{\nu_i}' = 0$. Pour chaque ν $(1 \leqq \nu \leqq r)$ il existe un sommet V_ν' de $\mathfrak{V}$ tel que $M_\nu \subset V_\nu'$. Posons $U_\nu = U_\nu' V_\nu'$ $(1 \leqq \nu \leqq r)$. Les ensembles $U_1, U_2, \ldots, U_r$ constituent un réseau $\mathfrak{U}$ dans R_0^* tel que 1° $\bar{V}_\nu \subset U_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq r$; 2° les incidences dans $\mathfrak{U} + \mathfrak{T}$ sont les mêmes que dans ($\bar{\mathfrak{V}}_{p+1} + \mathfrak{T}$ et par suite, $\mathfrak{V}_{p+1}$ jouissant de la propriété P_3, les mêmes que dans) $\mathfrak{V}_{p+1} + \mathfrak{T}$; 3° $\mathfrak{U}$ est un affinement de $\mathfrak{V}$.

Pour chaque couple composé d'un sommet V_ν de $\mathfrak{V}_p$ et du noyau $T(\sigma_i^h)$ d'un $\mathfrak{T}$-simplexe tel que $p + 1 \leqq h \leqq n$, $V_\nu\, T(\sigma_i^h) \neq 0$, choisissons un point $b_{\nu h i} \in V_\nu\, T(\sigma_i^h)$. Appelons *points distingués* ces points $b_{\nu h i}$ (qui sont en nombre fini).

Désignons par M la somme de tous les sommets de $\bar{\mathfrak{V}}_{p+1}$ n'ayant aucun point commun avec $R_{p+1} = \sum_{i=1}^{\alpha_{p+1}} T(\sigma_i^{p+1})$. Considérons tous les couples T_i, $T(\sigma_j^p)$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0$, $1 \leqq j \leqq \alpha_p)$ tels que σ_i^0 ne soit pas un sommet de σ_j^p. Évidemment les ensembles MT_i et $M\, T(\sigma_j^p)$ sont fermés et disjoints. Il existe donc[31] un réseau $\mathfrak{W}_1$ dans R_0^* dont aucun sommet ne rencontre simultanément les deux ensembles MT_i et $M\, T(\sigma_j^p)$ (pour aucun de nos couples T_i, $T(\sigma_j^p)$).

[30] *Rapetisser* les sommets $U_1, U_2, \ldots, U_m$ d'un réseau $\mathfrak{U}$ signifie que l'on passe de $\mathfrak{U}$ à un réseau $\mathfrak{V}$ aux sommets $V_1, V_2, \ldots, V_m$ tels que $V_i \subset U_i$. Le rapetissement $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$ est dit *fort* si $\bar{V}_i \subset U_i$. *Chaque réseau* $\mathfrak{U}$ *possède un rapetissement fort* (v. le lemme [14]).

[31] Cf. la note [29].

L'espace R_0^* étant bicompact et le réseau $\mathfrak{V}_{p+1}$ un rapetissement fort de $\mathfrak{U}$, il existe évidemment un réseau $\mathfrak{W}_2$ dans R_0^* tel que si $W \in \mathfrak{W}_2$, $WV_\nu \neq 0$, on a $W \subset U_\nu$.

D'après 1.3, on construit un réseau $\mathfrak{W}_3$ dans R_0^* tel que, si $W, W' \in W_3$, $WW' \neq 0$ et si W contient le point distingué $b_{\nu hi}$, on a $W + W' \subset V_\nu$.

En vertu du lemme L_{p+1}, il existe un affinement simultané $\mathfrak{W}$ des réseaux $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ et $\mathfrak{W}_3$ jouissant des propriétés P_1, P_2, P_3 et P_4^q $(p + 1 \leqq q \leqq n)$. Le réseau $\mathfrak{W}$ possède évidemment les propriétés de chacun des trois réseaux $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ et $\mathfrak{M}_3$.

Partageons les sommets V_ν $(1 \leqq \nu \leqq p + 1)$ de $\mathfrak{V}_{p+1}$ en deux espèces, les sommets de première espèce étant ceux qui rencontrent un des ensembles $T(\sigma_i^{p+1})$ $(1 \leqq i \leqq \leqq \alpha_{p+1})$.

Partageons aussi les sommets de $\mathfrak{W}$ en deux espèces de manière que $W \in \mathfrak{W}$ est de première espèce si, et seulement si, $WV_\nu \neq 0$ pour un sommet V_ν de première espèce de $\mathfrak{V}_{p+1}$. $\mathfrak{W}$ étant un affinement de $\mathfrak{W}_2$, on a alors $W \subset U_\nu$.

W étant un sommet de première espèce de $\mathfrak{W}$, distinguons deux cas: Si W ne contient aucun point distingué, choisissons, parmi les sommets V_ν de première espèce de $\mathfrak{V}_{p+1}$ tels que $WV_\nu \neq 0$, *un* sommet V_{ν_0} et attachons W à V_{ν_0}. Si W contient un point distingué, attachons W à *chaque* sommet V_ν de première espèce de $\mathfrak{V}_{p+1}$ tel que $WV_\nu \neq 0$. Pour chaque sommet V_ν de première espèce de $\mathfrak{V}_{p+1}$, soit V'_ν la somme de tous les $W \in \mathfrak{W}$ attachés à V_ν. On a alors $V'_\nu \subset U_\nu$.

Les sommets du réseau $\mathfrak{V}_p$ sont: 1° les ensembles V'_ν que nous venons d'attacher à chaque sommet V_ν de première espèce de $\mathfrak{V}_{p+1}$ (ce sont les sommets de première espèce de $\mathfrak{V}_p$); 2° les sommets de seconde espèce de $\mathfrak{W}$ (ce sont les sommets de seconde espèce de $\mathfrak{V}_p$). Les réseaux $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{W}$ étant des affinements de $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}_p$ est aussi un affinement de $\mathfrak{V}$. Il s'agit de voir si le réseau $\mathfrak{V}_p$ possède les propriétés P_1, P_2, P_3 et P_4^q $(p \leqq q \leqq n)$.

Commençons par les propriétés P_1 et P_2. A cet effet, choisissons un point $a \in R_0^*$. On doit prouver que les propriétés P_1 et P_2 sont vérifiées pour tous les $\mathfrak{V}_p$-simplexes dont le noyau contient a. Deux cas sont à distinguer. En premier lieu, supposons qu'aucun des sommets de $\mathfrak{W}$ contenant a ne contient aucun point distingué. Chaque sommet de $\mathfrak{U}_p$ était la somme d'un certain groupe de sommets de $\mathfrak{W}$; dans notre cas, chaque sommet de $\mathfrak{W}$ contenant a appartient à un seul de ces groupes. Le réseau $\mathfrak{W}$ jouissant des propriétés P_1 et P_2, on voit que cela a lieu aussi pour le réseau $\mathfrak{V}_p$ relativement aux $\mathfrak{V}_p$-simplexes dont le noyau contient a. En second lieu, supposons que, parmi les sommets de $\mathfrak{W}$ contenant a, il y en ait au moins un, soit W_0, contenant un point distingué, soit $b_{\nu_0 h_0 i_0}$.

Le réseau $\mathfrak{W}$ étant un affinement de $\mathfrak{W}_3$, il en résulte que pour chaque sommet W de $\mathfrak{W}$ contenant a on a l'inclusion $W \subset V_{\nu_0}$. Puisque $p + 1 \leqq h_0 \leqq n$, $b_{\nu_0 h_0 i_0} \in V_{\nu_0} \, . \, T(\sigma_{i_0}^{h_0}) \neq 0$, V_{ν_0} est un sommet de première espèce de $\mathfrak{V}_{p+1}$, donc $W \subset V_{\nu_0}$ en est un de $\mathfrak{W}$. Il en résulte que tous les sommets de $\mathfrak{V}_p$ contenant a sont de première espèce; soient $V'_{\nu_1}, V'_{\nu_2}, \ldots, V'_{\nu_k}$ ces sommets. On a alors $V'_{\nu_i} \subset U_{\nu_i}$ $(1 \leqq i \leqq k)$. Puisque $V_\nu \subset U_\nu$, et puisque les incidences dans $\mathfrak{W}_{p+1} + \mathfrak{T}$ sont les mêmes que dans $\mathfrak{U} + \mathfrak{T}$, le réseau $\mathfrak{U}$ jouit des propriétés P_1 et P_2 (car $\mathfrak{V}_{p+1}$ en jouit par supposition). De

$V'_{\nu_i} \subset U_{\nu_i}$ on conclut que le réseau $\mathfrak{V}_p$ jouit des propriétés P_1 et P_2 relativement aux $\mathfrak{V}_p$-simplexes dont le noyau contient a.

Chaque sommet de $\mathfrak{U}_p$ étant la somme d'un groupe de sommets de $\mathfrak{W}$ et le réseau $\mathfrak{W}$ jouissant de la propriété P_3, on voit sans peine que le réseau $\mathfrak{U}_p$ en jouit également.

Ensuite montrons que pour $p + 1 \leqq q \leqq n$ le réseau $\mathfrak{V}_p$ jouit de la propriété P_4^q. Soit donc V^* un sommet de $\mathfrak{V}_p$ tel que 1° pour $q + 1 \leqq Q \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_Q$, on a $V^*\, T(\sigma_i^Q) \neq 0$; 2° il existe une valeur i_0, $1 \leqq i_0 \leqq \alpha_q$ telle que $V^*\, T(\sigma_{i_0}^q) \neq 0$. Soit i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ un indice tel que σ_i^0 n'est pas un sommet de $\sigma_{i_0}^q$. On doit montrer que $V^*\, T_i = 0$. Si le sommet V^* de $\mathfrak{V}_p$ est de seconde espèce, cela est clair, car V^* est alors un sommet du réseau $\mathfrak{W}$ qui jouit de la propriété P_4^q. Supposons donc que $V^* = V'_\nu$ soit un sommet de première espèce de $\mathfrak{V}_p$. On a alors $V'_\nu \subset U_\nu$ de manière qu'il suffit de montrer que $U_\nu T_i = 0$. L'inclusion $V'_\nu \subset U_\nu$ montre d'ailleurs que $U_\nu\, T(\sigma_{i_0}^q) \neq 0$. Or les incidences dans $\mathfrak{U} + \mathfrak{T}$ étant les mêmes que dans $\mathfrak{V}_{p+1} + \mathfrak{T}$, on voit que $V_\nu \,.\, T(\sigma_{i_0}^q) \neq 0$, et qu'il suffit de montrer que $V_\nu T_i = 0$. Supposons par impossible que $V_\nu T_i \neq 0$. Le réseau $\mathfrak{V}_{p+1}$ jouissant de la propriété P_4^q, il en résulte qu'il existe des indices Q, j tels que $V_\nu\, T(\sigma_j^Q) \neq 0$. Il existe alors un point distingué $b_{\nu j Q} \in V_\nu\, T(\sigma_j^Q)$. Soit W un sommet de $\mathfrak{W}$ tel que $b_{\nu j Q} \in W$. Le sommet W contenant le point distingué $b_{\nu j Q}$, on a l'inclusion $W \subset V'_\nu$ d'après la définition même de V'_ν. Donc $b_{\nu j Q} \in V'_\nu \,.\, T(\sigma_j^Q) = V^*\, T(\sigma_j^Q) \neq 0$, ce qui est une contradiction.

Il ne reste qu'à prouver que le réseau $\mathfrak{V}_p$ jouit de la propriété P_4^p. Soit donc V^* un sommet de $\mathfrak{V}_p$ tel que 1° pour $p + 1 \leqq Q \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_Q$, on a $V^*\, T(\sigma_i^Q) = 0$; 2° il existe une valeur i_0, $1 \leqq i_0 \leqq \alpha_p$ telle que $V^*\, T(\sigma_{i_0}^p) \neq 0$. Soit i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ un indice tel que σ_i^0 n'est pas un sommet de $\sigma_{i_0}^p$. On doit montrer que $V^* T_i = 0$. Remarquons d'abord que V^* est un sommet de seconde espèce de $\mathfrak{V}_p$. En effet, dans le cas contraire on aurait $V^* = V'_\nu$. V_ν étant un sommet de première espèce de $\mathfrak{V}_{p+1}$, il existerait un indice j $(1 \leqq j \leqq \alpha_{p+1})$ tel que $V_\nu\, T(\sigma_j^{p+1}) \neq 0$, d'où $b_{\nu, j, p+1} \in$ $\in V_\nu\, T(\sigma_j^{p+1})$. W étant un sommet de $\mathfrak{W}$ contenant $b_{\nu,j,p+1}$, on aurait $W \subset V'_\nu$ (par la définition même de V'_ν) d'où $b_{\nu,j,p+1} \in V'_\nu\, T(\sigma_j^{p+1}) = V^*\, T(\sigma_j^{p+1}) \neq 0$, ce qui est une contradiction. Donc V^* est un sommet de seconde espèce de $\mathfrak{V}_p$; cela signifie que $V^* = W$ est un sommet de $\mathfrak{W}$ ne rencontrant aucun sommet de première espèce de $\mathfrak{V}_{p+1}$, d'où $V^* \subset M$ en vertu de la définition des sommets de première espèce de $\mathfrak{V}_{p+1}$ et de la définition de M. Le réseau $\mathfrak{W}$ étant un affinement de $\mathfrak{W}_1$, le sommet V^* de $\mathfrak{W}$ ne peut rencontrer simultanément les deux ensembles $(MT_i$ et $M\, T(\sigma_{i_0}^p)$ et par suite, en vertu de l'inclusion $V^* \subset M$, les deux ensembles$)$ T_i et $T(\sigma_{i_0}^p) \neq 0$. Or $V^*\, T(\sigma_{i_0}^p) \neq 0$ donc $V^*\, T_i = 0$.

8.22. Nous venons de démontrer le lemme L_0. Or soit $\mathfrak{V}$ un réseau donné dans R et soit $\mathfrak{P}$ un réseau gén. donné. Les ensembles R_0 et S étant fermés et disjoints, il existe un affinement $\mathfrak{V}_1$ de $\mathfrak{V}$ tel qu'aucun sommet de $\mathfrak{V}_1$ ne rencontre simultanément R_0 et S. Soit (v. 5.4) $\mathfrak{V}_2$ un réseau de la famille Φ du n° 5.5 qui soit un affinement de $\mathfrak{V}_1$ et un affinement mod S de $\mathfrak{P}$. Soit M la somme de tous les sommets intérieurs (v. 7.1) de $\mathfrak{V}_2$. Soit N la somme de tous les autres sommets de $\mathfrak{V}_2$. Soit $R_0^* = R - N$, de manière que R_0^* est un ensemble bicompact tel que $R_0 \subset R_0^* \subset M \subset R - S$. V_2 parcourant les sommets du réseau $\mathfrak{B}_2$, les ensembles $R_0^* V_2$ (dont on supprime ceux qui sont vides) sont les sommets d'un réseau $\mathfrak{B}^*$ dans R_0^*. D'après le lemme L_0, il existe dans l'espace R_0^* un affinement $\mathfrak{U}^*$ du réseau $\mathfrak{B}^*$ jouissant des propriétés P_1, P_2, P_3 et P_4^p $(0 \leqq q \leqq n)$. $U_1^*, U_2^*, \ldots, U_m^*$ étant les sommets du réseau $\mathfrak{U}^*$, déterminons [v. *Homologie*, III, 21) des ensembles $U_1, U_2, \ldots, U_m$ ouverts dans $M \supset R_0^*$ et tels que 1° $U_\nu^* \subset U_\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq m)$; 2° $R_0^* U_i = U_i^*$; 3° $R_0^* \overline{U}_i = \overline{U}_i^*$; 4° $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h$ étant une combinaison des indices $1, 2, \ldots, m$, la relation $\prod_1^h U_{\nu_i}^* = 0$ entraîne $\prod_1^h U_{\nu_i} = 0$; chaque U_ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ est une sous-ensemble d'un sommet intérieur de $\mathfrak{B}_2$. En ajoutant aux $U_1, U_2, \ldots, U_m$ les sommets extérieurs de $\mathfrak{B}_2$, on obtient un réseau $\mathfrak{U}$ dans R qui est évidemment un affinement du réseau $\mathfrak{B}$ et un affinement mod S de $\mathfrak{P}$. On voit sans peine que le réseau $\mathfrak{U}$ est commode.

8.3. Soit U un sommet d'un réseau commode $\mathfrak{U}$. Si $UR_0 = 0$, disons que U est d'espèce σ^{-1} (où le symbole σ^{-1}, appelé aussi $(-1, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur, n'a aucune signification). Si $UR_0 \neq 0$, d'après la propriété 6° d'un réseau commode (v. 8.1), il existe des indices h, i $(0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ tels que $U\,T(\sigma_i^h) \neq 0$, tandis que $U\,T(\sigma_j^0) = 0$ pour toutes les valeur de j $(1 \leqq j \leqq \alpha_0)$ telles que σ_j^0 n'est pas un sommet de σ_i^h [et donc, plus généralement, $U\,T(\sigma_j^k) \neq 0$ $(0 \leqq k \leqq n, 1 \leqq j \leqq \alpha_k)$ si, et seulement si, le simplexe σ_j^k est une k-face du simplexe σ_i^h, ce qui exige en particulier $k \leqq h$]. Nous disons alors que U est d'espèce σ_i^h. Chaque sommet U du réseau commode $\mathfrak{U}$ possède donc une espèce bien déterminée; cette espèce est un $(h, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur; le nombre h $(-1 \leqq h \leqq n)$ est appelé *rang* du sommet U.

Soit maintenant $\tau^k = (U_0, U_1, \ldots, U_k)$ un $(k, \mathfrak{U})$-simplexe. Supposons que le sommet U_ν $(0 \leqq \nu \leqq k)$ soit d'espèce $\sigma_{i_\nu}^{h_\nu}$. Soit σ_i^h la face commune de dimension maxima de tous les $k+1$ $\mathfrak{Z}$-simplexes $\sigma_{i_\nu}^{h_\nu}$. [Si $h_\nu = -1$ pour une valeur de ν $(0 \leqq \leqq \nu \leqq k)$, ou bien si les $k+1$ $\mathfrak{Z}$-simplexes n'ont aucun sommet commun à tous, on a $\sigma_i^h = \sigma^{-1}$.] Nous disons alors que τ^k est d'espèce σ_i^h; le nombre h $(-1 \leqq h \leqq n)$ est le *rang* de τ^k.

8.31. *Si le $(k, \mathfrak{U})$-simplexe τ^k est extérieur* (v. 7.1), *en particulier si* $k \geqq n+1$, *alors τ^k est d'espèce σ^{-1}.*

C'est une conséquence immédiate des propriétés 2° et 6° d'un réseau commode (v. 8.1).

8.32. *Si le noyau d'un $(k, \mathfrak{U})$-simplexe τ^k rencontre R_h $(0 \leqq h \leqq n)$, le rang de τ^k est $\geqq h$. En effet, il existe un indice i $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ tel que $\mathfrak{J}(\tau^k)\,T(\sigma_i^h) \neq 0$, d'où $UT(\sigma_i^h) \neq 0$ pour chaque sommet U de τ^k.*

8.33. *Soit τ^k un $(k, \mathfrak{U})$-simplexe de rang $h \geqq 0$. Alors $h \leqq n - k$.* C'est une conséquence immédiate des propriétés 3° et 4° d'un réseau commode.

8.34. *Soit $\tau^{k'}$ une k'-face d'un $(k, \mathfrak{U})$-simplexe τ^k, avec τ^k et $\tau^{k'}$ resp. d'espèce σ_i^h, $\sigma_{i'}^{h'}$. Alors le $\mathfrak{Z}$-simplexe σ_i^h est une h-face du $\mathfrak{Z}$-simplexe $\sigma_{i'}^{h'}$; en particulier on a $h \leqq h'$, et $h = h'$ entraîne $\sigma_{i'}^{h'} = \sigma_i^h$.* [Le symbole σ^{-1} est ici considéré comme une (-1)-face de chaque $\mathfrak{Z}$-simplexe intérieur.] C'est une conséquence aisée des définitions.

8.35. *Soient* $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_1$ *deux réseaux commodes,* $\mathfrak{U}_1$ *étant un affinement de* $\mathfrak{U}$; *soit* $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U})$. *Soit* τ^k *un* $(k, \mathfrak{U}_1)$*-simplexe d'espèce* σ_i^{n-k}. *Alors ou bien* $\pi\tau^k = 0$, *ou bien* $\pi\tau^k$ *est un* $(k, \mathfrak{U})$*-simplexe d'espèce* σ_i^{n-k}. C'est une conséquence facile de la définition de l'espèce et de 8.33.

II.

9. **Axiome** *B. Chaque point* $a \in R - S$ *possède un entourage* U *tel que,* Γ^n *étant un* (n, R)*-cycle* $($*absolu*$)$ *dans* $\bar{U}$, *on a l'homologie* $\Gamma^n \sim 0 \bmod S$. [32]

9.1. *Chaque entourage suffisamment petit de chaque point* $a \in R - S$ *possède la propriété suivante: Chaque* (n, R)*-cycle* Γ^n *dans* $\bar{U}$ *est* ~ 0 *dans* $\bar{U}$. *Il existe même* (v. 7.4) *un réseau* $\mathfrak{V}$ *dans* R *tel que, si* Γ^n *est un* (n, R)*-cycle dans* $\bar{U}$, *on a* $\Gamma^n(\mathfrak{U}) = 0$ *pour chaque affinement* $\mathfrak{U}$ *de* $\mathfrak{V}$ *qui soit d'ordre* $\leqq n \bmod S$.

Démonstration. Déterminons un entourage $U \subset\subset R - S$ du point a d'après l'axiome B. Soit $\mathfrak{V}_1$ un réseau tel qu'aucun sommet de $\mathfrak{V}_1$ ne rencontre simultanément $\bar{U}$ et S. Déterminons un affinement $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{V}_1$ jouissant de la propriété du n° 1.3. Alors, si V', V'' sont deux sommets de $\mathfrak{V}$ tels que $V'\bar{U} \neq 0$, $SV'' \neq 0$, on a $V'V'' = 0$ et la même propriété appartient à chaque affinement de $\mathfrak{V}$. Soit $\mathfrak{U}$ un affinement de $\mathfrak{V}$ d'ordre $\leqq n \bmod S$. Puisque $\Gamma^n \sim 0 \bmod S$, il existe une $(n + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $\Delta^{n+1}(\mathfrak{U})$ telle que

$$(*) \qquad F\,\Delta^{n+1}(\mathfrak{U}) - \Gamma^n(\mathfrak{U}) \subset S\,.$$

Supposons, par impossible, que $\Gamma^n(\mathfrak{U}) \neq 0$. Alors il existe un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe σ^n qui se trouve dans la chaîne $\Gamma^n(\mathfrak{U})$ [avec un coefficient $\neq 0$]. Puisque $\Gamma^n \subset \bar{U}$, chaque sommet de σ^n rencontre $\bar{U}$ et ne peut donc rencontrer S. Par suite (*) montre que la chaîne $\Delta^{n+1}(\mathfrak{U})$ contient un $(n + 1, \mathfrak{U})$-simplexe σ^{n+1} dont σ^n est une n-face. Puisque $\mathfrak{U}$ est un affinement de $\mathfrak{V}$ et puisque les sommets de σ^n rencontrent $\bar{U}$, aucun sommet de σ^{n+1} ne peut rencontrer S. Or ceci est une contradiction, car le réseau $\mathfrak{U}$ est d'ordre $\leqq n \bmod S$.

9.2. *Il existe un réseau gén.* $\mathfrak{P}_1$ *jouissant de la propriété suivante: Lorsque* $P_1 \in \mathfrak{P}_1$, *on a* $\bar{P}_1 \subset R - S$ *et si* Γ^n *est un* (n, R)*-cycle dans* $\bar{P}_1$, *on a* $\Gamma^n \sim 0$ *dans* $\bar{P}_1$; *on peut même attacher à chaque sommet* P_1 *de* $\mathfrak{P}_1$ *un réseau* $\mathfrak{V}(P_1)$ *tel que, si* Γ^n *est un* (n, R)*-cycle dans* $\bar{P}_1$, *on a* $\Gamma^n(\mathfrak{U}) = 0$ *pour chaque affinement* $\mathfrak{U}$ *de* $\mathfrak{V}(P_1)$ *d'ordre* $\leqq n \bmod S$. C'est une conséquence de 4.2 et de 9.1.

[32] En vertu de *Homologie*, II, 28 (voir [7]), cet axiome peut être énoncé comme il suit: *Chaque point* $a \in R - S$ *possède un entourage* U *tel que,* $\mathfrak{U}$ *étant un réseau et* $\Gamma^n(\mathfrak{U})$ *étant un* $(n, \mathfrak{U})$*-cycle essentiel dans* $\bar{U}$, *on a l'homologie* $\Gamma^n(\mathfrak{U}) \sim 0$ *dans* $\bar{U}$. De la même manière on peut modifier aussi l'énoncé de presque tous les axiomes suivants. Il est important que le lecteur se rappelle constamment la possibilité de cette modification.

9.3. Déterminons un réseau gén. $\mathfrak{P}_1$ d'après 9.2, puis un affinement $\mathfrak{P}_2$ de $\mathfrak{P}_1$ jouissant de la propriété suivante: A chaque sommet P_2 de $\mathfrak{P}_2$ on peut attacher un sommet P_1 de $\mathfrak{P}_1$ de manière que, si P'_2 est un sommet de $\mathfrak{P}_2$ tel que $\bar{P}_2\bar{P}'_2 \neq 0$, on ait $\bar{P}'_2 \subset P_1$. [Le réseau gén. $\mathfrak{P}_2$ existe en vertu de 4.3 et 4.4.] Soit $\mathfrak{P}_3$ un affinement de $\mathfrak{P}_2$ jouissant par rapport à $\mathfrak{P}_2$ de la même propriété que $\mathfrak{P}_2$ par rapport à $\mathfrak{P}_1$. On suppose dans tout ce Chapitre que le choix des réseaux gén. $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ ait été fait d'une manière bien determinée.

10. Soit $i = 1, 2,$ ou 3. Soit $A \neq 0$ un sous-ensemble bicompact de $R - S$. Soit Γ^{n-1} un $(n - 1, R)$-cycle dans A. Supposons qu'il existe un sommet P_i du réseau gén. $\mathfrak{P}_i$ tel qu'on ait l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{P}_i$ (d'où $A \subset \bar{P}_i$). Nous dirons alors que Γ^{n-1} est un $(n - 1, R)$-*cycle du type* t_i *dans* A.

10.1. *Soit* Γ^{n-1} *un* $(n - 1, R)$-*cycle du type* t_i $(i = 1, 2, 3)$ *dans* A. *Soit* P_i *un sommet correspondant du réseau gén.* $\mathfrak{P}_i$. *Il existe un* (n, R)-*cycle* C^n *mod* A *dans* $\bar{P}_i$ *jouissant des propriétés suivantes*: 1° $FC^n \sim \Gamma^{n-1}$ *dans* A; 2° *il existe un réseau* $\mathfrak{V}(P_i)$ [*ne dépendant que de* P_i] *tel que si le réseau* $\mathfrak{U}_2$ *est un affinement de* $\mathfrak{U}_1$ *et si* $\mathfrak{U}_1$ *est un affinement de* $\mathfrak{V}(P_i)$, *si enfin* $\mathfrak{U}_1$ *et* $\mathfrak{U}_2$ *sont d'ordre* $\leqq n$ *mod* S, *on a* $\pi\, C^n(\mathfrak{U}_2) = C^n(\mathfrak{U}_1)$ *mod* A, *où* $\pi =$ Pr. $(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$. *Le cycle relatif* C^n *est bien déterminé à une homologie mod* A *dans* $\bar{P}_i$ *près; pour chaque affinement* $\mathfrak{U}$ *de* $\mathfrak{V}(P_i)$ *d'ordre* $\leqq n$ *mod* S *on peut même affirmer que* $C^n(\mathfrak{U})$ *est bien déterminé mod* A. *Le cycle relatif* C^n *reste inaltéré (dans le sens qui vient d'être précisé) is on remplace* Γ^{n-1} *par un* $(n - 1, R)$-*cycle* $\Gamma_1^{n-1} \sim \Gamma^{n-1}$ *dans* A.

Démonstration. Déterminons un réseau $\mathfrak{V}(P_i)$ jouissant de la propriété du n° 9.2. Cette propriété restant intacte si on remplace $\mathfrak{V}(P_i)$ par son affinement, on peut supposer qu'aucun sommet de $\mathfrak{V}(P_i)$ ne rencontre simultanément les deux ensembles $\bar{P}_i$ et S (qui sont fermés et disjoints). Désignons par Φ la famille de tous les affinements de $\mathfrak{V}(P_i)$ qui soient d'ordre $\leqq n$ mod S; c'est (v. 7.3) une famille complète de réseaux.

A chaque réseau $\mathfrak{U} \in \Phi$ attachons un affinement $\mathfrak{U}_1 \in \Phi$ normal relativement aux cycles dans $\bar{P}_i$, et choisissons une projection $\pi_1 =$ Pr. $(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U})$, puis un $(n - 1, \mathfrak{U}_1)$-cycle $\Gamma_1^{n-1}(\mathfrak{U}_1) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}_1)$ dans A, enfin une $(n, \mathfrak{U}_1)$-chaîne dans $\bar{P}_i$: $C_1^n(\mathfrak{U}_1)$ telle que $F\, C_1^n(\mathfrak{U}_1) = \Gamma_1^{n-1}(\mathfrak{U}_1)$ et posons $C^n(\mathfrak{U}) = \pi_1\, C_1^n(\mathfrak{U}_1)$. Démontrons le lemme L suivant: La $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $C^n(\mathfrak{U})$ reste inaltérée mod A si l'on fait un autre choix $\mathfrak{U}_2$, π_2, $\Gamma_2^{n-1}(\mathfrak{U}_2)$, $C_2^n(\mathfrak{U}_2)$ de $\mathfrak{U}_1$, π_1, $\Gamma_1^{n-1}(\mathfrak{U}_1)$, $C_1^n(\mathfrak{U}_1)$. On voit sans peine qu'il résulte du lemme L que le cycle relatif C^n, s'il existe, est bien déterminé dans le sens énoncé dans le théorème.

Démontrons d'abord le lemme L dans deux cas particuliers: I. Soit $\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_1$, $\pi_2 = \pi_1$. On a alors $\Gamma_1^{n-1}(\mathfrak{U}_1) \sim \Gamma_2^{n-1}(\mathfrak{U}_1)$ dans A; il existe donc une $(n, \mathfrak{U}_1)$-chaîne dans A: $D^n(\mathfrak{U}_1)$ telle que

$$F\, D^n(\mathfrak{U}_1) = \Gamma_2^{n-1}(\mathfrak{U}_1) - \Gamma_1^{n-1}(\mathfrak{U}_1) = F\, C_2^n(\mathfrak{U}_1) - F\, C_1^n(\mathfrak{U}_1).$$

Alors $\Delta^n(\mathfrak{U}_1) = D^n(\mathfrak{U}_1) + C_1^n(\mathfrak{U}_1) - C_2^n(\mathfrak{U}_1)$ est un $(n, \mathfrak{U}_1)$-cycle dans $\bar{P}_i$. $\mathfrak{U}_1$ étant un affinement de $\mathfrak{U}$ normal relativement aux $(n, \mathfrak{U})$-cycles dans $\bar{P}_1$, il en résulte que $\pi_1\, \Delta^n(\mathfrak{U}_1) = \pi_1\, D^n(\mathfrak{U}_1) + \pi_1\, C_1^n(\mathfrak{U}_1) - \pi_1\, C_2^n(\mathfrak{U}_1)$ est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle *essentiel* dans $\bar{P}_i$. Or le réseau $\mathfrak{U}$ est un affinement d'ordre $\leqq n \bmod S$ du réseau $\mathfrak{V}(P_i)$, d'où il résulte (v. 9.2) que $\pi_1\, \Delta^n(\mathfrak{U}_1) = 0$. Or ceci donne $\pi_1\, C_1^n(\mathfrak{U}_1) = \pi_1\, C_2^n(\mathfrak{U}_1) \bmod A$, car $D^n(\mathfrak{U}_1) \subset A$ entraîne $\pi_1\, D^n(\mathfrak{U}_1) \subset A$. II. Soit $\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_1$, $\Gamma_2^{n-1}(\mathfrak{U}_2) = \Gamma_1^{n-1}(\mathfrak{U}_1)$, $C_2^n(\mathfrak{U}_2) = C_1^n(\mathfrak{U}_1)$. On a alors $\pi_2\, C_1^n(\mathfrak{U}_1) - \pi_1\, C_1^n(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod A$ dans $\bar{P}_i$. Or le réseau $\mathfrak{U}_1$ est d'ordre $\leqq n \bmod S$ et aucun sommet de $\mathfrak{U}_1$ ne rencontre simultanément $\bar{P}_i$ et S; on en déduit sans peine que l'homologie précéndente entraîne $\pi_2\, C_1^n(\mathfrak{U}_1) = \pi_1\, C_1^n(\mathfrak{U}_1) \bmod A$.

Ceci étant, passons à la démonstration du lemme L dans le cas général. Soit $\mathfrak{U}_3$ un affinement simultané des réseaux $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ normal relativement aux cycles dans $\bar{P}_i$; soit $\pi_3 = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_3' = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$. Soit $C_3^n(\mathfrak{U}_3)$ une $(n, \mathfrak{U}_3)$-chaîne dans $\bar{P}_i$ telle que $F\, C_3^n(\mathfrak{U}_3) = \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}_3)$. D'après I on a $\pi_1\, C_1^n(\mathfrak{U}_1) = \pi_1\pi_3\, C_3^n(\mathfrak{U}_3) \bmod A$, $\pi_2\, C_2^n(\mathfrak{U}_2) = \pi_2\pi_3'\, C_3^n(\mathfrak{U}_3) \bmod A$; d'après II on a $\pi_1\pi_3\, C_3^n(\mathfrak{U}_3) = \pi_2\pi_3'\, C_3^n(\mathfrak{U}_3) \bmod A$. Donc $\pi_1\, C_1^n(\mathfrak{U}_1) = \pi_2\, C_2^n(\mathfrak{U}_2) \bmod A$.

Le lemme L étant démontré, il reste à voir que les $(n, \mathfrak{U})$-chaînes $C^n(\mathfrak{U})$ construites plus haut pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$, jouissent des propriétés suivantes: 1° $C^n(\mathfrak{U}) \subset \bar{P}_1$; 2° $F\, C^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans $\bar{P}_i$; 3° si $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2 \in \Phi$, si $\mathfrak{U}_2$ est un affinement de $\mathfrak{U}_1$ et si $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, on a $\pi\, C^n(\mathfrak{U}_2) = C^n(\mathfrak{U}_1) \bmod A$. Les propriétés 1° et 2° étant évidentes, démontrons 3°. A cet effet, soit $\mathfrak{U}_3$ un affinement simultané des réseaux $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ normal relativement aux cycles dans $\bar{P}_1$ et soit $\pi_3 = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$. D'après le lemme L, on a $C^n(\mathfrak{U}_2) = \pi_3\, C^n(\mathfrak{U}_3) \bmod A$, $C^n(\mathfrak{U}_1) = \pi\pi_3\, C^n(\mathfrak{U}_3) \bmod A$, d'où $\pi\, C^n(\mathfrak{U}_2) = C^n(\mathfrak{U}_1) \bmod A$.

10.2. Étant donné un $(n-1, R)$-cycle Γ^{n-1} du type t_i $(i = 1, 2, 3)$ dans A, il peut exister *plusieurs* sommets P_i de $\mathfrak{P}_i$ tels que $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{P}_i$. Or, *si $i = 2$ ou $i = 3$, le cycle relatif C^n du n° 10.1 est indépendant du choix de P_i dans le sens suivant: Il existe un réseau $\mathfrak{W}$ tel que dans chaque affinement $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{W}$ qui soit d'ordre $\leqq n \bmod S$ le cycle relatif $C^n(\mathfrak{U})$ est bien déterminé à mod A près.*

Démonstration. Soient P_{i1}, P_{i2} deux choix de P_i et soient C_1^n, C_2^n les deux cycles relatifs correspondants. On a $\bar{P}_{i1}\bar{P}_{i2} \supset A \neq 0$. Il existe donc (v. 9.3) un sommet P_{i-1} du réseau gén. $\mathfrak{P}_{i-1}$ tel que $P_{i1} + P_{i2} \subset P_{i-1}$. Il en résulte que Γ^{n-1} est un $(n-1, R)$-cycle du type t_{i-1} dans A, P_{i-1} étant le sommet correspondant de $\mathfrak{P}_{i-1}$. Soit C_0^n le cycle relatif correspondant. Soit $\mathfrak{W}$ un affinement simultané des trois réseaux $\mathfrak{V}(P_{i1})$, $\mathfrak{V}(P_{i2})$, $\mathfrak{V}(P_{i-1})$. Chacun des deux cycles relatifs C_1^n, C_2^n jouit évidemment des propriétés du cycle relatif C_0^n. Ces propriétés déterminant C_0^n univoquement, on a pour chaque affinement $\mathfrak{U}$ d'ordre $\leqq n \bmod S$ du réseau $\mathfrak{W}$ les relations $C_1^n(\mathfrak{U}) = C_2^n(\mathfrak{U}) = C_0^n(\mathfrak{U}) \bmod A$.

10.3. *Soit Γ^{n-1} un $(n-1, R)$-cycle du type t_i $(i = 2$ ou $i = 3)$ dans A. Il existe un ensemble bicompact H tel que* 1° $A \subset H \subset R - S$; 2° $\Gamma^{n-1} \sim 0$ *dans* H; 3° $H \subset \bar{P}_i$, *où* $P_i \in \mathfrak{P}_i$; 4° *si K est un ensemble bicompact tel que $A \subset K \subset \bar{P}_i'$, $P_i' \in \mathfrak{P}_i$ et $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans K, alors $H \subset K$.*

Le démonstration fera l'objet des n^{os} 10.31 – 10.33. L'ensemble H est évidemment bien déterminé (v. aussi 10.4); nous l'appellerons le *porteur de l'homologie* $\Gamma^{n-1} \sim 0$.

10.31. **Lemme.** Soit Γ^{n-1} un $(n-1, R)$-cycle du type t_i $(i = 1, 2, 3)$ dans A. Soit $A \subset B_1 B_2$, B_1 et B_2 étant des ensembles bicompacts tels que $B_1 + B_2 \subset \bar{P}_i$, $P_i \in \mathfrak{P}_i$. Soit $\Gamma^{n-1} \sim 0$ et dans B_1 et dans B_2. C^n étant le cycle relatif du n° 10.1, C^n est situé dans $B_1 B_2$.

Démonstration. Soit Φ la famille de tous les affinements $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{V}(P_i)$ d'ordre $\leqq n \bmod S$. On voit sans peine que $C^n(\mathfrak{U}) \subset B_1$ et $C^n(\mathfrak{U}) \subset B_2$ pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$. Il s'agit d'en déduire que $C^n(\mathfrak{U}) \subset B_1 B_2$. Soit donc $\mathfrak{U}$ un réseau donné de la famille Φ. Soit $\mathfrak{V}$ un affinement de $\mathfrak{U}$ régulier (v. *Homologie*, III, 22 et 23) par rapport à $B_1 B_2$. Déduisons de $\mathfrak{V}$ un nouveau réseau $\mathfrak{W}$ de la manière suivante: Un sommet V de $\mathfrak{V}$ tel que $VB_1B_2 \neq 0$ est un sommet de $\mathfrak{W}$; au lieu d'un sommet $V \in \mathfrak{V}$ tel que $VB_1B_2 = 0$ le réseau $\mathfrak{W}$ possède deux sommets $V - B_1$ et $V - B_2$. Evidemment le réseau $\mathfrak{W}$ est un affinement de $\mathfrak{U}$ régulier par rapport à $B_1 B_2$; en outre $\mathfrak{W}$ possède la propriété suivante: Si $W \in \mathfrak{W}$, $WB_1 \neq 0$, $WB_2 \neq 0$, on a aussi $WB_1B_2 \neq 0$. Soit $\mathfrak{U}_1 \in \Phi$ un affinement de $\mathfrak{W}$ qui soit en même temps un affinement de $\mathfrak{U}$ normal relativement aux cycles dans $\bar{P}_i$. Soit $\pi_1 = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{W})$, $\pi_2 = \text{Pr.}\,(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})$. D'après 10.1, on a $C^n(\mathfrak{U}) = \pi_2\pi_1\, C^n(\mathfrak{U}_1) \bmod A$. Puisque $C^n(\mathfrak{U}_1) \subset B_1$ et $C^n(\mathfrak{U}_1) \subset B_2$, chaque sommet de chaque simplexe de la $\mathfrak{U}_1$-chaîne $C^n(\mathfrak{U}_1)$ rencontre B_1 et B_2. Il en résulte que chaque sommet de chaque simplexe de la $\mathfrak{W}$-chaîne $\pi_1\, C^n(\mathfrak{U}_1)$ rencontre B_1 et B_2, et par suite aussi B_1B_2 d'après la propriété du réseau $\mathfrak{W}$. Le réseau $\mathfrak{W}$ étant régulier par rapport à B_1B_2, il en résulte que $\pi_1\, C^n(\mathfrak{U}_1) \subset B_1B_2$, d'où $\pi_2\pi_1\, C^n(\mathfrak{U}_1) \subset B_1B_2$ et par suite aussi $C^n(\mathfrak{U}) \subset B_1B_2$.

10.32. **Lemme.** Soit Γ^{n-1} un $(n-1, R)$-cycle du type t_i $(i = 1, 2, 3)$ dans A. Soit $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{P}_i$, $P_i \in \mathfrak{P}_i$. Soit $\alpha > 0$ un nombre ordinal donné. A chaque nombre ordinal $\xi < \alpha$ soit attaché un ensemble bicompact B_ξ de manière que: 1° $B_0 = \bar{P}_i$; 2° Pour $\xi < \eta < \alpha$ on a $B_\xi \supset B_\eta$; 3° $A \subset B_\xi$ pour chaque $\xi < \alpha$; 4° $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans B_ξ pour chaque $\xi < \alpha$. Posons $B_\alpha = \prod_{\xi<\alpha} B_\xi$. Alors $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans B_α.

Démonstration. Soit C^n le cycle relatif du n° 10.1. Pour chaque $\xi < \alpha$ on a évidemment $C^n \subset B_\xi$. Soit Φ la famille de tous les affinements $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{V}(P_i)$ d'ordre $\leqq n \bmod S$. Soit $\mathfrak{U} \in \Phi$. Il s'agit de montrer que $C^n(\mathfrak{U}) \subset B_\alpha$. Soit $\mathfrak{U}_1$ un rapetissement fort (v. 3°) de $\mathfrak{U}$. Évidemment $\mathfrak{U}_1 \in \Phi$. Soient U_ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ les sommets de $\mathfrak{U}$ et $U'_\nu \subset\subset U_\nu$ les sommets correspondants de $\mathfrak{U}_1$. En posant $\pi U'_\nu = U_\nu$, on a $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U})$. D'après 10.1 on a $C^n(\mathfrak{U}) = \pi\, C^n(\mathfrak{U}_1) \bmod A$. Soit $(U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \ldots, U_{\nu_n})$ un simplexe de la chaîne $C^n(\mathfrak{U})$, $\mathfrak{J} = \prod_{k=0}^{n} U_{\nu_k}$ son noyau. On doit montrer que $\mathfrak{J}B_\alpha \neq 0$. Ceci est clair si $\mathfrak{J}A \neq 0$, car $A \subset B_\alpha$. Supposons donc que $\mathfrak{J}A = 0$. Puisque $C^n(\mathfrak{U}) = \pi\, C^n(\mathfrak{U}_1) \bmod A$, la chaîne $C^n(\mathfrak{U}_1)$ contient le simplexe $\sigma^n = (U'_{\nu_0}, U'_{\nu_1}, \ldots, U'_{\nu_n})$. Pour chaque $\xi < \alpha$ le noyau de σ^n rencontre B_ξ, car $C^n(\mathfrak{U}_1) \subset B_\xi$. En posant $K =$

$= \prod_{k=0}^{n} \bar{U}'_{v_k}$, K est un sous-ensemble bicompact de $\mathfrak{J}$ tel que $KB_\xi \neq 0$ pour chaque $\xi < \alpha$. $\{KB_\xi\}$ étant une suite monotone d'ensembles bicompacts et non vides, on a $\prod_{\xi<\alpha} KB_\xi = KB_\alpha \neq 0$, d'où $\mathfrak{J}B_\alpha \neq 0$.

10.33. Passons à la démonstration de l'énoncé du n° 10.3. Choisissons $P_i \in \mathfrak{P}_i$ de manière que $A \subset \bar{P}_i$, $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{P}_i$. Choisissons un nombre transfini β dont la puissance soit supérieure à celle de $R - S$ et définissons par récurrence une suite transfinie $\{B_\xi\}$ $(\xi < \beta)$ telle que: 1° les B_ξ sont des sous-ensembles bicompacts de $R - S$; 2° $B_\xi \supset B_\eta$ pour chaque $\xi < \eta < \beta$; 3° $B_0 = \bar{P}_i$; 4° $B_\xi \supset A$ pour chaque $\xi < \beta$; 5° $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans B_ξ pour chaque $\xi < \beta$. Soit $\eta > 0$ et $< \beta$ un nombre ordinal donné et supposons qu'on ait déjà défini les B_ξ pour tous les $\xi < \eta$. Deux cas sont à distinguer: Premièrement soit $\eta = \xi + 1$ un nombre de première espèce. Dans ce cas choisissons l'ensemble bicompact B_η de manière que $A \subset B_\eta \subset B_\xi$ et que $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans B_η; c'est vérifié en posant $B_\eta = B_\xi$; or *si cela est possible* choisissons $B_\eta \neq B_\xi$. En second lieu soit η un nombre de seconde espèce. Dans ce cas posons $B_\eta = \prod_{\xi<\eta} B_\xi$ ce qui est loisible en vertu du lemme du n° 10.32. La construction de la suite transfinie $\{B_\xi\}$ $(\xi < \beta)$ est ainsi achevée. De la propriété 2° résulte l'existence d'un nombre ordinal $\alpha < \beta$ tel que $B_\alpha = B_{\alpha+1}$. Posons $H = B_\alpha$. Les propriétés 1°, 2°, 3° du n° 10.3 sont évidentes. Soit donc K un ensemble bicompact tel que $A \subset K \subset \bar{P}'_i$, $P'_i \in \mathfrak{P}_i$ et $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans K; il s'agit de montrer que $H \subset K$. Puisque $\bar{P}_i\bar{P}'_i \supset A \neq 0$, il existe (v. 9.3) un sommet P_{i-1} de $\mathfrak{P}_{i-1}$ tel que $\bar{P}_i + \bar{P}'_i \subset P_{i-1}$, d'où $H + K \subset P_{i-1}$. Puisque $\Gamma^{n-1} \sim 0$ et dans H et dans K, on a $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans HK en vertu du lemme du n° 10.31. Puisque $H = B_\alpha = B_{\alpha+1}$, on ne peut avoir $HK \neq H$ par la définition même de $B_{\alpha+1}$. Donc $HK = H$, c'est-à-dire $H \subset K$.

10.41. Soit Γ^{n-1} un $(n - 1, R)$-cycle du type t_3 dans A. On peut alors considérer Γ^{n-1} aussi comme un $(n - 1, R)$-cycle du type t_2 dans A. Evidemment ceci est sans influence sur le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$.

10.42. *Pour $v = 1, 2$ soit Γ_v^{n-1} un $(n - 1, R)$-cycle du type t_2 dans A_v et soit $\Gamma_v^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{P}_2$, $P_2 \in \mathfrak{P}_2$; soit H_v le porteur de l'homologie $\Gamma_v^{n-1} \sim 0$. Soit $\Gamma_1^{n-1} \sim \Gamma_2^{n-1}$ dans $A_1 + A_2$. Alors $H_1 - (A_1 + A_2) = H_2 - (A_1 + A_2)$.*

Démonstration. Il existe un $(n - 1, R)$-cycle Γ^{n-1} dans $A_1 + A_2$ tel que $\Gamma^{n-1} \sim \Gamma_v^{n-1}$ dans $A_1 + A_2$ $(v = 1, 2)$, $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{P}_2$. [Il suffit de poser p. ex. $\Gamma^{n-1} = \Gamma_1^{n-1}$.] Evidemment Γ^{n-1} est un $(n - 1, R)$-cycle du type t_2 dans $A_1 + A_2$; soit H le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$. Il suffit de montrer que $H_1 + A_2 = H_2 + A_1 = H$. Or $H + H_1 + H_2 \subset \bar{P}_2$. On a $H \supset A_1 + A_2$, $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans H, $\Gamma^{n-1} \sim \Gamma_1^{n-1}$ dans $A_1 + A_2$, donc $\Gamma_1^{n-1} \sim 0$ dans H, d'où $H \supset H_1$ (par la définition de H_1), et par suite $H \supset H_1 + A_2$. D'autre part on a $\Gamma_1^{n-1} \sim 0$ dans H_1, ponc aussi dans $H_1 + A_2 \supset A_1 + A_2$, et $\Gamma_1^{n-1} \sim \Gamma^{n-1}$ dans $A_1 + A_2$, donc $\Gamma^{n-1} \sim$

~ 0 dans $H_1 + A_2$, d'où $H_1 + A_2 \supset H$ (par la définition de H). Il est ainsi prouvé que $H_1 + A_2 = H$, et on prouve pareillement que $H_2 + A_1 = H$.

10.43. *Pour* $\nu = 1, 2$ *soit* Γ_ν^{n-1} *un* $(n - 1, R)$*-cycle du type* t_3 *dans* A_ν. *Soit* H_ν *le porteur de l'homologie* $\Gamma_\nu^{n-1} \sim 0$. *Soit* $A_1 + A_2 \subset \bar{P}_3$, $P_3 \in \mathfrak{P}_3$. *Soit* $\Gamma_1^{n-1} \sim \Gamma_2^{n-1}$ *dans* $A_1 + A_2$. *Alors* $H_1 - (A_1 + A_2) = H_2 - (A_1 + A_2)$.

Démonstration. Soit $\Gamma_\nu^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{P}_{3\nu}$, $P_{3\nu} \in \mathfrak{P}_3$ $(\nu = 1, 2)$. Alors $\bar{P}_3\bar{P}_{3\nu} \supset \supset A_\nu \neq 0$. Il existe donc (v. 9,3) un sommet P_2 de $\mathfrak{P}_2$ tel que $\bar{P}_3 + \bar{P}_{31} + \bar{P}_{32} \subset \bar{P}_2$. Il suffit donc d'appliquer 10.41 et 10.42.

10.44. *Soit* Γ^{n-1} *un* $(n - 1, R)$*-cycle qui peut être considéré comme un cycle dans* A_1 *ou comme un cycle dans* A_2, *dans les deux cas du type* t_2. *Soit* H_ν $(\nu = 1, 2)$ *le porteur de l'homologie* $\Gamma^{n-1} \sim 0$, *en considérant* Γ^{n-1} *comme un cycle dans* A_ν. *Alors* $H_1 - (A_1 + A_2) = H_2 - (A_1 + A_2)$.

Démonstration. D'après la définition d'un $(n - 1, R)$-cycle du type t_2, il existe un sommet $P_2 \in \mathfrak{P}_2$ tel que $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{P}_2$, d'où $A_1 + A_2 \subset \bar{P}_2$. Il suffit donc appliquer 10.42 en y posant $\Gamma_1^{n-1} = \Gamma_2^{n-1} = \Gamma^{n-1}$.

10.5. *Pour* $\nu = 1, 2$ *soit* Γ_ν^{n-1} *un* $(n - 1, R)$*-cycle du type* t_3 *dans* A_ν. *Soit* H_ν *le porteur de l'homologie* $\Gamma_\nu^{n-1} \sim 0$. *Soit* $H_1H_2 \neq 0$. *Soit* $c_\nu \in \mathfrak{R}$. *Alors* $c_1\Gamma_1^{n-1} + + c_2\Gamma_2^{n-1}$ *est un* $(n - 1, R)$*-cycle du type* t_2 *dans* $A_1 + A_2$ *et le porteur* H *de l'homologie* $c_1\Gamma_1^{n-1} + c_2\Gamma_2^{n-1} \sim 0$ *est contenu dans* $H_1 + H_2$.

Démonstration. Soit $\Gamma_\nu^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{P}_{3\nu}$, $P_{3\nu} \in \mathfrak{P}_3$ $(\nu = 1, 2)$. Alors (v. 10.3) on a $\bar{P}_{3\nu} \supset H_\nu$, donc $\bar{P}_{31}\bar{P}_{32} \supset H_1H_2 \neq 0$. Il existe donc (v. 9.3) un sommet P_2 de $\mathfrak{P}_2$ tel que $P_{31} + P_{32} \subset P_2$. Il en résulte que $A_1 + A_2 \subset \bar{P}_2$, $c_1\Gamma_1^{n-1} + c_2\Gamma_2^{n-1} \sim \sim 0$ dans $\bar{P}_2$, de manière que $c_1\Gamma_1^{n-1} + c_2\Gamma_2^{n-1}$ est un $(n - 1, R)$-cycle du type t_2 dans $A_1 + A_2$. Puisque $c_1\Gamma_1^{n-1} + c_2\Gamma_2^{n-1} \sim 0$ dans $H_1 + H_2 \subset \bar{P}_{31} + \bar{P}_{32} \subset \bar{P}_2$, on a $H \subset H_1 + H_2$ d'après 10.3.

11. **Axiome** D_1: *Soit* Γ^{n-1} *un* $(n - 1, R)$*-cycle du type* t_2 *(ou* t_3, v. 10.41) *dans* A. *Soit* H *le porteur de l'homologie* $\Gamma^{n-1} \sim 0$. *L'ensemble* $H - A$ *est ouvert dans* R *(donc dans* $R - S$).

L'ensemble $H - A$ sera appelé l'*intérieur* du cycle Γ^{n-1}. La manière dont il dépend de A est éclaircie dans les n^{os} 10.42 et 10.43.

11.1. *Soit* Γ^{n-1} *un* $(n - 1, R)$*-cycle du type* t_2 *dans* A. *Soit* H *le porteur de l'homologie* $\Gamma^{n-1} \sim 0$. *Soit* a *un point de l'intérieur de* Γ^{n-1}. *Il existe un entourage* W *de* a *jouissant de la propriété suivante; A chaque entourage* $V \subset W$ *de* a *on peut attacher un* $(n - 1, R)$*-cycle* Δ^{n-1} *du type* t_2 *dans* $F(V) = \bar{V} - V$ *tel que:* 1° *le porteur de l'homologie* $\Delta^{n-1} \sim 0$ *est* $\bar{V}$ *(de manière que le point* a *est à l'intérieur de* Δ^{n-1}); 2° *on a l'homologie* $\Gamma^{n-1} \sim \Delta^{n-1}$ *dans* $H - V$. V *étant donné, le cycle* Δ^{n-1} *est bien déterminée à une homologie dans* $F(V)$ *près.*

Démonstration. Soit W un entourage de a si petit que $\overline{W} \subset H - A$. W existe en vertu de l'axiome D_1. Soit V un entourage de a tel que $V \subset W$. Soit C^n le (n, R)-cycle relatif du n° 10.1. C'est donc un (n, R)-cycle mod A dans H. Soit N la famille complète de réseaux dans H qui s'obtient de la famille N définie dans *Homologie*, IV, 2, en y remplaçant R, R_1, R_2, $R_3 = R_1R_2$, $\alpha, \alpha_1 = R_1\alpha$, $\alpha_2 = R_2\alpha$, $\alpha_3 = R_3\alpha$ respectivement par H, $\overline{V}$, $H - V$, $F(V) = \overline{V}(H - V)$ (car $\overline{V} \subset H$), A, 0 (car $\overline{V}A = 0$), A, 0. Soit Ψ la famille de tous les réseaux $\mathfrak{U}$ dans R qui s'obtiennent d'un réseau $\mathfrak{B} \in N$ de la manière suivante: Soient $V_1, V_2, \ldots, V_m$ les sommets de $\mathfrak{B}$; d'après *Homologie*, III, 21 on peut déterminer des ensembles U_i $(1 \leqq i \leqq m)$ ouverts dans R tels que $V_i = HU_i$ et que $\prod_{\nu=0}^{k} V_{i_\nu} = 0$ entraîne $\prod_{0}^{k} U_i = 0$; soient $U_{m+1}, U_{m+2}, \ldots$ $\ldots, U_{m+s}$ les sommets d'un réseau arbitraire dans $R - H$: les sommets de $\mathfrak{U}$ sont $U_1, U_2, \ldots, U_{m+s}$. Ψ est évidemment une famille complète de réseaux dans R et les réseaux de la famille N sont les intersections de ceux de la famille Ψ avec l'espace H. Pour chaque $\mathfrak{U} \in \Psi$, on peut poser (*Homologie*, IV, 6, où l'on remplace n par $n - 1$) $C^n(\mathfrak{U}) = K_1^n(\mathfrak{U}) - K_2^n(\mathfrak{U})$, les $(n, \mathfrak{U})$-chaînes $K_1^n(\mathfrak{U})$ et $K_2^n(\mathfrak{U})$ étant telles que $K_1^n(\mathfrak{U}) \subset \subset \overline{V}$, $K_2^n(\mathfrak{U}) \subset H - V$, et on peut définir un $(n - 1, \mathfrak{U})$-cycle absolu dans $F(V)$: $\Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$ tel que $K_1^n(\mathfrak{U}) \to \Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$, $K_2^n(\mathfrak{U}) \to \Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$ mod A. Les $\Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$ définissent (v. *Homologie*, IV, 13) un $(n - 1, R)$-cycle Δ^{n-1} dans $F(V)$. Puisque $K_1^n(\mathfrak{U}) \subset \overline{V}$, on a $\Delta^{n-1} \sim 0$ dans $\overline{V} \subset H \subset \overline{P}_2$, $P_2 \in \mathfrak{P}_2$. Δ^{n-1} est donc un $(n - 1, R)$-cycle du type t_2 dans $F(V)$ et, H_0 étant le porteur de l'homologie $\Delta^{n-1} \sim 0$, on a $H_0 \subset \overline{V}$. D'après 10.1, on a pour chaque $\mathfrak{U} \in \Psi$: $\Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}) \sim F\,C^n(\mathfrak{U}) = F\,K_1^n(\mathfrak{U}) - F\,K_2^n(\mathfrak{U})$ dans A. Or $F\,K_1^n(\mathfrak{U}) = \Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$ et $K_2^n(\mathfrak{U}) \subset H - V$, d'où $F\,K_2^n(\mathfrak{U}) \subset H - V$; enfin $A \subset H - V$. Donc $\Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}) \sim \Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans $H - V$ pour chaque $\mathfrak{U} \in \Psi$, d'où $\Gamma^{n-1} \sim \sim \Delta^{n-1}$ dans $H - V$. Si Δ_1^{n-1} est un autre $(n - 1, R)$-cycle dans $F(V)$ tel que $\Delta_1^{n-1} \sim 0$ dans $\overline{V}$ et $\Gamma^{n-1} \sim \Delta_1^{n-1}$ dans $H - V$, on a $\Delta^{n-1} - \Delta_1^{n-1} \sim 0$ et dans $\overline{V}$ et dans $H - V$. Puisque $\overline{V} + (H - V) = H \subset \overline{P}_2$, $P_2 \in \mathfrak{P}_2$, $\Delta^{n-1} - \Delta_1^{n-1}$ est un $(n - 1, R)$-cycle du type t_2 dans $F(V)$ et, H_1 étant le porteur de l'homologie $\Delta^{n-1} - \Delta_1^{n-1} \sim 0$, on a $H_1 \subset \overline{V}$ et $H_1 \subset H - V$, d'où $H_1 \subset F(V)$ et par suite $\Delta^{n-1} \sim \Delta_1^{n-1}$ dans $F(V)$. Le cycle Δ^{n-1} est donc bien déterminé à une homologie dans $F(V)$ près. On doit encore démontrer que $H_0 = \overline{V}$. (Nous savons déjà que $H_0 \subset \overline{V}$.) D'après la définition de H_0, il existe pour chaque $\mathfrak{U} \in \Psi$ une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $L^n(\mathfrak{U}) \subset H_0$ telle que $L^n(\mathfrak{U}) \to \Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$. Or $K_1^n(\mathfrak{U}) \to \Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$ et

$$F\,C^n(\mathfrak{U}) = F\,K_1^n(\mathfrak{U}) - F\,K_2^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$$

dans A, de manière qu'il existe une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $M^n(\mathfrak{U})$ telle que $K_1^n(\mathfrak{U}) - K_2^n(\mathfrak{U}) \to \to \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}) + F\,M^n(\mathfrak{U})$. Il en résulte que $L^n(\mathfrak{U}) - K_2^n(\mathfrak{U}) - M^n(\mathfrak{U}) \to \Gamma^{k-1}(\mathfrak{U})$ pour chaque $\mathfrak{U} \in \Psi$. Or, $L^n(\mathfrak{U}) \subset H_0$, $K_2^n(\mathfrak{U}) \subset H - V$, $M^n(\mathfrak{U}) \subset A \subset H - V$, de manière que $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $H_0 + (H - V) \subset H$. H étant le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$, on a donc $H_0 + (H - V) = H$, d'où $V = H - (H - V) \subset H_0$ et par suite, H_0 étant fermé, $\overline{V} \subset H_0$. Comme nous savons que $H_0 \subset \overline{V}$, nous arrivons bien à la conclusion $\overline{V} = H_0$.

12. **Axiome** D_2: *Chaque point* $a \in R - S$ *est intérieur à un* $(n-1, R)$*-cycle du type* t_2.

12.1. *Chaque point* $a \in R - S$ *possède un entourage* W_0 *jouissant de la propriété suivante: Si* $V \subset W_0$ *est un entourage de* a, *il existe un* $(n-1, R)$*-cycle* Δ^{n-1} *du type* t_3 *dans* $F(V)$ *tel que le porteur de l'homologie* $\Delta^{n-1} \sim 0$ *soit* $\bar{V}$. (Le point a est par suite à l'intérieur de Δ^{n-1}.)

Démonstration. Soit P_3 un sommet de réseau gén. $\mathfrak{P}_3$ contenant le point a. En vertu de l'axiome D_2, il existe un ensemble bicompact $A \subset R - S - (a)$ et un $(n-1, R)$-cycle Γ^{n-1} du type t_2 dans A tel que le point a appartienne à l'intérieur de Γ^{n-1}. Déterminons W d'après 11.1 et posons $W_0 = WP_3$. Pour chaque $V \subset W_0 \subset W$, on a, d'après 11.1, un $(n-1, R)$-cycle Δ^{n-1} du type t_2 dans $F(V)$, tel que le porteur de l'homologie $\Delta^{n-1} \sim 0$ soit $\bar{V}$. Puisque $\Delta^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{V} \subset \bar{P}_3$, Δ^{n-1} est un $(n-1, R)$-cycle du type t_3 dans $F(V)$.

12.2. *La dimension de l'espace* $R - S$ *en chaque point* a *est égale à* n.

Démonstration. D'après l'axiome A_4 (n° 7) on a $\dim_a (R - S) \leqq n$. Supposons par impossible qu'on ait $\dim_a (R - S) < n$. Le point a possède alors des entourages V arbitrairement petits tels que $\dim F(V) \leqq n - 2$. La famille Ψ de tous les réseaux $\mathfrak{U}$ tels que les dimensions des $\mathfrak{U}$-simplexes dont le noyau rencontre $F(V)$ sont $\leqq n - 2$ est alors une famille complète. D'autre part, si V est suffisamment petit, il existe d'après 12.1 un $(n-1, R)$-cycle Δ^{n-1} dans $F(V)$ tel que $\Delta^{n-1} \nsim 0$ dans $F(V)$. Or pour tous les réseaux $\mathfrak{U} \in \Psi$ on a évidemment $\Delta^{n-1}(\mathfrak{U}) = 0$ ce qui est une contradiction.

13. **Axiome** E: *A chaque point* $a \in R - S$ *et à chaque entourage* Q *de* a *on peut attacher un entourage* $Q_1 \subset Q$ *jouissant de la propriété suivante: Pour chaque entourage* Q_2 *de* a *tel que* $Q_2 \subset Q_1$ *il existe un entourage* Q_3 *de* a *tel que*: 1° $Q_3 \subset Q_2$; 2° *si les* $(n-1, R)$*-cycles* Γ_1^{n-1}, Γ_2^{n-1} *sont situés dans* $\bar{Q}_1 - Q_2$ *et sont homologues à zéro dans* $\bar{Q}_1$, *il existe deux nombres* $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$, *dont un au moins* $\neq 0$, *tels que* $r_1\Gamma_1^{n-1} + r_2\Gamma_2^{n-1} \sim 0$ *dans* $\bar{Q} - Q_3$.

13.1. De l'axiome E on déduit d'après 4.2: $\mathfrak{Q}$ *étant un réseau gén. donné, il existe un affinement* $\mathfrak{Q}_1$ *de* $\mathfrak{Q}$ *et une projection* $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q})$ *qui jouissent de la propriété suivante:* $\mathfrak{Q}_2$ *étant un affinement quelconque de* $\mathfrak{Q}_1$, *on peut déterminer un affinement* $\mathfrak{Q}_3$ *de* $\mathfrak{Q}_2$ *ainsi qu'une projection* $\pi' = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{Q}_3, \mathfrak{Q}_2)$ *de manière que l'énoncé suivant soit vrai: Pour chaque sommet* Q_3 *de* $\mathfrak{Q}_3$ *et pour chaque sommet* Q_2 *de* $\mathfrak{Q}_2$ *tel que* $Q_2 \supset \pi' Q_3$ *on peut attacher à chaque couple de* $(n-1, R)$*-cycles* Γ_1^{n-1}, Γ_2^{n-1} *situés dans* $\bar{Q}_1 - \pi' Q_3$ *et homologues à zéro dans* $\bar{Q}_1$ *un couple de nombers* $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$ *dont un au moins* $\neq 0$, *tels que* $r_1\Gamma_1^{n-1} + r_2\Gamma_2^{n-1} \sim 0$ *dans* $\overline{\pi Q_1} - Q_3$.

14.1. *Soit* $a \in R - S$; *soit* U *un entourage de* a. *Il existe un entourage* $V \subset U$ *de* a *jouissant de la propriété suivante: A chaque couple* C_1^n, C_2^n *de* (n, R)*-cycles* *mod* $(R - U)$ *on peut attacher deux nombres* $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$, *dont un au moins* $\neq 0$, *tels que* $r_1 C_1^n + r_2 C_2^n \sim 0$ *mod* $(R - V)$.

Démonstration. Soit $Q \subset\subset U$ un entourage de a si petit que $Q \subset P_2 \in \mathfrak{P}_2$ (v. 9.3). Q étant donné, déterminons un entourage $Q_1 \subset Q$ d'après l'axiome E. Choisissons l'entourage $Q_2 \subset Q_1$ de a arbitrairement et déterminons l'entourage $Q_3 \subset Q_2$ de a d'après l'axiome E.

Soit Ψ la famille complète de réseaux dans R qui s'obtient de la famille N définie dans *Homologie*, IV, 2 en y remplaçant $R, R_1, R_2, R_3 = R_1R_2, \alpha, \alpha_1 = R_1\alpha, \alpha_2 = R_2\alpha, \alpha_3 = R_3\alpha$ respectivement par $R, \bar{Q}_1, R - Q_1, F(Q_1), R - U, 0, R - U, 0$. Soit $v = 1, 2$. D'après l. c. n° 6 (où l'on remplace C^{n+1} par C_v^n) il existe pour chaque $\mathfrak{U} \in \Psi$ deux $(n, \mathfrak{U})$-chaînes $K_v^n(\mathfrak{U}) \subset \bar{Q}_1, L_v^n(\mathfrak{U}) \subset R - Q_1$ telles que $C_v^n(\mathfrak{U}) = K_v^n(\mathfrak{U}) - L_v^n(\mathfrak{U})$ et un $(n - 1, \mathfrak{U})$-cycle $\Gamma_v^{n-1}(\mathfrak{U}) \subset F(Q_1)$ tel que $K_v^n(\mathfrak{U}) \to \Gamma_v^{n-1}(\mathfrak{U})$. D'après l. c. n° 13 $\Gamma_v^{n-1}(\mathfrak{U})$ définissent un $(n - 1, R)$-cycle Γ_v^{n-1} dans $F(Q_1)$. Comme $K_v^n(\mathfrak{U}) \subset \bar{Q}_1$, on a $\Gamma_v^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{Q}_1$. Puisque les cycles Γ_v^{n-1} sont situés dans $F(Q_1) \subset \bar{Q}_1 - Q_2$, il résulte de l'axiome E l'existence de deux nombres $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$, dont un au moins $\neq 0$, tels que $r_1\Gamma_1^{n-1} + r_2\Gamma_2^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{Q} - Q_3$.

Soit $\mathfrak{U} \in \Psi$ un réseau donné. On doit montrer que $r_1\, C_1^n(\mathfrak{U}) + r_2\, C_2^n(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod $(R - V)$. Soit $\mathfrak{V}$ un affinement de $\mathfrak{U}$ tel que $\Delta^n(\mathfrak{V}) = 0$ pour chaque $(n, \mathfrak{V})$-cycle essentiel dans $\bar{P}_2$. [$\mathfrak{V}$ existe en vertu de 9.2.] Soit $\mathfrak{U}' \in \Psi$ un affinement de $\mathfrak{V}$ normal relativement aux cycles dans $\bar{P}_2$. Soit $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, $\pi' = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}', \mathfrak{V})$. D'après l'homologie $r_1\Gamma_1^{n-1} + r_2\Gamma_2^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{Q} - Q_3$, il existe une $(n, \mathfrak{U}')$-chaîne $D^n(\mathfrak{U}')$ dans $\bar{Q} - Q_3$ telle que $D^n(\mathfrak{U}') \to r_1\Gamma_1^{n-1}(\mathfrak{U}') + r_2\Gamma_2^{n-1}(\mathfrak{U}')$. Comme $\Gamma_v^{n-1}(\mathfrak{U}') = F\,K_v^n(\mathfrak{U}')$ $(v = 1, 2)$, on a $D^n(\mathfrak{U}') - r_1\, K_1^n(\mathfrak{U}') - r_2\, K_2^n(\mathfrak{U}') \to 0$. Le premier membre de cette relation est un $(n, \mathfrak{U}')$-cycle dans $(\bar{Q} - Q_3) + \bar{Q}_1 \subset \bar{Q} \subset \bar{P}_2$. Donc $\pi'[D^n(\mathfrak{U}') - r_1\, K_1^n(\mathfrak{U}') - r_2\, K_2^n(\mathfrak{U}')]$ est un $(n, \mathfrak{V})$-cycle essentiel dans P_2 et il est par suite égal à zéro. Donc on a aussi

$$\pi\pi'[r_1\, K_1^n(\mathfrak{U}') + r_2\, K_2^n(\mathfrak{U}')] = \pi\pi'\, D^n(\mathfrak{U}') \subset \bar{Q} - Q_3 \subset R - Q_3\,.$$

D'autre part, on a aussi $K_v^n(\mathfrak{U}') - C_v^n(\mathfrak{U}') = L_v^n(\mathfrak{U}') \subset R - Q_1 \subset R - Q_3$. Donc

$$\pi\pi'[r_1\, C_1^n(\mathfrak{U}') + r_2\, C_2^n(\mathfrak{U}')] = 0 \quad \text{mod}\,(R - Q_3)\,.$$

Or $\pi\pi'\, C_v^n(\mathfrak{U}') \sim C_v^n(\mathfrak{U})$ mod $(R - U) \subset R - Q_3$, car C_v^n est un (n, R)-cycle mod $(R - U)$. Donc

$$r_1\, C_1^n(\mathfrak{U}) + r_2\, C_2^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \quad \text{mod}\,(R - Q_3)$$

pour chaque $\mathfrak{U} \in \Psi$. Ul suffit donc de poser $V = Q_3$.

14.2. De 14.1 on déduit d'après 4.2: *$\mathfrak{P}$ étant un réseau gén., il existe un affinement $\mathfrak{Q}$ de $\mathfrak{P}$ et une projection* $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P})$ *jouissant de la propriété suivante: Si $Q \in \mathfrak{Q}$ et si C_1^n, C_2^n sont deux* (n, R)-cycles *mod* $(R - \pi Q)$, *il existe deux nombres* r_1, $r_2 \in \mathfrak{R}$, *dont un au moins* $\neq 0$, *tels que* $r_1 C_1^n + r_2 C_2^n \sim 0$ *mod* $(R - Q)$.

15. Soit $a \in R - S$. Soit $\Theta_i(a)$ $(i = 2, 3)$ la famille de tous les $(n - 1, R)$-cycles du type t_i dans A, A étant assujetti à la condition de ne pas contenir a. *Orienter l'espace $R - S$ au point a* signifie que l'on attache à chaque $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(a)$ un nombre $\omega(a, \Gamma^{n-1}) \in \mathfrak{R}$ tel que 1° $\omega(a, \Gamma^{n-1}) = 0$ si et seulement si le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$ ne contient pas a; 2° pour $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(a)$, $r \in \mathfrak{R}$ on a $\omega(a, r\Gamma^{n-1}) = r\omega(a, \Gamma^{n-1})$; 3° si Γ_1^{n-1}, Γ_2^{n-1}, $\Gamma_1^{n-1} + \Gamma_2^{n-1} \in \Theta_2(a)$, on a $\omega(a, \Gamma_1^{n-1} + \Gamma_2^{n-1}) = \omega(a, \Gamma_1^{n-1}) + \omega(a, \Gamma_2^{n-1})$.

Remarque 1. Si $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(a)$ en le considérant comme un $(n - 1, R)$-cycle du type t_2 dans A_1 ou A_2, le nombre $\omega(a, \Gamma^{n-1})$ doit être le même dans les deux cas. Ceci est d'accord avec la condition 1° (v. 10.44).

Remarque 2. Si $\Gamma^{n-1} \in \Theta_i(a)$ $(i = 2, 3)$, $r \in \mathfrak{R}$, évidemment $r\Gamma^{n-1} \in \Theta_i(a)$.

Remarque 3. Si Γ_1^{n-1}, $\Gamma_2^{n-1} \in \Theta_3(a)$ et si $\omega(a, \Gamma_1^{n-1}) \neq 0$, $\omega(a, \Gamma_2^{n-1}) \neq 0$, $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$, on a $r_1\Gamma_1^{n-1} + r_2\Gamma_2^{n-1} \in \Theta_2(a)$. Démonstration. Soit $(v = 1, 2)$ H_v le porteur de l'homologie $\Gamma_v^{n-1} \sim 0$. D'après 1° $a \in H_1H_2$. Il suffit donc d'appliquer 10.5.

15.1. *Le point $a \in R - S$ étant donné, il est possible d'orienter $R - S$ en a. Si ω_1, ω_2 sont deux orientations de $R - S$ en a, il existe un nombre $s \in \mathfrak{R}$, $s \neq 0$, tel que $\omega_2(a, \Gamma^{n-1}) = s\omega_1(a, \Gamma^{n-1})$ pour chaque $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(a)$. Inversement, si ω_1 est une orientation donnée de $R - S$ en a et si $s \in \mathfrak{R}$, $s \neq 0$, on obtient une orientation ω_2 de $R - S$ en a en posant $\omega_2(a, \Gamma^{n-1}) = s\omega_1(a, \Gamma^{n-1})$ pour chaque $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(a)$.*

Démonstration. D'après l'axiome D_2 (v. 12) il existe un $(n - 1, R)$-cycle Γ_0^{n-1} du type t_2 dans A_0 dont l'intérieur $H_0 - A_0$ contient le point a. Choisissons l'entourage W de a correspondant au cycle Γ_0^{n-1} d'après 11.1. Soit P_3 un sommet du réseau gén. $\mathfrak{P}_3$ (v. 9.3) contenant a. Soit Λ la famille de tous les entourages V de a tels que $V \subset WP_3$. A chaque $V \in \Lambda$ correspond d'après 11.1 un $(n - 1, R)$-cycle $\Delta^{n-1}(V)$ du type t_2 dans $F(V)$ tel que : 1° le porteur de l'homologie $\Delta^{n-1}(V) \sim 0$ est $\overline{V}$; 2° on a l'homologie $\Gamma_0^{n-1} \sim \Delta^{n-1}(V)$ dans $H_0 - V$. D'ailleurs, comme $\overline{V} \subset \overline{P}_3$, les cycles $\Delta^{n-1}(V)$ sont du type t_3. Si V_1, $V_2 \in \Lambda$; $V_2 \subset V_1$, on a $\Delta^{n-1}(V_2) - \Delta^{n-1}(V_1) \sim 0$ dans $\overline{V}_1 + \overline{V}_2 = \overline{V}_1 \subset \overline{P}_3$, de manière que $\Delta^{n-1}(V_2) - \Delta^{n-1}(V_1)$ est un cycle du type t_2 (et aussi du type t_3) et le porteur H_{12} de l'homologie $\Delta^{n-1}(V_2) - \Delta^{n-1}(V_1) \sim 0$ satisfait à la condition $H_{12} \subset \overline{V}_1$. D'autre part, on a $\Gamma_0^{n-1} \sim \Delta^{n-1}(V_1)$ dans $H_0 - V_1 \subset H_0 - V_2$ et $\Gamma_0^{n-1} \sim \Delta^{n-1}(V_2)$ dans $H_0 - V_2$, d'où $\Delta^{n-1}(V_2) - \Delta^{n-1}(V_1) \sim 0$ dans $H_0 - V_2 \subset H_0 \subset \overline{P}_2$, où $P_2 \in \mathfrak{P}_2$ (car Γ_0^{n-1} est un cycle du type t_2), et par suite $H_{12} \subset H_0 - V_2$. On a donc la relation $H_{12} \subset \overline{V}_1 - V_2$ de manière que le point a n'est pas à l'intérieur de $\Delta^{n-1}(V_2) - \Delta^{n-1}(V_1)$. Donc on a, dans chaque orientation ω de l'espace $R - S$ en a, la relation $\omega[a, \Delta^{n-1}(V_2) - \Delta^{n-1}(V_1)] = 0$. Il en résulte que le nombre $s = \omega[a, \Delta^{n-1}(V)] \in \mathfrak{R}$ est indépendant du choix de $V \in \Lambda$. Comme le point a est situé à l'intérieur V du cycle $\Delta^{n-1}(V)$, on a $s \neq 0$.

Soit maintenant $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(a)$. Γ^{n-1} est un $(n-1, R)$-cycle du type t_2 dans A; soit H le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$. On a $a \in R - A$. Si $a \in R - H$, on a $\omega(a, \Gamma^{n-1}) = 0$. Si $a \in H$, on a $a \in H - A$. L'ensemble $H - A$ étant ouvert (v. 11), il existe un $V \in \Lambda$ tel que $V \subset H - A$. Si V est suffisamment petit, d'après 11.1 il existe un $(n-1, R)$-cycle $*\Delta^{n-1}(V)$ du type t_3 dans $F(V)$ tel que $\Gamma^{n-1} \sim *\Delta^{n-1}(V)$ dans $H - V$ d'où $\omega[a, \Gamma^{n-1} - *\Delta^{n-1}(V)] = 0$ et par suite $\omega(a, \Gamma^{n-1}) = \omega[a, *\Delta^{n-1}(V)]$. Le porteur de l'homologie $*\Delta^{n-1}(V)$ est $\bar{V}$. Puisque $\Delta^{n-1}(V)$, $*\Delta^{n-1}(V)$ sont deux cycles dans $F(V)$ homologues à zéro dans $\bar{V}$, il résulte de l'axiome E (v. 13) que, si V est suffisamment petit, il existe un entourage Q_3 de a ainsi que deux nombres $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$ dont au moins un est $\neq 0$ tels que $r_1 \Delta^{n-1}(V) + r_2 *\Delta^{n-1}(V) \sim 0$ dans $H - Q_3$. Donc $\omega[a, r_1 \Delta^{n-1}(V) + r_2 *\Delta^{n-1}(V)] = 0$, d'où $r_1 s + r_2 \omega[a, *\Delta^{n-1}(V)] = 0$. Si l'on avait $r_2 = 0$, on aurait $r_1 \neq 0$, $r_1 s = 0$, d'où la contradiction $s = 0$. Donc $r_2 \neq 0$ et $\omega(a, \Gamma^{n-1}) = \omega[a, *\Delta^{n-1}(V)] = -r_1 s/r_2$.

On voit que l'orientation ω, *si elle existe*, est complètement déterminée par la connaissance du nombre s. Il s'agit encore de voir qu'on arrive ainsi effectivement à une orientation. En premier lieu, on doit prouver que le nombre $\omega(a, \Gamma^{n-1})$ est déterminé sans aucune ambiguité. Or si l'entourage V est fixe, le rapport $r_1 : r_2$ dans la relation $r_1 \Delta^{n-1}(V) + r_2 *\Delta^{n-1}(V) \sim 0$ dans $H - Q_3$, est bien déterminé, car autrement on arriverait à la contradiction $\Delta^{n-1}(V) \sim 0$ dans $H - Q_3$ (c'est une contradiction, car $H - Q_3$ ne contient pas le porteur $\bar{V}$ de l'homologie $\Delta^{n-1}(V) \sim 0$). D'autre part, si $V_1, V_2 \in \Lambda$; $V_1 \supset V_2$, nous avons vu que $\Delta^{n-1}(V_2) - \Delta^{n-1}(V_1) \sim 0$ dans $\bar{V}_1 - V_2$; et si V_1 est suffisamment petit, on a tout pareillement $*\Delta^{n-1}(V_2) - *\Delta^{n-1}(V_1) \sim 0$ dans $\bar{V}_1 - V_2$, de manière que la relation $r_1 \Delta^{n-1}(V_2) + r_2 *\Delta^{n-1}(V_2) \sim 0$ dans $H - Q_3$ $(Q_3 \subset V_2)$ entraîne $r_1 \Delta^{n-1}(V_1) + r_2 *\Delta^{n-1}(V_1) \sim 0$ dans $H - Q_3$. Enfin on vérifie sans peine que le nombre $\omega(a, \Gamma_n{}^{-1})$ satisfait aux conditions 1°, 2°, 3° du n° 15.

16. **Axiome** F: *L'espace $R - S$ est orientable, c'est-à-dire il existe une orientation ω de $R - S$ simultanée (en tous ses points) jouissant de la propriété suivante: Si $a \in R - S$, $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(a)$, il existe un entourage U de a tel que $x \in U$ entraîne $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(x)$ et $\omega(x, \Gamma^{n-1}) = \omega(a, \Gamma^{n-1})$.*

Dans tout ce qui suit, on suppose que l'espace $R - S$ soit orienté, c'est-à-dire que l'on en ait choisi une orientation ω bien déterminé (jouissant de la propriété qui vient d'être énoncée).

16.1. *Dans la théorie mod 2 l'axiome F est superflu et l'orientation de $R - S$ est possible d'une seule manière.*

Démonstration. Soit $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(a)$ un $(n-1, R)$-cycle du type t_2 dans A; soit H le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$. Il n'y a que deux possibilités: 1° $a \in R - S - H$; alors $\omega(x, \Gamma^{n-1}) = \omega(a, \Gamma^{n-1}) = 0$ pour tous les $x \in R - S - H$, ce qui est un entourage de a; 2° $a \in H - A$, alors $\omega(x, \Gamma^{n-1}) = \omega(a, \Gamma^{n-1}) = 1$ pour tous les $x \in H - A$ ce qui est (v. 11) un entourage de a.

17. Nous allons construire un certain (n, R)-cycle mod S dans R, dit *cycle principal* que nous désignerons par G^n.

17.1. D'après l'axiome D_2 (v. 12 et 12.1) on peut attacher à chaque point b de $R - S$ un $(n-1, R)$-cycle Γ^{n-1} du type t_3 dans A, de manière que $b \in H - A$, où H est le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$. Les $H - A$ étant des sous-ensembles ouverts de $R - S$, d'après 4.2 et 4.3 il existe une suite $\{M_i\}$ d'ensembles ouverts constituant un réseau gén. $\mathfrak{M}$ et une suite $\{b_i\}$ de points de $R - S$ telle que, si on désigne par Γ_i^{n-1}, A_i, H_i les Γ^{n-1}, A, H correspondant au point b_i, on ait $\overline{M}_i \subset \subset H_i - A_i$ pour chaque i. D'après 10.1 à chaque Γ_i^{n-1} correspond un (n, R)-cycle C_i^n mod A_i dans H_i. Déterminons un affinement $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$ jouissant de la propriété du n° 4.4.

17.11. Ceci étant donné à chaque point $a \in R - S$ attachons un entourage $P \subset\subset R - S$ si petit qu'il satisfasse aux cinq conditions suivantes: 1° $a \in N \in \mathfrak{N}$ entraîne $P \subset N$; 2° $a \in H_i - A_i$ entraîne que pour chaque $x \in P$ on a $x \in H_i - A_i$ et $\omega(x, \Gamma_i^{n-1}) = \omega(a, \Gamma_i^{n-1})$; 3° $a \in M_i$ entraîne $P \subset M_i$; 4° $a \in R - \overline{M}_i$ entraîne $P \subset R - \overline{M}_i$;[33] 5° pour chaque couple d'indices i, j $(i \neq j)$ tel que $a \in M_i M_j$ posons $\omega_{ai} = \omega(a, \Gamma_i^{n-1})$, $\omega_{aj} = \omega(a, \Gamma_j^{n-1})$; comme $\omega_{ai} \neq 0$, $\omega_{aj} \neq 0$ [car $a \in M_i M_j \subset \subset (H_i - A_i)(H_j - A_j)$] et comme Γ_i^{n-1}, $\Gamma_j^{n-1} \in \Theta_3(a)$, on a $\omega_{aj}\Gamma_i^{n-1} - \omega_{ai}\Gamma_j^{n-1} = \Gamma_{aij}^{n-1} \in \Theta_2(a)$ (v. 15, remarque 3); donc $\omega(a, \Gamma_{aij}^{n-1}) = \omega_{aj}\omega(a, \Gamma_i^{n-1}) - \omega_{ai}\omega(a, \Gamma_j^{n-1}) = 0$ de manière que le porteur H_{aij} de l'homologie $\Gamma_{aij}^{n-1} \sim 0$ ne contient pas le point a; choisissons alors P de manière que $\overline{P}H_{aij} \neq 0$.

17.12. D'après 4.2 on peut déterminer une suite $\{a_\nu\}$ de points de $R - S$ telle que les ensembles $P = P_\nu$ correspondant aux points $a = a_\nu$ constituent un réseau gén. $\mathfrak{P}$.[34] Pour chaque couple ν, i tel que $a_\nu \in M_i$ posons $\omega_{\nu i} = \omega(a_\nu, \Gamma_i^{n-1}) \in \mathfrak{R}$ de manière qu'alors (d'après 2° et d'après l'inclusion $M_i \subset H_i - A_i$) $0 \neq \omega_{\nu i} = \omega(x, \Gamma_i^{n-1})$ pour chaque $x \in P_\nu$. Pour ν, i, j tels que $i \neq j$, $a_\nu \in M_i M_j$ soit $H_{\nu ij}$ le porteur de l'homologie $\omega_{\nu j}\Gamma_i^{n-1} - \omega_{\nu i}\Gamma_j^{n-1} \sim 0$ de manière qu'alors (en vertu de 5°) $\overline{P}_\nu H_{\nu ij} = 0$.

17.13. Soit Φ_2 la famille de tous les réseaux $\mathfrak{U}$ de la famille Φ_1 du n° 7.4 qui soient des affinements mod S de $\mathfrak{P}$. Φ_2 est (v. 5.4 et 7.4) une famille parfaitement complète de réseaux dans R. En remarquant qu'un sous-ensemble bicompact de $R - S$ ne peut rencontrer qu'un nombre fini de fermetures de sommets d'un réseau gén., on démontre sans peine (cf. la démonstration de 7.3) que la famille Ψ est aussi parfaitement complète si Ψ désigne la famille de tous les réseaux $\mathfrak{U} \in \Phi_2$ satisfaisant aux deux propriétés suivantes: 1° P_2^* étant un sommet quelconque du réseau gén. $\mathfrak{P}_2$ (v. 9.3), ou bien aucun sommet intérieur de $\mathfrak{U}$ ne rencontre $\overline{P}_2^*$, ou bien $\mathfrak{U}$ est un affine-

[33] Comme au n° 4.4, on voit que toutes ces conditions sont simultanément réalisables.

[34] En réalité, du théorème 4.2 résulte seulement l'existence d'une suite $\{Q_\nu\}$ constituant un réseau telle que chaque Q_ν fasse partie d'un $P = P_\nu$ attaché au point $a = a_\nu$. Or on voit sans peine que l'on peut s'arranger de manière que $a_\nu \in Q_\nu$ pour chaque ν, d'où résulte immédiatement que les cinq conditions 1°–5° restent intactes en y remplaçant P par Q.

ment du réseau $\mathfrak{B}(P_2^*)$ du théorème 10.1; 2° pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ aucun sommet intérieur de $\mathfrak{U}$ ne rencontre simultanément les deux ensembles M_i et A_i.[35]

17.14. Ceci étant donné soient $\mathfrak{U} \in \Psi$ et σ_k^n $(1 \leqq k \leqq m)$ tous les $(n, \mathfrak{U})$-simplexes $\neq 0 \bmod S$. Le réseau $\mathfrak{U}$ étant régulier par rapport à S (v. 5.5 et 7.4) un sommet au moins de chaque σ_k^n est un sommet intérieur de $\mathfrak{U}$. $\mathfrak{J}_k$ étant le noyau de σ_k^n, il existe donc (par définition même de la famille $\Phi_2 \supset \Psi$) un indice ν tel que $\mathfrak{J}_k \subset P_\nu$. $\mathfrak{M}$ étant un réseau gén., il existe un indice i tel que $a_\nu \in M_i$, d'où $P_\nu \subset M_i$ en vertu de la condition 3° pour les P_ν. Le nombre $\omega_{\nu i} \in \mathfrak{R}$ étant $\neq 0$, il existe un nombre $r_k \in \mathfrak{R}$ tel que le coefficient du simplexe σ_k^n dans la $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $C_i^n(\mathfrak{U})$ soit $r_k \omega_{\nu i}$.[36]

17.15. Il s'agit maintenant de montrer que le nombre $r_k \in \mathfrak{R}$ est bien déterminé, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du choix des indices ν et i. *En premier lieu*, l'indice ν étant donné, remplaçons l'indice i par j et désignons par r_k' la valeur correspondante de r_k. On a $\mathfrak{J}_k \subset P_\nu \subset M_i M_j$, en particulier $a_\nu \in M_i M_j$, d'où $\bar{P}_\nu H_{\nu ij} = 0$. Comme $\mathfrak{J}_k \subset P_\nu$, on a $\mathfrak{J}_k H_{\nu ij} = 0$. Comme $\mathfrak{J}_k \subset M_i M_j \subset (H_i - A_i)(H_j - A_j)$, on a $\mathfrak{J}_k(A_i + A_j) = 0$. Soit C^n le (n, R)-cycle $\bmod (A_i + A_j)$ dans $H_{\nu ij}$ correspondant au $(n-1, R)$-cycle $\omega_{\nu j}\Gamma_i^{n-1} - \omega_{\nu i}\Gamma_j^{n-1}$ du type t_2 dans $(A_i + A_j)$. Comme $P_\nu \subset$ $\subset M_i M_j \subset H_i H_j$, on a $H_i H_j \neq 0$. Γ_i^{n-1} étant un $(n-1, R)$-cycle du type t_3, il existe un sommet P_{3i}^* du réseau gén. $\mathfrak{P}_3$ tel que $H_i \subset \bar{P}_{3i}^*$; pareillement il existe un sommet P_{3j}^* de $\mathfrak{P}_3$ tel que $H_j \subset \bar{P}_{3j}^*$. Comme $H_i H_j \neq 0$, on a $\bar{P}_{3i}^* \bar{P}_{3j}^* \neq 0$. Il existe donc (v. 9.3) un sommet P_2^* du réseau gén. $\mathfrak{P}_2$ tel que $\bar{P}_{3i}^* + \bar{P}_{3j}^* \subset P_2^*$. Puisque $H_i \subset \bar{P}_{3i}^*$, $H_j \subset \bar{P}_{3j}^*$, $H_{\nu ij} \subset H_i + H_j$, on a $P_2^* \supset H_i + H_j + H_{\nu ij}$. Donc les chaînes $C_i^n(\mathfrak{U})$, $C_j^n(\mathfrak{U})$, $C^n(\mathfrak{U})$ sont dans $\bar{P}_2^*$. Si aucun sommet intérieur de $\mathfrak{U}$ ne rencontre $\bar{P}_2^*$, les chaînes $C_i^n(\mathfrak{U})$ et $C_j^n(\mathfrak{U})$ ne peuvent contenir aucun sommet intérieur et par suite $r_k\omega_{\nu i} = 0$, $r_k'\omega_{\nu j} = 0$, d'où $r_k = r_k' = 0$. Supposons donc qu'il existe un sommet intérieur de $\mathfrak{U}$ rencontrant $\bar{P}_2^*$; en vertu de la propriété 1° de la famille Ψ, le réseau $\mathfrak{U}$ est un affinement de $\mathfrak{B}(P_2^*)$. D'après 10.1, on en déduit sans peine que $C^n(\mathfrak{U}) =$ $= \omega_{\nu j}\, C_i^n(\mathfrak{U}) - \omega_{\nu i}\, C_j^n(\mathfrak{U}) \bmod (A_i + A_j)$. Comme $\mathfrak{J}_k H_{\nu ij} = 0$, $C^n(\mathfrak{U}) \subset H_{\nu ij}$, la chaîne $C^n(\mathfrak{U})$ ne peut pas contenir le simplexe σ_k^n, dont le noyau est $\mathfrak{J}_k$. Comme $\mathfrak{J}_k(A_i + A_j) = 0$, la chaîne $\omega_{\nu j}\, C_i^n(\mathfrak{U}) - \omega_{\nu i}\, C_j^n(\mathfrak{U})$ ne contient non plus le simplexe σ_k^n. Or cette chaîne contient le simplexe σ_k^n avec le coefficient $\omega_{\nu j} \,.\, r_k\omega_{\nu i} - \omega_{\nu i} \,.\, r_k'\omega_{\nu j}$. Comme $\omega_{\nu i} \neq 0$, $\omega_{\nu j} \neq 0$, on a donc $r_k = r_k'$. *En second lieu*, remplaçons l'indice ν par μ. Quant à l'indice i, nous pouvons le supposer inaltéré. En effet, $\mathfrak{N}$ étant un réseau gén., il existe deux sommets N_ν et N_μ de $\mathfrak{N}$ tels que $a_\nu \in N_\nu$, $a_\mu \in N_\mu$. D'après la condition 1° pour les P_ν, on a alors $P_\nu \subset N_\nu$, $P_\mu \subset N_\mu$. Or $\mathfrak{J}_k \subset P_\nu P_\mu$, d'où

[35] Ces ensembles sont disjoints, car $\bar{M}_i \subset H_i - A_i$.

[36] Soit P_2^* un sommet du réseau gén. $\mathfrak{P}_2$ tel que $H_i \subset \bar{P}_2^*$. Remarquons que $C_i^n(\mathfrak{U}) \subset H_i \subset$ $\subset \bar{P}_2^*$. Donc si aucun sommet intérieur de $\mathfrak{U}$ ne rencontre $\bar{P}_2^*$, la chaîne $C_i^n(\mathfrak{U})$ ne contient aucun $(n, \mathfrak{U})$-simplexe intérieur, d'où $r_k\omega_{\nu i} = 0$. Dans le cas contraire, d'après la propriété 1° de la famille Ψ, $\mathfrak{U}$ est un affinement de $\mathfrak{B}(P_2^*)$. D'après 10.1, la chaîne $C_i^n(\mathfrak{U})$ est donc bien déterminée à mod A_i près. Comme $\mathfrak{J}_k \subset P_\nu \subset M_i \subset H_i - A_i$, on a $\mathfrak{J}_k A_i = 0$, de sorte que le coefficient $r_k\omega_{\nu i}$ du simplexe σ_k^n dans la chaîne $C_i^n(\mathfrak{U})$ est bien déterminé.

$N_\nu N_\mu \neq 0$. D'après la définition du réseau gén. $\mathfrak{N}$, il existe donc un sommet M_i de $\mathfrak{M}$ tel que $N_\nu + N_\mu \subset M_i$, d'où $P_\nu \subset M_i$, $P_\mu \subset M_i$, de manière que cette valeur de i est admissible dans les deux cas. Soient r_k, r'_k les deux valeurs de r_k. D'après la définition même de ces nombres, on a $r_k\omega_{\nu i} = r'_k\omega_{\mu i}$. Or choisissons un point $x \in \mathfrak{J}_k \subset P_\nu P_\mu$. En vertu de la condition 2° pour les P_ν, on a $\omega_{\nu i} = \omega(x, \Gamma_i^{n-1})$, $\omega_{\mu i} = \omega(x, \Gamma_i^{n-1})$, d'où $\omega_{\nu i} = \omega_{\mu i} \neq 0$ et par suite $r_k = r'_k$.

17.16. *Les nombres* $r_k \in \mathfrak{R}$ *étant bien déterminés posons* $G^n(\mathfrak{U}) = \sum_{k=1}^{m} r_k\sigma_k^n$.

Remarque. Observons que la $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $G^n(\mathfrak{U})$ ainsi définie ne contient que des $(n, \mathfrak{U})$-simplexes $\neq 0 \bmod S$.

17.2. *Pour chaque* $\mathfrak{U} \in \Psi$, $G^n(\mathfrak{U})$ *est un* $(n, \mathfrak{U})$-*cycle mod* S.

Démonstration. Soit σ^{n-1} un $(n-1, \mathfrak{U})$-simplexe $\neq 0 \bmod S$. Il faut montrer que la chaîne $F\,G^n(\mathfrak{U})$ ne contient pas le simplexe σ^{n-1}. Pour $1 \leqq k \leqq m$, soit $\eta_k \in \mathfrak{R}$ le coefficient de σ^{n-1} dans la chaîne $F\sigma_k^n$. On doit montrer que $\sum_{k=1}^{m} \eta_k r_k = 0$, ou bien que $\sum_{k\in Z} \eta_k r_k = 0$ où Z est l'ensemble de tous les indices k $(1 \leqq k \leqq m)$ tels que $\eta_k \neq 0$. Puisque $\sigma^{n-1} \neq 0 \bmod S$ et puisque le réseau $\mathfrak{U}$ est régulier par rapport à S, σ^{n-1} possède un sommet U tel que $US = 0$. Comme $\mathfrak{U} \in \Phi$, il existe un indice ν tel que $U \subset P_\nu$, d'où $K \subset P_\nu$, K étant le noyau de σ^{n-1}. D'après la condition 3° pour les P_ν (v. 17.11), il existe un indice i tel que $P_\nu \subset M_i$. Si $k \in Z$, on a évidemment $\mathfrak{J}_k \subset K \subset P_\nu \subset M_i$ de manière que le coefficient de σ_k^n dans la chaîne $C_i^n(\mathfrak{U})$ est $r_k\omega_{\nu i}$. Donc le coefficient de σ^{n-1} dans la chaîne $F\,C_i^n(\mathfrak{U})$ est $\sum_{k\in Z} \eta_k r_k \omega_{\nu i}$. Or $\sigma^{n-1} \neq 0 \bmod S$ et $C_i^n(\mathfrak{U}) \to 0 \bmod S$. Donc $\sum_{k\in Z} \eta_k r_k \omega_{\nu i} = 0$ et par suite $\sum_{k\in Z} \eta_k r_k = 0$, car $\omega_{\nu i} \neq 0$.

17.3. *Soit* $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_1 \in \Psi$; *soit* $\mathfrak{U}_1$ *un affinement de* $\mathfrak{U}$; *soit* $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U})$. *Alors* $\pi\, G^n(\mathfrak{U}_1) = G^n(\mathfrak{U})$ *mod* S.

Les $G^n(\mathfrak{U})$, $\mathfrak{U} \in \Psi$ définissent donc un (n, R)-cycle mod S. C'est le cycle principal G^n annoncé dans 17.

Démonstration. Soit σ^n un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe donné $\neq 0 \bmod S$. Soient τ_h^n $(1 \leqq h \leqq s)$ tous les $(n, \mathfrak{U}_1)$-simplexes tels que $\pi\tau_h^n = \pm\sigma^n$. Nous pouvons d'ailleurs choisir les orientations des τ_h^n de manière que $\pi\tau_h^n = \sigma^n$ $(1 \leqq h \leqq s)$. Soit $\mathfrak{J}$ le noyau de σ^n; soient K_h $(1 \leqq h \leqq s)$ les noyaux de τ_h^n. On a évidemment $K_h \subset \mathfrak{J}$ pour $1 \leqq h \leqq s$. Comme nous le savons, il existe des indices ν, i tels que $\mathfrak{J} \subset P_\nu \subset M_i$. Soit r le coefficient de σ^n dans $G^n(\mathfrak{U})$; soient r'_h $(1 \leqq h \leqq s)$ les coefficients des τ_h^n dans $G^n(\mathfrak{U}_1)$. Il faut montrer que $r = \sum_{h=1}^{s} r'_h$. Soit P_2^* un sommet du réseau gén. $\mathfrak{P}_2$ tel que $H_i \subset \bar{P}_2^*$. Si aucun sommet intérieur de $\mathfrak{U}$ ne rencontre $\bar{P}_2^*$, on a, comme nous le savons, $r = 0$; or dans ce cas $\mathfrak{J}\bar{P}_2^* = 0$, d'où $K_h\bar{P}_2^* = 0$ $(1 \leqq h \leqq s)$; on en déduit sans peine que $r'_h = 0$ $(1 \leqq h \leqq s)$, donc $r = \sum_{h=1}^{s} r'_h$. Dans le cas contraire, nous savons que $\mathfrak{U}$, par suite aussi $\mathfrak{U}_1$, est un affinement du réseau $\mathfrak{B}(P_2^*)$ du n° 10.1, d'où $C_i^n(\mathfrak{U}) = \pi\, C_i^n(\mathfrak{U}_1)$. Or le coefficient de σ^n dans $C_i^n(\mathfrak{U})$ est $r\omega_{vi}$ et les coefficients τ_h^n $(1 \leqq h \leqq s)$ dans $C_i^n(\mathfrak{U}_1)$ sont $r_h'\omega_{vi}$. Par suite $r\omega_{vi} = \sum_{h=1}^{s} r_h'\omega_{vi}$, et donc $r = \sum_{h=1}^{s} r_h'$, car $\omega_{vi} \neq 0$.

17.4. La construction (v. 17.1–17.16) du cycle principal G^n possède un certain dégré d'arbitraire. Or on peut démontrer que (l'orientation de $R - S$ étant donnée), le cycle G^n est biern déterminé dans le sens suivant: *Il existe une famile complète Φ de réseaux dans R telle que la $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $G^n(\mathfrak{U})$ est déterminée sans aucune ambiguité pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$.* (Cf. la remarque à la fin du n° 17.16). Nous laissons la démonstration de cet énoncé, dont nous ne ferons aucun usage, au soin du lecteur.

17.5. *Soit A un sous-ensemble bicompact de R; soit $\overline{R - S} - A \neq 0$. Le cycle principal G^n n'est pas situé dans A.*

Démonstration. Il existe évidemment un point $a \in (R - S) - A$. Choisissons les indices v, i de manière que $a \in P_v \subset M_i \subset\subset H_i - A_i$. Soit V un entourage de a si petit que 1° $\overline{V} \subset (R - S) - A$; 2° $\overline{V} \subset P_v$. Il suffit de démontrer qu'il existe un réseau $\mathfrak{U} \in \Psi$ tel que $G^n(\mathfrak{U})$ contienne un n-simplexe σ^n dont le noyau $\mathfrak{Z}$ ne rencontre pas A. Comme H_i est le porteur de l'homologie $\Gamma_i^{n-1} \sim 0$ et comme $H_i - V \subset \subset H_i$, $H_i - V = \overline{H_i - V} \neq H_i$, on a $C_i^n(\mathfrak{U}) \subset H_i$ mais il existe des réseaux $\mathfrak{U} \in \Psi$ arbitrairement petits tels que qu'on n'a pas $C_i^n(\mathfrak{U}) \subset H_i - V$. Choisissons un tel réseau $\mathfrak{U}$ assujetti à la condition qu'aucun sommet de $\mathfrak{U}$ ne rencontre simultanément $\overline{V}$ et A, ou bien $\overline{V}$ et $R - P_v$, ou enfin $\overline{V}$ et S. Comme la chaîne $C_i^n(\mathfrak{U})$ est dans H_i, mais non dans $H_i - V$, elle contient un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe σ^n dont le noyau $\mathfrak{Z}$ rencontre $\overline{V}$. On a alors $\mathfrak{Z}A = 0$, $\mathfrak{Z} \subset P_v \subset M_i$, $\mathfrak{Z}S = 0$. Comme $\mathfrak{Z} \subset P_v \subset M_i$, la chaîne $G^n(\mathfrak{U})$, comme $C_i^n(\mathfrak{U})$, doit contenir le simplexe σ^n. Puisque $\mathfrak{Z}A = 0$, on ne peut avoir $G^n(\mathfrak{U}) \subset A$.

Remarque. Puisque les réseaux de la famille Ψ sont d'ordre $\leqq n$ mod S (v. 7.4), nous avons démontré plus généralement que le *cycle principal G^n n'est pas homologue à zéro mod A* $(A = \overline{A}, \overline{R - S} - A \neq 0)$.

18. Faisons de nouveau les conventions des n$^{\text{os}}$ 8, 8.1 et 8.3. Choisissons (arbitrairement) l'orientation de chaque simplexe σ_i^h $(0 \leqq h \leqq n,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_h)$. Puisque les faces d'un $(h + 1, \mathfrak{Z})$-simplexe $(0 \leqq h \leqq n - 1)$ intérieur sont des $(h, \mathfrak{Z})$-simplexes intérieurs, il existe des nombres $\eta_{ij}^h \in \mathfrak{R}$ $(0 \leqq h \leqq n - 1,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1},\ 1 \leqq j \leqq \alpha_h)$ tels que

$$\sigma_i^{h+1} \to \sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h \sigma_j^h \quad (0 \leqq h \leqq n - 1, 1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1}).$$

Les nombres η ne prennent d'ailleurs que les valeurs 0, 1, -1.

Comme $F\sigma_i^{h+1} \to 0$, on a pour $1 \leqq h \leqq n - 1$, $1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1}$, $1 \leqq k \leqq \alpha_{h-1}$: $\sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h \eta_{jk}^{h-1} = 0$.

Remarque. τ^k étant un simplexe d'espèce σ^{-1} d'un réseau commode $\mathfrak{U}$, d'après 8.32 le noyau de τ^k ne rencontre pas R_0 et par suite $\tau^k = 0 \bmod \overline{R - R_0}$.

18.1. Soit Ψ_0 la famille de tous les réseaux commodes (dans le sens du n° 8.1) qui appartiennent à la famille Ψ du n° 17.13. On voit sans peine que Ψ_0 est une famille parfaitement complète de réseaux. *Dorénavant seuls les réseaux de la famille* Ψ_0 *seront appelés commodes.*

19.1. *Soit* $\mathfrak{U}$ *un réseau commode. A chaque simplexe intérieur* σ_i^h $(0 \leqq h \leqq n,$ $1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ *du réseau* $\mathfrak{Z}$ *on peut attacher une* $(n-h, \mathfrak{U})$*-chaîne* $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ *de la manière suivante:* 1° *Chaque simplexe de chaque chaîne* $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ *est* $\neq 0$ $\bmod \overline{R - R_0}$; 2° *chaque simplexe de la chaîne* $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ *est d'espèce* σ_i^h; 3° *pour* $1 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq j \leqq \alpha_{h-1}$ *on a*

$$K^{n-h+1}(\sigma_j^{h-1}, \mathfrak{U}) \to \sum_{i=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^{h-1} K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}) \bmod \overline{R - R_0}\ ;$$

4° *on a* (v. 17)

$$G^n(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) \bmod \overline{R - R_0}\ .$$

Les chaînes $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ *sont déterminées sans aucune ambiguité par les propriétés* 1°, 2°, 3°, 4°. *On a d'ailleurs pour* $0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$: 5° $K^{n-h}(-\sigma_i^h, \mathfrak{U}) = -K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$.

Nous appellerons les $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ les $\mathfrak{U}$-*chaînes fondamentales*. Chaque $(n-h, \mathfrak{U})$-chaîne $(0 \leqq h \leqq n)$ de la forme $\sum_{i=1}^{\alpha_h} c_i K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$, $c_i \in \mathfrak{R}$ sera appelée une $(n-h, \mathfrak{U})$-*chaîne élémentaire.*

Démonstration. Commençons par les $K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U})$. D'après 8.33 chaque simplexe de la chaîne $G^n(\mathfrak{U})$ est de rang 0 ou -1. D'après la remarque du n° 18, les simplexes de rang -1 sont $=0 \bmod \overline{R - R_0}$. D'après 19 1°, 2°, 4° on doit donc entendre par $K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U})$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ la partie de la chaîne $G^n(\mathfrak{U})$ dont les simplexes sont $\neq 0$ $\bmod \overline{R - R_0}$ et d'espèce σ_i^0. Les conditions 1°, 2°, 5° $(h = 0)$ et 4° du n° 19 sont immédiatement vérifiées.

Supposons donc que pour une certaine valeur de p $(1 \leqq p \leqq n)$ on ait déjà défini les chaînes $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ $(0 \leqq h \leqq p-1,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ de manière que les conditions 1°, 2°, 3°, 4° du n° 19 soient vérifiées pour $0 \leqq h \leqq p-1$, et que l'on ait reconnu que les chaînes $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ $(0 \leqq h \leqq p-1)$ sont univoquement déterminées par ces conditions. Il s'agit de définir les chaînes $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$ de manière à satisfaire aux conditions 1°, 2°, 3° du n° 19 pour $h = p$ et de prouver que cela n'est possible que d'une seule manière.[37]

[37] On doit aussi observer la validité de 5° pour $h = p$, en la supposant pour $h = p - 1$.

Ce dernier fait est évident; en effet, la condition 3° donne pour $h = p$

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p} \eta_{ij}^{p-1} K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) = F K^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}) \bmod \overline{R - R_0}\,.$$

Pour définir $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ pour une valeur donnée de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$, on doit donc choisir l'indice j $(1 \leqq j \leqq \alpha_{p-1})$ de manière que $\eta_{ij}^{p-1} \neq 0$ (ce qui est toujours possible) et définir comme $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ la partie de la chaîne $\eta_{ij}^{p-1} F K^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U})$ dont les simplexes sont $\neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$ et d'espèce σ_i^p. Les conditions 1°, 2° et 5° $(h = p)$ sont immédiatement vérifiées. Il s'agit de prouver que 1° la définition de $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ est indépendante du choix de l'indice j; 2° les conditions 3° $(h = p)$ sont satisfaites.

A cet effet, considérons une chaîne $F K^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U})$ $(1 \leqq j \leqq \alpha_{p-1})$. D'après 8.33, un simplexe de cette chaîne est de rang $\leqq p$; d'après 8.34 et 2°, ce rang est $\geqq p - 1$ et si le rang égale $p - 1$, l'espèce du simplexe est σ_j^{p-1}, tandis que, si le rang du simplexe égale p, son espèce est σ_i^p, l'indice i étant tel que $\eta_{ij}^{p-1} \neq 0$. Soit donc $H_j^{n-p}(\mathfrak{U})$ la partie de la chaîne $F K^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U})$ dont les simplexes sont $\neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$ et d'espèce σ_j^{p-1} et soit $\eta_{ij}^{p-1} H_{ij}^{n-p}(\mathfrak{U})$ la partie de la même chaîne dont les simplexes sont $\neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$ et d'espèce σ_i^p, de manière que

$$(*) \qquad F K^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}) = H_j^{n-p}(\mathfrak{U}) + \sum_{i=1}^{\alpha_p} \eta_{ij}^{p-1} H_{ij}^{n-p}(\mathfrak{U}) \bmod \overline{R - R_0}\,.$$

Distinguons deux cas. En premier lieu, soit $p = 1$. On a d'après 4° $\sum_{j=1}^{\alpha_0} F K^n(\sigma_j^0, \mathfrak{U}) = 0 \bmod \overline{R - R_0}$, car $F G^n(\mathfrak{U}) = 0 \bmod S \subset \overline{R - R_0}$. Donc

$$\sum_{j=1}^{\alpha_0} H_j^{n-1}(\mathfrak{U}) + \sum_{i=1}^{\alpha_1} \sum_{j=1}^{\alpha_0} \eta_{ij}^0 H_{ij}^{n-1}(\mathfrak{U}) = 0 \quad \bmod \overline{R - R_0}\,,$$

d'où

$$H_j^{n-1}(\mathfrak{U}) = 0 \qquad (1 \leqq j \leqq \alpha_0)$$

et

$$(**) \qquad \sum_{j=1}^{\alpha_0} \eta_{ij}^0 H_{ij}^{n-1}(\mathfrak{U}) = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq \alpha_1)\,.$$

On voit bien que la définition de $K^{n-1}(\sigma_i^1, \mathfrak{U})$ est indépendante du choix de l'indice j; en effet pour une valeur donnée de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_1)$, il y a justement deux valeurs $j = j_1$ et $j = j_2$ de l'indice j tels que $\eta_{ij}^0 \neq 0$ et on a $\eta_{ij_1}^0 + \eta_{ij_2}^0 = 0$ de manière que $(**)$ donne

$$H_{ij_1}^{n-1}(\mathfrak{U}) = H_{ij_2}^{n-1}(\mathfrak{U})\,,$$

de manière qu'on définit sans ambiguité

$$K^{n-1}(\sigma_i^1, \mathfrak{U}) = H_{ij_1}^{n-1}(\mathfrak{U}) = H_{ij_2}^{n-1}(\mathfrak{U})\,.$$

La relation $(*)$ prend la forme

$$F\,K^n(\sigma_j^0, \mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_1} \eta_{ij}^0 K^{n-1}(\sigma_i^1, \mathfrak{U}) \bmod \overline{R - R_0} \qquad (1 \leqq j \leqq \alpha_0)\,;$$

or c'est précisément la relation 3° $(h = p = 1)$ qui était à démontrer.

En second lieu, soit $p \geqq 2$. Pour $1 \leqq k \leqq \alpha_{p-2}$ on a

$$K^{n-p+2}(\sigma_k^{p-2}, \mathfrak{U}) \to \sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{jk}^{p-2} K^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}) \quad \bmod \overline{R - R_0}$$

et par suite

$$\sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{jk}^{p-2} F\,K^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}) = 0 \quad \bmod \overline{R - R_0}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{jk}^{p-2} H_j^{n-p}(\mathfrak{U}) + \sum_{i=1}^{\alpha_p} \sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{ij}^{p-1} \eta_{jk}^{p-2} H_{ij}^{n-p}(\mathfrak{U}) = 0$$

d'où

$$H_j^{n-p}(\mathfrak{U}) = 0 \qquad (1 \leqq j \leqq \alpha_{p-1})$$

et

$$(\dagger) \qquad \sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{ij}^{p-1} \eta_{jk}^{p-2} H_{ij}^{n-p}(\mathfrak{U}) = 0 \qquad (1 \leqq k \leqq \alpha_{p-2}, 1 \leqq i \leqq \alpha_p)\,.$$

L'indice i $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$ étant donné, et j_1, j_2 $(1 \leqq j_1, j_2 \leqq \alpha_{p-1})$ étant tels que $\eta_{ij_1}^{p-1} \neq 0 \neq \eta_{ij_2}^{p-1}$, on doit démontrer que $H_{ij_1}^{n-p}(\mathfrak{U}) = H_{ij_2}^{n-p}(\mathfrak{U})$. On voit sans peine qu'il suffit de déduire ceci sous la supposition qu'il existe un indice k $(1 \leqq k \leqq \alpha_{p-2})$ tel que $\eta_{j_1k}^{p-2} \neq 0 \neq \eta_{j_2k}^{p-2}$. Or sous cette supposition, pour $j \neq j_1$ ou j_2, on a $\eta_{ij}^{p-1}\eta_{jk}^{p-2} = 0$ et en outre, comme on le voit sans peine, $\eta_{ij_1}^{p-1}\eta_{j_1k}^{p-2} + \eta_{ij_2}^{p-1}\eta_{j_2k}^{p-2} = 0$, de manière que l'égalité à démontrer s'obtient immédiatement de $(\dagger)$. On définit donc sans aucune ambiguité

$$K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) = H_{ij}^{n-p}(\mathfrak{U})$$

l'indice j n'étant assujetti qu'à la condition $\eta_{ij}^{p-1} \neq 0$. La relation $(*)$ prend alors la forme 3° $(h = p)$ qui était à démontrer.

19.2. *Soient* $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_1$ *deux réseaux commodes,* $\mathfrak{U}_1$ *étant un affinement de* $\mathfrak{U}$; *soit* $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U})$. *Alors*

$$(*) \qquad \pi\,K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}_1) = K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \quad \bmod \overline{R - R_0} \qquad (1 \leqq i \leqq \alpha_p)\,.$$

Démonstration. Soit d'abord $p = 0$. D'après 17.3 et 18.1 on a $\pi\,G^n(\mathfrak{U}_1) = G^n(\mathfrak{U}) \bmod S \subset \overline{R - R_0}$. D'autre part, d'après 19.1, 4° $G^n(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U})$

mod $\overline{R - R_0}$ et pareillement pour $\mathfrak{U}_1$. Donc

$$\sum_{i=1}^{\alpha_0} [\pi K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_1) - K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U})] = 0 \quad \mathrm{mod}\, \overline{R - R_0}\,.$$

Or d'après 19.1, 2° et 8.35 chaque simplexe de la chaîne

$$(**) \qquad \pi K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) - K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) \qquad (1 \leqq i \leqq \alpha_0)$$

est d'espèce σ_i^0. Donc les chaînes $(**)$ sont $=0$ mod $\overline{R - R_0}$.

En second lieu, supposons que pour une certaine valeur de p $(1 \leqq p \leqq n)$ on ait déjà démontré que

$$\pi K^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}_1) = K^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}) \,\mathrm{mod}\, \overline{R - R_0} \qquad (1 \leqq j \leqq \alpha_{p-1})\,.$$

Cette relation reste vraie si l'on forme les frontières des deux termes. Cela donne d'après 19.1, 3°

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p} \eta_{ij}^{p-1}[\pi K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}_1) - K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})] = 0 \quad \mathrm{mod}\, \overline{R - R_0}\,.$$

D'après 19.1, 2° et 8.35 chaque simplexe de l'$i^{\text{ème}}$ terme de cette somme est d'espèce σ_i^p; d'autre part, l'indice i étant donné, on peut choisir j de manière que $\eta_{ij}^{p-1} \neq 0$. Il en résulte $(*)$.

19.3. *Soit* $\mathfrak{U}$ *un réseau commode. Pour* $0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$ *la chaîne* $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ *est située dans* $T(\sigma_i^h)$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{B}$ un affinement de $\mathfrak{U}$ régulier par rapport à $T(\sigma_i^h)$. Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau commode qui soit un affinement de $\mathfrak{B}$. Soit $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$, $\pi_1 = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{B})$. D'après 19.2 on a $\pi\pi_1 K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1) = K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}) \,\mathrm{mod}\, \overline{R - R_0}$. Soit τ^{n-h} un simplexe de la chaîne $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1)$. D'après 19.1, 2° le simplexe τ^{n-h} est d'espèce σ_i^h. Chaque sommet de τ^{n-h} rencontre donc (v. 8.3) $T(\sigma_i^h)$. Donc chaque sommet de $\pi_1\tau^{n-h}$ rencontre $T(\sigma_i^h)$. Le réseau $\mathfrak{B}$ étant régulier par rapport à $T(\sigma_i^h)$, il en résulte que $\pi_1\tau^{n-h} = 0$ ou bien le noyau de $\pi_1\tau^{n-h}$ rencontre $T(\sigma_i^h)$. Donc si $\pi\pi_1\tau^{n-h} \neq 0$, le noyau de ce simplexe rencontre $T(\sigma_i^h)$. Par suite la chaîne $\pi\pi_1 K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1)$ est située dans $T(\sigma_i^h)$. Or $\pi\pi_1 K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1)$ est mod $\overline{R - R_0}$ égale à la chaîne $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ dont tous les simplexes sont (v. 19.1, 1°) $\neq 0$ mod $\overline{R - R_0}$. Par suite $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}) \subset T(\sigma_i^h)$.

20.1. En partant du réseau gén. ne contenant que le seul sommet $R - S$, on construit d'après 14.2 un réseau gén. $\mathfrak{P}$ jouissant de la propriété suivante: Si $P \in \mathfrak{P}$ à chaque couple C_1^n, C_2^n de (n, R)-cycles mod S on peut attacher un couple de nombres $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$ dont un au moins $\neq 0$, de manière que $r_1 C_1^n + r_2 C_2^n \sim 0 \,\mathrm{mod}\, (R - P)$. On peut supposer que pour chaque $P \in \mathfrak{P}$ on ait $P \neq R - S$, $\overline{P} \subset R - S$.

20.2. Supposons que chaque sommet intérieur σ_i^0 $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ du réseau $\mathfrak{Z}$ du n° 8 fasse partie d'un sommet P_i du réseau gén. $\mathfrak{P}$ du n° 20.1. Désignons par Ψ_1 la famille de tous les réseaux commodes $\mathfrak{U}$ jouissant des deux propriétés suivantes: 1° Pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$, $G^n(\mathfrak{U}) \nsim 0 \bmod (R - P_i)$; 2° si un sommet U de $\mathfrak{U}$ rencontre T_i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$, on a $U \subset P_i$; 3° $U\overline{P}_i \neq 0$ pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$ et pour chaque sommet extérieur U de $\mathfrak{U}$. Puisque $G^n \nsim 0 \bmod (R - P_i)$ (v. 17.5, remarque) et $T_i \subset \sigma_i^0 \subset P_i$, la famille Ψ_1 est évidemment parfaitement complète.

20.3. Ceci étant, on a pour chaque $\mathfrak{U} \in \Psi_1$ le théorème suivant: *Soit* $C^n(\mathfrak{U})$ *un* $(n, \mathfrak{U})$*-cycle essentiel* $\bmod S$. *Il existe une* $(n, \mathfrak{U})$*-chaîne élémentaire* $D^n(\mathfrak{U})$ *telle que* $C^n(\mathfrak{U}) = D^n(\mathfrak{U}) \bmod \overline{R - R_0}$.

D é m o n s t r a t i o n. G^n étant le cycle principal, d'après 20.1 il existe pour chaque i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ deux nombres $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$, dont un au moins $\neq 0$, tels que $r_1\, C^n(\mathfrak{U}) + r_2\, G^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod (R - P)$. Or $G^n(\mathfrak{U}) \nsim 0 \bmod (R - P_i)$ d'après la propriété 1° de la famile Ψ_1. Donc $r_1 \neq 0$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $s_i \in \mathfrak{R}$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ tel que $C^n(\mathfrak{U}) \sim s_i\, G^n(\mathfrak{U}) \bmod (R - P_i)$. Donc il existe une $(n + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $E^{n+1}(\mathfrak{U})$ telle que

$$F\, E^{n+1}(\mathfrak{U}) = C^n(\mathfrak{U}) - s_i\, G^n(\mathfrak{U}) \bmod (R - P_i)\,.$$

Le réseau $\mathfrak{U}$ étant (v. 8.1, 3°) d'ordre $\leqq n \bmod S$, chaque simplexe de la chaîne $E^{n+1}(\mathfrak{U})$ possède un sommet extérieur, de manière que (v. la propriété 3° de la famille Ψ_1) $E^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R - P_i$, d'où $F\, E^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R - P_i$ et par suite $C^n(\mathfrak{U}) = s_i\, G^n(\mathfrak{U}) \bmod (R - P_i)$. Or si un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe τ^n est d'espèce σ_i^0, chacun des ses sommets rencontre P_i d'où $\tau^n \neq 0 \bmod (R - P_i)$ en vertu de la propriété 2° de la famille Ψ_1. Donc la partie de la chaîne $C^n(\mathfrak{U})$ formée des $(n, \mathfrak{U})$-simplexes d'espèce σ_i^0 est égale à celle de la chaîne $s_i\, G^n(\mathfrak{U})$, c'est-à-dire à $s_i\, K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) \bmod \overline{R - R_0}$. Or nous avons remarqué, en définissant les chaînes $K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U})$ (v. 19.1), qu'un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe qui n'est pas d'espèce σ_i^0 pour aucun i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$, est $= 0 \bmod \overline{R - R_0}$. Donc $C^n(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} s_i\, K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) \bmod \overline{R - R_0}$.

III.

21. **Axiome G^k** $(0 \leqq k \leqq n - 1)$: *Pour chaque entourage Q d'un point $a \in R - S$ il existe un entourage $P \subset Q$ de a jouissant de la propriété suivante*: *Si Γ^k est un (k, R)-cycle (absolu) dans $\overline{P}$,*[38] *on a $\Gamma^k \sim 0$ dans $\overline{Q}$.*

21.1. D'après 4.2 on déduit de l'axiome G^k: *Pour chaque réseau gén.* $\mathfrak{Q}$ *il existe un affinement* $\mathfrak{P}$ *et une projection* $\pi =$ Pr. $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ *de manière que: Si Γ^k est un (k, R)-cycle dans $\overline{P}$, $P \in \mathfrak{P}$, on a $\Gamma^k \sim 0$ dans $\overline{\pi P}$.*

[38] Pour $k = 0$ il faut supposer encore que $I(\Gamma^k) = 0$, $I(\Gamma^k)$ étant la somme des coefficients de $\Gamma^k(\mathfrak{U})$ (somme indépendante du choix du réseau $\mathfrak{U}$).

22. Dans tout ce Chapitre, on se donnera une valeur fixe de p $(0 \leqq p \leqq n)$. On suppose la validité de tous les axiomes des Chap. I et II, ainsi que celle des axiomes G^k (v. 21) pour $n - p \leqq k \leqq n - 1$.

23. *Soit Ξ la famille de tous les réseaux $\mathfrak{Z}$ de la famille Φ_1 du n° 7.4 possédant des sommets intérieurs et tels que 1° $\mathfrak{Z}$ est un affinement mod S du réseau gén. $\mathfrak{P}$ du n° 20.1, 2° le noyau de chaque $\mathfrak{Z}$-simplexe intérieur σ contient un point n'appartenant à la fermeture d'aucun sommet de $\mathfrak{Z}$ qui ne soit pas un sommet de σ. La famille Ξ est parfaitement complète.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau donné; soit $\mathfrak{Q}$ un réseau gén. donné. Il existe évidemment un réseau $\mathfrak{Z}_{-1}$ tel que 1° $\mathfrak{Z}_{-1} \in \Phi_1$; 2° $\mathfrak{Z}_{-1}$ possède des sommets intérieurs; 3° $\mathfrak{Z}_{-1}$ est un affinement de $\mathfrak{U}$; 4° $\mathfrak{Z}_{-1}$ est un affinement mod S de $\mathfrak{P}$ et de $\mathfrak{Q}$. Soit m l'ordre (v. 7.2) de $\mathfrak{Z}_{-1}$. Supposons généralement que, pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq m)$, on ait déjà défini le réseau $\mathfrak{Z}_{h-1}$. Dans le noyau de chaque $\mathfrak{Z}_{h-1}$-simplexe intérieur τ_ν^h choisissons un point $a_{h\nu}$ de manière que $a_{h\nu} \neq a_{g\mu}$ si $0 \leqq g < h$ ou bien $g = h$, $\mu \neq \nu$.[39] Modifions chaque sommet Z_{h-1} de $\mathfrak{Z}_{h-1}$ en le remplaçant par $Z_h = Z_{h-1} - \sum(a_{h\nu})$, où ν parcourt toutes les valeurs telles que Z_{h-1} ne soit pas un sommet de τ_ν^h. Soit $\mathfrak{Z}_h$ le réseau dont les sommets sont les ensembles Z_h ainsi associés aux sommet Z_{h-1} de $\mathfrak{Z}_{h-1}$. En procédant de cette manière on finit part construire un réseau $\mathfrak{Z}_m$. Soit $\mathfrak{Z}$ un rapetissement fort[30] de $\mathfrak{Z}_m$. On voit sans peine qu'on peut choisir $\mathfrak{Z}$ de manière que ce soit un affinement de $\mathfrak{U}$ et un affinement mod S de $\mathfrak{Q}$ possédant les propriétés voulues.

24. Soit $\mathfrak{z}$ un affinement de $\mathfrak{Z}$, les deux réseaux $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{Z}$ appartenant à la famille Ξ du n° 23. Pour le réseau $\mathfrak{Z}$ gardons la notation

$$\alpha_h,\ \sigma_i^h,\ T_i,\ T(\sigma_i^h),\ \mathfrak{T},\ K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$$

(où $\mathfrak{U}$ parcourt les réseaux commodes par rapport à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$). Pour le réseau $\mathfrak{z}$ on prendra la notation analogue

$$\beta_h,\ \tau_\nu^h,\ t_\nu,\ t(\tau_\nu^h),\ \mathfrak{t},\ k^{n-h}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U})\,,$$

$\mathfrak{U}$ parcourant cette fois les réseaux commodes par rapport à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$. Supposons le réseau fermé $\mathfrak{t}$ attaché à $\mathfrak{z}$ choisi selon 8 d'une manière quelconque; quant à $\mathfrak{T}$, nous le choisirons bientôt d'une manière convenable.

Choisissons une projection $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$. Un sommet intérieur τ_ν^0 de $\mathfrak{z}$ sera appelé *complètement intérieur*, si sa projection $\pi\tau_\nu^0$ est un sommet intérieur de $\mathfrak{Z}$. Un $(h, \mathfrak{z})$-simplexe intérieur τ_ν^h $(0 \leqq h \leqq n)$ sera appelé *complètement intérieur*, si chacun de ses sommets est complètement intérieur. On peut numéroter les τ_ν^h de manière que, pour chaque h $(0 \leqq h \leqq n)$, les simplexes complètement intérieurs précèdent les

[39] D'après 12.2, ceci est évidemment possible.

autres; soient τ_ν^h $(1 \leqq \nu \leqq \gamma_h)$ tous les $(h, \mathfrak{z})$-simplexes $(0 \leqq h \leqq n)$ complètement intérieurs (donc $0 \leqq \gamma_h \leqq \beta_h$ pour chaque h).

Pour $0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq \nu \leqq \gamma_h$ on a $\pi\tau_\nu^h = 0$ (seulement pour $h \geqq 1$) ou bien il existe un indice $i = \varphi_h(\nu)$ bien déterminé $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ tel que $\pi\tau_\nu^h = \pm\sigma_i^h$. Pour $h = 0$ on a toujours le signe plus; et la même chose vaut aussi pour $1 \leqq h \leqq n$ en orientant convenablement les τ_ν^h ce que nous voulons supposer.

Ceci étant, définissons le réseau fermé $\mathfrak{T}$ attaché à $\mathfrak{Z}$ en posant, pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$,

$$T_i = \sum_\nu t_\nu\,, \tag{1}$$

où ν parcourt toutes les valeurs $(1 \leqq \nu \leqq \gamma_0)$ telles que $\varphi_0(\nu) = i$. On voit sans peine que le réseau fermé $\mathfrak{T}$ possède bien par rapport à $\mathfrak{Z}$ les propriétés du n° 8.

R_k $(0 \leqq k \leqq n)$ ayant la signification usuelle (v. 8) relativement à $\mathfrak{T}$, soient R_k' $(0 \leqq k \leqq n)$ les ensembles analogues relatives à $\mathfrak{t}$. Evidemment $R_k' \supset R_k$ pour $0 \leqq k \leqq n$.

On vérifie sans peine que pour $0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$ on a

$$T(\sigma_i^h) = \sum_\nu t(\tau_\nu^h)\,, \tag{2}$$

où ν parcourt toutes les valeurs $(1 \leqq \nu \leqq \gamma_h)$ telles que $\varphi_h(\nu) = i$.

On voit aussi sans peine qu'un réseau $\mathfrak{U}$ commode par rapport à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ (dans le sens de la définition du n° 8.1) est aussi commode par rapport à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$.

$K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ étant toujours les chaînes fondamentales (v. 19.1) relatives à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$, soient $k^{n-h}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U})$ celles relatives à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$. On vérifie sans peine que pour $0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$ on a dans chaque réseau $\mathfrak{U}$ commode par rapport à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$

$$K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}) = \sum_\nu k^{n-h}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}) \quad \mathrm{mod}\, \overline{R - R_0}\,, \tag{3}$$

ν parcourant toutes les valeurs $(1 \leqq \nu \leqq \gamma_h)$ telles que $\varphi_h(\nu) = i$.

Ψ_0 et Ψ_1 étant les deux familles de réseaux définies resp. dans 18.1 et 20.2 relativement à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$, soient ψ_0 et ψ_1 les familles correspondantes relatives à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$. On voit sans peine que $\psi_0 \subset \Psi_0$, $\psi_1 \subset \Psi_1$. $\Psi_0(\psi_0)$ est d'ailleurs la famille de tous les réseaux commodes (v. 18.1) relativement à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}(\mathfrak{z} + \mathfrak{t})$. Les familles ψ_0 et ψ_1 sont, comme nous savons, complètes.

25. *Supposons que le réseau $\mathfrak{Z}$ appartienne à la famille Ξ du n° 23. On peut déterminer le réseau fermé $\mathfrak{T}$ correspondant à $\mathfrak{Z}$ (v 8) de manière que, si le réseau commode $\mathfrak{U}$ est suffisamment fin, on ait $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}) \neq 0$ pour $0 \leqq h \leqq min(n, p+1)$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$.*

La démonstration fera l'objet des n^os^ 25.1—25.2.

25.1. **Lemme.** Soit $W \neq 0$ un ensemble ouvert $\subset R - S$. Soit $0 \leqq q \leqq p + 1$. Il existe un réseau $\mathfrak{B}_q$ et un réseau gén. $\mathfrak{M}_q$ jouissant de la propriété suivante: Supposons que le réseau $\mathfrak{Z}$ du n° 8 soit un affinement de $\mathfrak{V}_q$ et un affinement mod S de $\mathfrak{M}_q$. Choisissons arbitrairement le réseau fermé $\mathfrak{T}$ (n° 8) correspondant à $\mathfrak{Z}$. Alors il existe une valeur de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_q)$ telle que 1° chaque sommet de σ_i^q est un sous-ensemble de W; 2° dans chaque réseau commode $\mathfrak{U}$ suffisamment fin on a $K^{n-q}(\sigma_i^q, \mathfrak{U}) \neq 0$.[40]

Démonstration. Soit d'abord $q \geqq 1$. Choisissons un point $a \in W$. Soit W_1 un entourage de a si petit que $\overline{W}_1 \subset W$. Soit $\mathfrak{P}^0$ un réseau gén. tel que: 1° si $a \in \overline{P}^0$, $P^0 \in \mathfrak{P}^0$, on a $P^0 \subset W_1$; 2° $\mathfrak{P}^0$ jouit de la propriété du n° 4.3; 3° si $P^0 \in \mathfrak{P}^0$, on a $\Gamma^n \sim 0$ dans $\overline{P}^0$ pour chaque (n, R)-cycle Γ^n dans $\overline{P}^0$. $\mathfrak{P}^0$ existe d'après 4.2 et 9.1. Soit $\mathfrak{Q}^1$ un affinement de $\mathfrak{P}^0$ jouissant des propriétés des n^{os} 4.3 et 4.4. Déterminons un affinement $\mathfrak{P}^1$ de $\mathfrak{Q}^1$ ainsi qu'une projection $\pi_1 = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{P}^1, \mathfrak{Q}^1)$ d'après 21.1, en y posant $k = n - 1$. Supposons généralement que, pour une certaine valeur de h $(1 \leqq h \leqq q - 2)$, on ait déjà déterminé les réseaux gén. $\mathfrak{P}^h$ et $\mathfrak{Q}^h$. Soit $\mathfrak{Q}^{h+1}$ un affinement de $\mathfrak{P}^h$ jouissant de la propriété du n° 4.4. Déterminons un affinement $\mathfrak{P}^{h+1}$ de $\mathfrak{Q}^{h+1}$ ainsi qu'une projection $\pi_{h+1} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{P}^{h+1}, \mathfrak{Q}^{h+1})$ d'après 21.1, en y posant $k = n - h - 1$. En procédant de cette manière, on construit de proche en proche les réseaux gén. $\mathfrak{P}^h$ $(0 \leqq h \leqq q - 1)$ et $\mathfrak{Q}^h$ $(1 \leqq h \leqq q - 1)$. Soit encore $\mathfrak{Q}^q$ un affinement de $\mathfrak{P}^{q-1}$ jouissant de la propriété du n° 4.4. Posons $\mathfrak{M}_q = \mathfrak{Q}^q$.

Soit $\mathfrak{V}_q$ un réseau tel que: 1° si $V \in \mathfrak{V}_q$ et que $\overline{V}\overline{W}_1 \neq 0$, on a $V \subset W$; 2° si $a \in \overline{V}$, $V \in \mathfrak{V}_q$, on a $V \subset W_1$.

Supposons que le réseau $\mathfrak{Z}$ soit un affinement de $\mathfrak{V}_q$ et un affinement mod S de $\mathfrak{M}_q = \mathfrak{Q}^q$. Puisque l'affinement $\mathfrak{Q}^q$ de $\mathfrak{P}^{q-1}$ jouit de la propriété du n° 4.4, on peut attacher à chaque $(q - 1, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur σ_i^{q-1} $(1 \leqq i \leqq \alpha_{q-1})$ un sommet $P^{q-1}(\sigma_i^{q-1})$ de $\mathfrak{P}^{q-1}$ tel que chaque sommet de σ_i^{q-1} en soit un sous-ensemble. Posons $Q^{q-1}(\sigma_i^{q-1}) = \pi_{q-1} P^{q-1}(\sigma_i^{q-1})$. Supposons généralement que, pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq q - 2)$, on ait déjà attaché à chaque σ_i^{h+1} $(1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1})$ des sommets $P^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$, $Q^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$ resp. de $\mathfrak{P}^{h+1}$ et de $\mathfrak{Q}^{h+1}$ de manière que chaque sommet de σ_i^{h+1} soit un sous-ensemble de $P^{h+1}(\sigma_i^{h+1}) \subset Q^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$. Supposons donnée une valeur de j $(1 \leqq j \leqq \alpha_h)$. Deux cas sont à distinguer. En premier lieu, supposons que σ_j^h ne soit une h-face d'aucun $(h + 1, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur; dans ce cas, choisissons un sommet $P^h(\sigma_j^h)$ de $\mathfrak{P}^h$ de manière que chaque sommet de σ_j^h en soit un sous-ensemble; ce qui est possible, puisque le réseau gén. $\mathfrak{P}^{q-1}$ est un affinement de $\mathfrak{P}^h$. En second lieu, supposons qu'il existe des valeurs de i telles que $\eta_{ij}^h \neq 0$; dans ce cas, choisissons un sommet $P^h(\sigma_j^h)$ de $\mathfrak{P}^h$ de manière que l'on ait $P^h(\sigma_j^h) \supset Q^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$ pour chaque valeur de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1})$ telle que $\eta_{ij}^h \neq 0$; ce qui est possible, car $\mathfrak{Q}^{h+1}$ est un affinement de $\mathfrak{P}^h$ jouissant de la propriété

[40] Pour $q = n + 1$, la thèse du lemme s'énonce comme il suit: Il existe une valeur de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_n)$ telle que 1° chaque sommet de σ_i^n est un sous-ensemble de W; 2° dans chaque réseau commode $\mathfrak{U}$ suffisamment fin, on a $I[K^0(\sigma_i^r, \mathfrak{U})] \neq 0$, $(1 \leqq i \leqq \alpha_n)$. (V. [38] pour la signification de I.) Du reste, nous n'aurons dans cet Ouvrage aucune occasion d'appliquer le cas $q = n + 1$ du lemme.

du n° 4.4; on voit que, ici encore, chaque sommet de σ_j^h est un sous-ensemble de $P^h(\sigma_j^h)$. Si $h \geqq 1$, posons $Q^h(\sigma_j^h) = \pi_h P^h(\sigma_j^h)$. En procédant de cette manière, on construit de proche en proche les ensembles $P^h(\sigma_i^h)$ $(0 \leqq h \leqq q-1,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ et $Q^h(\sigma_i^h)$ $(1 \leqq h \leqq q-1, 1 \leqq i \leqq \alpha_h)$.

Soit W_2 un entourage de a si petit que 1° pour chaque sommet Q^1 de $\mathfrak{Q}^1$ la relation $W_2\bar{Q}^1 \neq 0$ entraîne $a \in \bar{Q}^1$; 2° $\overline{W}_2\bar{\sigma}_i^0 = 0$ pour chaque valeur de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ telle que $\sigma_i^0 - \overline{W}_1 \neq 0$; 3° $\overline{W}_2\overline{R - R_0} = 0$. W_2 existe car: 1° en vertu de la définition même d'un réseau gén., on a $\overline{W}_1 Q^1 = 0$ pour tous les sommets Q^1 de $\mathfrak{Q}^1$ à un nombre fini d'exceptions près; 2° si l'ensemble σ_i^0 n'est pas contenu dans $\overline{W}_1$, on déduit, $\mathfrak{Z}$ étant un affinement de $\mathfrak{V}_q$, que le point a n'est pas situé dans $\bar{\sigma}_i^0$; 3° $a \in R - \overline{R - R_0}$, comme nous allons voir.

On a $\overline{W}_1\overline{R - R_0} = 0$ (et donc $a \in R - \overline{R - R_0}$). Dans le cas contraire, il existerait un point $b \in \overline{W}_1\overline{R - R_0}$. Or, d'après 8, on a $R - R_0 = R - \sum_{i=1}^{\alpha_0} T_i \subset \sum Z$ où Z parcourt tous les sommets extérieurs de $\mathfrak{Z}$. Il existerait donc un sommet Z de $\mathfrak{Z}$ tel que $b \in \bar{Z}$, $ZS \neq 0$. Le réseau $\mathfrak{Z}$ étant un affinement de $\mathfrak{V}_q$, il existerait un sommet V de $\mathfrak{V}_q$ tel que $Z \subset V$, d'où $b \in \bar{V}$, donc $\bar{V}\overline{W}_1 \neq 0$ et par suite $V \subset W$, ce qui est impossible, car $Z \subset V$, $ZS \neq 0$, $W \subset R - S$.

On peut donc déterminer un réseau commode $\mathfrak{U}_0$ tel qu'aucun sommet de $\mathfrak{U}_0$ ne rencontre simultanément $\overline{W}_1$ et $\overline{R - R_0}$. $\mathfrak{U}_0$ soit en outre tel que la chaîne $G^n(\mathfrak{U}_0)$ ne soit pas située dans $R - W_2$; c'est réalisable, car (v. 17.5) le cycle principal G^n n'est pas situé dans $R - W_2$. Enfin, $\mathfrak{U}_0$ soit si fin qu'aucun sommet de $\mathfrak{U}_0$ ne rencontre simultanément S et un des ensembles $\overline{P^0(\sigma_i^0)}$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$; c'est possible, car $\mathfrak{P}^0$ jouit de la propriété du n° 4.3. Supposons généralement que pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq q-1)$, on ait déjà construit le réseau $\mathfrak{U}_h$. Soit alors $\mathfrak{U}_{h+1}$ un réseau commode tel que $\mathfrak{U}_{h+1}$ soit un affinement de $\mathfrak{U}_h$ normal par rapport aux cycles dans $\overline{P^h(\sigma_i^h)}$ pour chaque valeur de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$. On définit de cette manière de proche en proche les réseaux commodes $\mathfrak{U}_h$ $(0 \leqq h \leqq q)$. Soit encore $\mathfrak{U}_{q+1}$ un réseau commode qui soit un affinement de $\mathfrak{U}_q$. Pour $0 \leqq h \leqq q$, choisissons une projection $\pi'_h = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_{h+1}, \mathfrak{U}_h)$.

Pour $0 \leqq h \leqq n$, soit N_h l'ensemble de tous les indices i $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ tels que le simplexe σ_i^h possède un sommet qui soit un sous-ensemble de $\overline{W}_1$. Evidemment $j \in N_h$, $\eta_{ij}^h \neq 0$ $(0 \leqq h \leqq n-1)$ entraîne $i \in N_{h+1}$.

Pour $0 \leqq k \leqq q$, $0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$ on a d'après 19.2

$$\pi'_k K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_{k+1}) = K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_k) \bmod \overline{R - R_0}\,.$$

Or je dis que, si $i \in N_h$, on a plus précisément

$$(*) \qquad \pi'_k K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_{k+1}) = K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_k)\,.$$

D'après 19.1, 1° il suffit de prouver que la chaîne $\pi'_k K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_{k+1})$ ne contient aucun simplexe situé dans $\overline{R - R_0}$. Supposons au contraire que τ soit un tel $\mathfrak{U}_k$-simplexe.

Alors chaque sommet de τ rencontrera $\overline{R - R_0}$. D'autre part, d'après 19.3, chaque sommet de τ rencontre $T(\sigma_i^h)$ et par suite chaque sommet Z de σ_i^h. Or, puisque $i \in N_h$, on peut choisir Z de manière que $Z \subset \overline{W}_1$. Donc chaque sommet de τ rencontrera simultanément $\overline{W}_1$ et $\overline{R - R_0}$, ce qui est impossible, car $\mathfrak{U}_k$ est un affinement de $\mathfrak{U}_0$.

Par le même raisonnement on déduit de 19,1, 3° que pour $0 \leqq k \leqq q + 1$, $1 \leqq \leqq h \leqq n$, $j \in N_{h-1}$ on a

$$(**) \qquad K^{n-h+1}(\sigma_j^{h-1}, \mathfrak{U}_k) \to \sum_{i=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^{h-1} K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_k).$$

Ceci étant, supposons que notre lemme ne soit pas vrai. Si $i \in N_h$ $(0 \leqq h \leqq n)$, le simplexe σ_i^h possède un sommet Z_0 tel que $Z_0 \subset \overline{W}_1$. Z étant un sommet arbitraire de σ_i^h, on a $ZZ_0 \neq 0$ et par suite $Z\overline{W}_1 \neq 0$, d'où $Z \subset W$, car le réseau $\mathfrak{Z}$ est un affinement de $\mathfrak{B}_q$. Donc l'hypothèse que le lemme ne soit pas vrai entraîne, en excluant d'abord le cas $q = n + 1$, que $K^{n-q}(\sigma_i^q, \mathfrak{U}_{q+1}) = 0$ pour un choix convenable de $\mathfrak{U}_{q+1}$, si $i \in N_q$. Donc, d'après $(*)$, on a $K^{n-q}(\sigma_i^q, \mathfrak{U}_q) = 0$ pour chaque $i \in N_q$. Donc on déduit de $(**)$ que $K^{n-q+1}(\sigma_i^{q-1}, \mathfrak{U}_q)$ est, pour chaque $i \in N_{q-1}$, un $(n - q + 1, \mathfrak{U}_q)$-cycle, situé dans $\overline{P^{q-1}(\sigma_i^{q-1})}$ d'après 19.3. Donc $K^{n-q+1}(\sigma_i^{q-1}, \mathfrak{U}_{q-1})$ est, pour chaque $i \in N_{q-1}$, un $(n - q + 1, \mathfrak{U}_q)$-cycle essentiel dans $\overline{P^{q-1}(\sigma_i^{q-1})}$ de manière qu'il existe pour $i \in N_{q-1}$ une $(n - q + 2, \mathfrak{U}_{q-1})$-chaîne $H^{n-q+2}(\sigma_i^{q-1}, \mathfrak{U}_{q-1})$ dans $\overline{Q^{q-1}(\sigma_i^{q-1})}$ telle que

$$H^{n-q+2}(\sigma_i^{q-1}, \mathfrak{U}_{q-1}) \to K^{n-q+1}(\sigma_i^{q-1}, \mathfrak{U}_{q-1}).$$

On arrive au même résultat si $q = n + 1$. En effet, de l'hypothèse que le lemme ne soit pas vrai il résulte dans ce cas que $I[K^0(\sigma_i^n, \mathfrak{U}_{n+1})] = 0$ pour chaque $i \in N_n$. Puisque $K^0(\sigma_i^n, \mathfrak{U}_{n+1}) \subset \overline{P^n(\sigma_i^n)}$, il existe donc une $(1, \mathfrak{U}_n)$-chaîne $H^1(\sigma_i^n, \mathfrak{U}_n)$ dans $\overline{Q^n(\sigma_i^n)}$ telle que

$$H^1(\sigma_i^n, \mathfrak{U}_n) \to K^0(\sigma_i^n, \mathfrak{U}_n).$$

Quelle que soit la valeur de q, il résulte de ce que nous venons de prouver, en tenant compte de $(**)$, que pour chaque $j \in N_{q-2}$

$$\Gamma^{n-q+2}(\sigma_j^{q-2}, \mathfrak{U}_{q-1}) = K^{n-q+2}(\sigma_j^{q-2}, \mathfrak{U}_{q-1}) - \sum_{i \in N_{q-1}} \eta_{ij}^{q-2} H^{n-q+2}(\sigma_i^{q-1}, \mathfrak{U}_{q-1})$$

est un $(n - q + 2, \mathfrak{U}_{q-1})$-cycle dans

$$T(\sigma_j^{q-2}) + \sum_{\eta_{ij}{}^{q-2} \neq 0} \overline{Q^{q-1}(\sigma_i^{q-1})} \subset \overline{P^{q-2}(\sigma_j^{q-2})}.$$

Supposons généralement que, pour une certaine valeur de h $(1 \leqq h \leqq q - 2)$, on ait déjà attaché à chaque $i \in N_{h+1}$ une $(n - h, \mathfrak{U}_{h+1})$-chaîne $H^{n-h}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{h+1})$ dans $\overline{Q^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$ de manière que pour chaque $j \in N_h$

$$\Gamma^{n-h}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_{h+1}) = K^{n-h}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_{h+1}) - \sum_{i \in N_{h+1}} \eta_{ij}^h H^{n-h}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{h+1})$$

soit un $(n - h, \mathfrak{U}_{h+1})$-cycle dans $\overline{P^h(\sigma_j^h)}$. Posons

$$H^{n-h}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_h) = \pi_h H^{n-h}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{h+1})$$

etc., ce qui est d'accord avec $(*)$. Alors $\Gamma^{n-h}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_h)$ est un $(n - h, \mathfrak{U}_h)$-cycle essentiel dans $\overline{P^h(\sigma_j^h)}$. Il en résulte qu'il existe pour $j \in N_h$ une $(n - h + 1, \mathfrak{U}_h)$-chaîne $H^{n-h+1}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_h)$ dans $\overline{Q^h(\sigma_j^h)}$ telle que

$$H^{n-h+1}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_h) \rightarrow \Gamma^{n-h}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_h)$$

d'où pour $j \in N_{h-1}$

$$\begin{aligned} \Gamma^{n-h+1}(\sigma_j^{h-1}, \mathfrak{U}_h) &= K^{n-h+1}(\sigma_j^{h-1}, \mathfrak{U}_h) - \sum_{i \in N_h} \eta_{ij}^{h-1} H^{n-h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_h) \\ &\rightarrow \sum_{i \in N_h} \eta_{ij}^{h-1}[K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_h) - \Gamma^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_h)] \\ &= \sum_{\substack{i \in N_h \\ k \in N_{h+1}}} \eta_{ki}^h \eta_{ij}^{h-1} H^{n-h}(\sigma_k^{h+1}, \mathfrak{U}_h) = 0 \end{aligned}$$

de manière que $\Gamma^{n-h+1}(\sigma_j^{h-1}, \mathfrak{U}_h)$ est, pour $j \in N_{h-1}$, un $(n - h + 1, \mathfrak{U}_h)$-cycle dans

$$T(\sigma_j^{h-1}) + \sum_{i \in N_h} \overline{Q^h(\sigma_i^h)} \subset \overline{P^{h-1}(\sigma_j^{h-1})}.$$

En procédant de cette manière on arrive finalement à attacher à chaque $i \in N_1$ une $(n, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $H^n(\sigma_i^1, \mathfrak{U}_1)$ dans $\overline{Q^1(\sigma_i^1)}$ de manière que pour chaque $j \in N_0$

$$\Gamma^n(\sigma_j^0, \mathfrak{U}_1) = K^n(\sigma_j^0, \mathfrak{U}_1) - \sum_{i \in N_1} \eta_{ij}^0 H^n(\sigma_i^1, \mathfrak{U}_1)$$

soit un $(n, \mathfrak{U}_1)$-cycle dans $\overline{P^0(\sigma_i^0)}$ de manière que $\Gamma^n(\sigma_j^0, \mathfrak{U}_0)$ est un $(n, \mathfrak{U}_0)$-cycle essentiel dans $\overline{P^0(\sigma_i^0)} \in \mathfrak{P}^0$. D'après la définition du réseau gén. $\mathfrak{P}^0$, il en résulte que $\Gamma^n(\sigma_j^0, \mathfrak{U}_0) \sim 0$ dans $\overline{P^0(\sigma_j^0)}$ pour chaque $j \in N_0$. Or le réseau $\mathfrak{U}_0$ est d'ordre $\leqq n$ mod S et aucun sommet de $\mathfrak{U}_0$ ne peut rencontrer simultanément S et $\overline{P^0(\sigma_j^0)}$. Donc

$$K^n(\sigma_j^0, \mathfrak{U}_0) = \sum_{i \in N_1} \eta_{ij}^0 H^n(\sigma_i^1, \mathfrak{U}_0)$$

pour chaque $j \in N_0$. Donc

$$\sum_{j \in N_0} K^n(\sigma_j^0, \mathfrak{U}_0) = \sum_{i \in N_1} \varepsilon_i H^n(\sigma_i^1, \mathfrak{U}_0)$$

pour $j \in N_0$, où

$$\varepsilon_i = \sum_{j \in N_0} \eta_{ij}^0 \quad \text{pour} \quad i \in N_1 .$$

Or pour $i \in N_1$ on a $\sigma_i^1 \to \pm (\sigma_s^0 - \sigma_t^0)$, où un au moins des deux ensembles σ_s^0 et σ_t^0 est contenu dans $\overline{W}_1$. Si $\sigma_s^0 + \sigma_t^0 \subset \overline{W}_1$, on a $s, t \in N_0$, d'où $\varepsilon_i = 0$. Donc si l'indice $i \in N_1$ est tel que $\varepsilon_i \neq 0$, on peut supposer que $\sigma_s^0 - \overline{W}_1 \neq 0$. Or $\sigma_s^0 \subset Q^1(\sigma_i^1)$, donc $Q^1(\sigma_i^1) - \overline{W}_1 \neq 0$. Il en résulte que le point a n'est pas situé dans $\overline{Q^1(\sigma_i^1)}$; en effet, dans le cas contraire on aurait $a \in \overline{Q^1(\sigma_i^1)} \subset \overline{P^0(\sigma_s^0)}$, d'où la contradiction $Q^1(\sigma_i^1) \subset P^0(\sigma_s^0) \subset W_1$ d'après la définition de $\mathfrak{P}^0$. Puisque le point a n'est pas situé dans $\overline{Q^1(\sigma_i^1)}$, on a $\overline{Q^1(\sigma_i^1)}\, W_2 = 0$ d'après la définition de W_2. Donc $i \in N_1$, $\varepsilon_i \neq 0$ entraîne que $\overline{Q^1(\sigma_i^1)} \subset R - W_2$ et par suite que la chaîne $H^n(\sigma_i^1, \mathfrak{U}_0)$ est située dans $R - W_2$. Donc pour chaque $i \in N_0$ la chaîne $K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_0)$ est $\subset R - W_2$. Or ce fait subsiste pour toutes les autres valeurs de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$; en effet, si l'on n'a pas $i \in N_0$, on a $\bar{\sigma}_i^0 W_2 = 0$ d'après la définition de W_2 et, d'autre part, la chaîne $K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_0)$ est (v. 19.3) située dans $T_i \subset \bar{\sigma}_i^0$. Donc la chaîne

$$\sum_{i=1}^{\alpha_0} K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_0)$$

est située dans $R - W_2$. En outre on a $\overline{R - R_0} \subset R - W_2$ d'après la définition de W_2. Donc (v. 19.1, 4°) la chaîne $G^n(\mathfrak{U}_0)$ est située dans $R - W_2$, ce qui est une contradiction.

Le cas $q = 0$, qui était exclu jusqu'à présent, se traite bien facilement. On peut choisir arbitrairement le réseau gén. $\mathfrak{M}_0$. Choisissons de nouveau le point $a \in W$ et son entourage $W_1 \subset\subset W$. Supposons le réseau $\mathfrak{V}_0$ choisi de telle manière que 1° $V \in \mathfrak{V}_0$, $\overline{V}\overline{W}_1 \neq 0$ entraîne $V \subset W$; 2° $a \in \overline{V}$, $V \in \mathfrak{V}_0$ entraîne $V \subset W_1$. Soit W_2 un entourage de a si petit que 1° $\sigma_i^0 - \overline{W}_1 \neq 0$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ entraîne $\overline{W}_2 \bar{\sigma}_i^0 = 0$; 2° $\overline{W}_2 \overline{R - R_0} = 0$. Comme plus haut on voit que ces conditions sont réalisables. Choisissons le réseau commode $\mathfrak{U}_0$ de manière que la chaîne $G^n(\mathfrak{U}_0)$ ne soit pas située dans $R - W_2$. Si le cas $q = 0$ du lemme n'était pas vrai, on aurait [v. (*)] $K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_0) = 0$ pour chaque i tel que $\sigma_i^0 \subset W_1$. Comme plus haut, on voit que pour les autres valeurs de i $K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_0)$ est située dans $R - W_2$. Puisque $\overline{R - R_0} \subset R - W_2$, on aurait de nouveau la contradiction $G^n(\mathfrak{U}_0) \subset R - W_2$.

25.2. Passons à la démonstration du théorème du n° 25. D'après la définition de la famille Ξ on peut déterminer des points $a_{hi} \in \mathfrak{J}(\sigma_i^h)$ $(0 \leqq h \leqq p + 1,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_h$; $\mathfrak{J}$ signifie le noyau) de manière que l'inclusion $a_{hi} \in Z$, $Z \in \mathfrak{Z}$ entraîne que Z soit un sommet de σ_i^h. Désignons par G la somme de tous les sommets extérieurs de $\mathfrak{Z}$. On a alors $a_{hi} \in R - \overline{G}$. Les points a_{hi} étant manifestement distincts les uns des autres, on peut déterminer des ensembles ouverts W_{hi} tels que 1° $W_{hi} \subset \mathfrak{J}(\sigma_i^h)$; 2° $W_{hi} W_{kj} \neq 0$ entraîne $h = k$, $i = j$; 3° $W_{hi} \subset R - \overline{G}$. Pour $0 \leqq h \leqq p + 1$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$ attachons à l'ensemble ouvert W_{hi} le réseau $\mathfrak{V}_{hi}$ et le réseau gén. $\mathfrak{M}_{hi}$ d'après 25.1 en y posant $q = h$. Choisissons le réseau $\mathfrak{z}$ de manière qu'il soit un affinement de $\mathfrak{Z}$, ainsi que de chaque $\mathfrak{V}_{hi}$ et que chaque sommet intérieur de $\mathfrak{z}$ fasse partie d'un sommet de chaque $\mathfrak{M}_{hi}$. Associons à $\mathfrak{z}$ un réseau fermé $\mathfrak{t}$ selon 8. D'après 251 il existe des $(h, \mathfrak{z})$-simplexes intérieurs $\varrho_i^h = (z_{hi0}, z_{hi1}, \ldots, z_{hih})$ $(0 \leqq h \leqq p + 1, 1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ tels que 1° $z_{hi\lambda} \subset \subset W_{hi}$ $(0 \leqq \lambda \leqq h)$; 2° il existe une famille parfaitement complète χ de réseaux commodes par rapport à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ et tels que $k^{n-h}(\varrho_i^h, \mathfrak{U}) \neq 0$ pour $0 \leqq h \leqq p + 1$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$, $\mathfrak{U} \in \chi$. Posons $\sigma_i^h = (Z_{hi0}, Z_{hi1}, \ldots, Z_{hih})$. Les ensembles $z_{hi\lambda}$ sont évidemment distincts les uns des autres et on a $z_{hi\lambda} \subset W_{hi} \subset \mathfrak{Z}(\sigma_i^h) \subset Z_{hi\lambda}$. On peut donc choisir $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$ de manière que

$$\pi z_{hi\lambda} = Z_{hi\lambda} \quad \text{pour} \quad 0 \leqq h \leqq p + 1\,, \quad 1 \leqq i \leqq \alpha_h\,, \quad 0 \leqq \lambda \leqq h\,.$$

Déterminons le réseau fermé $\mathfrak{T}$ attaché à $\mathfrak{Z}$ d'après 24. D'après 24, (3) on a pour chaque $\mathfrak{U} \in \chi$ et pour $0 \leqq h \leqq p + 1$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$

$$(*) \qquad K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}) = \sum_{\nu} k^{n-h}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}) \mod \overline{R - R_0}\,,$$

ν parcourant tous les indices $(1 \leqq \nu \leqq \gamma_h)$ tels que $\pi\tau_\nu^h = \sigma_i^h$. En particulier la somme à droite dans $(*)$ contient le terme $k^{n-h}(\varrho_i^h, \mathfrak{U})$, puisque évidemment $\pi\varrho_i^h = \sigma_i^h$. La somme à droite dans $(*)$ ne peut être égale à zéro mod $\overline{R - R_0}$ que si chaque terme est $= 0$ mod $\overline{R - R_0}$, car chaque simplexe de la chaîne $k^{n-h}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U})$ est d'espèce τ_ν^h relativement à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ de manière que deux termes différents de notre somme n'ont aucun simplexe en commun. Donc l'égalité $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}) = 0$ entraînerait en particulier que $k^{n-h}(\varrho_i^h, \mathfrak{U}) = 0 \mod \overline{R - R_0}$. Or nous savons que $k^{n-h}(\varrho_\nu^h, \mathfrak{U}) \neq 0$. Il suffit donc de montrer que, si le réseau $\mathfrak{U} \in \chi$ est suffisamment fin, un simplexe de la chaîne $k^{n-h}(\varrho_i^h, \mathfrak{U})$ ne peut être situé dans $\overline{R - R_0}$. Or on a, d'après 8, $R_0 \supset R - G$, d'où $\overline{R - R_0} \subset \bar{G}$. D'autre part, on a $t(\varrho_i^h) \subset z_{hi0} \subset W_{hi} \subset R - \bar{G}$. Donc $t(\varrho_i^h)$ et $\overline{R - R_0}$ sont deux ensembles fermés disjoints, de manière que, si le réseau $\mathfrak{U}$ est suffisamment fin, un $\mathfrak{U}$-simplexe ne peut être situé simultanément dans $t(\varrho_i^h)$ et dans $\overline{R - R_0}$. Or chaque simplexe de la chaîne $k^{n-h}(\varrho_i^h, \mathfrak{U})$ est situé dans $t(\varrho_i^h)$ d'après 19.3.

26. *Soit* $0 \leqq p \leqq n$. *Soit* $\mathfrak{Z} \in \Xi$ (v. 23) *Déterminons le réseau fermé* $\mathfrak{T}$ *d'après 25. Soit A un sous-ensemble bicompact de R. Il existe un réseau commode $\mathfrak{U}_0$ jouissant de la propriété suivante: Si les nombres $r_i \in \mathfrak{R}$ sont tels que* $\sum_{i=1}^{\alpha_p} r_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}_0)$ *est un $(n - p, \mathfrak{U}_0)$-cycle mod $A\overline{R - R_0}$ homologue à zéro dans A, alors* $\sum_{i=1}^{\alpha_p} r_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ *est un $(n - p, \mathfrak{U})$-cycle mod $A\overline{R - R_0}$ homologue à zéro dans A pour chaque réseau commode $\mathfrak{U}$ qui est un affinement de $\mathfrak{U}_0$.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$ deux réseaux commodes dont le second un affinement du premier. D'après 19.2 et 19.1, 1° la relation $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}') \subset A$ entraîne $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \subset A$. On en déduit sans peine qu'il existe un réseau commode $\mathfrak{U}_1$ tel que $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}_1) \subset A$ entraîne $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \subset A$ pour chaque réseau commode $\mathfrak{U}$. Si l'on numérote convenablement les σ_i^p, on a un nombre α_h' $(0 \leqq \alpha_h' \leqq \alpha_h)$ tel que $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1) \subset A$ si et seulement si $1 \leqq i \leqq \alpha_h'$. D'après 25 on peut supposer que

$K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}) \neq 0 \bmod A\overline{R - R_0}$ pour $0 \leqq h \leqq \min(n, p+1)$, $1 \leqq i \leqq \alpha'_h$ dans chaque affinement commode $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{U}_1$. Il en résulte (v. 19.1, 3°) que si

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{\alpha'_p} r_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \to 0 \quad \bmod A\overline{R - R_0}$$

pour $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1$, la même relation a lieu pour chaque affinement commode $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{U}_1$. Les chaînes $(*)$ forment un module de rang fini $(\leqq \alpha'_p)$. Désignons par $M_p(\mathfrak{U})$ le sous-module du module défini par la condition

$$\sum_{i=1}^{\alpha'_p} r_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \sim 0 \quad \bmod A\overline{R - R_0} \text{ dans } A$$

et soit $\varrho_p(\mathfrak{U})$ le rang de $M_p(\mathfrak{U})$. Il existe un affinement commode $\mathfrak{U}_0$ de $\mathfrak{U}_1$ tel que la valeur de $\varrho_p(\mathfrak{U})$ pour $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0$ soit un minimum. On voit sans peine que le réseau commode $\mathfrak{U}_0$ jouit de la propriété voulue.

IV.

27. **Axiome** H^k $(0 \leqq k \leqq n-2)$: *Pour chaque entourage P d'un point $a \in R - S$ il existe un entourage $P_1 \subset P$ de a jouissant de la propriété suivante: A chaque entourage $P_2 \subset P_1$ de a on peut attacher un entourage $P_3 \subset P_2$ de a de manière que: Si Γ^k est un (k, R)-cycle dans $\bar{P}_1 - P_2$ et que l'on ait $\Gamma^k \sim 0$ dans $\bar{P}_1$, on a aussi $\Gamma^k \sim 0$ dans $\bar{P} - P_3$.*

27.1. D'après 4.2 on déduit de l'axiome H^k: *Pour chaque réseau gén. $\mathfrak{P}$ il existe un affinement $\mathfrak{P}_1$ et une projection $\pi' = $* Pr. $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P})$ *jouissant de la propriété suivante: A chaque affinement $\mathfrak{P}_2$ de $\mathfrak{P}_1$ on peut attacher un affinement $\mathfrak{P}_3$ de $\mathfrak{P}_2$ ainsi qu'une projection $\pi'' = $* Pr. $(\mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_2)$ *de manière que: Si $P_3 \in \mathfrak{P}_3$, $\pi'' P_3 \subset P_1 \in \mathfrak{P}_1$, si Γ^k est un (k, R)-cycle dans $\bar{P}_1 - \pi'' P_3$, si $\Gamma^k \sim 0$ dans $\bar{P}_1$, alors $\Gamma^k \sim 0$ dans $\pi' P_1 - P_3$.*

28. Dans tout ce Chapitre, supposons donnée une valeur fixe de p $(1 \leqq p \leqq n)$. Outre les axiomes des Chap. I et II, on suppose la validité des axiomes G^k pour $n - p \leqq k \leqq n - 1$ (v. 21) et celle des axiomes H^k pour $\max(0, n-p-1) \leqq k \leqq n-2$.

29. Soit $\mathfrak{P}_1^p$ un réseau gén. donné.

Déterminons un affinement $\mathfrak{Q}^{p-1}$ de $\mathfrak{P}_1^p$ jouissant de la propriété du n° 4.4. Ensuite déterminons un affinement $\mathfrak{P}^{p-1}$ de $\mathfrak{Q}^{p-1}$ ainsi qu'une projection $\pi_{p-1} = $ Pr. $(\mathfrak{P}^{p-1}, \mathfrak{Q}^{p-1})$ d'après 21.1, en y posant $k = n - 1$. Enfin déterminons un affinement $\mathfrak{P}_1^{p-1}$ de $\mathfrak{P}^{p-1}$ ainsi qu'une projection $\pi'_{p-1} = $ Pr. $(\mathfrak{P}_1^{p-1}, \mathfrak{P}^{p-1})$ d'après 27.1, en y posant $k = n - 2$.[41] Supposons généralement que, pour une certaine

[41] Si $n = 1$ et par suite $p = 1$, on détermine l'affinement $\mathfrak{P}_1^0$ de $\mathfrak{P}^0$ et la projection π'_0 de manière que $\pi'_0 P_1^0 \neq P_1^0$ pour chaque $P_1^0 \in \mathfrak{P}_1^0$.

valeur de h $(0 \leqq h \leqq p-2)$, on ait déjà défini les réseaux gén. $\mathfrak{Q}^{h+1}$, $\mathfrak{P}^{h+1}$, $\mathfrak{P}_1^{h+1}$. Déterminons un affinement $\mathfrak{Q}^h$ de $\mathfrak{P}_1^{h+1}$ jouissant de la propriété du n° 4.4. Ensuite déterminons un affinement $\mathfrak{P}^h$ de $\mathfrak{Q}^h$ ainsi qu'une projection $\pi_h = \text{Pr.}(\mathfrak{P}^h, \mathfrak{Q}^h)$ d'après 21.1 en y posant $k = n - p + h$. Enfin déterminons un affinement $\mathfrak{P}_1^h$ de $\mathfrak{P}^h$ ainsi qu'une projection $\pi'_h = \text{Pr.}(\mathfrak{P}_1^h, \mathfrak{P}^h)$ d'après 27.1, en y posant $k = n - p + h - 1$.[42] En procédant de cette manière, on construit de proche en proche les réseaux gén. $\mathfrak{Q}^h$, $\mathfrak{P}^h$, $\mathfrak{P}_1^h$ pour $0 \leqq h \leqq p-1$.

Déterminons un affinement $\mathfrak{P}_2^0$ de $\mathfrak{P}_1^0$ jouissant de la propriété du n° 4.3. Ensuite d'après 27.1, où l'on remplace $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, π', k resp. par $\mathfrak{P}^0$, $\mathfrak{P}_1^0$, $\mathfrak{P}_2^0$, π'_0, $n-p-1$ déterminons un affinement $\mathfrak{P}_3^0$ de $\mathfrak{P}_2^0$ ainsi qu'une projection $\pi''_0 = \text{Pr.}(\mathfrak{P}_3^0, \mathfrak{P}_2^0)$.[43] Enfin déterminons un affinement $\mathfrak{P}_4^0$ de $\mathfrak{P}_3^0$ jouissant de la propriété du n° 4.3. Supposons généralement que, pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq p-2)$ on ait déjà défini les réseaux gén. $\mathfrak{P}_2^h$, $\mathfrak{P}_3^h$, $\mathfrak{P}_4^h$. Déterminons un affinement $\mathfrak{P}_2^{h+1}$ de $\mathfrak{P}_4^h$ jouissant de la propriété du n° 4.4. Ensuite d'après 27.1, où l'on remplace $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, π', k resp. par $\mathfrak{P}^{h+1}$, $\mathfrak{P}_1^{h+1}$, $\mathfrak{P}_2^{h+1}$, π'_{h+1}, $n-p+h$, déterminons un affinement $\mathfrak{P}_3^{h+1}$ de $\mathfrak{P}_2^{h+1}$ ainsi qu'une projection $\pi''_{h+1} = \text{Pr.}(\mathfrak{P}_3^{h+1}, \mathfrak{P}_2^{h+1})$. Enfin déterminons un affinement $\mathfrak{P}_4^{h+1}$ de $\mathfrak{P}_3^{h+1}$ jouissant de la propriété du n° 4.3. En procédant de cette manière, on construit de proche en proche les réseaux gén. $\mathfrak{P}_2^h$, $\mathfrak{P}_3^h$, $\mathfrak{P}_4^h$ $(0 \leqq h \leqq p-1)$.

Déterminons encore un affinement $\mathfrak{P}_2^p$ de $\mathfrak{P}_4^{p-1}$ jouissant de la propriété du n° 4.4. Ensuite déterminons un affinement $\mathfrak{P}_3^p$ de $\mathfrak{P}_2^p$ ainsi qu'une projection $\pi''_p = \text{Pr.}(\mathfrak{P}_3^p, \mathfrak{P}_2^p)$ jouissant de la propriété du n° 14.2; on peut supposer que l'affinement $\mathfrak{P}_3^p$ de $\mathfrak{P}_2^p$ jouisse de la propriété du n° 4.3. Enfin déterminons un affinement $\mathfrak{P}_4^p$ de $\mathfrak{P}_3^p$ jouissant de la propriété du n° 4.4 ainsi qu'un affinement $\mathfrak{P}_5^p$ de $\mathfrak{P}_4^p$ jouissant de la même propriété.

30. Reprenons les notations du n° 8 en supposant que chaque sommet intérieur du réseau $\mathfrak{Z}$ fasse partie d'un sommet du réseau gén. $\mathfrak{P}_5^p$ (et donc aussi d'un sommet du réseau gén. $\mathfrak{P}_1^p$ donné a priori).

Pour abréger, disons que σ_j^0 $(1 \leqq j \leqq \alpha_0)$ est *contigu* à σ_i^h $(0 \leqq h \leqq p, 1 \leqq i \leqq \alpha_h)$, si σ_j^0 rencontre un sommet de σ_i^h (en particulier si σ_j^0 est lui-même un sommet de σ_i^h).

Comme le réseau gén. $\mathfrak{P}_4^p$ $(\mathfrak{P}_5^p)$ jouit par rapport à $\mathfrak{P}_3^p$ $(\mathfrak{P}_4^p)$ de la propriété du n° 4.4, on peut attacher à chaque σ_i^p $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$ un sommet $P_3^p(\sigma_i^p)$ de $\mathfrak{P}_3^p$ de manière que chaque sommet intérieur de $\mathfrak{Z}$ contigu à σ_i^p fasse partie de $P_3^p(\sigma_i^p)$. Posons $P_2^p(\sigma_i^p) = \pi'' P_3^p(\sigma_i^p)$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$. Supposons généralement que pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq p-1)$, on ait déjà attaché à chaque σ_i^{h+1} $(1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1})$ un sommet $P_2^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$ du réseau gén. $\mathfrak{P}_2^{h+1}$ tel que chaque sommet intérieur de $\mathfrak{Z}$ contigu à σ_i^{h+1} en soit un sous-ensemble. Soit donnée, une valeur de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$. Distinguons deux cas. Premièrement, si el $\mathfrak{Z}$-simplexe σ_i^h n'est pas une face d'aucun

[42] Si $p = n$ et $h = 0$, on détermine l'affinement $\mathfrak{P}_1^0$ de $\mathfrak{P}^0$ et la projection π'_0 de manière que $\pi'_0 P_1^0 \neq P_1^0$ pour chaque $P_1^0 \in \mathfrak{P}_1^0$.

[43] Si $p = n$, on pose $\mathfrak{P}_3^0 = \mathfrak{P}_2^0$ et π''_0 est l'identité.

$(h+1, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur, choisissons un sommet $P_4^h(\sigma_i^h)$ de $\mathfrak{P}_4^h$ de manière que chaque sommet intérieur de $\mathfrak{Z}$ contigu à σ_i^h en soit un sous-ensemble; ceci est possible, car le réseau gén. $\mathfrak{P}_3^p$ est un affinement de $\mathfrak{P}_4^h$. En second lieu supposons qu'il existe des valeurs de j $(1 \leqq j \leqq \alpha_{h+1})$ telles que $\eta_{ji}^h \neq 0$. Dans ce cas choisissons le sommet $P_4^h(\sigma_i^h)$ de $\mathfrak{P}_4^h$ de manière qu'on ait $P_4^h(\sigma_i^h) \supset P_2^{h+1}(\sigma_j^{h+1})$ pour toutes les valeurs de j telles que $\eta_{ji}^h \neq 0$; ceci est possible, car le réseau gén. $\mathfrak{P}_2^{h+1}$ jouit par rapport à $\mathfrak{P}_4^h$ de la propriété du n° 4.4. Dans les deux cas le sommet $P_4^h(\sigma_i^h)$ est donc construit de manière que chaque sommet intérieur de $\mathfrak{Z}$ contigu à σ_i^h en soit un sous-ensemble. Comme le réseau gén. $\mathfrak{P}_4^h$ jouit par rapport à $\mathfrak{P}_3^h$ de la propriété du n° 4.3, il existe un sommet $P_3^h(\sigma_i^h)$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ tel que $P_3^h(\sigma_i^h) \supset \overline{P_4^h(\sigma_i^h)}$. Posons encore $P_2^h(\sigma_i^h) = \pi_h'' P_3^h(\sigma_i^h)$. En procédant de cette manière, on attache de proche en proche à chaque $(h, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur σ_i^h $(0 \leqq h \leqq p-1,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ des sommets $P_4^h(\sigma_i^h)$, $P_3^h(\sigma_i^h)$, $P_2^h(\sigma_i^h)$ resp. de $\mathfrak{P}_4^h$, $\mathfrak{P}_3^h$, $\mathfrak{P}_2^h$.

Le réseau gén. $\mathfrak{P}_2^0$ jouissant par rapport à $\mathfrak{P}_1^0$ de la propriété du n° 4.3, il existe (pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$) un sommet $P_1^0(\sigma_i^0)$ de $\mathfrak{P}_1^0$ tel que $P_1^0(\sigma_i^0) \supset \overline{P_2^0(\sigma_i^0)}$. Posons $P^0(\sigma_i^0) = \pi_0' P_1^0(\sigma_i^0)$, $Q^0(\sigma_i^0) = \pi_0 P^0(\sigma_i^0)$. Supposons généralement que, pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq p-2)$, on ait déjà attaché à chaque σ_i^h $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ un sommet $Q^h(\sigma_i^h)$ de $\mathfrak{Q}^h$ tel que chaque sommet intérieur de $\mathfrak{Z}$ contigu à σ_i^h en soit un sous-ensemble. Soit donnée une valeur de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1})$. Comme le réseau gén. $\mathfrak{Q}^h$ jouit par rapport à $\mathfrak{P}_1^{h+1}$ de la propriété du n° 4.4, il existe un sommet $P_1^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$ du réseau gén. $\mathfrak{P}_1^{h+1}$ tel que $P_1^{h+1}(\sigma_i^{h+1}) \supset Q_j^h(\sigma_j^h)$ pour chaque valeur de j $(1 \leqq j \leqq \alpha_h)$ telle que $\eta_{ij}^h \neq 0$. Posons encore

$$P^{h+1}(\sigma_i^{h+1}) = \pi_{h+1}' P_1^{h+1}(\sigma_i^{h+1}), \quad Q^{h+1}(\sigma_i^{h+1}) = \pi_{h+1} P^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$$
$$(1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1}).$$

En procédant de cette manière, on attache de proche en proche à chaque $(h, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur σ_i^h $(0 \leqq h \leqq p-1,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ des sommets $P_1^h(\sigma_i^h)$, $P^h(\sigma_i^h)$, $Q^h(\sigma_i^h)$ resp. de $\mathfrak{P}_1^h$, $\mathfrak{P}^k$, $\mathfrak{Q}^h$.

Comme le réseau gén. $\mathfrak{Q}^{p-1}$ jouit par rapport à $\mathfrak{P}_1^p$ de la propriété du n° 4.4, on peut enfin attacher à chaque σ_i^p $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$ un sommet $P_1^p(\sigma_i^p)$ de $\mathfrak{P}_1^p$ de manière que $P_1^p(\sigma_i^p) \supset Q^{p-1}(\sigma_j^{p-1})$ pour chaque valeur de j $(1 \leqq j \leqq \alpha_{p-1})$ telle que $\eta_{ij}^{p-1} \neq 0$.

31. Gardons les conventions des n^os 8, 29 et 30. *Soit A un sous-ensembles bicompact de R; soit B un entourage de A. On peut choisir le réseau gén. $\mathfrak{P}_1^p$ (n° 29) de manière que ($\mathfrak{Z}$ satisfaisant à la condition énoncée au commencement du n° 30) on ait la propriété suivante: Soit $\mathfrak{U}$ un réseau commode (v. 18.1). Soit $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ un $(n-p, \mathfrak{U})$-cycle mod SA dans A essentiel. Il existe une $(n-p, \mathfrak{U})$-chaîne élémentaire $D^{n-p}(\mathfrak{U})$ dans $\bar{B}$ telle que $C^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim D^{n-p}(\mathfrak{U})$ mod $\bar{B}\,\overline{R-R_0}$ dans $\bar{B}$.*

En fait il suffit de choisir $\mathfrak{P}_1^p$ de manière que chacun de ses sommets P' qui rencontre un sommet P'' de $\mathfrak{P}_1^p$ tel que $\bar{P}''\,A \neq 0$, fasse partie de B. Un tel choix de $\mathfrak{P}_1^p$ *est évidemment possible* (v. 4.3 et 4.4). Tous les réseaux introduits dans 29 étant des affinements de $\mathfrak{P}_1^p$, ils possèdent aussi la même propriété.

La démonstration fera l'objet des n^{os} 32–42.5.

32. En tenant compte de 19.2, on voit sans peine qu'il suffit de donner la démonstration en supposant que le réseau commode $\mathfrak{U}$ soit suffisamment fin. Or (v. 29) l'affinement $\mathfrak{P}_4^h$ du réseau gén. $\mathfrak{P}_3^h$ $(0 \leqq h \leqq p-1)$ ainsi que l'affinement $\mathfrak{P}_2^0(\mathfrak{P}_3^p)$ de $\mathfrak{P}_1^0(\mathfrak{P}_2^p)$ jouit de la propriété du n° 4.3. On peut donc supposer que le réseau $\mathfrak{U}$ soit tel que: 1° pour $0 \leqq h \leqq p-1$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$ chaque sommet de $\mathfrak{U}$ qui rencontre $\overline{P_4^h(\sigma_i^h)}$ fasse partie de $P_3^h(\sigma_i^h)$; 2° pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0(\alpha_p)$ chaque sommet de $\mathfrak{U}$ qui rencontre $\overline{P_2^0(\sigma_i^0)}$ $[\overline{P_3^p(\sigma_i^p)}]$ fasse partie de $P_1^0(\sigma_i^0)$ $[P_2^p(\sigma_i^p)]$. De plus on peut supposer qu'aucun sommet de $\mathfrak{U}$ ne rencontre simultanément S et un des ensembles $\overline{P_1^0(\sigma_i^0)}$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$. Ensuite on peut supposer que, si U', U'' sont deux sommets de $\mathfrak{U}$ tels que $U'R_0 \neq 0$, $U''S \neq 0$, on ait $U'U'' = 0$. Puis, on peut supposer que si un sommet de $\mathfrak{U}$ rencontre simultanément A et un des ensembles $\overline{P_1^0(\sigma_i^0)}$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$, on ait $A\,\overline{P_1^0(\sigma_i^0)} \neq 0$. En outre on peut (v. 17.5) supposer que $G^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod (R - P_3^p(\sigma_i^p))$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$. Encore, comme (v. 30) chaque sommet intérieur de $\mathfrak{Z}$ contigu (v. 30) de σ_i^h $(0 \leqq h \leqq p-1,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ est un sous-ensemble de l'ensemble ouvert $P_4^h(\sigma_i^h)$, on peut supposer que, pour $0 \leqq h \leqq p-1$, $0 \leqq k \leqq p-1$, $1 \leqq j \leqq \alpha_k$, les indices i, j étant tels que les $\mathfrak{Z}$-simplexes σ_i^h et σ_j^k soient des faces d'un certain $(l, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur $(l \geqq h,\ l \geqq k)$, chaque sommet de $\mathfrak{U}$ qui rencontre $T(\sigma_j^k)$ fasse partie de $P_4^h(\sigma_i^h)$. En effet $T(\sigma_j^k)$ est un sous-ensemble bicompact de chaque sommet de σ_j^k; or chaque sommet de σ_j^k étant contigu à σ_i^h, il en résulte que $T(\sigma_j^k) \subset P_4^h(\sigma_i^h)$. Pareillement on voit qu'on peut supposer que, si σ_r^0 est un sommet de σ_i^p, chaque sommet de $\mathfrak{U}$ qui rencontre T_r est un sous-ensemble de $P_3^p(\sigma_i^p)$.

Il est évident que ces propriétés de $\mathfrak{U}$ appartiennent aussi à chaque affinement de $\mathfrak{U}$.

33. Posons $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}$. Soit $\mathfrak{B}$ un affinement de $\mathfrak{U}$ régulier par rapport à $\bar{B}\ \overline{R - R_0}$. Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau commode tel que 1° $\mathfrak{U}_1$ soit un affinement de $\mathfrak{B}$; 2° $\mathfrak{U}_1$ est un affinement de $\mathfrak{U}$ normal par rapport aux cycles $\bmod (R - P_2^p(\sigma_i^p))$, pour $1 \leqq i \leqq \alpha_p$. Soit $\pi_{10} = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$, $\pi_{20} = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{B})$, $\pi_0^* = \pi_{10}\pi_{20} = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U})$. Supposons généralement que, pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq p-1)$, on ait déjà défini le réseau $\mathfrak{U}_{2p-2h-1}$. Alors, soit $\mathfrak{U}_{2p-2h}$ un réseau commode qui soit un affinement de $\mathfrak{U}_{2p-2h-1}$ normal par rapport aux cycles dans $\overline{P^h(\sigma_i^h)}$ pour chaque i $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ et soit $\pi_{2p-2h-1}^* = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_{2p-2h}, \mathfrak{U}_{2p-2h-1})$; ensuite, soit $\mathfrak{U}_{2p-2h+1}$ un réseau commode qui soit un affinement de $\mathfrak{U}_{2p-2h}$ normal par rapport aux cycles dans $\overline{P_1^h(\sigma_i^h)} - P_2^h(\sigma_i^h)$ pour chaque i $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ et soit $\pi_{2p-2h}^* = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_{2p-2h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h})$. En procédant de cette manière on construit de proche en proche les réseaux commodes $\mathfrak{U}_h$ pour $1 \leqq h \leqq 2p+1$.

33.1. Le cycle $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ (v. 31) étant essentiel, il existe un $(n-p, \mathfrak{U}_{2p+1})$-cycle $C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p+1}) \bmod S$ dans A tel que $C^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \pi_0^*\pi_1^*\pi_2^* \dots \pi_{2p}^*\, C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p+1}) \bmod S$ dans A. Il est évident qu'il suffit de démontrer le théorème du n° 31 en supposant que $C^{n-p}(\mathfrak{U}) = \pi_0^*\pi_1^*\pi_2^* \dots \pi_{2p}^*\, C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p+1})$. Définissons de proche en proche les chaînes $C^{n-p}(\mathfrak{U}_h)$ $(1 \leqq h \leqq 2p)$ en posant $\pi_h^* \, C^{n-p}(\mathfrak{U}_{h+1}) = C^{n-p}(\mathfrak{U}_h)$ $(1 \leqq h \leqq 2p)$; on a alors $\pi_0^* \, C^{n-p}(\mathfrak{U}_1) = C^{n-p}(\mathfrak{U})$. Généralement, introduisons (pour le n° 34) la convention suivante: Si l'on a défini une certaine $\mathfrak{U}_{h+1}$-chaîne $(0 \leqq h \leqq 2p)$ $E^k(\mathfrak{U}_{h+1})$, on pose $E^k(\mathfrak{U}_h) = \pi_h^* \, E^k(\mathfrak{U}_{h+1})$.

34. **Lemme.** On peut attacher à chaque $(h, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur σ_i^h $(0 \leqq h \leqq \leqq p-1)$ une $(n-p+h+1, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1)$ dans $\bar{B}$ de manière que: 1° pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$, la chaîne

$$F \, L^{n-p+1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_1) - C^{n-p}(\mathfrak{U}_1)$$

ne contienne pas des simplexes situés dans $\overline{P_4^0(\sigma_i^0)}$; 2° pour $0 \leqq h \leqq p-2$, $1 \leqq i \leqq \leqq \alpha_{h+1}$, la chaîne

$$F \, L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_1) - \sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h \, L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_1)$$

ne contienne pas des simplexes situés dans $\overline{P_4^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$; 3° pour $1 \leqq i \leqq \alpha_p$, la chaîne

$$\sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{ij}^{p-1} \, L^n(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}_1)$$

soit un (n, R)-cycle mod $(R - P_2^p(\sigma_i^p))$.

La démonstration fait l'objet des n^os^ 34.1–34.4.

Remarque. Si on change l'orientation d'un simplexe σ_i^h, on doit évidemment changer le signe de $L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1)$.

34.1. Pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$, soit $C^{n-p}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p+1})$ la partie de la chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p+1})$ dont les simplexes sont situés dans $\overline{P_1^0(\sigma_i^0)}$. Excluons pour le moment le cas où $p = n$. Soit

$$\Gamma^{n-p-1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p+1}) = F \, C^{n-p}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p+1}) \, .$$

Or $C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p+1})$ est un cycle mod S; puisque (v. 32) aucun sommet de $\mathfrak{U}$ ne rencontre simultanément S et $\overline{P_1^0(\sigma_i^0)}$, on voit qu'aucun simplexe de $F \, C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p+1})$ n'est situé dans $\overline{P_1^0(\sigma_i^0)}$. Donc $\Gamma^{n-p-1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p+1})$ est la partie de la chaîne

$$(*) \qquad F \, C^{n-p}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p+1}) - F \, C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p+1})$$

dont les simplexes sont situés dans $\overline{P_1^0(\sigma_i^0)}$. Or le noyau de chaque simplexe de la chaîne $(*)$ rencontre $R - P_1^0(\sigma_i^0)$ et par suite (v. 32) ce noyau ne peut rencontrer $\overline{P_2^0(\sigma_i^0)}$; donc[44]

$$\Gamma^{n-p-1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_k) \subset \overline{P_1^0(\sigma_i^0)} - P_2^0(\sigma_i^0) \quad (0 \leqq k \leqq 2p+1) \, .$$

[44] Il faut tenir compte de ce que $\Gamma^{n-p-1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_k) = \pi_k^* \, \Gamma^{n-p-1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{k+1})$ et pareillement dans ce qui suit.

Or l'affinement $\mathfrak{U}_{2p+1}$ de $\mathfrak{U}_{2p}$ était (v. 33) normal par rapport aux cycles dans $\overline{P_1^0(\sigma_i^0)} - P_2^0(\sigma_i^0)$; donc $\Gamma^{n-p-1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p})$ est un $(n-p-1, \mathfrak{U}_{2p})$-cycle *essentiel* dans $\overline{P_1^0(\sigma_i^0)} - P_2^0(\sigma_i^0)$. D'après la définition du réseau gén. $\mathfrak{P}_3^0$ (n° 29) et celle de son sommet $P_3^0(\sigma_i^0)$ (n° 30) il en résulte l'existence d'une $(n-p, \mathfrak{U}_{2p})$-chaîne $D_i^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p})$ dans $\overline{P^0(\sigma_i^0)} - P_3^0(\sigma_i^0)$ telle que $C^{n-p}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p}) - D_i^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p})$ est un $(n-p, \mathfrak{U}_{2p})$-cycle, situé naturellement dans $\overline{P^0(\sigma_i^0)}$. L'affinement $\mathfrak{U}_{2p}$ de $\mathfrak{U}_{2p-1}$ étant (n° 33) normal par rapport aux cycles dans $\overline{P^0(\sigma_i^0)}$, on voit que $C^{n-p}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p-1}) - D^{n-p}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p-1})$ est un $(n-p, \mathfrak{U}_{2p-1})$-cycle essentiel dans $\overline{P^0(\sigma_i^0)}$. D'après la définition du réseau gén. $\mathfrak{P}^0$ (n° 29) et celle de son sommet $P^0(\sigma_i^0)$ (n° 30) il en résulte l'existence d'une $(n-p+1, \mathfrak{U}_{2p-1})$-chaîne $L^{n-p+1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p-1})$ dans $\overline{Q^0(\sigma_i^0)}$ telle que

$$(*) \qquad L^{n-p+1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p-1}) \to C^{n-p}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p-1}) - D_i^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1}).$$

On peut arriver au même résultat dans le cas où $p = n$: D'après la définition du réseau gén. $\mathfrak{P}_1^0$, on a $P^0(\sigma_i^0) - P_1^0(\sigma_i^0) \neq 0$ et par suite $\overline{P^0(\sigma_i^0)} - P_3^0(\sigma_i^0) \neq 0$. Soit donc a_i un point de $\overline{P^0(\sigma_i^0)} - P_3^0(\sigma_i^0)$ et soit U_i un sommet de $\mathfrak{U}_{2p}$ tel que $a_i \in U_i$. Déterminons $r_i \in \mathfrak{R}$ de manière que $I[C^0(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p}) - D_i^0(\mathfrak{U}_{2p})] = 0$ (v. [38]), où $D_i^0(\mathfrak{U}_{2p}) = r_i U_i$ est une $(0, \mathfrak{U}_{2p})$-chaîne dans $\overline{P^0(\sigma_i^0)} - P_3^0(\sigma_i^0)$. D'après la définition de $\mathfrak{P}^0$ et de son sommet $P^0(\sigma_i^0)$ il existe une $(1, \mathfrak{U}_{2p-1})$-chaîne $L^1(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p-1})$ dans $\overline{Q^0(\sigma_i^0)}$ telle qu'on ait la relation $(*)$ avec $p = n$. Dorénavant, nous pouvons traiter simultanément toutes les valeurs de p $(1 \leqq p \leqq n)$.

Chaque sommet de $\mathfrak{U}$ qui rencontre $\overline{P_4^0(\sigma_i^0)}$ étant (v. 32) contenu dans $P_3^0(\sigma_i^0)$, il résulte de l'inclusion $D_i^{n-p}(\mathfrak{U}) \subset \overline{P^0(\sigma_i^0)} - P_3^0(\sigma_i^0)$ qu'aucun simplexe de $D_i^{n-p}(\mathfrak{U})$ n'est situé dans $\overline{P_4^0(\sigma_i^0)}$; pareillement on voit qu'aucun simplexe de $C^{n-p}(\mathfrak{U}) - C^{n-p}(\sigma_i^0, \mathfrak{U})$ n'est situé dans $\overline{P_4^0(\sigma_i^0)}$. Par suite aucun simplexe de la chaîne

$$(*) \qquad F\, L^{n-p+1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_k) - C^{n-p}(\mathfrak{U}_k) \quad (0 \leqq k \leqq 2p-1)$$

n'est situé dans $\overline{P_4^0(\sigma_i^0)}$.

34.2. Supposons généralement que, pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq p-2)$, on ait déjà attaché à chaque σ_i^h $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ une $(n-p+h+1, \mathfrak{U}_{2p-2h-1})$-chaîne dans $\overline{Q^h(\sigma_i^h)}$, soit $L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-1})$, de manière que, pour $1 \leqq i \leqq \alpha_h$, aucun simplexe de la chaîne [45]

$$(**) \quad F\, L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_k) - \sum_{j=1}^{\alpha_{h-1}} \eta_{ij}^{h-1}\, L^{n-p+h}(\sigma_j^{h-1}, \mathfrak{U}_k) \quad (0 \leqq k \leqq 2p-2h-1)$$

ne soit situé dans $\overline{P_4^h(\sigma_i^h)}$. Il s'agit d'attacher à chaque σ_i^{h+1} $(1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1})$ une $(n-p+h+2, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$-chaîne $L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$ dans $\overline{Q^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$ de

[45] Pour $h = 0$ on doit remplacer la chaîne (**) par (*).

manière qu'aucun simplexe de la chaîne

$$F\, L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_k) - \sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h\, L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_k) \quad (0 \leqq k \leqq 2p - 2h - 3)$$

ne soit situé dans $\overline{P_4^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$. Or la chaîne

$$M^{n-p+h+1}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-1}) = \sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h\, L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-1})$$

se trouve située (v. 30) dans

$$\sum_{\substack{\eta^h{}_{ij} \neq 0 \\ 1 \leqq j \leqq \alpha_h}} \overline{Q^h(\sigma_j^h)} \subset \overline{P_1^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}\,.$$

En outre, comme $F\sigma_i^{h+1} \to 0$, d'où $\sum_{j=1}^{\alpha_h} \sum_{k=1}^{\alpha_{h-1}} \eta_{ij}^h \eta_{jk}^{h-1} = 0$, aucun simplexe de la chaîne

$$F\, M^{n-p+h+1}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-1}) =$$
$$= \sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h [F\, L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-1}) - \sum_{k=1}^{\alpha_{h-1}} \eta_{jk}^{h-1}\, L^{n-p+h}(\sigma_k^{h-1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-1})]$$

n'est situé (v. 30) dans

$$\prod_{\substack{\eta^h{}_{ij} \neq 0 \\ 1 \leqq j \leqq \alpha_h}} \overline{P_4^h(\sigma_j^h)} \supset P_2^{h+1}(\sigma_i^{h+1})\,^{46}\,.$$

Donc le cycle $F\, M^{n-p+h+1}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-1})$ est situé dans $\overline{P_1^{h+1}(\sigma_i^{h+1})} - P_2^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$. Par suite (v. 33) $F\, M^{n-p+h+1}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-2})$ est un $(n - p + h, \mathfrak{U}_{2p-2h-2})$-cycle *essentiel* dans $\overline{P_1^{h+1}(\sigma_i^{h+1})} - P_2^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$; d'après la définition du réseau gén. $\mathfrak{P}_3^{h+1}$ (n° 29) et celle de son sommet P_3^{h+1} (n° 30) il existe donc une $(n - p + h + 1, \mathfrak{U}_{2p-2h-2})$-chaîne dans $\overline{P^{h+1}(\sigma_i^{h+1})} - P_3^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$, soit $N^{n-p+h+1}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-2})$, telle que

$$M^{n-p+h+1}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-2}) - N^{n-p+h+1}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-2})$$

soit un $(n - p + h + 1, \mathfrak{U}_{2p-2h-2})$-cycle, situé naturellement dans $\overline{P^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$.

[46] Pour $h = 0$ on a $\sum_{j=1}^{\alpha_0} \eta_{ij}^0 = 0$, d'où

$$FM^{n-p+1}(\sigma_i^1, \mathfrak{U}_{2p-1}) = \sum_{j=1}^{\alpha_0} \eta_{ij}^0 [FL^{n-p+1}(\sigma_j^0, \mathfrak{U}_{2p-1}) - C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1})]\,,$$

de manière que, ici encore, aucun simplexe de $FM^{n-p+1}(\sigma_i^1, \mathfrak{U}_{2p-1})$ n'est situé dans

$$\prod_{\substack{\eta^0{}_{ij} \neq 0 \\ 1 \leqq j \leqq \alpha_0}} \overline{P_4^0(\sigma_j^0)} \supset P_2^1(\sigma_i^1)\,.$$

Par suite (v. 33)

$$(*) \qquad M^{n-p+h+1}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-3}) - N^{n-p+h+1}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$$

est un $(n - p + h + 1, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$-cycle essentiel dans $\overline{P^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$. Il existe donc une $(n - p + h + 2, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$-chaîne dans $\overline{Q^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$, soit $L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$, dont $(*)$ est la frontière. Comme le noyau de chaque simplexe de la chaîne $N^{n-p+h+1}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$ rencontre $\overline{P^{h+1}(\sigma_i^{h+1})} - P_3^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$ et comme (v. 32) chaque sommet de $\mathfrak{U}$ rencontrant $\overline{P_4^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$ fait partie de $P_3^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$, on voit qu'aucun simplexe de la chaîne $N^{n-p+h+1}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_k)$ $(0 \leqq k \leqq 2p - 2h - 3)$ n'est situé dans $\overline{P_4^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$. Or

$$-N^{n-p+h+1}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_k) = F\, L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_k) - \sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h\, L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_k)$$
$$(0 \leqq k \leqq 2p - 2h - 3)\,.$$

34.3. En procédant de cette manière, on finit par attacher à chaque σ_i^{p-1} $(1 \leqq i \leqq \leqq \alpha_{p-1})$ une $(n, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $L^n(\sigma_i^{p-1}, \mathfrak{U}_1)$ dans $\overline{Q^{p-1}(\sigma_i^{p-1})}$ de manière qu'aucun simplexe de la chaîne[47]

$$F\, L^n(\sigma_i^{p-1}, \mathfrak{U}_k) - \sum_{j=1}^{\alpha_{p-2}} \eta_{ij}^{p-2}\, L^{n-1}(\sigma_j^{p-2}, \mathfrak{U}_k) \quad (k = 0 \text{ ou } 1)$$

ne soit situé dans $\overline{P_4^{p-1}(\sigma_i^{p-1})}$. Alors la chaîne

$$M^n(\sigma_i^p, \mathfrak{U}_1) = \sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{ij}^{p-1}\, L^n(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}_1)$$

est située (v. 30) dans

$$\sum_{\substack{\eta^{p-1}{}_{ij} \neq 0 \\ 1 \leqq j \leqq \alpha_{p-1}}} \overline{Q^{p-1}(\sigma_j^{p-1})} \subset \overline{P_1^p(\sigma_i^p)}\,.$$

En outre aucun simplexe de la chaîne

$$F\, M^n(\sigma_i^p, \mathfrak{U}_1) = \sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{ij}^{p-1} [F\, L^n(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}_1) - \sum_{k=1}^{\alpha_{p-2}} \eta_{jk}^{p-2}\, L^{n-1}(\sigma_k^{p-2}, \mathfrak{U}_1)]$$

n'est situé (v. 30) dans

$$\prod_{\substack{\eta^{p-1}{}_{ij} \neq 0 \\ 1 \leqq j \leqq \alpha_{p-1}}} \overline{P_4^{p-1}(\sigma_j^{p-1})} \supset P_2^p(\sigma_i^p)\,.$$

Donc $M^n(\sigma_i^p, \mathfrak{U}_1)$ est un $(n, \mathfrak{U}_1)$-cycle mod $(\overline{P_1^p(\sigma_i^p)} - P_2^p(\sigma_i^p))$ dans $\overline{P_1^p(\sigma_i^p)}$.

[47] Dans le cas $p = 1$ on doit remplacer $\sum_{j=1}^{\alpha_{p-2}} \eta_{ij}^{p-2}\, L^{n-1}(\sigma_j^{p-2}, \mathfrak{U}_k)$ par $C^{n-p}(\mathfrak{U}_k)$.

34.4. Si l'indice i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ est tel que $A\,\overline{P_1^0(\sigma_i^0)} = 0$, on voit sans peine (v. 32) $C^{n-p}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p-1}) = 0$; on peut dans ce cas supposer que $L^{n-p+1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p-1}) = 0$. Plus généralement, si l'indice i $(1 \leqq i \leqq \alpha_h, 0 \leqq h \leqq p-1)$ est tel que $A\,\overline{P_1^0(\sigma_j^0)} = 0$ pour chaque sommet σ_j^0 de σ_i^h, on peut supposer que $L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-1}) = 0$. On n'a donc $L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-1}) \neq 0$ que dans le cas où $A\,\overline{P_1^0(\sigma_j^0)} \neq 0$ pour un sommet σ_j^0 de σ_i^h. Or la chaîne $L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-1})$ est située dans $\overline{Q^h(\sigma_i^h)}$. Les réseaux gén. $\mathfrak{P}_1^0$ et $\mathfrak{Q}^h$ étant (v. 29) des affinements de $\mathfrak{P}_1^p$, il existe deux sommets P', P'' de $\mathfrak{P}_1^p$ tels que $P_1^0(\sigma_j^0) \subset P'$, $Q^h(\sigma_i^h) \subset P''$. Or (v. 29) $P_1^0(\sigma_j^0)\,Q^h(\sigma_i^h) \supset \sigma_j^0 \neq 0$, d'où $P'P'' \neq 0$. Comme $A\,\overline{P_1^0(\sigma_j^0)} \neq 0$, $\overline{P_1^0(\sigma_j^0)} \subset \bar{P}'$, on a $A\bar{P}' \neq 0$, $P'P'' \neq 0$ et par suite $Q^h(\sigma_i^h) \subset \bar{P}'' \subset \bar{B}$ d'après la définition de B. Or ceci signifie que toutes les chaînes $L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-1})$ $(0 \leqq h \leqq p-1,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ sont situées dans $\bar{B}$.

35. Nous allons modifier un nombre fini de fois le cycle $C^{n-p}(\mathfrak{U}_1)$ ainsi que les chaînes $L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1)$ de manière que, $*C$ et $*L$ étant les éléments modifiés, on ait les propriétés suivantes: 1° chaque simplexe de chaque différence $*C^{n-p}(\mathfrak{U}_1) - C^{n-p}(\mathfrak{U}_1)$ ou $*L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1) - L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1)$ est une face d'un simplexe de $C^{n-p}(\mathfrak{U}_1)$ ou de $*L^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \mathfrak{U}_1)$ de manière que les chaînes modifiées restent situées dans $\bar{B}$; 2° les relations 1°, 2°, 3° du n° 34 restent vraies pour les chaînes modifiées $*C$, $*L$; 3° $*C^{n-p}(\mathfrak{U}_1) \sim C^{n-p}(\mathfrak{U}_1)$ dans $\bar{B}$.

Toutes ces modifications ayant lieu dans le réseau commode fixe $\mathfrak{U}_1$, nous omettrons $\mathfrak{U}_1$ dans l'écriture.

Pour $0 \leqq q \leqq p-1$, $1 \leqq r \leqq \alpha_q$ nous dirons *qu'une $\mathfrak{U}_1$-chaîne ne contient presque aucun simplexe d'espèce σ_r^q si chaque simplexe τ d'espèce σ_r^q de cette chaîne est une face d'un $\mathfrak{U}_1$-simplexe d'espèce σ^{-1}.*

Ceci posé, le résultat de toutes ces modifications sera que pour $0 \leqq h \leqq p-1$, $0 \leqq k \leqq h$, $0 \leqq q \leqq h$ les chaînes *modifiées* possèderons la propriété $\Theta(k, q, h)$ suivante: Si les simplexes σ_j^k, σ_r^q $(1 \leqq j \leqq \alpha_k, 1 \leqq r \leqq \alpha_q)$ sont des faces du simplexe σ_i^h, alors la chaîne $L^{n-p+h+1}(\sigma_j^k)$ (modifiée) ne contiendra presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^q.

Dans le n° 36, nous donnerons un lemme. Dans le n° 37, nous réaliserons la propriété $\Theta(0, 0, 0)$. Dans le n° 38, nous supposerons que, pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq p-2)$, on ait déjà réalisé les propriétés $\Theta(k, q, g)$ pour $0 \leqq q \leqq h$ et nous en déduirons qu'on peut réaliser aussi la propriété $\Theta(k, 0, h+1)$. Dans le n° 39, nous supposerons que pour $0 \leqq h \leqq p-2$, $0 \leqq Q \leqq h$, on ait déjà réalisé les propriétés $\Theta(k, q, g)$ $(0 \leqq g \leqq h)$ ainsi que $\Theta(k, q, h+1)$ $(0 \leqq q \leqq Q)$ et nous en déduirons qu'on peut réaliser aussi la propriété $\Theta(h+1, Q+1, h+1)$. Dans le n° 40, nous supposerons que, pour $0 \leqq h \leqq p-2$, $0 \leqq Q \leqq h$, $h - Q \leqq K \leqq h$, on ait déjà réalisé les propriétés $\Theta(k, q, g)$ $(0 \leqq g \leqq h)$, $\Theta(k, q, h+1)$ $(0 \leqq q \leqq Q)$, $\Theta(k, Q+1, h+1)$ $(K+1 \leqq k \leqq h+1)$ et nous en déduirons qu'on peut réaliser aussi la propriété $\Theta(K, Q+1, h+1)$. Dans le n° 41, nous supposerons que, pour $0 \leqq h \leqq p-2$, $0 \leqq Q \leqq h$, on ait déjà réalisé les propriétés $\Theta(k, q, g)$ $(0 \leqq g \leqq h)$, $\Theta(k, q, h+1)$ $(0 \leqq q \leqq Q)$, $\Theta(k, Q+1, h+1)$ $(h - Q \leqq k \leqq h+1)$ et nous y démontrerons que les propriétés $\Theta(k, Q+1, h+1)$ $(0 \leqq k \leqq h - Q - 1)$ se trouvent alors aussi réalisées.

Le résultat de toutes ces modifications sera évidemment qu'on peut réaliser la propriété $\Theta(k, q, h)$ pour $0 \leqq h \leqq p-1$ ce qui était notre but.

36. **Lemme.** Soit $0 \leqq h \leqq p-1$, $0 \leqq k \leqq h$, $0 \leqq q \leqq h$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$, $1 \leqq j \leqq \alpha_k$, $1 \leqq r \leqq \alpha_q$. Supposons que σ_j^k et σ_r^q soient des faces de σ_i^h. Soit τ un $\mathfrak{U}_1$-simplexe d'espèce σ_r^q. Alors chaque sommet de τ est un sous-ensemble de $P_4^k(\sigma_j^k)$.

Démonstration. Soit τ^0 un sommet de τ. D'après 8.3 il en résulte que $\tau^0\ T(\sigma_r^q) \neq 0$. Le réseau $\mathfrak{U}_1$ étant un affinement de $\mathfrak{U}$, il en résulte (v. 32) que $\tau^0 \subset P_4^k(\sigma_j^k)$.

37. Pour $1 \leqq \nu \leqq \alpha_0$, soit $E^{n-p+1}(\sigma_\nu^0)$ la partie de la chaîne $L^{n-p+1}(\sigma_\nu^0)$ dont les simplexes sont d'espèce σ_ν^0 (v. 8.3). Posons

$$*C^{n-p} = C^{n-p} - \sum_{\nu=1}^{\alpha_0} F\, E^{n-p+1}(\sigma_\nu^0)\,,$$

$$*L^{n-p+1}(\sigma_i^0) = L^{n-p+1}(\sigma_i^0) - \sum_{\nu=1}^{\alpha_0} E^{n-p+1}(\sigma_\nu^0)\,,$$

$$*L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h) = L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h) \quad \text{pour } 1 \leqq h \leqq p-1\,.$$

Les propriétés 1°, 2°, 3° du n° 35 sont évidentes. On voit immédiatement que la chaîne $*L^{n-p+1}(\sigma_i^0)$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ ne contient aucun simplexe d'espèce σ_i^0, donc qu'après notre modification on a la propriété $\Theta(0, 0, 0)$.

38. Soit $0 \leqq h \leqq p-2$ et supposons réalisée la propriété $\Theta(k, q, g)$ pour $0 \leqq g \leqq h$. Soit $1 \leqq \mu \leqq \alpha_0$, $1 \leqq \nu \leqq \alpha_{h+1}$. Lorsque σ_μ^0 n'est pas un sommet de σ_ν^{h+1}, posons $E^{n-p+h+2}(\sigma_\mu^0, \sigma_\nu^{h+1}) = 0$; dans le cas contraire soit $E^{n-p+h+2}(\sigma_\mu^0, \sigma_\nu^{h+1})$ la partie de $L^{n-p+h+2}(\sigma_\nu^{h+1})$ dont les simplexes sont d'espèce σ_μ^0.[48] Pour $1 \leqq j \leqq \alpha_h$, soit

$$D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h) = \sum_\mu E^{n-p+h+2}(\sigma_\mu^0, \sigma_\mu^0\sigma_j^h)\,,$$

μ parcourant toutes les valeurs $(1 \leqq \mu \leqq \alpha_0)$ telles que $\sigma_\mu^0\sigma_j^h$[49] soit un $(h+1, 3)$-simplexe. Posons

$$*C^{n-p} = C^{n-p}\,, \quad *L^{n-p+k+1}(\sigma_i^k) = L^{n-p+k+1}(\sigma_i^k) \quad \text{pour} \quad k \neq h, h+1\,;$$

$$*L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h) = L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h) - F\, D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h)\,,$$

$$*L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}) = L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}) - \sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h\, D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h)\,.$$

On voit sans peine que les propriétés 1°, 2°, 3° du n° 35 sont vérifiées.

[48] Si on change l'orientation de σ_ν^{h+1}, la chaîne $E^{n-p+h+2}(\sigma_\mu^0, \sigma_\nu^{h+1})$ se multiplie par -1 (v. la remarque à la fin du n° 34).

[49] Si l'on a (orientation comprise) $\sigma_j^h = (\sigma_{t_0}^0, \sigma_{t_1}^0, \ldots, \sigma_{t_j}^0)$, on a par définition (orientation comprise) $\sigma_\mu^0\sigma_j^h = (\sigma_\mu^0, \sigma_{t_0}^0, \sigma_{t_1}^0, \ldots, \sigma_{t_j}^0)$. La notation analogue sera employée maintes fois dans ce qui suit.

Il s'agit de voir que la propriété supposée $\Theta(k, q, g)$ $(0 \leqq g \leqq h)$ reste vérifiée après la modification. L'unique cas où ceci n'est pas immédiatement évident est le cas $k = g = h$. Ici il suffit de montrer que si σ_r^q est une face de σ_i^h, la chaîne

$$*L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h) - L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h) = F\ D^{n-p+h+2}(\sigma_i^h)$$

ne contient aucun simplexe d'espèce σ_r^q. Or chaque simplexe de la chaîne $D^{n-p+h+2}(\sigma_i^h)$ est d'espèce σ_μ^0, l'indice μ étant tel que $\sigma_\mu^0\sigma_i^h$ soit un $(h+1, \mathfrak{Z})$-simplexe, de manière que σ_μ^0 n'est pas un sommet de σ_i^h. Donc d'après 8.34, aucun simplexe de $F\ D^{n-p+h+2}(\sigma_i^h)$ ne peut être d'espèce σ_r^q.

On doit enfin démontrer (v. 35) que la propriété $\Theta(k, 0, h+1)$ se trouve réalisée après la modification. Supposons donc que les indices k, j, r, i soient tels que σ_j^k soit une face et que σ_r^0 soit un sommet de σ_i^{h+1}. On doit prouver que presqu'aucun simplexe de la chaîne $*L^{n-p+k+1}(\sigma_j^k)$ n'est d'espèce σ_r^0. Il n'y a que deux cas où ceci n'est pas simplement une conséquence de la propriété $\Theta(k, 0, h)$ qui est, comme nous le savons déjà, conservée après la modification; ce sont: 1° $k = h+1, j = i$; 2° $k = h$, $\sigma_i^{h+1} = \pm\sigma_r^0\sigma_j^h$.

Premier cas. Soit j un indice tel que $\eta_{ij}^h \neq 0$, c'est-à-dire soit σ_j^h une h-face de σ_i^{h+1}. Les simplexes d'espèce σ_r^0 dans la chaîne $D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h)$ ne peuvent exister, comme nous avons vu plus haut, que dans le cas où σ_r^0 n'est pas un sommet de σ_j^h; ceci n'a lieu que pour *une* valeur de j, à savoir pour la valeur $v = j$ telle que $\sigma_i^{h+1} = \eta_{iv}^h\sigma_r^0\sigma_v^h$. Les simplexes d'espèce σ_r^0 dans $D^{n-p+h+2}(\sigma_v^h)$ sont alors évidemment les mêmes que dans la chaîne $E^{n-p+h+2}(\sigma_r^0, \sigma_r^0\sigma_v^h)$. Donc les simplexes d'espèce σ_r^0 dans la chaîne

$$L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}) - *L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}) = \sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h\ D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h)$$

sont les mêmes que dans $\eta_{iv}^h\ E^{n-p+h+2}(\sigma_r^0, \sigma_i^{h+1})$, et par suite que dans la chaîne $L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1})$, de manière que presqu'aucun simplexe de $*L^{n-p+h+2}$ n'est d'espèce σ_r^0.

Second cas. Soit $k = h$, $\sigma_i^{h+1} = \pm\sigma_r^0\sigma_v^h$, et par suite $\sigma_i^{h+1} = \eta_{iv}^h\sigma_r^0\sigma_v^h$. Il s'agit de voir que presqu'aucun simplexe de la chaîne $*L^{n-p+h+1}(\sigma_v^h)$ n'est d'espèce σ_r^0. Supposons que l'indice j parcoure toutes les valeurs $(1 \leqq j \leqq \alpha_h)$ telles que σ_j^h soit une h-face de σ_i^{h+1}. La propriété $\Theta(h, 0, h)$ étant conservée après la modification, pour $j \neq v$ la chaîne $*L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h)$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^0. Donc les simplexes d'espèce σ_r^0 sont dans la chaîne $\eta_{iv}^h\ *L^{n-p+h+1}(\sigma_v^h)$ presque les mêmes que dans la chaîne $\sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h\ *L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h)$. Or nous savons déjà que presqu'aucun simplexe de la chaîne $*L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1})$ n'est d'espèce σ_r^0. Il en résulte sans peine (v. 8.34) que la chaîne $F\ *L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1})$ ne possède non plus presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^0. Il s'agit donc de montrer que la chaîne

$$(*) \qquad F\ *L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}) - \sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h\ *L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h)$$

ne contient aucun simplexe d'espèce σ_r^0. Or, d'après 36, chaque $\mathfrak{U}_1$-simplexe d'espèce σ_r^0 est situé dans $\overline{P_4^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$, tandis que la chaîne (*) ne contient aucun simplexe dans $\overline{P_4^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$, parce que la propriété 2° du n° 34 reste conservée après la modification.

39. Soit $0 \leqq h \leqq p - 2$, $0 \leqq Q \leqq h$. Supposons réalisées les propriétés $\Theta(k, q, g)$ $(0 \leqq g \leqq h)$ ainsi que $\Theta(k, q, h + 1)$ $(0 \leqq q \leqq Q)$.

Soit $1 \leqq \mu \leqq \alpha_{Q+1}$, $1 \leqq \nu \leqq \alpha_{h+1}$. Si le simplexe σ_μ^{Q+1} n'est pas une $(Q + 1)$-face de σ_ν^{h+1}, posons $E^{n-p+h+2}(\sigma_\mu^{Q+1}, \sigma_\nu^{h+1}) = 0$; dans le cas contraire, soit $E^{n-p+h+2} . (\sigma_\mu^{Q+1}, \sigma_\nu^{h+1})$ la partie de la chaîne $L^{n-p+h+2}(\sigma_\nu^{h+1})$ dont les simplexes sont d'espèce σ_μ^{Q+1}.[50]

On peut évidemment attacher à chaque indice μ $(1 \leqq \mu \leqq \alpha_{Q+1})$ un indice $\varphi(\mu)$ $[1 \leqq \varphi(\mu) \leqq \alpha_0]$ bien déterminé de manière que $\sigma_{\varphi(\mu)}^0$ soit pour chaque μ $(1 \leqq \mu \leqq \alpha_{Q+1})$ un sommet du simplexe σ_μ^{Q+1}.

Si les indices μ, ν, λ $(1 \leqq \mu \leqq \alpha_{Q+1}, 1 \leqq \nu \leqq \alpha_{h+1}, 1 \leqq \lambda \leqq \alpha_y)$ sont tels que 1° σ_μ^{Q+1} soit une $(Q + 1)$-face de σ_ν^{h+1}; 2° $\sigma_\nu^{h+1} = \pm \sigma_{\varphi(\mu)}^0 \sigma_\lambda^h$, posons

$$\varepsilon(\sigma_\mu^{Q+1}, \sigma_\lambda^h, \sigma_\nu^{h+1}) = \eta_{\nu\lambda}^h ;$$

dans tous les autres cas, posons

$$\varepsilon(\sigma_\mu^{Q+1}, \sigma_\lambda^h, \sigma_\nu^{h+1}) = 0 .$$

Pour $1 \leqq \lambda \leqq \alpha_h$, posons

$$D^{n-p+h+2}(\sigma_\lambda^h) = \sum_{\mu=1}^{\alpha_{Q+1}} \sum_{\nu=1}^{\alpha_{h+1}} \varepsilon(\sigma_\mu^{Q+1}, \sigma_\lambda^h, \sigma_\nu^{h+1})\, E^{n-p+h+2}(\sigma_\mu^{Q+1}, \sigma_\nu^{h+1}) .$$

Ceci étant, soit

$$*C^{n-p} = C^{n-p}, \quad *L^{n-p+k+1}(\sigma_i^k) = L^{n-p+k+1}(\sigma_i^k) \quad \text{pour} \quad k \neq h, k \neq h + 1 ;$$
$$*L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h) = L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h) - F\, D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h)$$
$$*L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}) = L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}) - \sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h\, D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h) .$$

On voit sans peine que les propriétés 1°, 2°, 3°, du n° 35 sont vérifiées.

Démontrons que les propriétés $\Theta(k, q, g)$ $(0 \leqq g \leqq h)$ restent conservées après la modification. L'unique cas à considérer est évidemment le cas $k = g = h$. Soit donc σ_r^q une q-face $(0 \leqq q \leqq h)$ du simplexe σ_j^h. Il s'agit de montrer que presqu'aucun simplexe de la chaîne

$$- *L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h) + L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h) = F\, D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h)$$

[50] Si l'on change l'orientation de σ_ν^{h+1}, la chaîne $E^{n-p+h+2}(\sigma_\mu^{Q+1}, \sigma_\nu^{h+1})$ se multiplie par -1 (v. la remarque à la fin du n° 34).

n'est d'espèce σ_r^q. On voit sans peine (v. 8.34) qu'il suffit de prouver que, si σ_r^q est une face de σ_j^h, presqu'aucun simplexe de la chaîne $D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h)$ n'est d'espèce σ_r^q. Or chaque simplexe de $D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h)$ est d'espèce σ_μ^{Q+1}, où la valeur de μ est telle que, pour une valeur convenable de ν, on ait $\varepsilon(\sigma_\mu^{Q+1}, \sigma_j^h, \sigma_\nu^{h+1}) \neq 0$. Or cette inégalité donne $\sigma_\nu^{h+1} = \pm\sigma_{\varphi(\mu)}^0\sigma_j^h$ de manière que $\sigma_{\varphi(\mu)}^0$ n'est pas un sommet de σ_j^h, tandis que c'est un sommet de σ_μ^{Q+1}; σ_μ^{Q+1} n'est donc pas une face de σ_j^h.

Il est évident que la propriété $\Theta(k, q, h+1)$ $(0 \leqq q \leqq Q)$ reste conservée après la modification, car (v. 34) presque chaque simplexe de chaque $*L - L$ est d'espèce σ_μ^l, où $l \geqq q+1$.

On doit enfin démontrer (v. 35) que la propriété $\Theta(h+1, Q+1, h+1)$ se trouve réalisée après la modification. Supposons donc que les indices i, r soient tels que σ_r^{Q+1} soit une face de σ_i^{h+1}. On doit prouver que presqu'aucun simplexe de la chaîne $*L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1})$ n'est d'espèce σ_r^{Q+1}. Supposons que l'indice j parcoure toutes les valeurs $(1 \leqq j \leqq \alpha_h)$ telles que $\eta_{ij}^h \neq 0$. Il existe une seule valeur de j, soit $j = \lambda$, telle que $\sigma_i^{h+1} = \pm\sigma_{\varphi(r)}^0\sigma_\lambda^h$. Pour $j \neq \lambda$, $\sigma_{\varphi(r)}^0$ est un sommet de σ_j^h, d'où il résulte que $\varepsilon(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_j^h, \sigma_i^{h+1}) = 0$. On en déduit sans peine que la partie de $D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h)$ dont les simplexes sont d'espèce σ_r^{Q+1}, est égale à 0 pour $j \neq \lambda$ et égale à $\eta_{i\lambda}^h E^{n-p+h+2} \,.$ $.\,(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_i^{h+1})$ pour $j = \lambda$. Donc les simplexes d'espèce σ_r^{Q+1} dans la chaîne

$$\sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h\, D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h) = L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}) - *L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1})$$

constituent la chaîne $E^{n-p+h+2}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_i^{h+1})$, qui était égale à la partie de $L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1})$ dont les simplexes sont d'espèce σ_r^{Q+1}. Par suite presqu'aucun simplexe de $*L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1})$ n'est d'espèce σ_r^{Q+1}.

40. Soit $0 \leqq h \leqq p-2$, $0 \leqq Q \leqq h$, $h - Q \leqq K \leqq h$. Supposons réalisées les propriétés $\Theta(k, q, g)$ $(0 \leqq g \leqq h)$, $\Theta(k, q, h+1)$ $(0 \leqq q \leqq Q)$ et $\Theta(k, Q+1, h+1)$ $(K+1 \leqq k \leqq h+1)$. Il s'agit de réaliser encore la propriété $\Theta(K, Q+1, h+1)$. Ceci sera effectué dans les n^{os} 40.1–40.5.

40.1. Choisissons les indices i et r de manière que le simplexe σ_r^{Q+1} soit une face du simplexe σ_i^{h+1}; ensuite, déterminons l'indice s de manière que l'on ait

$$\sigma_i^{h+1} = \pm\sigma_r^{Q+1}\sigma_s^{h-Q-1}\,. \tag{1}$$

Pour chaque $(K - h + Q)$-face σ_λ^{K-h+Q} du simplexe σ_r^{Q+1} soit: 1° $E_1^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q})$ la partie de la chaîne $L^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q}\sigma_s^{h-Q-1})$ [51] dont les simplexes sont d'espèce σ_r^{Q+1}; 2° $E_2^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q})$ la partie de $E_1^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q})$ dont chaque simplexe est une face d'un $\mathfrak{U}_1$-simplexe d'espèce σ^{-1}; 3° $E^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q}) = E_1^{n-p+K+1}\,.$ $.\,(\sigma_\lambda^{K-h+Q}) - E_2^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q})$.

[51] Puisque σ_λ^{K-h+Q} est une $(K-h+Q)$-face de σ_r^{Q+1}, $\sigma_\lambda^{K-h+Q}\sigma_s^{h-Q-1}$ est, en vertu de (1), une K-face de σ_i^{h+1}.

Soit $\sigma_\mu^{K-h+Q+1}$ une $(K - h + Q + 1)$-face de σ_r^{Q+1} de manière que

$$\sigma_\nu^{K+1} = \varepsilon\sigma_\mu^{K-h+Q+1}\sigma_s^{h-Q-1} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

est une $(K + 1)$-face de σ_i^{h+1}. Nous allons démontrer que

$$(2) \qquad \sum_\lambda \eta_{\mu\lambda}^{K-h+Q} E^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q}) = 0\,.$$

La relation (2) dit que presqu'aucun simplexe de la chaîne

$$(3) \qquad \sum_\lambda \eta_{\mu\lambda}^{K-h+Q} L^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q}\sigma_s^{h-Q-1})$$

n'est d'espèce σ_r^{Q+1}.

Lorsque σ_λ^{K-h+Q} parcourt toutes les $(K - h + Q)$-faces de $\sigma_\mu^{K-h+Q+1}$, on peut attacher à chaque λ une valeur de j de manière que

$$\sigma_j^K = \pm\sigma_\lambda^{K-h+Q}\sigma_s^{h-Q-1}$$

soit une K-face de σ_ν^{K+1} telle que σ_s^{h-Q-1} en soit une face; et on voit sans peine que le terme correspondant de la somme (3) est égal à $\varepsilon\eta_{\nu j}^K L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$. Lorsque $Q < h$, il y a encore d'autres K-faces σ_j^K de σ_ν^{K+1} qui ne correspondent à aucune valeur de λ; ce sont les faces σ_j^K de σ_ν^{K+1} telles que σ_s^{h-Q-1} n'est pas une face de σ_j^K; à chaque telle valeur de j correspond, comme on le voit sans peine, une valeur de v telle que σ_j^K et σ_r^{Q+1} soient des faces de σ_v^h (tandis que σ_v^h est une face de σ_i^{h+1}); la propriété $\Theta(K, Q + 1, h)$ étant supposée vérifiée, il en résulte que, dans le cas actuel, la chaîne $L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^{Q+1}.

Donc, les simplexes d'espèce σ_r^{Q+1} dans la chaîne (3) sont presque les mêmes que dans la chaîne

$$(4) \qquad \sum_{j=1}^{\alpha_K} \eta_{\nu j}^K L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)\,;$$

on doit donc prouver que presqu'aucun simplexe de (4) n'est d'espèce σ_r^{Q+1}. Or σ_r^{Q+1} et σ_ν^{K+1} étant des faces de σ_i^{h+1}, il résulte de 36 que chaque simplexe d'espèce σ_r^{Q+1} est situé dans $\overline{P_4^{K+1}(\sigma_\nu^{K+1})}$. La propriété 2° du n° 34 étant vraie (v. n° 35, 2°), il en résulte qu'aucun simplexe de la chaîne

$$F\,L^{n-p+K+2}(\sigma_\nu^{K+1}) - \sum_{j=1}^{\alpha_K} \eta_{\nu j}^K L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$$

n'est d'espèce σ_r^{Q+1}. Donc il suffit de montrer que presqu'aucun simplexe de la chaîne

$$F\,L^{n-p+K+2}(\sigma_\nu^{K+1})$$

n'est d'espèce σ_r^{Q+1}. A cet effet, d'après 8.34, il suffit de prouver que, σ_u^q étant une face de σ_r^{Q+1}, la chaîne $L^{n-p+K+2}(\sigma_\nu^{K+1})$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce

σ_u^q. Or ceci est une conséquence de la propriété $\Theta(K+1, q, h+1)\,(0 \leqq q \leqq Q+1)$, réalisée par hypothèse.

40.2. Considérons le cas $K > h - Q$, d'où $K \geqq 1$. Continuons à supposer qu'on ait choisi les indices r et i de manière que σ_r^{Q+1} soit une face de σ_i^{h+1}. Si l'on attache à chaque $(K-h+Q)$-face σ_λ^{K-h+Q} du simplexe σ_r^{Q+1} un entier a_λ, on obtient une $(K-h+Q)$-sous-chaîne de σ_r^{Q+1}:

$$\tau^{K-h+Q} = \sum_\lambda a_\lambda \sigma_\lambda^{K-h+Q} .$$

Posons

$$E^{n-p+K+1}(\tau^{K-h+Q}) = \sum_\lambda a_\lambda\, E^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q}) , \tag{5}$$

les chaînes à droite ayant été définies dans 40.1; (5) est une $(n-p+K+1, \mathfrak{U}_1)$-chaîne dont tous les simplexes sont d'espèce σ_r^{Q+1}.

En particulier, si τ^{K-h+Q} est la frontière d'une $(K-h+Q+1)$-face $\sigma_\mu^{K-h+Q+1}$ de σ_r^{Q+1}, la relation (1) du n° 40.1 dit que

$$E^{n-p+K+1}(\tau^{K-h+Q}) = 0 . \tag{6}$$

Or on sait que, si $\tau^{K-h+Q} \to 0$, il existe des entiers b_μ tels que $\tau^{K-h+Q} = F\sum b_\mu \sigma_\mu^{K-h+Q+1}$; donc $\tau^{K-h+Q} \to 0$ entraîne (6). On en déduit sans peine que la chaîne (5) dépend seulement de la frontière $F\tau^{K-h+Q}$ de la chaîne τ^{K-h+Q}. On peut donc poser

$$E^{n-p+K+1}(\tau^{K-h+Q}) = \Phi^{n-p+K+1}(F\tau^{K-h+Q}) . \tag{7}$$

Si $\tau^{K-h+Q-1}$ est un $(K-h+Q-1)$-sous-cycle[52] arbitraire de σ_r^{Q+1}, il existe, comme on sait, une $(K-h+Q)$-sous-chaîne de σ_r^{Q+1} τ^{K-h+Q} dont la frontière est égale à $\tau^{K-h+Q+1}$. La relation (7) définit donc (comme on voit sans peine, sans ambiguité) la $(n-p+K+1, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $\Phi^{n-p+K+1}(\tau^{K-h+Q-1})$ pour chaque $(K-h+Q-1)$-sous-cycle de σ_r^{Q+1}.

Or soit $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a$ une base (lin. indépendante) de toutes les $(K-h+Q-1)$-sous-chaînes de σ_r^{Q+1} sousmise à la seule condition que les premiers b élements de cette base constituent une base de toutes les $(K-h+Q-1)$-sous-cycles de σ_r^{Q+1}. A chaque $(K-h+Q-1)$-sous-chaîne $\tau^{K-h+Q-1}$ de σ_r^{Q+1} on peut attacher, et d'une seule manière, des entiers $c_1, c_2, \ldots, c_a$ tels que

$$\tau^{K-h+Q-1} = \sum_{t=1}^{a} c_t \tau_t .$$

[52] Lorsque $K-h+Q-1=0$, on doit convenir d'entendre par un 0-sous-cycle de σ_r^{Q+1} seulement une 0-sous-chaîne de σ_r^{Q+1} dont la somme des coefficients égale à zéro.

On définit alors

$$\Phi^{n-p+K+1}(\tau^{K-h+Q-1}) = \sum_{t=1}^{b} c_t \, \Phi^{n-p+K+1}(\tau_t), \tag{8}$$

les valeurs de Φ à droite étant déterminées par (7). Dans le cas particulier où $\tau^{K-h+Q-1}$ est un cycle, le premier membre de (8) était déjà défini; or on voit sans peine que l'ancienne définition est dans le cas actuel d'accord avec (8).

40.3. Nous sommes en état d'atteindre, dans le cas où $K > h - Q$, le but proposé dans 40. Si les indices i, r, u sont tels que 1° σ_r^{Q+1} est une face de σ_i^{h+1} de manière qu'il existe une valeur de s telle que $\sigma_i^{h+1} = \pm\sigma_r^{Q+1}\sigma_s^{h-Q-1}$; 2° σ_u^{K-1} est une face de σ_i^{h+1}; 3° chaque sommet de σ_i^{h+1} est un sommet de σ_r^{Q+1}ou de σ_u^{K-1}, posons

$$H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_i^{h+1}) = \varepsilon \, \Phi^{n-p+K+1}(\sigma_t^{K-h+Q-1}) \tag{9}$$

l'indice t et le signe $\varepsilon = \pm 1$ étant tels que

$$\sigma_u^{K-1} = \varepsilon \sigma_t^{K-h+Q-1} \sigma_s^{h-Q-1} ;$$

quant à la valeur de la chaîne Φ, elle est déterminée par l'équation (8) du n° 40.2. Si les conditions 1°, 2°, 3° ne sont pas toutes vérifiées, posons

$$H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_i^{h+1}) = 0 .$$

Posons encore

$$D^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1}) = \sum_{r=1}^{\alpha_{Q+1}} \sum_{i=1}^{\alpha_{h+1}} H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_i^{h+1}) .$$

Ceci posé, soit

$$*C^{n-p} = C^{n-p}, \quad *L^{n-p+k+1}(\sigma_v^k) = L^{n-p+k+1}(\sigma_v^k) \quad \text{pour} \quad k \neq K-1, k \neq K ,$$
$$*L^{n-p+K}(\sigma_u^{K-1}) = L^{n-p+K}(\sigma_u^{K-1}) - F\, D^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1}) ,$$
$$*L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) = L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) - \sum_{u=1}^{\alpha_{K-1}} \eta_{ju}^{K-1} \, D^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1}) .$$

On voit sans peine que les propriétés 1°, 2°, 3° du n° 35 sont vérifiées.

Démontrons que les propriétés $\Theta(k, q, g)$ $(0 \leqq g \leqq h)$ restent conservées après la modification. Deux cas seulement exigent une considération: 1° $k = K, q = Q + 1$; 2° $k = K - 1$, $q \geqq Q + 1$ (v. 8.34).

Supposons donc *en premier lieu* que les indices g, j, r, t soient tels que σ_j^K et σ_r^{Q+1} soient des faces de σ_t^g $(0 \leqq g \leqq h)$. On doit prouver que la chaîne

$$L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) - *L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) = \sum_{u=1}^{\alpha_{K-1}} \eta_{ju}^{K-1} \, D^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1})$$

ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^{Q+1}. Dans le cas contraire il existerait des valeurs des indices u et i telles que 1° σ_u^{K-1} est une face de σ_j^K; 2° $H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_i^{h+1}) \neq 0$. Or ceci entraînerait que chaque sommet de σ_i^{h+1} serait un sommet de σ_r^{Q+1} ou de σ_u^{K-1}, donc de σ_r^{Q+1} ou de σ_j^K, donc de σ_t^g, ce qui est impossible, car $g < h + 1$.

En second lieu, supposons que les indices q, g, u, v, t soient tels que σ_u^{K-1} et σ_v^q $(q \geqq Q + 1)$ soient des faces de σ_t^g $(0 \leqq g \leqq h)$ .On doit prouver que la chaîne

$$L^{n-p+K}(\sigma_u^{K-1}) - {}^*L^{n-p+K}(\sigma_u^{K-1}) = F\, D^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1})$$

ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_v^q. Dans le cas contraire, il existerait une valeur de r telle que la chaîne $D^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1})$ contiendrait un simplexe d'espèce σ_r^{Q+1}, où σ_r^{Q+1} est une face de σ_v^q. Comme plus haut, on en déduirait l'existence d'un indice i tel que chaque sommet σ_i^{h+1} serait un sommet de σ_r^{Q+1} ou de σ_u^{K-1}, donc de σ_t^g, ce qui est impossible, car $g < h + 1$.

Il est évident (v. 8.34) que les propriétés $\Theta(k, q, h + 1)$ $(0 \leqq q \leqq Q)$ restent conservées après la modification. De même il est évident que les propriétés $\Theta(k, Q + 1, h + 1)$ $(K + 1 \leqq k \leqq h + 1)$ restent aussi conservées.

Il ne s'agit donc que de prouver que le propriété $\Theta(K, Q + 1, h + 1)$ se trouve réalisée après la modification. Supposons donc que les indices j, r, i soient tels que σ_j^K et σ_r^{Q+1} soient des faces de σ_i^{h+1}. On doit démontrer que presqu'aucun simplexe de la chaîne ${}^*L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$ n'est d'espèce σ_r^{Q+1}. Ceci est évident dans le cas où σ_j^K et σ_r^{Q+1} sont des faces d'une h-face de σ_i^{h+1}, car nous savons que la propriété $\Theta(K, Q + 1, h)$ reste conservée après la modification. Supposons donc que chaque sommet de σ_i^{h+1} soit un sommet de σ_j^K ou de σ_r^{Q+1}.

Supposons que l'indice u parcoure toutes les valeurs telles que σ_u^{K-1} soit une $(K - 1)$-face de σ_j^K. Les simplexes d'espèce σ_r^{Q+1} dans la chaîne $D^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1})$ constituent la chaîne

$$\sum_{v=1}^{\alpha_{h+1}} H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_v^{h+1}).$$

Or pour $v \neq i$ on a

$$H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_v^{h+1}) = 0,$$

car: ou bien les simplexes σ_r^{Q+1} et σ_u^{K-1} ne sont pas tous les deux des faces de σ_v^{h+1}, ou bien ces deux simplexes sont tous les deux des faces communes de σ_v^{h+1} et de σ_i^{h+1} de manière qu'il existe un sommet de σ_v^{h+1} qui n'est sommet ni pour σ_r^{Q+1} ni pour σ_u^{K-1}. Donc les simplexes d'espèce σ_r^{Q+1} dans la chaîne $D^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1})$ constituent la chaîne

$$(*) \qquad H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_i^{h+1}).$$

Si l'indice u est tel qu'il existe un sommet de σ_s^{h-Q-1} [v. 40.1 (1)] qui ne soit pas un sommet de σ_u^{K-1}, on a de nouveau le résultat que la chaîne $(*)$ est égale à zéro. Il ne reste donc que des valeurs de u telles qu'il existe une $(K-h+Q-1)$-face $\sigma_t^{K-h+Q-1}$ de σ_u^{K-1} telle que

$$(**) \qquad \sigma_u^{K-1} = \varepsilon_t \sigma_t^{K-h+Q-1} \sigma_s^{h-Q-1} \qquad (\varepsilon_t = \pm 1)$$

et on voit que les simplexes d'espèce σ_r^{Q+1} de la chaîne

$$L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) - {}^*L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) = \sum_{u=1}^{\alpha_{K-1}} \eta_{ju}^{K-1}\, D^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1})$$

constituent la chaîne

$$(\dagger) \qquad \sum_u \eta_{ju}^{K-1}\, H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_i^{h+1}),$$

où l'indice u parcourt toutes les valeurs déterminées par $(**)$, l'indice t parcourant toutes les valeurs telles que $\eta_{\lambda t}^{K-h+Q-1} \neq 0$, où λ est déterminé par la condition

$$\sigma_j^K = \delta \sigma_\lambda^{K-h+Q} \sigma_s^{h-Q-1} \qquad (\delta = \pm 1).$$

Or pour chacune de ces valeurs de u on a [v. 40.3 (9)]

$$H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_i^{h+1}) = \varepsilon_t\, \Phi^{n-p+K+1}(\sigma_t^{K-h+Q-1})$$

ainsi que

$$\eta_{ju}^{K-1} = \delta \varepsilon_t \eta_{\lambda t}^{K-h+Q-1},$$

de manière que la chaîne $(\dagger)$ est égale [v. 40.1 et 40.2] à

$$\delta \sum_t \eta_{\lambda t}^{K-h+Q-1} \Phi(\sigma_t^{K-h+Q-1}) = \delta\, \Phi\Big(\sum_t \eta_{\lambda t}^{K-h+Q-1} \sigma_t^{K-h+Q-1}\Big)$$
$$= \delta\, \Phi(F\sigma_\lambda^{K-h+Q}) = \delta\, E^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q}).$$

Or $E^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q})$ est, abstraction faite des simplexes qui sont des faces d'un $\mathfrak{U}_1$-simplexe d'espèce σ^{-1}, cette partie de la chaîne

$$L^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q} \sigma_s^{h-Q-1}) = \delta\, L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$$

dont les simplexes sont d'espèce σ_r^{Q+1}. Il en résulte que les simplexes d'espèce σ_r^{Q+1} sont dans la chaîne

$$L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) - {}^*L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$$

presque les mêmes comme dans $L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$. Donc presqu'aucun simplexe de la chaîne ${}^*L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$ n'est d'espèce σ_r^{Q+1}.

40.4. Il reste à considérer le cas $K = h - Q$. Soit d'abord $K > 0$ ou $h > Q$. La relation (2) du n° 40.1 dit que, si σ_λ^0, σ_μ^0 sont les deux sommets d'une 1-face de σ_r^{Q+1}, on a

$$E^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^0) = E^{n-p+K+1}(\sigma_\mu^0).$$

Il en résulte que la chaîne $E^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^0)$ reste la même, si on y remplace σ_λ^0 successivement par tous les sommets de σ_r^{Q+1}.

Donc, si les indices i, r, s sont tels que

$$\sigma_i^{h+1} = \pm\sigma_r^{Q+1}\sigma_s^{K-1}, \tag{1}$$

on peut définir sans ambiguité la chaîne

$$H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_s^{K-1}, \sigma_i^{h+1})$$

égale, abstraction faite des simplexes qui sont des faces d'un $\mathfrak{U}_1$-simplexe d'espèce σ^{-1}, à la partie de la chaîne $L^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^0\sigma_s^{K-1})$ (où σ_λ^0 est un sommet quelconque de σ_r^{Q+1}) dont tous les simplexes sont d'espèce σ_r^{Q+1}. Si les indices i, r, s sont tels que la relation (1) n'est pas vraie, on pose

$$H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_s^{K-1}, \sigma_i^{h+1}) = 0\,.$$

Posons encore

$$D^{n-p+K+1}(\sigma_s^{K-1}) = \sum_{r=1}^{\alpha_{Q+1}} \sum_{i=1}^{\alpha_{h+1}} H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_s^{K-1}, \sigma_i^{h+1})\,.$$

Ceci étant, soit

$$*C^{n-p} = C^{n-p}, \quad *L^{n-p+k+1}(\sigma_i^k) = L^{n-p+k+1}(\sigma_i^k) \quad \text{pour} \quad k \neq K-1, k \neq K\,;$$

$$*L^{n-p+K}(\sigma_s^{K-1}) = L^{n-p+K}(\sigma_s^{K-1}) - F\, D^{n-p+K+1}(\sigma_s^{K-1}),$$

$$*L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) = L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) - \sum_{s=1}^{\alpha_{K-1}} \eta_{js}^{K-1}\, D^{n-p+K+1}(\sigma_s^{K-1})\,.$$

On voit sans peine que les propriétés 1°, 2°, 3° du n° 35 sont vérifiées.

On vérifie de la même façon comme dans le n° 40.3 que les propriétés $\Theta(k, q, g)$ $(0 \leqq g \leqq h)$ sont conservées après la modification. Comme au n° cité, il est évident que les propriétés $\Theta(k, q, h+1)$ $(0 \leqq q \leqq Q)$ et $\Theta(k, Q+1, h+1)$ $(K+1 \leqq k \leqq$ $\leqq h+1)$ restent aussi conservées.

On doit encore vérifier que la propriété $\Theta(K, Q+1, h+1)$ se trouve réalisée après la modification. Supposons donc que les indices j, r, i soient tels que σ_j^K et σ_r^{Q+1} soient des faces de σ_i^{h+1}. On doit démontrer que presqu'aucun simplexe de la chaîne $*L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$ n'est d'espèce σ_r^{Q+1}. Comme au n° cité, l'unique cas à considérer est celui où chaque sommet de σ_i^{h+1} est un sommet de σ_j^K ou de σ_r^{Q+1}. Or cette hypothèse entraîne, dans le cas actuel où $K = h - Q > 0$, que le simplexe σ_j^K possède une $(K-1)$-face σ_s^{K-1} telle qu'on ait la relation (1).

σ_u^{K-1} parcourant toutes les $(K-1)$-faces de σ_j^K, on voit comme au n° cité que

$$H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_v^{h+1}) = 0$$

si $v \neq i$ ou bien $v = i$ et $u \neq s$. Donc la partie de la chaîne

$$L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) - {}^*L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) = \sum_{u=1}^{\alpha_{K-1}} \eta_{ju}^{K-1} D^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1})$$

dont les simplexes sont d'espèce σ_r^{Q+1}, est presque égale à

$$(*) \qquad \eta_{js}^{K-1} H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_s^{K-1}, \sigma_i^{h+1}).$$

Or si l'on détermine le signe $\varepsilon = \pm 1$ et la valeur de l'indice λ de manière que $\sigma_j^K = \varepsilon\sigma_\lambda^0\sigma_s^{K-1}$, on a $\varepsilon = \eta_{js}^{K-1}$ et on voit que $(*)$ est presque égale à la partie de la chaîne $L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$ dont les simplexes sont d'espèce σ_r^{Q+1}. Par suite presqu'aucun simplexe de la chaîne ${}^*L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$ n'est d'espèce σ_r^{Q+1}.

40.5. On doit enfin considérer le cas où $K = 0$, $Q = h$. La relation (1) du n° 40.1 dit que la partie de la chaîne $L^{n-p+1}(\sigma_\lambda^0)$ dont les simplexes sont d'espèce σ_i^{h+1} est la même pour tous les sommets de σ_i^{h+1}; désignons la par $E^{n-p+1}(\sigma_i^{h+1})$. Posons

$$\begin{aligned}
{}^*C^{n-p} &= C^{n-p} - \sum_{i=1}^{\alpha_{h+1}} F\, E^{n-p+1}(\sigma_i^{h+1}),\\
{}^*L^{n-p+1}(\sigma_j^0) &= L^{n-p+1}(\sigma_j^0) - \sum_{i=1}^{\alpha_{h+1}} E^{n-p+1}(\sigma_i^{h+1}),\\
{}^*L^{n-p+k+1}(\sigma_\mu^k) &= L^{n-p+k+1}(\sigma_\mu^k) \quad \text{pour} \quad 1 \leqq k \leqq p-1.
\end{aligned}$$

On voit sans peine que les propriétés 1°, 2°, 3° du n° 35 sont vérifiées.

Il est évident que les propriétés $\Theta(k, q, g)$ $(0 \leqq g \leqq h)$, $\Theta(k, q, h+1)$ $(0 \leqq q \leqq h)$ et $\Theta(k, h+1, h+1)$ restent conservées après la modification et que la propriété $\Theta(0, h+1, h+1)$ se trouve réalisée après la modification.

41. Soit $0 \leqq h \leqq p-2$, $0 \leqq Q \leqq h$. Supposons qu'on ait déjà réalisé les propriétés suivantes: $\Theta(k, q, g)$ pour $0 \leqq g \leqq h$, $\Theta(k, q, h+1)$ pour $0 \leqq q \leqq Q$, $\Theta(k, Q+1, h+1)$ $(h - Q \leqq k \leqq h+1)$. On doit démontrer que les propriétés $\Theta(k, Q+1, h+1)$ $(0 \leqq k \leqq h - Q - 1)$ sont aussi réalisées. Supposons donc que les indices k, j, r, i soient tels que $0 \leqq k \leqq h - Q - 1$ (d'où $Q < h$) et que les deux simplexes σ_j^k et σ_r^{Q+1} soient des faces de σ_i^{h+1}; on doit prouver que presqu'aucun simplexe de la chaîne $L^{n-p+k+1}(\sigma_j^k)$ n'est d'espèce σ_r^{Q+1}. Ceci est évident si σ_j^k et σ_r^{Q+1} sont des faces d'une h-face de σ_i^{h+1}, car la propriété $\Theta(k, Q+1, h)$ est vérifiée. Supposons donc que chaque sommet de σ_i^{h+1} soit un sommet de σ_j^k ou de σ_r^{Q+1}. On a alors $k + Q + 1 \geqq h$; d'autre part on avait $k \leqq h - Q - 1$, de manière que $k = h - Q - 1$ et on a évidemment

$$\sigma_i^{h+1} = \pm\sigma_r^{Q+1}\sigma_j^{h-Q-1}.$$

Puisque $Q < h$, on peut distinguer deux cas: 1° $Q \leqq h-2$; 2° $Q = h-1$.

Premier cas: $Q \leqq h - 2$. Choisissons un sommet σ_λ^0 du simplexe σ_r^{Q+1}. D'après 34.2, 2° la chaîne

$$(*) \qquad F\, L^{n-p+h-Q+1}(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^{h-Q-1}) - L^{n-p+h-Q}(\sigma_j^{h-Q-1}) + \sum_{v=1}^{\alpha_{h-Q-2}} \eta_{jv}^{h-Q-2}\, L^{n-p+h-Q}(\sigma_\lambda^0 \sigma_v^{h-Q-2})$$

ne contient aucun simplexe situé dans $\overline{P_4^{h-Q}(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^{h-Q-1})}$. D'après 36, il en résulte qu'aucun simplexe de la chaîne $(*)$ n'est d'espèce σ_r^{Q+1}. Puisque notre but était de montrer que la chaîne $L^{n-p+h-Q}(\sigma_j^{h-Q-1})$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^{Q+1}, il suffit donc de prouver que ceci est vrai pour la chaîne $FL^{n-p+h-Q+1}(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^{h-Q-1})$ ainsi que pour chaque chaîne $L^{n-p+h-Q}(\sigma_\lambda^0 \sigma_v^{h-Q-2})$, où σ_v^{h-Q-2} parcourt toutes les $(h - Q - 2)$-faces de σ_j^{h-Q-1}.

Or des propriétés $\Theta(k, q, h + 1)$ $(0 \leqq q \leqq Q)$ et $\Theta(k, Q + 1, h + 1)$ $(h - Q \leqq \leqq k \leqq h + 1)$ il résulte que, si σ_μ^g est une face de σ_r^{Q+1} $(0 \leqq g \leqq Q + 1)$, la chaîne $L^{n-p+h-Q+1}(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^{h-Q-1})$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_μ^q. D'après 8.34, il en résulte que la chaîne $F\, L^{n-p+h-Q+1}(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^{h-Q-1})$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^{Q+1}. D'autre part, σ_v^{h-Q-2} étant une $(h - Q - 2)$-face de σ_j^{h-Q-1}, les deux simplexes $\sigma_\lambda^0 \sigma_v^{h-Q-2}$ et σ_r^{Q+1} étant des faces de la h-face $\sigma_r^{Q+1} \sigma_v^{h-Q-2}$ de σ_i^{h+1} il résulte de $\Theta(k, q, h)$ que presqu'aucun simplexe de la chaîne $L^{n-p+h-Q}$ $(\sigma_\lambda^0 \sigma_v^{h-Q-2})$ n'est d'espèce σ_r^{Q+1}.

Second cas: $Q = h - 1$, d'où $k = 0$. Les indices j, r, i étant tels que $\sigma_i^{h+1} = = \pm \sigma_r^h \sigma_j^0$, on doit démontrer que la chaîne $L^{n-p+1}(\sigma_j^0)$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^h. Choisissons un sommet σ_λ^0 du simplexe σ_r^h. D'après 34.2, 2° la chaîne

$$(*) \qquad F\, L^{n-p+2}(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^0) - L^{n-p+1}(\sigma_j^0) + L^{n-p+1}(\sigma_\lambda^0)$$

ne contient aucun simplexe situé dans $\overline{P_4^1(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^0)}$ et par suite (v. 36) aucun simplexe d'espèce σ_r^h. On ne doit donc montrer que ni $F\, L^{n-p+2}(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^0)$ ni $L^{n-p+1}(\sigma_\lambda^0)$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^h. Si σ_s^g $(0 \leqq g \leqq h)$ est une face de σ_r^h, les deux simplexes $\sigma_\lambda^0 \sigma_j^0$ et σ_s^g sont des faces de σ_i^{h+1}, de manière qu'il résulte de $\Theta(k, q, h + 1)$ $(0 \leqq q \leqq Q = h - 1)$ et de $\Theta(k, h, h + 1) = \Theta(k, Q + 1, h + 1)$ $(1 = h - Q \leqq \leqq k \leqq h + 1)$ que la chaîne $L^{n-p+2}(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^0)$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_s^g. D'après 8.34 il en résulte que la chaîne $F\, L^{n-p+2}(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^0)$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^h. D'autre part, il résulte de $\Theta(k, h, h)$ que la chaîne $L^{n-p+1}(\sigma_\lambda^0)$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^h.

42. Le but proposé au n° 35 est atteint. Projetons toutes les $\mathfrak{U}_1$-chaînes obtenues dans le réseau $\mathfrak{U}$. En tenant compte du fait que (v. 33) $\mathfrak{U}_1$ est un affinement de $\mathfrak{U}$ normal par rapport aux cycles mod $(\overline{P_1^p(\sigma_i^p)} - P_2^p(\sigma_i^p))$ dans $\overline{P_1^p(\sigma_i^p)}$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$, nous avons donc le résultat suivant: 1° La chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ primitive a été remplacée par une nouvelle $(n - p, \mathfrak{U})$-chaîne, que nous continuons d'appeler $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ et qui

est homologue à l'ancienne dans $\bar{B}$. 2° A chaque $(h, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur σ_i^h $(0 \leqq h \leqq \leqq p-1, 1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ on a attaché une $(n-p+h+1, \mathfrak{U})$-chaîne $L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ dans $\bar{B}$. 3° Pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$ la chaîne

$$F\, L^{n-p+1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) - C^{n-p}(\mathfrak{U})$$

ne contient aucun simplexe situé dans $\overline{P_4^0(\sigma_i^0)}$. 4° Pour $0 \leqq h \leqq p-2$, $1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1}$, la chaîne

$$F\, L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}) - \sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h\, L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h, \mathfrak{U})$$

ne contient aucun simplexe situé dans $\overline{P_4^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$. 5° Pour $1 \leqq i \leqq \alpha_p$,

$$\sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{ij}^{p-1}\, L^n(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U})$$

est un (n, R)-cycle essentiel mod $(R - P_2^p(\sigma_i^p))$. 6° Pour $0 \leqq h \leqq p-1$, $0 \leqq k \leqq h$, $0 \leqq q \leqq h$, si les simplexes σ_j^k, σ_r^q $(1 \leqq j \leqq \alpha_k$, $1 \leqq r \leqq \alpha_q)$ sont des faces du simplexe σ_i^h, la chaîne $L^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \mathfrak{U})$ ne contient essentiellement aucun simplexe d'espèce σ_r^q, ce qui veut dire que chaque simplexe d'espèce σ_r^q de la chaîne $L^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \mathfrak{U})$ est égal à zéro mod $\overline{R - R_0}$.[53]

Or nous en déduirons (dans les n$^{\text{os}}$ 42.1–42.5) que la chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ est égale mod $\bar{B}\,\overline{R - R_0}$ à une $(n-p, \mathfrak{U}_1)$-chaîne élémentaire. Avec cela le théorème du n° 31 sera évidemment prouvé.

42.1. Soit τ un $\mathfrak{U}_1$-simplexe dont le noyau rencontre et $\bar{B}$ et $\overline{R - R_0}$. Alors le noyau de $\pi_{20}\tau$ (v. 33) et donc aussi celui de $\pi_0^*\tau$ rencontre $\bar{B}\,\overline{R - R_0}$. Or toutes les $\mathfrak{U}$-chaînes que nous considérons ici sont des projections de $\mathfrak{U}_1$-chaînes situées dans $\bar{B}$; donc si un simplexe d'une de nos $\mathfrak{U}$-chaînes est $= 0 \bmod \overline{R - R_0}$, il est aussi $= 0 \bmod \bar{B}\,\overline{R - R_0}$. Les chaînes élémentaires ne contenant que des simplexes $\neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$ (v. 19.1, 1°), on voit sans peine qu'il suffit de démontrer que $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ est égale mod $\overline{R - R_0}$ à une chaîne élémentaire.

42.2. **Lemme** A_k $(0 \leqq k \leqq p-1)$: Supposons que les simplexes σ_j^k, σ_r^q soient des faces de σ_i^p $(1 \leqq j \leqq \alpha_k$, $1 \leqq r \leqq \alpha_q$, $1 \leqq i \leqq \alpha_p)$. Soit $E^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \sigma_r^q, \mathfrak{U})$ la partie de la chaîne $L^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \mathfrak{U})$ dont les simplexes sont 1° d'espèce σ_r^q, 2° $\neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$. Alors: 1° si $q \neq p-k-1$, on a $E^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \sigma_r^q, \mathfrak{U}) = 0$; 2° si $q = p-k-1$ il existe un nombre $a_{jr} \in \mathfrak{R}$ tel que $E^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \sigma_r^q, \mathfrak{U}) = a_{jr} K^{n-q}(\sigma_r^q)$.

[53] En effet, soit τ un simplexe de la chaîne $L^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \mathfrak{U})$ tel que $\tau \neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$. Il existe alors un simplexe τ_1 de $L^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \mathfrak{U}_1)$ tel que (v. 33) $\tau = \pi_0^*\tau_1$. Evidemment $\tau_1 \neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$. Par suite, comme on le voit sans peine, τ_1 n'est pas une face d'un $\mathfrak{U}_1$-simplexe d'espèce σ^{-1}. Soit σ_v^l l'espèce du simplexe τ_1. On a $l \geqq 0$ et, en vertu de la propriété $\Theta(k, q, h)$, σ_v^l n'est pas une face de σ_i^h. Or si le simplexe τ était d'espèce σ_r^q, on voit tout de suite que σ_v^l serait une face de σ_r^q, donc de σ_i^h.

Dans le n° 42.3, nous démontrerons Λ_{p-1}. Dans le n° 42.4, nous déduirons Λ_k $(0 \leqq k \leqq p-2)$ de Λ_{k+1}. Par conséquent, le lemme Λ_0 sera vrai.

42.3. Soient σ_j^{p-1}, σ_r^q des faces de σ_i^p. Pour $q \geqq 1$, on a $E^n(\sigma_j^{p-1}, \sigma_r^q, \mathfrak{U}) = 0$ d'après 8.33. Soit donc $q = 0$. Dans le cas où σ_r^0 est un sommet de σ_j^{p-1}, on a $E^n(\sigma_j^{p-1}, \sigma_r^0, \mathfrak{U}) = 0$ d'après 42, 6°. Il ne reste que le cas où $\sigma_i^p = \pm\sigma_r^0\sigma_j^{p-1}$. Si σ_ν^{p-2} est une $(p-2)$-face quelconque de σ_j^{p-1}, nous savons déjà que $E^n(\sigma_r^0\sigma_\nu^{p-2}, \sigma_r^0, \mathfrak{U}) = 0$. Il en résulte que $E^n(\sigma_j^{p-1}, \sigma_r^0, \mathfrak{U})$ est la partie de la chaîne[54]

$$M^n(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) = L^n(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}) - \sum_{\nu=1}^{\alpha_{p-2}} \eta_{j\nu}^{p-2} L^n(\sigma_r^0\sigma_\nu^{p-2}, \mathfrak{U})$$

dont les simplexes sont 1° d'espèce σ_r^0, 2° $\neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$. D'après 42, 5° $M^n(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ est un (n, R)-cycle essentiel mod $(R - P_2^p(\sigma_i^p))$; puisque $S \subset R - P_2^p(\sigma_i^p)$, $G(\mathfrak{U})$ est aussi (v. 17) un tel (n, R)-cycle. D'après la définition du réseau gén. $\mathfrak{P}_3^p$ (n° 29) et celle de $P_2^p(\sigma_i^p)$ (n° 30), il en résulte l'existence de deux nombres r_1, $r_2 \in \mathfrak{R}$, dont un au moins $\neq 0$, tels que $r_1\, M^n(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) + r_2\, G^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod (R - P_3^p(\sigma_i^p))$. Or (v. 32) $G^n(\mathfrak{U}) \nsim 0 \bmod (R - P_3^p(\sigma_i^p))$ de manière qu'il existe un nombre $a \in \mathfrak{R}$ $(a = -r_2 : r_1)$ tel que $M^n(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \sim a\, G^n(\mathfrak{U}) \bmod (R - P_3^p(\sigma_i^p))$. Il existe donc une $(n+1, \mathfrak{U})$-chaîne $H^{n+1}(\mathfrak{U})$ et une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $N^n(\mathfrak{U}) \subset R - P_3^p(\sigma_i^p)$ telles que

$$M^n(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) = a\, G^n(\mathfrak{U}) + F\, H^{n+1}(\mathfrak{U}) + N^n(\mathfrak{U})\,.$$

Le réseau $\mathfrak{U}$ étant commode, il est d'ordre $\leqq n$ mod S; par suite chaque $(n+1, \mathfrak{U})$-simplexe possède un sommet U tel que $US \neq 0$. Or si U', U'' sont deux sommets de $\mathfrak{U}$ tels que $U'R_0 \neq 0$, $U''S \neq 0$, on a (n° 32) $U'U'' = 0$. Il en résulte que $F\, H^{n+1}(\mathfrak{U}) = 0 \bmod \overline{R - R_0}$. Lorsque τ est un simplex de $\mathfrak{U}$ d'espèce σ_r^0, chacun de ses sommets U rencontre T_r et par suite (v. 32) $U \subset P_3^p(\sigma_i^p)$. Il en résulte que la chaîne $N^n(\mathfrak{U})$ ne contient aucun simplexe d'espèce σ_r^0, Donc $E^n(\sigma_j^{p-1}, \sigma_r^0)$, c'est-à-dire la partie de la chaîne $M^n(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ dont les simplexes sont 1° d'espèce σ_r^0, 2° $\neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$, coïncide avec la partie pareille de la chaîne $a\, G^n(\mathfrak{U})$, c'est-à-dire (v. 19.1) avec $a\, K^n(\sigma_r^0, \mathfrak{U})$.

42.4. Soit $0 \leqq k \leqq p-2$ et supposons la validité du lemme Λ_{k+1}. Il s'agit d'en déduire la validité du lemme Λ_k. Supposons donc que les simplexes σ_j^k, σ_r^q soient des faces de σ_i^p. S'il existe un sommet de σ_i^p qui n'est sommet ni pour σ_j^k, ni pour σ_r^q, il existe une $(p-1)$-face σ_ν^{p-1} de σ_i^p telle que σ_j^k et σ_r^q sont des faces de σ_ν^{p-1}; par suite $E^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \sigma_r^q) = 0$, d'après 42, 6°. Supposons donc que chaque sommet de σ_i^p soit un sommet de σ_j^k ou de σ_r^q. Il en résulte que $k + q \geqq p - 1$. Lorsque $q \geqq p - k$, on a $E^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \sigma_r^q) = 0$ d'après 8.33. Il ne reste donc que le cas où $q = p - k - 1$, les indices j, r, i étant tels que $\sigma_i^p = \pm\sigma_j^k\sigma_r^{p-k-1}$. Choisissons un sommet σ_t^0 de

[54] Dans le cas $p = 1$, il existe un indice ν tel que $\pm\sigma_i^1 \to \sigma_j^0 - \sigma_\nu^0$ et on doit poser

$$M^n(\sigma_i^1, \mathfrak{U}) = L^n(\sigma_j^0, \mathfrak{U}) - L^n(\sigma_\nu^0, \mathfrak{U})\,.$$

σ_r^{p-k-1} et supposons que σ_s^{k-1} parcoure toutes les $(k-1)$-faces de σ_j^k. Alors $\sigma_s^{k-1}\sigma_t^0$ [55] et σ_r^{p-k-1} sont des faces d'une $(p-1)$-face de σ_i^p, de manière que $E^{n-p+k+1}(\sigma_s^{k-1}\sigma_t^0, \sigma_r^{p-k-1}) = 0$ d'après 42, 6°. En outre, d'après 42, 4° et 36 la chaîne[56]

$$F\, L^{n-p+k+2}(\sigma_t^0\sigma_j^k, \mathfrak{U}) - L^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \mathfrak{U}) + \sum_{s=1}^{\alpha_{k-2}} \eta_{js}^{k-2}\, L^{n-p+k+1}(\sigma_t^0\sigma_s^{k-1}, \mathfrak{U})$$

ne contient aucun simplexe d'espèce σ_r^{p-k-1}. Il en résulte que $E^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \sigma_r^{p-k-1}, \mathfrak{U})$ est la partie de la chaîne

$$(*) \qquad F\, L^{n-p+k+2}(\sigma_t^0\sigma_j^k, \mathfrak{U})$$

dont les simplexes sont 1° d'espèce σ_r^{p-k-1}, 2° $\neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$. Soit τ un tel simplexe de la chaîne $(*)$. Il existe alors un simplexe τ_1 de la chaîne

$$L^{n-p+k+2}(\sigma_t^0\sigma_j^k, \mathfrak{U})$$

tel que τ appartienne à la chaîne $F\tau_1$. Puisque $\tau \neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$, évidemment $\tau_1 \neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$ de manière que (v. 8.32) τ_1 n'est pas d'espèce σ^{-1}. Donc (v. 8.34) le simplexe τ_1 est d'espèce σ_v^h, où σ_v^h est une face de σ_r^{p-k-1}. Donc τ_1 est un simplexe de la chaîne $E^{n-p+k+2}(\sigma_t^0\sigma_j^k, \sigma_v^h, \mathfrak{U})$. Or en vertu du lemme Λ_{k+1} ,on a

$$1^\circ \quad E^{n-p+k+2}(\sigma_t^0\sigma_j^k, \sigma_v^h, \mathfrak{U}) = 0 \quad \text{pour} \quad h \neq p-k-2\,,$$

$$2^\circ \quad E^{n-p+k+2}(\sigma_t^0\sigma_j^k, \sigma_v^{p-k-2}, \mathfrak{U}) = \eta_{rv}^{p-k-2} a_v\, K^{n-p+k+2}(\sigma_v^{p-k-2}, \mathfrak{U}) \quad (a_v \in \mathfrak{R})\,,$$

où σ_v^{p-k-2} parcourt toutes les $(p-k-2)$-faces de σ_r^{p-k-1}. Il en résulte que $E^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \sigma_r^{p-k-1}, \mathfrak{U})$ est égale à la partie de la chaîne

$$(**) \qquad F \sum_{v=1}^{\alpha_{p-k-2}} \eta_{rv}^{p-k-2} a_v\, K^{n-p+k+2}(\sigma_v^{p-k-2}, \mathfrak{U})$$

dont les simplexes sont 1° d'espèce σ_r^{p-k-1}, 2° $\neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$. Or la chaîne $(**)$ est égale, en vertu de 19.1, 3°, à la chaîne

$$\sum_{v=1}^{\alpha_{p-k-2}} \sum_{\mu=1}^{\alpha_{p-k-1}} \eta_{rv}^{p-k-2}\eta_{\mu v}^{p-k-1} a_v\, K^{n-p+k+1}(\sigma_\mu^{p-k-1}, \mathfrak{U})\,,$$

de manière que, d'après 19.1, 1° et 2°,

$$E^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \sigma_r^{p-k-1}, \mathfrak{U}) = a\, K^{n-p+k+1}(\sigma_r^{p-k-1}, \mathfrak{U})\,.$$

[55] Pour $k = 0$ ce symbole signifie σ_t^0.

[56] Pour $k = 0$:

$$F\, L^{n-p+2}(\sigma_i^0\sigma_j^0, \mathfrak{U}) - L^{n-p+1}(\sigma_j^0, \mathfrak{U}) + L^{n-p+1}(\sigma_t^0, \mathfrak{U})\,.$$

42.5. Le lemme Λ_0 étant démontré, passons à la démonstration du fait que (v. 42.1) la chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ est égale mod $\overline{R - R_0}$ à une chaîne élémentaire.

Soit τ^{n-p} un simplexe $\neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$. D'après 8.32 et 8.33, τ est d'espèce σ_i^k, où $0 \leqq k \leqq p$. Choisissons un sommet σ_t^0 de σ_i^k. D'après 42, 3° et 36, la partie dont les simplexes sont d'espèce σ_i^k est dans $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ la même que dans $F\, L^{n-p+1}(\sigma_t^0, \mathfrak{U})$ et par suite, comme on voit par le raisonnement employé dans le n° 42.4, la même que dans

$$(*) \qquad F \sum_{h,j} E^{n-p+1}(\sigma_t^0, \sigma_j^h, \mathfrak{U}) ,$$

où σ_j^h parcourt toutes les faces de σ_i^k. Or d'après 42, 6° et d'après le lemme Λ_0, on a

$$1^\circ \quad E^{n-p+1}(\sigma_t^0, \sigma_j^h) = 0 \quad \text{pour} \quad h \neq p - 1$$

ainsi que pour $h = p - 1$, si σ_t^0 est un sommet de σ_j^{p-1};

$$2^\circ\ E^{n-p+1}(\sigma_t^0, \sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}) = a_{ij} K^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}) ,$$

si $k = p$ et si l'indice j est tel que $\sigma_i^p = \pm \sigma_t^0 \sigma_j^{p-1}$. Donc, si $k \leqq p - 1$, la chaîne $(*)$ est égale à zéro; si $k = p$, la chaîne $(*)$ est, d'après 19.1, 3°, égale à $\eta_{tj}^{p-1} a_{ij} K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$. Par suite

$$C^{n-p}(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \quad \bmod \overline{R - R_0} .$$

V.

43. Dans tout ce Chapitre, supposons donnée une valeur fixe de p $(1 \leqq p \leqq n)$. On suppose la validité de tous les axiomes des Chap. I et II ainsi que celle des axiomes G^k (v. 21) pour $n - p \leqq k \leqq n - 1$ et des axiomes H^k (v. 27) pour $n - p \leqq k \leqq$ $\leqq n - 2$.

44. *Soit* $\mathfrak{Z} \in \Xi$ *(v. 23). Soit* S_1 *la somme de tous les sommets extérieurs de* $\mathfrak{Z}$*; soit* Ω *un entourage donné de* $\bar{S}_1$*. Soit* A *un sous-ensemble bicompact de* R*; soit* B *un entourage donné de* A*. Il existe un affinement* $\mathfrak{B}$ *de* $\mathfrak{Z}$ *et un réseau gén.* $\mathfrak{M}$ *tels que l'énoncé suivant soit vrai: Soit* $\mathfrak{z} \in \Xi$ *un affinement de* $\mathfrak{B}$ *et un affinement mod* S *de* $\mathfrak{M}$*. Soit* $\mathfrak{t}$ *un réseau fermé correspondant à* $\mathfrak{z}$ *(n° 8) et possédant par rapport à* $\mathfrak{z}$ *la propriété du n° 25. On peut choisir la projection* $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$ *de manière que, le réseau fermé* $\mathfrak{T}$ *correspondant à* $\mathfrak{Z}$ *étant construit selon le n° 24 en y faisant usage de* $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ *et* π*, on ait la propriété du n° 25 ainsi que la propriété suivante, valable pour chaque réseau* $\mathfrak{U}$ *suffisamment fin et commode relativement à* $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ *(et par suite aussi par rapport à* $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$ *(v. 24)):* $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ *étant un* $(n - p, \mathfrak{U})$*-cycle mod* $A\,\overline{R - R_0}$ *élémentaire (v. 19.1) par rapport à* $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$ *et tel que* $C^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim 0$ *mod* $A\,\overline{R - R_0}$ *dans* A*, il existe une* $(n - p + 1, \mathfrak{U})$*-chaîne* $E^{n-p+1}(\mathfrak{U})$ *dans* $\bar{B}$ *élémentaire par rapport à* $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ *et telle que* $E^{n-p+1}(\mathfrak{U}) \to C^{n-p}(\mathfrak{U})$ *mod* $\bar{\Omega}$.

La démonstration fera l'objet des n^{os} 45.1 – 54.3.

45.1. Soit $\mathfrak{T}^*$ un réseau fermé correspondant à $\mathfrak{Z}$ (v. 8) et choisi arbitrairement; soient T_i^* $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ les sommets de $\mathfrak{T}^*$ (v. 8) de manière que $T_i^* \subset \sigma_i^0$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$; posons $R_0^* = \sum_{i=1}^{\alpha_0} T_i^* \subset R - S$ (v. 8).

A chaque point $a \in R$ attachons un voisinage $W(a)$ tel que pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$: 1° $a \in T_i^*$ entraîne $W(a) \subset \sigma_i^0$; 2° $a \in R - T_i^*$ entraîne $W(a)\ T_i^* = 0$. Soit $W'(a)$ un entourage de a si petit que $\overline{W'(a)} \subset W(a)$. L'espace R étant bicompact, il existe un nombre fini de points $a = a_1, a_2, \ldots, a_m$ tels que les entourages correspondants $W_r' = W'(a_r)$ constituent un réseau $\mathfrak{W}'$;[57] soit encore $W_r = W(a_r)$ $(1 \leqq r \leqq m)$. On peut supposer qu'il existe un entier m' $(0 \leqq m' \leqq m)$ tel que $a_r \in R_0^*$ pour $1 \leqq r \leqq m'$, $a_r \in R - R_0^*$ pour $m' + 1 \leqq r \leqq m$. Pour $1 \leqq r \leqq m'$ il existe un indice i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ tel que $a_r \in T_i^*$, d'où $\overline{W}_r' \subset W_r \subset \sigma_i^0 \subset R - S$. Pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$, il existe évidemment un entourage H_i de T_i^* si petit que: 1° $T_i^* \subset H_i \subset \sigma_i^0$; 2° $\overline{W}_r' T_i^* = 0$ entraîne $\overline{W}_r' H_i = 0$. Pour $1 \leqq r \leqq m$, soit W_r'' un entourage de a_r si petit que: 1° $\overline{W}_r'' \subset W_r'$; 2° $a_r \in T_i^*$ entraîne $\overline{W}_r'' \subset H_i$ pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$; 3° $\overline{W}_r'' \overline{W}_s'' = 0$ pour $1 \leqq r < s \leqq m$. Pour $1 \leqq r \leqq m$, soit W_r''' un entourage de a_r si petit que $\overline{W}_r''' \subset W_r''$.

Il existe évidemment un affinement $\mathfrak{B}_1$ de $\mathfrak{Z}$ jouissant des propriétés suivantes: 1° Pour $V \in \mathfrak{B}_1$, $1 \leqq r < s \leqq m$, on ne peut avoir simultanément $V\overline{W}_r'' \neq 0$, $V\overline{W}_s'' \neq 0$. 2° Pour $V \in \mathfrak{B}_1$, $1 \leqq r \leqq m$, la relation $V\overline{W}_r' \neq 0$ entraîne $V \subset W_r$. 3° Pour $V \in \mathfrak{B}_1$, $1 \leqq r \leqq m$, la relation $V\overline{W}_r''' \neq 0$ entraîne $V \subset W_r''$. 4° $\mathfrak{B}_1$ est un affinement du réseau $\mathfrak{W}'$. 5° $\mathfrak{B}_1$ est un affinement du réseau $\mathfrak{H}$ dont les sommets sont les ensembles H_i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ et l'ensemble $R - R_0^*$. 6° Pour $1 \leqq r \leqq m'$ soit $\mathfrak{M}_r$ un réseau fermé dans l'espace $\overline{W}_r'''$ tel que chaque sommet de $\mathfrak{M}_r$ soit un sous-ensemble d'un sommet de $\mathfrak{B}_1$; alors l'ordre (v. 7.2) du réseau $\mathfrak{M}_r$ est $\geqq n$. Il résulte de 2.24 que la condition 6° est réalisable, car dim $\overline{W}_r''' = n$, d'après 12.2.[58]

45.2. Dorénavant, supposons que le réseau $\mathfrak{z} \in \Xi$ soit un affinement de $\mathfrak{B}_1$ et par suite de $\mathfrak{Z}$. Nous allons choisir une projection $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$. Soit z un sommet de $\mathfrak{z}$. Deux cas sont à distinguer. *En premier lieu*, soit $z \subset R - R_0^*$. Dans ce cas on choisira le sommet $\pi z = Z$ de $\mathfrak{Z}$ de manière que $ZS \neq 0$; nous savons (v. 8) que c'est possible. *En second lieu*, soit $zR_0^* \neq 0$. En vertu de la propriété 5° du réseau $\mathfrak{B}_1$, on peut choisir l'indice i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ de telle façon que $z \subset H_i$; on peut donc poser $\pi z = \sigma_i^0$, car $H_i \subset \sigma_i^0$. La projection π n'est pas encore complètement determinée et nous poserons tout de suite des conditions ultérieures.

Choisissons un réseau fermé $\mathfrak{t}$ correspondant à $\mathfrak{z}$ (v. 8). Comme dans le n° 24, désignons par τ_ν^0 $(1 \leqq \nu \leqq \beta_0)$ les sommets intérieurs de $\mathfrak{z}$ et par t_ν les sommets correspondants de $\mathfrak{t}$ et posons $R_0' = \sum_{\nu=1}^{\beta_0} t_\nu$. D'après 8, on a $R_0' + g = R$, où g désigne

[57] On voit sans peine qu'on peut s'arranger de façon que le réseau $\mathfrak{W}'$ soit arbitrairement fin.
[58] En effet, puisque $1 \leqq r \leqq m'$, on a $\overline{W}_r''' \subset \overline{W}_r' \subset R - S$.

la somme de tous les sommets extérieurs de $\mathfrak{z}$. Soit $b \in \overline{W}_r'''$ $(1 \leqq r \leqq m')$ et soit z un sommet de $\mathfrak{z}$ contenant b. On a $z\overline{W}_r''' \neq 0$, d'où $z \subset W_r''$ d'après la propriété 3° du réseau $\mathfrak{B}_1$. Or $W_r'' \subset R - S$, car $1 \leqq r \leqq m'$; donc $z \subset R - S$ est un sommet intérieur de $\mathfrak{z}$. Donc $b \in R - g \subset R_0'$, c'est-à-dire $\overline{W}_r''' \subset R_0'$ pour $1 \leqq r \leqq m'$. Il en résulte que les ensembles $\overline{W}_r'''\ t_\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq \beta_0)$ constituent (si $1 \leqq r \leqq m'$) un réseau fermé dans $\overline{W}_r'''$. D'après la propriété 6° du réseau $\mathfrak{B}_1$, on en déduit la validité de la remarque suivante: Si $1 \leqq r \leqq m'$, on peut indiquer un point $b_r \in \overline{W}_r'''$ tel que $b_r \in t_\nu$ pour au moins $n + 1$ valeurs différentes de l'indice ν $(1 \leqq \nu \leqq \beta_0)$. Pour $m' + 1 \leqq r \leqq m$, choisissons arbitrairement un point $b_r \in \overline{W}_r'''$.

Pour $1 \leqq r \leqq m'$, il existe des indices i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ tels que $a_r \in T_i^*$; soient $i_0, i_1, \ldots, i_q$ tous ces indices. D'après 8, on a $0 \leqq q \leqq n$. D'après la remarque que nous venons de faire, on peut donc indiquer $q + 1$ valeurs différentes de ν $(1 \leqq \nu \leqq \beta_0)$ telles que $b_r \in t_\nu$; soient $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_q$ ces valeurs. Posons pour $0 \leqq h \leqq q$: $\pi\tau_{\nu_h}^0 = \sigma_{i_h}^0$. C'est possible et c'est aussi d'accord avec les conditions déjà posées pour π. En effet: 1° Une valeur donnée de ν $(1 \leqq \nu \leqq \beta_0)$ ne peut appartenir à la suite $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_q$ que pour *une* valeur de r $(1 \leqq r \leqq m')$ au plus; ceci résulte de la propriété 1° du réseau $\mathfrak{B}_1$, car l'inclusion $b_r \in t_\nu$ entraîne que $\tau_\nu^0\overline{W}_r''' \neq 0$, d'où $\tau_\nu^0 \subset W_r''$ d'après la propriété 3° de $\mathfrak{B}_1$. 2° Pour $1 \leqq r \leqq m'$, $0 \leqq h \leqq q$, on a $\tau_{\nu_h}^0 \subset W_r''$, comme nous venons de voir; d'autre part on a $a_r \in T_{i_h}^*$, d'où $W_r'' \subset H_{i_h}$ d'après la propriété 2° des ensembles W_r''; donc $\tau_{\nu_h}^0 \subset H_{i_h}$ de manière qu'il est permis de poser $\pi\tau_{\nu_h}^0 = \sigma_{i_h}^0$.

45.3. A l'aide de $\mathfrak{z}$, t et π, construisons le réseau fermé $\mathfrak{T}$ correspondant à $\mathfrak{Z}$ suivant la manière expliquée au n° 24 et faisons usage des notations de ce n°. En particulier, on a pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$: $T_i = \sum t_\nu$, où ν parcourt toutes les valeurs $(1 \leqq \nu \leqq \gamma_0)$ telles que $\pi\tau_\nu^0 = \sigma_i^0$. Il en résulte que pour $1 \leqq r \leqq m'$, $0 \leqq h \leqq q$, on a (dans les notations du n° 45.2) $t_{\nu_h} \subset T_{i_h}$, d'où $b_r \in T_{i_h}$ pour $0 \leqq h \leqq q$. Inversement, supposons que, pour de certaines valeurs de i et de r $(1 \leqq i \leqq \alpha_0,\ 1 \leqq r \leqq m)$ on ait l'inclusion $b_r \in T_i$. Il existe alors une valeur de ν $(1 \leqq \nu \leqq \gamma_0)$ telle que $b_r \in t_\nu$, $\pi\tau_\nu^0 = \sigma_i^0$. D'après nos conventions relatives à la projection π, on a donc l'inclusion $\tau_\nu^0 \subset H_i$. Or $b_r \in t_\nu \subset \tau_\nu^0$, $b_r \in \overline{W}_r''' \subset \overline{W}_r'$; donc $H_i\overline{W}_r' \neq 0$ et par suite $T_i^*\overline{W}_r' \neq 0$ d'après la propriété 2° de H_i. Or $\overline{W}_r' \subset W_r$, d'où $T_i^* W_r \neq 0$ ce qui entraîne $a_r \in T_i^* \subset R_0^*$. Donc $1 \leqq r \leqq m'$ et $i = i_h$ pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq q)$.

Nous avons donc prouvé que pour $1 \leqq r \leqq m$, $1 \leqq i \leqq \alpha_0$ les deux inclusions $a_r \in T_i^*$ et $b_r \in T_i$ sont équivalentes. On en déduit le **Lemme**: Le réseau $\mathfrak{W}'$ (aux sommets $W_1', \ldots, W_m'$) possède la propriété suivante: pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$, $1 \leqq r \leqq m$: 1° $b_r \in T_i$ entraîne $W_r' \subset \sigma_i^0$; 2° $b_r \in R - T_i$ entraîne $W_r'T_i = 0$.

Démonstration. 1° Soit $b_r \in T_i$; alors $a_r \in T_i^*$, donc $W_r' \subset W_r \subset \sigma_i^0$. 2° Soit $b_r \in R - T_i$; alors $a_r \in R - T_i^*$, donc $W_rT_i^* = 0$. Supposons, par impossible, qu'il existe un point $c \in W_r'T_i$. D'après la définition de $\mathfrak{T}$, il existe une valeur de ν $(1 \leqq \nu \leqq \alpha_0)$ telle que $c \in t_\nu \subset \tau_\nu^0 \subset H_i$. On a donc $W_r'H_i \neq 0$, d'où $\overline{W}_r'T_i^* \neq 0$, ce qui donne la contradiction $W_rT_i^* \neq 0$.

45.31. Nous avons remarqué (v. [57]) que le réseau $\mathfrak{W}'$ peut être supposé arbitrairement fin. Nous voulons profiter de cette remarque. Soit B_1 un ensemble ouvert tel que

$$(1) \qquad A \subset B_1 \subset\subset B\,.$$

Nous supposerons que le réseau $\mathfrak{W}'$ soit choisi de manière qu'il jouisse de la propriété suivante (v. 1.2): Si $W_r'A \neq 0$, $W_r'W_s' \neq 0$, on a $W_s' \subset B_1$.

45.4. De la démonstration faite au n° 25.2 du théorème du n° 25 on déduit sans peine qu'il existe un affinement $\mathfrak{B}_2$ de $\mathfrak{B}_1$ jouissant de la propriété suivante: Supposons que le réseau $\mathfrak{z} \in \Xi$ soit un affinement de $\mathfrak{B}_2$. On peut choisir la projection $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$ (satisfaisant aux conditions du n° 45.2) de manière que $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \neq 0$ pour $1 \leqq i \leqq \alpha_p$ dans chaque réseau commode suffisamment fin.

Dorénavant on suppose $\mathfrak{z}$ et π choisis de manière que cette propriété soit vérifiée, ainsi que le lemme du n° 45.3.

46. **Lemme.** Soit $\mathfrak{U}$ un réseau commode (relativement à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$). Soit $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ une $(n-p, \mathfrak{U})$-chaîne élémentaire (v. 19.1) telle que $C^{n-p}(\mathfrak{U}) \to 0 \bmod \overline{R - R_0}$. On peut attacher à chaque combinaison $r_0, r_1, \ldots, r_h$ $(0 \leqq h \leqq p-1)$, d'indices $1, 2, \ldots, m$ une $(n-p+h+1, \mathfrak{U})$-chaîne élémentaire $D^{n-p+h+1}_{r_0 r_1 \ldots r_h}(\mathfrak{U})$ de manière que: 1° chaque simplexe $\neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$ de la chaîne $F\, D^{n-p+1}_r(\mathfrak{U}) - C^{n-p}(\mathfrak{U})$ $(1 \leqq r \leqq m)$ est situé dans $R - W_r'$; 2° pour $0 \leqq h \leqq p-1$, $D^{n-p+h+1}_{r_0 r_1 \ldots r_h}(\mathfrak{U})$ est une fonction alternée des indices $r_0, r_1, \ldots, r_h$; 3° pour chaque combinaison $r_0, r_1, \ldots, r_h$ $(1 \leqq h \leqq p-1)$, chaque simplexe $\neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$ de la chaîne

$$F\, D^{n-p+h+1}_{r_0 r_1 \ldots r_h}(\mathfrak{U}) - \sum_{u=0}^{h} (-1)^u D^{n-p+h}_{r_0 \ldots r_{u-1} r_{u+1} \ldots r_h}(\mathfrak{U})$$

est situé dans $R - \prod_{u=0}^{h} W_{r_u}'$.

Démonstration. Soit $C^{n-p}(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} c_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$. D'après 19.1, 1° et 3°

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{\alpha_p} \eta_{ji}^p c_i = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq j \leqq \alpha_{p+1}\,.$$ [59]

Pour $1 \leqq r \leqq m$, soit N_r l'ensemble de toutes les valeurs de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ telles que $b_r \in T_i$ (b_r étant les points du lemme du n° 45.3); les σ_i^0, $i \in N(r)$ sont les sommets d'un $\mathfrak{Z}$-simplexe intérieur que nous désignerons par $\sigma(r)$. Plus généralement, pour chaque combinaison $r_0, r_1, \ldots, r_h$ $(0 \leqq h \leqq p-1)$ soit $\sigma(r_0, r_1, \ldots, r_h)$ la face commune de dimension maxima des $h+1$ $\mathfrak{Z}$-simplexes $\sigma(r_0), \sigma(r_1), \ldots, \sigma(r_h)$.

Ceci étant, posons pour chaque combinaison $r_0, r_1, \ldots, r_h$ $(0 \leqq h \leqq p-1)$

$$D^{n-p+h+1}_{r_0 r_1 \ldots r_h}(\mathfrak{U}) = \sum_i x_i^{r_0 r_1 \ldots r_h} K^{n-p+h+1}(\sigma_i^{p-h-1}, \mathfrak{U})\,,$$

[59] Ces équations ne disent *rien* dans le cas $p = n$.

où la sommation se rapporte à toutes les valeurs de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_{p-h-1})$ telles que σ_i^{p-h-1} soit une face du simplexe $\sigma(r_0, r_1, \dots, r_k)$ et où les nombres $x_i^{r_0 r_1 \dots r_h} \in \mathfrak{R}$ sont des fonctions alternées des indices supérieurs.

Or on déduit sans peine du lemme du n° 45.3 que, si le simplexe σ_i^k $(0 \leqq k \leqq n, 1 \leqq i \leqq \alpha_k)$ n'est pas une face de $\sigma(r_0, r_1, \dots, r_h)$, la chaîne $K^{n-k}(\sigma_i^k, \mathfrak{U})$ est située dans $R - \prod_{u=0}^{h} W'_{r_u}$. Il en résulte aisément (v. 19.1, 1° et 3°) qu'il suffit de déterminer les nombres $x_i^{r_0 r_1 \dots r_h}$ de manière que l'on ait

$$1^\circ \quad \sum_{i=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{ji}^{p-1} x_i^r = c_j$$

pour $1 \leqq r \leqq m$ et pour toutes les valeurs de j $(1 \leqq j \leqq \alpha_p)$ telles que σ_j^p soit une face de $\sigma(r)$;

$$2^\circ \quad \sum_{i=1}^{\alpha_{p-h-1}} \eta_{ji}^{p-h-1} x_i^{r_0 r_1 \dots r_h} = \sum_{u=0}^{h} (-1)^u x_j^{r_0 \dots r_{u-1} r_{u+1} \dots r_h}$$

pour chaque combinaison $r_0, r_1, \dots, r_h$ $(1 \leqq h \leqq p-1)$ d'indices $1, 2, \dots, m$ et pour toutes les valeurs de j $(1 \leqq j \leqq \alpha_{p-h})$ telles que σ_j^{p-h} soit une face de $\sigma(r_0, r_1, \dots, r_h)$.

Pour voir que ces conditions sont réalisables, choisissons une combinaison $r_0, r_1, \dots$ $\dots, r_h$ $(0 \leqq h \leqq p-1)$ et supposons que les indices i, j, k parcourent resp. toutes les valeurs $(1 \leqq i \leqq \alpha_{p-h-1}, 1 \leqq j \leqq \alpha_{p-h}, 1 \leqq k \leqq \alpha_{p-h+1})$ telles que σ_i^{p-h-1}, σ_j^{p-h}, σ_k^{p-h+1} soient des faces de $\sigma(r_0, r_1, \dots, r_h)$. Considérons le système d'équations linéaires pour les inconnues $z_i \in \mathfrak{R}$

$$(*) \qquad \sum_i \eta_{ji}^{p-h-1} z_i = u_j .$$

Pour que ce système possède une solution, il faut et il suffit que les nombres $u_j \in \mathfrak{R}$ satisfaisent à $\delta_{p-h} - \varrho_{p-h-1}$ conditions lin. indépendantes, où δ_{p-h} désigne le nombre des $(p-h)$-faces du simplexe $\sigma(r_0, r_1, \dots, r_h)$ et ϱ_{p-h-1} est le rang de la matrice (η_{ji}^{p-h-1}). Or le $(p-h)^{\text{ème}}$ nombre de Betti du simplexe $\sigma(r_0, r_1, \dots, r_h)$ étant égal à zéro, on a $\delta_{p-h} - \varrho_{p-h-1} = \varrho_{p-h} =$ rang de la matrice (η_{kj}^{p-h}). D'autre part, on voit sans peine que $(*)$ entraîne $\sum_j \eta_{kj}^p u_j = 0$, car $\sum_j \eta_{kj}^p \eta_{ji}^{p-1} = 0$. Le rang de la matrice (η_{kj}^{p-h}) étant égal à $\delta_{p-h} - \varrho_{p-h-1}$, on voit que le système

$$(**) \qquad \sum_j \eta_{kj}^p u_j = 0$$

donne la condition nécessaire et suffisante pour la résolubilité du système $(*)$. En faisant usage de ce critère et en s'appuyant sur les équations (1) on voit sans peine qu'il est possible de construire successivement les nombres $x_i^{r_0 r_1 \dots r_h}$.[60]

[60] Il faut tenir compte de ce que $\sigma(r_0, r_1, \dots, r_h)$ est une face de $\sigma(r_1, \dots, r_h)$.

46.1. Remarque. On voit sans peine que l'on peut s'arranger de façon qu'on ait $D^{n-p+h+1}_{r_0 r_1 \dots r_h}(\mathfrak{U}) \neq 0$ seulement si un des indices $r_0, r_1, \dots, r_h$, soit r, jouit de la propriété que $b_r \in T(\sigma_i^p)$ pour une valeur de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$ telle que le coefficient c_i de $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ dans la chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ soit $\neq 0$.

47.1. Nous allons démontrer le théorème du n° 44 dans le cas $p = 1$. L'espace R étant normal, il existe deux ensembles ouverts Ω_1 et Ω_2 tels que

$$S_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega .$$

Soit $\mathfrak{P}$ un réseau gén. tel que 1° chaque sommet de $\mathfrak{P}$ est un sous-ensemble d'un sommet W'_r du réseau $\mathfrak{W}'$ (v. 45.1); 2° pour chaque sommet P de $\mathfrak{P}$ on a $P\Omega_2 = 0$ ou bien $P \subset \Omega_1$. On voit sans peine que $\mathfrak{P}$ existe. Déterminons un affinement $\mathfrak{Q}$ de $\mathfrak{P}$ ainsi qu'une projection $\pi' = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P})$ jouissant de la propriété du n° 14.2. Soit $\mathfrak{V}$ un affinement du réseau $\mathfrak{V}_2$ (v. 45.4) et donc aussi de $\mathfrak{V}_1$ (v. 45.1) tel que 1° $V \in \mathfrak{V}$, $V\bar{S}_1 \neq 0$ entraîne $V \subset \Omega_1$; 2° chaque sommet V de $\mathfrak{V}$ tel que $V\bar{S}_1 = 0$ est un sous-ensemble d'un sommet de $\mathfrak{Q}$.

Supposons que $\mathfrak{z}$ soit un affinement de $\mathfrak{V}$. La suite $1, 2, \dots, \beta_0$ des indices ν se divise en deux classes N', N'' d'après la convention suivante: $\nu \in N'$ $(\nu \in N'')$ signifie que $\tau_\nu^0 \subset \Omega_1$ $(\tau_\nu^0 - \Omega_1 \neq 0)$. Soit $\nu \in N''$. Alors il existe un sommet $Q(\tau_\nu^0)$ de $\mathfrak{Q}$ tel que $\tau_\nu^0 \subset Q(\tau_\nu^0)$. Posons $P(\tau_\nu^0) = \pi' \, Q(\tau_\nu^0)$. Il existe un indice $r(\nu)$ $(1 \leqq r(\nu) \leqq m)$ tel que $P(\tau_\nu^0) \subset W'_{r(\nu)}$. On a $P(\tau_\nu^0) \subset \Omega_1$ ou bien $P(\tau_\nu^0)\,\Omega_2 = 0$.

Pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ commode relativement à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ considérons l'ensemble $M(\mathfrak{U})$ de toutes les $(n-1, \mathfrak{U})$-chaînes $C^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans A élémentaires par rapport à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$ et telles que $H^n(\mathfrak{U}) \to C^{n-1}(\mathfrak{U}) \bmod \overline{R - R_0}$ pour une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $H^n(\mathfrak{U}) \subset A$. L'ensemble $M(\mathfrak{U})$ est un module fini; désignons par $s(\mathfrak{U})$ son rang. On a $0 \leqq s(\mathfrak{U}) \leqq n$. Par suite l'ensemble de toutes les valeurs de $s(\mathfrak{U})$ admet un minimum s_0. Lorsque $\mathfrak{U}_1$ est un affinement de $\mathfrak{U}$, on voit sans peine (v. 19.1, 3° et 19.2) que $s(\mathfrak{U}_1) \leqq s(\mathfrak{U})$; par suite l'égalité $s(\mathfrak{U}) = s_0$ entraîne $s(\mathfrak{U}_1) = s_0$.

Désignons par Φ la famille de tous les réseaux commodes (relativement à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$) $\mathfrak{U}$ jouissant des propriétés suivantes: 1° $U \in \mathfrak{U}$, $U\Omega_1 \neq 0$ entraîne $U \subset \Omega$; 2° $U \in \mathfrak{U}$, $U - \Omega_2 \neq 0$ entraîne $U\,\overline{R - R_0} = 0$;[61] 3° $U \in \mathfrak{U}$, $Ut_\nu^0 \neq 0$ $(1 \leqq \nu \leqq \beta_0)$ entraîne $U \subset \tau_\nu^0$; 4° $G^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod (R - Q(\tau_\nu^0))$ pour $\nu \in N''$ (v. 17.5); 5° $s(\mathfrak{U}) = s_0$. On voit sans peine que $\mathfrak{U} \in \Phi$ entraîne que $\mathfrak{U}_1 \in \Phi$ pour chaque affinement commode $\mathfrak{U}_1$ de $\mathfrak{U}$.

47.2. Pour démontrer le théorème du n° 44 dans le cas actuel $p = 1$, supposons que $C^{n-1}(\mathfrak{U}) \in M(\mathfrak{U})$, $\mathfrak{U}$ étant un réseau de la famille Φ. Soit $H^n(\mathfrak{U})$ une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne dans A telle que $H^n(\mathfrak{U}) \to C^{n-1}(\mathfrak{U}) \bmod \overline{R - R_0}$. On doit démontrer qu'il existe une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $E^n(\mathfrak{U})$ dans $\bar{B}$ élémentaire relativement à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ et telle que $E^n(\mathfrak{U}) \to$ $\to C^{n-1}(\mathfrak{U}) \bmod \bar{\Omega}$. Il suffit donc de prouver qui'l existe une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $E^n(\mathfrak{U})$ élémentaire relativement à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ et telle que $H^n(\mathfrak{U}) = E^n(\mathfrak{U}) \bmod \bar{\Omega}$.

[61] D'après 8, on a $\overline{R - R_0} \subset \bar{S}_1$, de sorte que Ω_2 est un entourage de $\overline{R - R_0}$.

D'après 8.33, chaque simplexe φ^n de $H^n(\mathfrak{U})$ est (relativement à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$) d'espèce τ^{-1} ou d'espèce τ_ν^0, où $1 \leqq \nu \leqq \beta_0$. Si φ^n est d'espèce τ^{-1}, on a (v. 8.32) $\varphi^n = 0 \bmod \overline{R - R_0'} \subset \overline{R - R_0} \subset \overline{\Omega}$. Si φ^n est d'espèce τ_ν^0, où $\nu \in N'$, on a $\tau_\nu^0 \subset \Omega_1$; or chaque sommet U de φ^n rencontre τ_ν^0, de manière que $U \subset \Omega$ d'après la propriété 1° de la famille Φ; donc, ici encore, on a $\varphi^n = 0 \bmod \overline{\Omega}$.

Considérons le cas où le simplexe φ^n de $H^n(\mathfrak{U})$ est d'espèce τ_ν^0, où $\nu \in N''$. On a $\tau_\nu^0 \subset Q(\tau_\nu^0) \subset P(\tau_\nu^0) \subset W'_{r(\nu)}$. Lorsque $P(\tau_\nu^0) \subset \Omega_1$, on a de nouveau $\varphi^n = 0 \bmod \overline{\Omega}$; supposons donc que $P(\tau_\nu^0) - \Omega_1 \neq 0$ ce qui entraîne que $P(\tau_\nu^0)\,\Omega_2 = 0$.

Il suffit donc de démontrer l'énoncé suivant: Soit $\nu \in N''$, $P(\tau_\nu^0)\,\Omega_2 = 0$. Soit $E_\nu^n(\mathfrak{U})$ cette partie de la chaîne $H^n(\mathfrak{U})$ dont les simplexes sont d'espèce τ_ν^0. Il existe un nombre $c \in \mathfrak{R}$ tel que $E_\nu^n(\mathfrak{U}) = c\; k^n(\tau_\nu^0, \mathfrak{U})$.

Soit $\mathfrak{U}_1 \in \Phi$ un affinement de $\mathfrak{U}$ normal par rapport aux cycles mod $(R - P(\tau_\nu^0))$, pour chaque $\nu \in N''$. Comme $s(\mathfrak{U}) = s_0$, on voit sans peine qu'il existe une $(n - 1, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $C^{n-1}(\mathfrak{U}_1) \in M(\mathfrak{U}_1)$ telle que $C^{n-1}(\mathfrak{U}) = \pi\, C^{n-1}(\mathfrak{U}_1) \bmod \overline{R - R_0}$, $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U})$. Il existe une $(n, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $H^n(\mathfrak{U}_1)$ dans A telle que $H^n(\mathfrak{U}_1) \to C^{n-1}(\mathfrak{U}_1) \bmod \overline{R - R_0}$. On peut donc supposer que $H^n(\mathfrak{U}) = \pi\, H^n(\mathfrak{U}_1)$.

Ceci étant, d'après le lemme du n° 46, il existe une $(n, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $D^n(\mathfrak{U}_1)$ élémentaire [relativement à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$ et par suite aussi relativement à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$, v. 24 (3)] telle que $C^{n-1}(\mathfrak{U}_1) - F\, D^n(\mathfrak{U}_1) \subset \overline{R - R_0} + (R - W'_{r(\nu)})$. Comme $P(\tau_\nu^0) \subset W'_{r(\nu)}$, on a $P(\tau_\nu^0)\,(R - W'_{r(\nu)}) = 0$. Comme $P(\tau_\nu^0)\,\Omega_2 = 0$, $\Omega_2 \supset S_1 \supset \overline{R - R_0}$, on a $\overline{R - R_0} \subset R - P(\tau_\nu^0)$. Par suite $C^{n-1}(\mathfrak{U}_1) - F\, D^n(\mathfrak{U}_1) \subset R - P(\tau_\nu^0)$. D'autre part $H^n(\mathfrak{U}_1) \to C^{n-1}(\mathfrak{U}) \bmod \overline{R - R_0} \subset R - P(\tau_\nu^0)$. Par suite $H^n(\mathfrak{U}_1) - D^n(\mathfrak{U}_1)$ est un $(n, \mathfrak{U}_1)$-cycle mod $(R - P(\tau_\nu^0))$. Or soit (v. 19.2) $D^n(\mathfrak{U})$ une $(n, \mathfrak{U})$-chaîné élémentaire telle que $D^n(\mathfrak{U}) = \pi\, D^n(\mathfrak{U}_1) \bmod \overline{R - R_0}$. Evidemment $H^n(\mathfrak{U}) - D^n(\mathfrak{U})$ est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle essentiel mod $(R - P(\tau_\nu^0))$. D'après 14.2, il existe deux nombres $c_1, c_2 \in \mathfrak{R}$ dont un au moins $\neq 0$, tels que $c_1\;(H^n(\mathfrak{U}) - D^n(\mathfrak{U})) + c_2\, G^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod (R - Q(\tau_\nu^0))$. On a $c_1 \neq 0$ d'après la propriété 4° de la famille Φ. Donc il existe un nombre $c_0 \in \mathfrak{R}$ tel que $H^n(\mathfrak{U}) - D^n(\mathfrak{U}) - c_0\, G^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod [R - Q(\tau_\nu^0)]$. Il existe donc une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $X^n(\mathfrak{U}) \subset R - Q(\tau_\nu^0)$ et une $(n + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $Y^{n+1}(\mathfrak{U})$ telles que

$$(*) \qquad H^n(\mathfrak{U}) = D^n(\mathfrak{U}) + c_0\, G^n(\mathfrak{U}) + X^n(\mathfrak{U}) + F\, Y^{n+1}(\mathfrak{U})\,.$$

Or soit φ^n un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe d'espèce τ_ν^0 et soit U un sommet de φ^n. On a $Ut_\nu \neq 0$, d'où $U \subset \tau_\nu^0$, d'après la propriété 3° de la famille Φ. Puisque $\tau_\nu^0 \subset Q(\tau_\nu^0)$, la chaîne $X^n(\mathfrak{U})$ ne contient aucun simplexe d'espèce τ_ν^0. Puisque $U \subset \tau_\nu^0 \subset Q(\tau_\nu^0) \subset P(\tau_\nu^0) \subset R - \Omega_2$, U ne peut rencontrer aucun sommet U' de $\mathfrak{U}$ tel que $U'S \neq 0$ (v. 8.1, 2°). D'après 8.1, 3° il en résulte qu'aucun simplexe de la chaîne $F\, Y^{n+1}(\mathfrak{U})$ n'est d'espèce τ_ν^0. L'inclusion $U \subset R - \Omega_2$ montre encore que $\varphi^n \neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$. De $(*)$ il résulte maintenant que $E_\nu^n(\mathfrak{U})$ est cette partie de la chaîne $D^n(\mathfrak{U}) + c_0\, G^n(\mathfrak{U})$ dont les simplexes sont d'espèce ν. Donc [v. 19.1, 2°, 3° et 4° ainsi que 24, (3)] il existe un nombre $c \in \mathfrak{R}$ tel que $E_\nu^n(\mathfrak{U}) = c\; k^n(\tau_\nu^0, \mathfrak{U})$.

48. Le théorème du n° 44 étant démontré pour $p = 1$, supposons dorénavant que $2 \leqq p \leqq n$.

49.1. L'espace R étant normal, il existe un en semble ouvert Ω_1 tel que $S_1 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$. Soit $\mathfrak{P}_1^{p-1}$ un réseau gén. jouissant des propriétés suivantes: 1° $P \in \mathfrak{P}_1^{p-1}$, $P\bar{B}_1 \neq 0$ entraîne $P \subset B$ [v. 45.31 (1)]; 2° a étant un point quelconque de $R - S$, il existe un sommet du réseau $\mathfrak{W}'$ du n° 45.1 contenant la fermeture de tous les sommets de $\mathfrak{P}_1^{p-1}$ qui passent par a (v. 4.3 et 4.4); 3° la fermeture d'aucun sommet de $\mathfrak{P}_1^{p-1}$ ne rencontre simultanément $\bar{S}_1$ et $R - \Omega_1$.

49.2. En partant du réseau gén. $\mathfrak{P}_1^{p-1}$, construisons les réseaux gén. $\mathfrak{Q}^h$, $\mathfrak{P}^h$, $\mathfrak{P}_1^h$, $\mathfrak{P}_2^h$, $\mathfrak{P}_3^h$, $\mathfrak{P}_4^h$ $(0 \leqq h \leqq p-2)$ ainsi que $\mathfrak{P}_2^{p-1}$, $\mathfrak{P}_3^{p-1}$, $\mathfrak{P}_4^{p-1}$, $\mathfrak{P}_5^{p-1}$ selon la manière expliquée dans le n° 29, en y remplaçant p par $p-1$.

50.1. Supposons que $\mathfrak{z}$ soit un affinement du réseau $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_2$ du n° 45.4 (et donc aussi du réseau $\mathfrak{V}_1$ du n° 45.1) et que $\mathfrak{z}$ soit un affinement mod S de $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_5^{p-1}$.

Pour $0 \leqq h \leqq p-2$, $1 \leqq \nu \leqq \beta_h$ attachons à τ_ν^h des sommets $P_4^h(\tau_\nu^h)$, $P_3^h(\tau_\nu^h)$, $P_2^h(\tau_\nu^h)$, $P_1^h(\tau_\nu^h)$, $P^h(\tau_\nu^h)$, $Q^h(\tau_\nu^h)$ resp. de $\mathfrak{P}_4^h$, $\mathfrak{P}_3^h$, $\mathfrak{P}_2^h$, $\mathfrak{P}_1^h$, $\mathfrak{P}^h$, $\mathfrak{Q}^h$; pour $1 \leqq \nu \leqq \beta_{p-1}$ attachons à τ_ν^{p-1} des sommets $P_3^{p-1}(\tau_\nu^{p-1})$, $P_2^{p-1}(\tau_\nu^{p-1})$, $P_1^{p-1}(\tau_\nu^{p-1})$ resp. de $\mathfrak{P}_3^{p-1}$, $\mathfrak{P}_2^{p-1}$, $\mathfrak{P}_1^{p-1}$. Ceci soit fait selon la manière expliquée au n° 30, en y remplaçant p, $\mathfrak{Z}$, σ_i^h resp. par $p-1$, $\mathfrak{z}$, τ_ν^h.

50.2. Les réseaux gén. $\mathfrak{P}_1^h$ $(0 \leqq h \leqq p-1)$ étant des affinements de $\mathfrak{P}_1^{p-1}$, il résulte de 49.1, 2° qu'on peut attacher à chaque ν $(1 \leqq \nu \leqq \beta_0)$ un sommet $W'_{r(\nu)}$ du réseau $\mathfrak{W}'$ de manière que $\overline{P_1^h(\tau_\lambda^h)} \subset W'_{r(\nu)}$ pour $0 \leqq h \leqq p-1$ et pour chaque valeur de λ $(1 \leqq \lambda \leqq \beta_h)$ telle que τ_ν^0 soit un sommet de τ_λ^h.

50.3. Les réseaux gén. $\mathfrak{P}_1^h$ $(0 \leqq h \leqq p-1)$ étant des affinements de $\mathfrak{P}_1^{p-1}$, on ne peut pas (v. 49, 3°) avoir simultanément $\overline{P_1^h(\tau_\nu^h)} - \Omega_1 \neq 0$, $\overline{P_1^h(\tau_\nu^h)} \,.\, \overline{R - R_0} \neq 0$ $(0 \leqq h \leqq p-1, 1 \leqq \nu \leqq \beta_h)$.

51. Désignons par Φ la famille de tous les réseaux $\mathfrak{U}$ commodes (relativement à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$) tels que: 1° pour $0 \leqq h \leqq p-2$, $1 \leqq \nu \leqq \beta_h$, $U \in \mathfrak{U}$, la relation $U\,\overline{P_4^h(\tau_\nu^h)} \neq 0$ entraîne $U \subset P_3^h(\tau_\nu^h)$; 2° pour $0 \leqq h \leqq p-2$, $1 \leqq \nu \leqq \beta_h$, $U \in \mathfrak{U}$, la relation $U\,\overline{P_2^h(\tau_\nu^h)} \neq 0$ entraîne $U \subset P_1^h(\tau_\nu^h)$; 3° pour $1 \leqq \nu \leqq \beta_{p-1}$, $U \in \mathfrak{U}$, la relation $U\,\overline{P_3^{p-1}(\tau_\nu^{p-1})} \neq 0$ entraîne $U \subset P_2^{p-1}(\tau_\nu^{p-1})$; 4° pour $1 \leqq \nu \leqq \beta_0$, $U \in \mathfrak{U}$, les relations $UA \neq 0$, $U\,\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} \neq 0$ entraînent $A\,\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} \neq 0$; 5° pour $1 \leqq \nu \leqq \beta_{p-1}$, on a $G^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod (R - P_3^{p-1}(\tau_\nu^{p-1}))$; 6° pour $0 \leqq h \leqq p-2, 0 \leqq k \leqq p-2, 1 \leqq \nu \leqq \beta_h$, $1 \leqq \mu \leqq \beta_k$, les indices ν et μ étant tels que les noyaux de τ_ν^h et de τ_μ^k aient un point commun, la relation $U\,t(\tau_\mu^k) \neq 0$ (où $U \in \mathfrak{U}$) entraîne $U \subset P_4^h(\tau_\nu^h)$; 7° pour $1 \leqq \lambda \leqq \beta_0$, $1 \leqq \nu \leqq \beta_{p-1}$, les indices λ et ν étant tels que τ_λ^0 est un sommet de τ_ν^{p-1}, la relation $Ut_\lambda \neq 0$ (où $U \in \mathfrak{U}$) entraîne $U \in P_3^{p-1}(\tau_\nu^{p-1})$; 8° pour $U \in \mathfrak{U}$, la relation $US \neq 0$ entraîne $U\,P_1^0(\tau_\nu^0) = 0$ pour $1 \leqq \nu \leqq \beta_0$; 9° pour U', $U'' \in \mathfrak{U}$, les relations $U'S \neq 0$, $U''R'_0 \neq 0$ entraînent $U'U'' = 0$; 10° on a $s(\mathfrak{U})$=minimum, $s(\mathfrak{U})$ désignant le rang du module $M(\mathfrak{U})$ de toutes les $(n-p, \mathfrak{U})$-chaînes $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ dans A élémentaires (v. 19.1) par rapport à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$ et telles qu'il existe une $(n-p+1, \mathfrak{U})$-chaîne $H^{n-p+1}(\mathfrak{U})$ dans A telle que $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}) \to C^{n-p}(\mathfrak{U}) \bmod \overline{R - R_0}$; 11° pour $0 \leqq h \leqq$

$\leqq p-1$, $1 \leqq \nu \leqq \beta_h$, $U \in \mathfrak{U}$ la relation $U\,\overline{P_1^h(\tau_\nu^h)} \neq 0$ entraîne $U \subset W'_{r(\lambda)}$ pour chaque sommet τ_λ^0 de τ_ν^h; 12° $U \in \mathfrak{U}$, $U\Omega_1 \neq 0$ entraîne $U \subset \Omega$.

On voit sans peine (v. 32 et 47.1) que la famille Φ est parfaitement complète.

Nous démontrerons que l'énoncé du n° 44 est vrai pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$.

52.1. Choisissons un réseau $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0 \in \Phi$ et déterminons les affinements successifs $\mathfrak{U}_h \in \Phi$ $(1 \leqq h \leqq 2p-1)$ selon la manière expliquée au n° 33, en y remplaçant p, $\mathfrak{Z}$, σ_i^h resp. par $p-1$, $\mathfrak{z}$, τ_ν^h. Soit $\pi_h = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_{h+1}, \mathfrak{U}_h)$ $(0 \leqq h \leqq 2p-2)$.

52.2. Supposons donnée une chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U}_0) \in M(\mathfrak{U}_0)$ (v. 51, 10°). On doit démontrer (v. 44) qu'il existe une $(n-p+1)$-chaîne $E^{n-p+1}(\mathfrak{U}_0)$ dans $\bar{B}$ élémentaire par rapport à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ et telle que $E^{n-p+1}(\mathfrak{U}_0) \to C^{n-p}(\mathfrak{U}_0) \bmod \bar{\Omega}$. Comme $s(\mathfrak{U}_0) =$ $=$ minimum, il existe pour $1 \leqq h \leqq 2p-1$ une chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U}_h) \in M(\mathfrak{U}_h)$ telle que $\pi_h\, C^{n-p}(\mathfrak{U}_{h+1}) = C^{n-p}(\mathfrak{U}_h) \bmod \overline{R - R_0}$ pour $0 \leqq h \leqq 2p-2$. Puisque $C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1}) \in$ $\in M(\mathfrak{U}_{2p-1})$, il existe une $(n-p+1, \mathfrak{U}_{2p-1})$-chaîne $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1})$ dans A telle que $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1}) \to C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1}) \bmod \overline{R - R_0}$. Convenons généralement, si on a déterminé (pour $0 \leqq h \leqq 2p-2$) une certaine $\mathfrak{U}_{h+1}$-chaîne $D(\mathfrak{U}_{h+1})$, de désigner par $D(\mathfrak{U}_h)$ la chaîne $\pi_h\, D(\mathfrak{U}_{h+1})$. Alors, pour $0 \leqq h \leqq 2p-1$, $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_h)$ est une $(n-p+1, \mathfrak{U}_h)$-chaîne dans A telle que $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_h) \to C^{n-p}(\mathfrak{U}_h) \bmod \overline{R - R_0}$.

53.1. Rangeons les sommets intérieurs de $\mathfrak{z}$ dans la suite $\tau_1^0, \tau_2^0, \ldots, \tau_{\beta_0}^0$ de telle façon qu'il existe un entier β'_0 $(0 \leqq \beta'_0 \leqq \beta_0)$ tel que $P_1^0(\tau_\nu^0) - \Omega_1 \neq 0$ pour $1 \leqq \nu \leqq$ $\leqq \beta'_0$; $\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} \subset \Omega_1$ pour $\beta'_0 + 1 \leqq \nu \leqq \beta_0$. Pour $1 \leqq h \leqq n$, rangeons les h-simplexes intérieurs de $\mathfrak{z}$ dans la suite $\tau_1^h, \tau_2^h, \ldots, \tau_{\beta_h}^h$ de telle façon qu'il existe un entier β'_h $(0 \leqq \beta'_h \leqq \beta_h)$ tel que 1° pour $1 \leqq \nu \leqq \beta'_h$, on a $\lambda \leqq \beta'_0$ pour chaque sommet τ_λ^0 de τ_ν^h; 2° pour $\beta'_h + 1 \leqq \nu \leqq \beta_h$, le simplexe τ_ν^h possède un sommet τ_λ^0 tel que $\beta'_0 < \lambda$. Si $0 \leqq h \leqq p-1$, $1 \leqq \nu \leqq \beta'_h$, on a $\overline{P_1^h(\tau_\nu^h)} - \Omega_1 \neq 0$; en effet, d'après 51 (v. 30) on a $P_1^0(\tau_\lambda^0) \subset P_1^h(\tau_\nu^h)$ pour chaque sommet τ_λ^0 de τ_ν^h.

53.2. **Lemme.** On peut attacher à chaque couple d'indices h, ν, où $0 \leqq h \leqq p-2$, $1 \leqq \nu \leqq \beta'_h$, une $(n-p+h+2)$-chaîne $L^{n-p+h+2}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}_1)$ dans $\bar{B}$ de manière que: 1° pour $1 \leqq \nu \leqq \beta'_0$ il existe une $(n-p+1, \mathfrak{U}_1)$-chaîne élémentaire (rel. à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$) $E_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_1)$ telle que la chaîne

$$F\,L^{n-p+2}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_1) - H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_1) + E_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_1)$$

ne contient pas des simplexes situés dans $\overline{P_4^0(\tau_\nu^0)}$; 2° pour $0 \leqq h \leqq p-3$, $1 \leqq \nu \leqq$ $\leqq \beta'_{h+1}$, il existe une $(n-p+h+2, \mathfrak{U}_1)$-chaîne élémentaire (rel. à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$) $E_\nu^{n-p+h+2}(\mathfrak{U}_1)$ telle que la chaîne

$$F\,L^{n-p+h+3}(\tau_\nu^{h+1}, \mathfrak{U}_1) - \sum_{\mu=1}^{\beta_h} \eta_{\nu\mu}^h\, L^{n-p+h+2}(\tau_\mu^h, \mathfrak{U}_1) + E_\nu^{n-p+h+2}(\mathfrak{U}_1)$$

ne contient pas des simplexes situés dans $\overline{P_4^{h+1}(\tau_\nu^{h+1})}$; 3° pour $1 \leqq \nu \leqq \beta'_{p-1}$ il existe une $(n, \mathfrak{U}_1)$-chaîne élémentaire (rel. à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$) $E^n_\nu(\mathfrak{U}_1)$ telle que la chaîne

$$\sum_{\mu=1}^{\beta_{p-2}} \eta^{p-2}_{\nu\mu} L^n(\tau^{p-2}_\mu, \mathfrak{U}_1) + E^n_\nu(\mathfrak{U}_1)$$

soit un (n, R)-cycle mod $(R - P^{p-1}_2(\tau^{p-1}_\nu))$.

La démonstration sera donnée dans les n^{os} 53.21 – 53.25.

53.21. D'après le lemme du n° 46 [v. aussi 24 (3)], on peut attacher à chaque combinaison $r_0, r_1, \ldots, r_h$ $(0 \leqq h \leqq p - 1)$ d'indices $1, 2, \ldots, m$ une chaîne $\Delta^{n-p+h+1}_{r_0 r_1 \ldots r_h}(\mathfrak{U}_{2p-1})$, fonction alternée de $r_0, r_1, \ldots, r_h$, de manière que: 1°

$$(1) \qquad F\,\Delta^{n-p+1}_r(\mathfrak{U}_{2p-1}) - C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1}) \subset \overline{R - R_0} + (R - W'_r)$$

pour $1 \leqq r \leqq m$; 2°

$$(2) \qquad F\,\Delta^{n-p+h+1}_{r_0 r_1 \ldots r_h}(\mathfrak{U}_{2p-1}) - \sum_{u=0}^{h} (-1)^u \Delta^{n-p+h}_{r_0 \ldots r_{u-1} r_{u+1} \ldots r_h}(\mathfrak{U}_{2p-1})$$
$$\subset \overline{R - R_0} + (R - \prod_{u=0}^{h} W'_{r_u})$$

pour chaque combinaison $r_0, r_1, \ldots, r_h$ $(1 \leqq h \leqq p - 1)$ de $1, 2, \ldots, m$.

Ceci étant, soit $0 \leqq h \leqq p - 1$, $1 \leqq \nu \leqq \beta'_h$ et soient $\tau^0_{\lambda_0}, \tau^0_{\lambda_1}, \ldots, \tau^0_{\lambda_h}$ tous les sommets de τ^h_ν écrits dans un tel ordre que

$$\tau^h_\nu = +\,(\tau^0_{\lambda_0}, \tau^0_{\lambda_1}, \ldots, \tau^0_{\lambda_h}).$$

Distinguons deux cas. En premier lieu, supposons que les indices $r(\lambda_0), r(\lambda_1), \ldots, r(\lambda_h)$ ne soient pas tous distincts; on pose dans ce cas $E^{n-p+h+1}_\nu(\mathfrak{U}_{2p-1}) = 0$. En second lieu, les indices $r(\lambda_0), r(\lambda_1), \ldots, r(\lambda_h)$ soient distincts l'un de l'autre; on pose dans ce cas $E^{n-p+h+1}_\nu(\mathfrak{U}_{2p-1}) = \Delta^{n-p+h+1}_{r(\lambda_0), r(\lambda_1), \ldots, r(\lambda_h)}(\mathfrak{U}_{2p-1})$.

Or je dis que: 1° pour $1 \leqq \nu \leqq \beta'_0$

$$(3) \qquad F\,E^{n-p+1}_\nu(\mathfrak{U}_{2p-1}) - C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1}) \subset R - P^0_1(\tau^0_\nu);$$

2° pour $1 \leqq h \leqq p - 1$, $1 \leqq \nu \leqq \beta'_h$

$$(4) \qquad F\,E^{n-p+h+1}_\nu(\mathfrak{U}_{2p-1}) - \sum_{\mu=1}^{\beta'_{h-1}} \eta^{h-1}_{\nu\mu} E^{n-p+h}_\mu(\mathfrak{U}_{2p-1}) \subset R - P^h_1(\tau^h_\nu).$$

Supposons, par impossible, qu'il existe un couple h, ν $(0 \leqq h \leqq p - 1, 1 \leqq \nu \leqq \beta'_h)$ tel que la relation (3) ou (4) correspondante ne soit pas vraie. La chaîne considérée contient alors un simplexe φ^{n-p+h} qui n'est pas contenu dans $R - P^h_1(\tau^h_\nu)$, de manière que $\mathfrak{Z} \subset P^h_1(\tau^h_\nu)$, $\mathfrak{Z}$ étant le noyau de φ^{n-p+h}. Le simplexe τ^h_ν tombe nécessairement sous le second des deux cas distingués plus haut, car on voit sans peine qu'autrement la chaîne considérée serait égale à zéro. D'après (1) et (2), on a donc

$$\mathfrak{J}\,\overline{R - R_0} + [\mathfrak{J} - \prod_{u=0}^{h} W_{r(\lambda_u)}] \neq 0 .$$

Mais la supposition $1 \leqq \nu \leqq \beta'_h$ donne (v. 53.1) $\overline{P_1^h(\tau_\nu^h)} - \Omega_1 \neq 0$, d'où (v. 50.3) $\overline{P_1^h(\tau_\nu^h)} . \overline{R - R_0} = 0$ et donc $\mathfrak{J}\,\overline{R - R_0} = 0$; d'autre part, puisque $\mathfrak{J} \subset \overline{P_1^h(\tau_\nu^h)}$, on a $\mathfrak{J} \subset \prod_{u=0}^{h} W'_{r(\lambda_u)}$ d'après 51, 11°. Incidemment, nous avons remarqué que

$$\overline{P_1^h(\tau_\nu^h)} . \overline{R - R_0} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqq h \leqq p - 1,\ 1 \leqq \nu \leqq \beta'_h . \tag{5}$$

D'après 19.2, il existe des chaînes élémentaires rel. à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$: $E_\nu^{n-p+h+1}(\mathfrak{U}_k)$ $(0 \leqq h \leqq \leqq p - 1, 0 \leqq k \leqq 2p - 2, 1 \leqq \nu \leqq \beta'_h)$ telles que $\pi_h E_\nu^{n-p+h+1}(\mathfrak{U}_{k+1}) = E_\nu^{n-p+h+1}(\mathfrak{U}_k)$ pour $0 \leqq k \leqq 2p - 2$. Les relations (3) et (4) restent naturellement vraies si on y remplace $\mathfrak{U}_{2p-1}$ par $\mathfrak{U}_k$ $(0 \leqq k \leqq 2p - 2)$.

53.211. Il résulte de la remarque du n° 46.1 qu'on peut s'arranger de façon qu'on ait $E_\nu^{n-p+h+1}(\mathfrak{U}_{2p-1}) \neq 0$ seulement s'il existe un sommet τ_λ^0 de τ_ν^h tel que $b_{r(\lambda)} \in t(\tau_\mu^p)$, l'indice μ $(1 \leqq \mu \leqq \beta_p)$ étant tel que le coefficient de $k^{n-p}(\tau_\mu^p, \mathfrak{U}_{2p-1})$ dans la chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1})$ soit $\neq 0$ [v. 40 (3)]. On a alors la propriété suivante: $E_\nu^{n-p+h+1}(\mathfrak{U}_{2p-1}) \neq \neq 0$ $(0 \leqq h \leqq p - 1, 1 \leqq \nu \leqq \beta'_h)$ entraîne que $\overline{P_1^h(\tau_\nu^h)} \subset B_1$.

Démonstration. Soit τ_λ^0 le sommet de τ_ν^h tel que $b_{r(\lambda)} \in t(\tau_\mu^p)$ et soit τ_ϱ^0 un sommet arbitraire de τ_μ^p de manière que $b_{r(\lambda)} \in P_1^0(\tau_\varrho^0)$. Soit U un sommet d'un simplexe de la chaîne $k^{n-p}(\tau_\mu^p, \mathfrak{U}_{2p-1})$. La chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ étant située dans A, on a $UA \neq 0$; d'autre part $U\,P_1^0(\tau_\varrho^0) \neq 0$ d'après 19.3. Comme $\mathfrak{U}_{2p-1} \in \Phi$, il en résulte (v. 51, 4°) que $A\,\overline{P_1^0(\tau_\varrho^0)} \neq 0$. Le réseau gén. $\mathfrak{P}_1^0$ étant un affinement de $\mathfrak{P}_1^{p-1}$, on déduit de 49.1, 2° qu'il existe un indice s tel que $\overline{P_1^0(\tau_\varrho^0)} \subset W'_s$. Comme $b_{r(\lambda)} \in P_1^0(\tau_\varrho^0)$, $A\,\overline{P_1^0(\tau_\varrho^0)} \neq 0$, on a $W'_{r(\lambda)} . W'_s \neq 0$, $AW'_s \neq 0$, d'où $W'_{r(\lambda)} \subset B_1$ d'après 45.31. Or on a $\overline{P_1^h(\tau_\nu^h)} \subset W'_{r(\lambda)}$ d'après 50.2.

53.22. (Cf. 34.1.) Soit $1 \leqq \nu \leqq \beta'_0$. Comme

$$H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1}) \to C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1}) \quad \mathrm{mod}\, \overline{R - R_0}\,,$$

on déduit de (3) et (5) que

$$F[H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1}) - E_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1})] \subset R - P_1^0(\tau_\nu^0) . \tag{6}$$

Désignons par $H^{n-p+1}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-1})$ cette partie de la chaîne $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1}) - - E_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1})$ dont les simplexes sont situés dans $\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)}$ et soit

$$\Gamma^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1}) = F\,H^{n-p+1}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-1}) . \tag{7}$$

Soit φ^{n-p} un simplexe de la chaîne $\Gamma^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1})$. Evidemment φ^{n-p} est situé dans $\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)}$. Plus précisément on peut prouver que φ^{n-p} est situé dans $\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} - P_2^0(\tau_\nu^0)$.

A cet effet, il suffit de démontrer qu'aucun sommet U de φ^{n-p} ne peut rencontrer $P_2^0(\tau_\nu^0)$. Supposons le contraire. D'après 51, 2° on a alors $U \subset P_1^0(\tau_\nu^0)$. Il résulte donc de (6) que U est un sommet de

$$(*) \qquad H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1}) - E_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1}) - H^{n-p+1}(\tau_\nu^0, U_{2p-1}),$$

ce qui est une contradiction, car $U \subset P_1^0(\tau_\nu^0)$, tandis qu'aucun simplexe de la chaîne $(*)$ n'est situé dans $\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)}$. Il est ainsi démontré que $\Gamma^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1})$ est un $(n-p, \mathfrak{U}_{2p-1})$-cycle dans $\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} - P_2^0(\tau_\nu^0)$. Donc $\Gamma^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-2})$ est un $(n-p, \mathfrak{U}_{2p-2})$-cycle essentiel dans $\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} - P_2^0(\tau_\nu^0)$. Par suite, il existe une $(n-p+1, \mathfrak{U}_{2p-2})$-chaîne

$$(8) \qquad D_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-2}) \subset \overline{P^0(\tau_\nu^0)} - P_3^0(\tau_\nu^0)$$

telle que

$$(9) \qquad H^{n-p+1}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-2}) - D_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-2})$$

est un $(n-p+1, \mathfrak{U}_{2p-2})$-cycle, situé nécessairement dans $\overline{P^0(\tau_\nu^0)}$. Donc

$$H^{n-p+1}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-3}) - D_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-3})$$

est un $(n-p+1, \mathfrak{U}_{2p-3})$-cycle essentiel dans $\overline{P^0(\tau_\nu^0)}$, de manière qu'il existe une $(n-p+2, \mathfrak{U}_{2p-3})$-chaîne $L^{n-p+2}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-3})$ dans $\overline{Q^0(\tau_\nu^0)}$ telle que

$$L^{n-p+2}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-3}) \to H^{n-p+1}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-3}) - D_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-3}).$$

D'après (9) on a pour $0 \leqq k \leqq 2p-3$ (v. la fin du n° 53.21)

$$(10) \qquad \begin{aligned} &F L^{n-p+2}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_k) - H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_k) + E_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_k) = \\ &= [H^{n-p+1}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_k) + E_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_k) - H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_k)] - D_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_k). \end{aligned}$$

Chaque simplexe φ^{n-p+1} de la chaîne [...] à droite de (10) est (v. 19.2) la projection d'un $\mathfrak{U}_{2p-1}$-simplexe ψ^{n-p+1} et, en vertu de la définition de la chaîne $H^{n-p+1}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-1})$, le simplexe ψ^{n-p+1} n'est pas situé dans $\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)}$. Par suite le noyau de ψ^{n-p+1} est un sous-ensemble de $R - P_1^0(\tau_\nu^0)$; donc le noyau de φ^{n-p+1} rencontre $R - P_1^0(\tau_\nu^0)$; il en résulte qu'aucun sommet U de φ^{n-p+1} n'est un sous-ensemble de $P_1^0(\tau_\nu^0)$, d'où (v. 51, 2°) $U\,\overline{P_2^0(\tau_\nu^0)} = 0$ pour chaque sommet U de φ^{n-p+1}. Donc φ^{n-p+1} n'est pas situé dans $\overline{P_2^0(\tau_\nu^0)} \supset \overline{P_4^0(\tau_\nu^0)}$. D'après (8), chaque sommet U de $D_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_k)$ rencontre $R - P_3^0(\tau_\nu^0)$, d'où $U\,\overline{P_4^0(\tau_\nu^0)} = 0$ d'après 51, 1°. Il est ainsi démontré qu'aucun simplexe de la chaîne (10) n'est situé dans $\overline{P_4^0(\tau_\nu^0)}$, ce qui est d'accord avec 53.2, 1°.

53.23. (Cf. 34.2.) Supposons généralement que, pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq p-3)$ on ait déjà attaché à chaque τ_ν^h $(1 \leqq \nu \leqq \beta_h')$ une $(n-p+h+2, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$-chaîne $L^{n-p+h+2}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$ dans $Q^h(\tau_\nu^h)$ de manière que pour $1 \leqq \nu \leqq \beta_h'$

aucun simplexe de la chaîne[62]

$$(11)\qquad F\,L^{n-p+h+2}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}_k) - \sum_{\mu=1}^{\beta'_{h-1}} \eta_{\nu\mu}^{h-1}\, L^{n-p+h+1}(\tau_\mu^{h-1}, \mathfrak{U}_k) + E_\nu^{n-p+h+1}(\mathfrak{U}_k)$$
$$(0 \leqq k \leqq 2p - 2h - 3)$$

ne soit situé dans $\overline{P_4^h(\tau_\nu^h)}$. Il s'agit d'attacher à chaque τ_ν^{h+1} $(1 \leqq \nu \leqq \beta'_{h+1})$ une $(n - p + h + 3, \mathfrak{U}_{2p-2h-5})$-chaîne $L^{n-p+h+3}(\tau_\nu^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-5})$ dans $\overline{Q^{h+1}(\tau_\nu^{h+1})}$ de manière qu'aucun simplexe de la chaîne

$$F\,L^{n-p+h+3}(\tau_\nu^{h+1}, \mathfrak{U}_k) - \sum_{\mu=1}^{\beta'_h} \eta_{\nu\mu}^h\, L^{n-p+h+2}(\tau_\mu^h, \mathfrak{U}_k) + E_\nu^{n-p+h+2}(\mathfrak{U}_k)$$
$$(0 \leqq k \leqq 2p - 2h - 5)$$

ne soit situé dans $\overline{P_4^{h+1}(\tau_\nu^{h+1})}$. On arrive à ce but par un procédé presque identique à celui du n° 34.2 de manière qu'il ne semble pas nécessaire de répéter ici cette construction. Au lieu de $M^{n-p+h+1}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-1})$, p. ex., on doit maintenant poser

$$M^{n-p+h+2}(\tau_\nu^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-3}) =$$
$$= \sum_{\mu=1}^{\beta'_h} \eta_{\nu\mu}^h\, L^{n-p+h+2}(\tau_\mu^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-3}) + E_\nu^{n-p+h+2}(\mathfrak{U}_{2p-2h-3})\,.$$

Pour démontrer qu'aucun simplexe de la chaîne $F\,M^{n-p+h+2}(\tau_\nu^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$ n'est situé dans $\overline{P_2^{h+1}(\tau_\nu^{h+1})}$, on doit s'appuyer sur le fait que la chaîne

$$(12)\qquad F\,E_\nu^{n-p+h+2}(\mathfrak{U}_{2p-2h-3}) - \sum_{\mu=1}^{\beta'_h} \eta_{\nu\mu}^h\, E_\mu^{n-p+h+1}(\mathfrak{U}_{2p-2h-3})$$

possède la même propriété; la validité de ce fait résulte de (4) en vertu de 51, 2°.

53.24. (Cf. 34.3.) En procédant de la manière indiquée on finit par construire les chaînes $L^n(\tau_\nu^{p-2}, \mathfrak{U}_1)$ $(1 \leqq \nu \leqq \beta'_{p-2})$ et on démontre comme dans 34.3, en s'appuyant de nouveau sur (4), que la chaîne

$$M^n(\tau_\nu^{p-1}, \mathfrak{U}_1) = \sum_{\mu=1}^{\beta'_{p-2}} \eta_{\nu\mu}^{p-2}\, L^n(\tau_\mu^{p-2}, \mathfrak{U}_1) + E_\nu^n(\mathfrak{U}_1) \quad (1 \leqq \nu \leqq \beta'_{p-1})$$

est un $(n, \mathfrak{U}_1)$-cycle mod $\overline{P_1^{p-1}(\tau_\nu^{p-1})} - P_2^{p-1}(\tau_\nu^{p-1})$ dans $\overline{P_1^{p-1}(\tau_\nu^{p-1})}$.

53.25. (Cf. 34.4.) Si l'indice ν $(1 \leqq \nu \leqq \beta'_0)$ est tel que $\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)}$ n'est pas un sous-ensemble de B_1, on a $E_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1}) = 0$ d'après 53.211. En outre on a $A\,\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} = 0$; en effet, puisque (v. 50.2) $\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} \subset W'_{r(\lambda)}$, dans le cas contraire on aurait $A\,W'_{r(\lambda)} \neq 0$, d'où (v. 45.31) $W'_{r(\lambda)} \subset B_1$, ce qui donnerait la contradiction $\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} \subset B_1$. Il en résulte que (v. 53.22) $H^{n-p+1}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-1}) = 0$; en effet, U étant un sommet d'un simplexe

[62] Pour $h = 0$ on doit remplacer (11) par le premier membre de (10).

φ de cette chaîne supposée non vide, φ est (puisque $E_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1}) = 0$) un simplexe de la chaîne $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1})$ située dans A, d'où $UA \neq 0$; d'autre part, $U\,\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} \neq 0$ d'après la définition même de $H^{n-p+1}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-1})$; comme $\mathfrak{U}_{2p-1} \in \Phi$, on arrive (v. 51,4°) à la contradiction $A\,\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} \neq 0$. Puisque $H^{n-p+1}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-1}) = 0$, on voit sans peine qu'il est permis de poser $L^{n-p+2}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-3}) = 0$.

On démontre de la même manière qu'on peut supposer que $L^{n-p+h+2}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-3}) \neq 0$ seulement dans le cas où le simplexe τ_ν^h possède un sommet τ_λ^0 tel que $\overline{P_1^0(\tau_\lambda^0)} \subset B_1$. Or la chaîne $L^{n-p+h+2}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$ est située dans $\overline{Q^h(\tau_\nu^h)}$; comme $\overline{P_1^0(\tau_\lambda^0)}\,.\,\overline{Q^h(\tau_\nu^h)} \supset \tau_\lambda^0 \neq 0$, l'inclusion $\overline{P_1^0(\tau_\lambda^0)} \subset B_1$ entraîne $B_1\,\overline{Q^h(\tau_\nu^h)} \neq 0$, ce qui donne $Q^h(\tau_\nu^h) \subset B$ (v. 49.1, 1°), car $\mathfrak{Q}^h$ est un affinement de $\mathfrak{P}_1^{p-1}$. Donc les chaînes $L^{n-p+h+2}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$ et par suite aussi les chaînes $L^{n-p+h+2}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}_1)$ sont situées dans $\bar{B}$.

54.1. On peut (cf. 35) modifier un nombre fini de fois la chaîne $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_1)$ ainsi que les chaînes $L^{n-p+h+2}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}_1)$ $(0 \leqq h \leqq p-2,\ 1 \leqq \nu \leqq \beta_h')$ de manière que $*H$ et $*L$ étant les éléments modifiés, on ait les propriétés suivantes: 1° chaque simplexe de chaque différence $*H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_1) - H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_1)$ ou $*L^{n-p+h+2}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}_1) - L^{n-p+h+2}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}_1)$ est une face d'un simplexe de $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_1)$ ou de $*L^{n-p+k+2}(\tau_\mu^k, \mathfrak{U}_1)$ de manière que les chaînes modifiées restent situées dans $\bar{B}$; 2° les relations 1°, 2°, 3° du n° 53.2 restent vraies [sans qu'on y change les chaînes élémentaires $E_\nu^{n-p+h+1}(\mathfrak{U}_1)$] pour les chaînes modifiées $*H$, $*L$; 3° $*H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_1) - H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_1)$ est un $(n-p+1, \mathfrak{U}_1)$-cycle homologue à zéro dans $\bar{B}$.

Le résultat de toutes ces modifications est que pour $0 \leqq h \leqq p-2$, $0 \leqq u \leqq h$, $0 \leqq q \leqq h$ les chaînes modifiées possèdent la propriété suivante: Si les simplexes τ_μ^u, τ_ϱ^q $(1 \leqq \mu \leqq \beta_u',\ 1 \leqq \varrho \leqq \beta_q')$ sont des faces du simplexe τ_ν^h, alors les simplexes d'espèce τ_ϱ^q (rel. à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$) de la chaîne $L^{n-p+u+2}(\tau_\mu^u)$ (modifiée) constituent une chaîne qui est 1° $= 0$ pour $q \neq p-u-2$, 2° $= a\,k^{n-q}(\tau_\varrho^q)$ pour $q = p-u-2$ $(a \in \mathfrak{R})$.

Pour voir que ces modifications sont réalisables on procède exactement comme dans les n^{os} 36–41.[63] Il faut seulement remplacer p, C, $\mathfrak{Z}$, σ, α_i resp. par $p-1$, H, $\mathfrak{z}$, τ, β_i' et dire qu'une $\mathfrak{U}_1$-chaîne ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce τ_ϱ^q $(1 \leqq \varrho \leqq \beta_q')$ si elle a la forme $a\,k^{n-q}(\tau_\varrho^q, \mathfrak{U}_1)$ $(a \in \mathfrak{R})$.

54.2. Ces modifications étant effectuées, pour la démonstration du théorème du n° 44 il suffit évidemment de démontrer que la chaîne $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_0)$ modifiée est égale mod $\bar{\Omega}$ à une chaîne élémentaire (rel. à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$).

On commence par le lemme A_u $(0 \leqq u \leqq p-2)$: Supposons que τ_μ^u, τ_ϱ^q soient des faces du τ_ν^p $(1 \leqq \mu \leqq \beta_u',\ 1 \leqq \varrho \leqq \beta_q',\ 1 \leqq \nu \leqq \beta_p')$. Soit $e^{n-p+u+2}(\tau_\mu^u, \tau_\varrho^q, \mathfrak{U}_0)$ cette

[63] Si $\mathfrak{U} \in \Phi$, si le $\mathfrak{U}$-simplexe φ d'espèce τ_ϱ^q $(1 \leqq \varrho \leqq \beta_q')$ est une face du $\mathfrak{U}$-simplexe ψ, ψ ne peut pas être d'espèce τ^{-1}. Il suffit (v. 8.32) de démontrer que le noyau $\mathfrak{J}$ de ψ rencontre $R_0 \subset R_0'$. Dans le cas contraire, chaque sommet U de φ rencontrerait $R - R_0 \subset S_1$ (v. 8 et 44). Or, puisque $\varrho \leqq \beta_q'$, on a (v. 53.1) $\overline{P_1^0(\tau_\lambda^0)} - \Omega_1 \neq 0$ et par suite (v. 49.1, 3°) $\overline{P_1^0(\tau_\lambda^0)}\,S_1 = 0$ pour chaque sommet τ_λ^0 de τ_ϱ^q; d'autre part, $U \subset P_4^0(\tau_\lambda^0) \subset \overline{P_1^0(\tau_\lambda^0)}$ d'après 51, 6°.

partie de la chaîne $L^{n-p+u+2}(\tau_\mu^u, \mathfrak{U}_0)$ (modifiée) dont les simplexes sont d'espèce τ_ϱ^q. Alors la chaîne $e^{n-p+u+2}(\tau_\mu^u, \tau_\varrho^q, \mathfrak{U}_0)$ est 1° $= 0$ pour $q \neq p - u - 2$; 2° $= a\, k^{n-q}(\tau_\varrho^q, \mathfrak{U}_0)$ $(a \in \mathfrak{R})$ pour $q = p - u - 2$.

Le démonstration par récurrence du lemme Λ_u étant parfaitement analogue à celle du lemme du n° 42.2, nous pouvons la laisser au soin du lecteur.

54.3. Le lemme Λ_0 étant vrai, il est facile de compléter la démonstration du théorème du n° 44 en démontrant que la chaîne $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_0)$ est égale à une chaîne élémentaire:

Soit φ^{n-p+1} un simplexe $\neq 0 \bmod \bar{\Omega}$ de la chaîne $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_0)$. D'après 8.32 et 8.33, φ^{n-p+1} est d'espèce τ_ϱ^q, où $0 \leqq q \leqq p - 1$. Soit U un sommet arbitraire de φ^{n-p+1}. D'après 51, 6° on a $U \subset P_4^0(\tau_\lambda^0) \subset P_1^0(\tau_\lambda^0)$ pour chaque sommet τ_λ^0 de τ_ϱ^q; or $\varphi^{n-p+1} \neq 0 \bmod \bar{\Omega}$, de manière que $U - \bar{\Omega} \neq 0$, d'où $\overline{P_1^0(\tau_\lambda^0)} - \Omega_1 \neq 0$. On a donc (v. 53.1), $1 \leqq \varrho \leqq \beta_q'$.

Il suffit donc de démontrer que, $e^{n-p+1}(\tau_\varrho^q, \mathfrak{U}_0)$ $(0 \leqq q \leqq p - 1, 0 \leqq \varrho \leqq \beta_q')$ étant cette partie de $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_0)$ dont les simplexes sont d'espèce τ_ϱ^q, la chaîne $e^{n-p+1}(\tau_\varrho^q, \mathfrak{U}_0)$ est: 1° $= 0$ pour $q \neq p - 1$; 2° $= a_\varrho\, k^{n-q}(\tau_\varrho^q, \mathfrak{U}_0)$ $(a_\varrho \in \mathfrak{R})$ pour $q = p - 1$. Cette démonstration, analogue à celle du n° 42.5, sera aussi laissée au soin du lecteur.

VI.

55. Dans tout ce Chapitre, supposons donnée une valeur fixe de p $(0 \leqq p \leqq n)$. On suppose la validité de tous les axiomes des Chap. I et II ainsi que celle des axiomes G^k (v. 21) pour $n - p \leqq k \leqq n - 1$ et des axiomes H^k (v. 27) pour $\max(0, n - p - 1) \leqq k \leqq n - 2$.

56. Soient A_1 et A_2 deux sous-ensembles bicompacts données de R, assujettis à la condition $A_1A_2S = 0$. Soit $\Gamma_1(\Gamma_2)$ la famille de tous les p-cycles $[(n - p)$-cycles$]$ mod A_1S dans A_1 (mod A_2S dans A_2). Le but de ce Chapitre est d'attacher à chaque couple $C^p \in \Gamma_1$, $C^{n-p} \in \Gamma_2$ un nombre $C^pC^{n-p} \in \mathfrak{R}$ jouissant des propriétés suivantes: 1° $(rC^p)\, C^{n-p} = C^p(rC^{n-p}) = r(C^pC^{n-p})$ pour $r \in \mathfrak{R}$, $C^p \in \Gamma_1$, $C^{n-p} \in \Gamma_2$; 2° $(C_1^p + C_2^p)\, C^{n-p} = C_1^pC^{n-p} + C_2^pC^{n-p}$ pour $C_1^p \in \Gamma_1$, $C_2^p \in \Gamma_1$, $C^{n-p} \in \Gamma_2$; 3° $C^p(C_1^{n-p} + C_2^{n-p}) = C^pC_1^{n-p} + C^pC_2^{n-p}$ pour $C^p \in \Gamma_1$, $C_1^{n-p} \in \Gamma_2$, $C_2^{n-p} \in \Gamma_2$; 4° $C^pC^{n-p} = 0$ pour $C^p \in \Gamma_1$, $C^{n-p} \in \Gamma_2$ si l'on a soit $C^p \sim 0 \bmod A_1S$ dans A_1, soit $C^{p-n} \sim 0 \bmod A_2S$ dans A_2. Remarquons qu'il résulte de 1°, 2°, 3° et 4° que $C_1^pC_1^{n-p} = C_2^pC_2^{n-p}$ pour C_1^p, $C_2^p \in \Gamma_1$, C_1^{n-p}, $C_2^{n-p} \in \Gamma_2$, si l'on a $C_1^p \sim C_2^p \bmod A_1S$ dans A_1 et $C_1^{n-p} \sim C_2^{n-p} \bmod A_2S$ dans A_2.

57. Commençons par le cas $p = 0$. Soit Ξ_2 la famille de tous les réseaux $\mathfrak{Z} \in \Xi$ (v. 23) jouissant de la propriété suivante: Z_1, Z_2, Z_3 étant trois sommets de $\mathfrak{Z}$ tels que $Z_1Z_2 \neq 0$, $Z_1Z_3 \neq 0$, $Z_1A_2 \neq 0$, $Z_3A_1 \neq 0$ on a $Z_2S = 0$. Puisque $A_1A_2S = 0$, on voit sans peine (v. 1.3) que la famille Ξ_2 est parfaitement complète. Pour $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$ désignons par $\Delta(\mathfrak{Z})$ la famille de tous les réseaux fermés $\mathfrak{T}$ correspondant (v. 8) à $\mathfrak{Z}$

et vérifiant la condition du n° 25, c'est-à-dire tels que (dans les notations habituelles) $K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) \neq 0$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ et $K^{n-1}(\sigma_i^1, \mathfrak{U}) \neq 0$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_1)$ pour chaque réseau commode $\mathfrak{U}$ suffisamment fin. $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$ et $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$ étant choisi, désignons par $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$ la famille de tous les réseaux commodes $\mathfrak{U}$ tels que, outre les conditions $K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) \neq 0$, $K^{n-1}(\sigma_i^1, \mathfrak{U}) \neq 0$ on ait encore $\mathfrak{U} \in \Psi_1$ (v. 20.2) et que $\mathfrak{U}$ soit un affinement de $\mathfrak{Z}$; la famille $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$ est évidemment parfaitement complète.

Ceci étant, soient donnés les cycles $C^0 \in \Gamma_1$ et $C^n \in \Gamma_2$. Choisissons $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$, $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$, $\mathfrak{U} \in \Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$. Il existe des nombres $a_i \in \mathfrak{R}$ tels que

$$C^0(\mathfrak{Z}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} a_i \sigma_i^0 \mod S;$$

d'après 20.3, il existe des nombres $b_i \in \mathfrak{R}$ tels que

$$C^n(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} b_i K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) \mod \overline{R - R_0}\,.$$

Posons $C^0 C^n = \sum_{i=1}^{\alpha_0} a_i b_i$. Il s'agit de prouver que ce nombre est déterminé sans ambiguité par les deux cycles C^0 et C^n et que les propriétés 1°–4° du n° 56 sont vérifiées.

L'égalité $\sum_{i=1}^{\alpha_0} b_i K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) = 0 \mod \overline{R - R_0}$ est évidemment (v. 19.1, 1°, 2°) possible seulement si $b_i = 0$ pour chaque i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$. L'égalité $\sum_{i=1}^{\alpha_0} a_i \sigma_i^0 = 0 \mod S$ est évidemment possible seulement si $a_i = 0$ pour chaque i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$. Donc le nombre $\sum_{i=1}^{\alpha_0} a_i b_i$ est bien déterminé, si on a choisi les réseaux $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$, $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$, $\mathfrak{U} \in \Phi\,(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$.

Nous venons de remarquer que les nombres b_i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ sont bien déterminés ($\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{U}$ étant choisis). Or il résulte de la démonstration du n° 20.3 que $C^n - b_i G^n \sim 0 \mod (R - P_i)$ pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$ et cette condition détermine les nombres b_i sans ambiguité, en vertu de 20.2, 1°. Il en résulte que, $\mathfrak{Z}$ étant donné, le nombre $\sum_{i=1}^{\alpha_0} a_i b_i$ est indépendant du choix de $\mathfrak{T}$ et de $\mathfrak{U}$. De plus on voit que ce nombre reste inaltéré, si on remplace C^n par un cycle $C_1^n \sim C^n \mod A_2 S$ dans A_2.

Remarque. Pour $1 \leqq j \leqq \alpha_1$, on a $\sum_{i=1}^{\alpha_0} \eta_{ji}^0 b_i = 0$.

Démonstration. Puisque $C^n \to 0 \mod S$, on a

$$\sum_{i=1}^{\alpha_0} b_i K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) \to 0 \mod \overline{R - R_0}\,,$$

d'où (v. 19.1, 3°)

$$\sum_{j=1}^{\alpha_1} \sum_{i=1}^{\alpha_0} \eta_{ji}^0 b_i K^{n-1}(\sigma_j^1, \mathfrak{U}) = 0 \bmod \overline{R - R_0}$$

et par suite (v. 19.1, 1° et 2°)

$$\sum_{i=1}^{\alpha_0} \eta_{ji}^0 b_i = 0 .$$

Remplaçons $C^0(\mathfrak{Z})$ par $C_1^0(\mathfrak{Z}) \sim C^0(\mathfrak{Z}) \bmod A_1 S$ dans A_1. On a

$$C_1^0(\mathfrak{Z}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} a_0' \sigma_i^0 \bmod S .$$

De plus, il existe des nombres $c_j \in \mathfrak{R}$ tels que

$$\sum_{j=1}^{\alpha_1} c_j \sigma_j^1 \rightarrow \sum_{i=1}^{\alpha_0} (a_i' - a_i)\, \sigma_i^0 \bmod S ,$$

d'où

$$a_i' - a_i = \sum_{j=1}^{\alpha_1} \eta_{ji}^0 c_j .$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{\alpha_0} a_i' b_i - \sum_{i=1}^{\alpha_0} a_i b_i = \sum_{j=1}^{\alpha_1} c_j \sum_{i=1}^{\alpha_0} \eta_{ji}^0 b_i = 0$$

d'après la remarque. Donc le nombre $\sum_{i=1}^{\alpha_0} a_i b_i$ reste inaltéré en remplaçant $C^0(\mathfrak{Z})$ par $C_1^0(\mathfrak{Z})$. La propriété 4° du n° 57 est donc vraie; les propriétés 1°, 2°, 3° du n° 57 sont banales.

On doit encore prouver que le nombre $\sum_{i=1}^{\alpha_0} a_i b_i$ reste inaltéré en remplaçant $\mathfrak{Z}$ par un autre réseau $\mathfrak{z} \in \Xi_2$. La famille Ξ_2 étant complète, il suffit de faire cette démonstration en supposant que $\mathfrak{z}$ soit un affinement de $\mathfrak{Z}$. Choisissons un réseau fermé $\mathfrak{t}$ correspondant à $\mathfrak{z}$ (et satisfaisant rel. à $\mathfrak{z}$ à la condition du n° 25). Choisissons une projection $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$ et déterminons le réseau fermé $\mathfrak{T}$ correspondant à $\mathfrak{Z}$ selon le n° 24; c'est permis, car $\mathfrak{T}$ vérifie évidemment la condition du n° 25 [v. 24, (3)]. Faisons usage des notations du n° 24. Posons

$$C^0(\mathfrak{z}) = \sum_{\nu=1}^{\beta_0} a_\nu' \tau_\nu^0 \quad \bmod S ,$$

$$C^n(\mathfrak{U}) = \sum_{\nu=1}^{\beta_0} b_\nu' \, k^n(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}) \quad \bmod \overline{R - R_0} ,$$

$\mathfrak{U}$ étant un réseau commode (rel. à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ et par suite aussi rel. à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$) suffisamment fin. Il s'agit de prouver que $\sum_{i=1}^{\alpha_0} a_i b_i = \sum_{\nu=1}^{\beta_0} a'_\nu b'_\nu$. Pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$ posons $a''_i = \sum_\nu a'_\nu$, la sommation étant étendue à toutes les valeurs de ν $(1 \leqq \nu \leqq \beta'_0)$ telles que $\pi\tau^0_\nu = \sigma^0_i$. On a alors $\pi\, C^0(\mathfrak{z}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} a''_i \sigma^0_i \sim C^0(\mathfrak{Z})$ mod $A_1 S$ dans A_1 de manière que, comme nous avons vu plus haut, $\sum_{i=1}^{\alpha_0} a_i b_i = \sum_{i=1}^{\alpha_0} a''_i b_i$. Pour $1 \leqq \nu \leqq \gamma_0$, $\pi\tau^0_\nu = \sigma^0_i$, posons $b''_\nu = b_i$ de manière que $\sum_{i=1}^{\alpha_0} a''_i b_i = \sum_{\nu=1}^{\beta_0} a'_\nu b''_\nu$, où $b''_\nu = 0$ pour $\gamma_0 + 1 \leqq \nu \leqq \beta_0$. Il suffit donc de montrer que l'on a $a'_\nu(b'_\nu - b''_\nu) = 0$ pour $1 \leqq \nu \leqq \beta_0$. D'après 24 (3)

$$C^n(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} b_i K^n(\sigma^0_i, \mathfrak{U}) = \sum_{\nu=1}^{\beta_0} b''_\nu\, k^n(\tau^0_\nu, \mathfrak{U}) \quad \mathrm{mod}\, \overline{R - R_0}\,,$$

de sorte que

$$(*) \qquad \sum_{\nu=1}^{\beta_0} (b'_\nu - b''_\nu)\, k^n(\tau^0_\nu, \mathfrak{U}) = 0 \quad \mathrm{mod}\, \overline{R - R_0}\,.$$

Supposons, par impossible, que $a'_\nu(b'_\nu - b''_\nu) \neq 0$ pour une valeur donnée de ν. Soit U un sommet d'un simplexe de la chaîne $k^n(\tau^0_\nu, \mathfrak{U})$; on a $U\tau^0_\nu \neq 0$ d'après 19.3; d'autre part, $UA_2 \neq 0$, car $b'_\nu - b''_\nu \neq 0$ et la chaîne $(*)$ est évidemment située dans A_2; enfin, $U\overline{R - R_0} \neq 0$ d'après $(*)$. $\mathfrak{U}$ étant un affinement de $\mathfrak{Z}$, il existe un sommet Z_1 de $\mathfrak{Z}$ tel que $Z_1 \supset U$ et donc $Z_1 A_2 \neq 0$, $Z_1 \tau^0_\nu \neq 0$, $Z_1 \overline{R - R_0} \neq 0$. De la dernière de ces relations on déduit sans peine (v. 8) qu'il existe un sommet Z_2 de $\mathfrak{Z}$ tel que $Z_1 Z_2 \neq 0$, $Z_2 S \neq 0$. La chaîne $C^0(\mathfrak{z})$ étant située dans A_1, l'inégalité $a'_\nu \neq 0$ entraîne $\tau^0_\nu A_1 \neq 0$. Le réseau $\mathfrak{z}$ étant un affinement de $\mathfrak{Z}$, il existe un sommet Z_3 de $\mathfrak{Z}$ tel que $\tau^0_\nu \subset Z_3$. On a donc $Z_1 Z_2 \neq 0$, $Z_1 Z_3 \neq 0$, $Z_1 A_2 \neq 0$, $Z_2 S \neq 0$, $Z_3 A_1 \neq 0$, ce qui est une contradiction, car $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$.

58. Reste à considérer le cas $1 \leqq p \leqq n$. Puisque $A_1 S A_2 = 0$, il existe un entourage B de A_2 tel que $A_1 \overline{B} S = 0$. Ensuite, il existe un entourage Ω de S tel que $A_1 \overline{B}\overline{\Omega} = 0$. Soit encore B' un entourage de A_2 tel que $A_2 \subset B' \subset\subset B$.

Soit Ξ_1 la famille de tous les réseaux $\mathfrak{Z} \in \Xi$ (v. 23) pour lesquels vaut l'énoncé du n° 31 en y remplaçant A, B resp. par A_2, B'. La famille Ξ_1 est évidemment parfaitement complète. Soit Ξ_2 fa famille de tous les réseaux $\mathfrak{Z} \in \Xi_1$ jouissant de la propriété suivante: 1° Si $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$, $Z_1 A_1 \neq 0$, $Z_2 \overline{B} \neq 0$, $Z_1 Z_2 \neq 0$, on a $(Z_1 + Z_2)\,\overline{\Omega} = 0$; 2° pour chaque sommet extérieur de $\mathfrak{Z}$ on a $\overline{Z} \subset \Omega$. On déduit sans peine de 1.3 et de 5.4 que la famille Ξ_2 est parfaitement complète, car $A_1 \overline{B}\overline{\Omega} = 0$.

Pour chaque $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$, soit $\Delta(\mathfrak{Z})$ la famille de tous les réseaux fermés correspondant à $\mathfrak{Z}$ (v. 8) et choisis selon l'énoncé du n° 44 où on choisit $\mathfrak{z} \in \Xi_2$ et où on remplace A par $\overline{B}'$, tandis que Ω a la valeur que nous venons de déterminer.

Pour $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$, $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$ soit $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$ la famille de tous les réseaux commodes $\mathfrak{U}$ si fins que: 1° on puisse appliquer le théorème du n° 44 avec $\overline{B}'$ au lieu de A; 2° l'énoncé du n° 26 soit vrai pour chaque $\mathfrak{U}_0 \in \Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$; 3° $\mathfrak{U}$ soit un affinement de $\mathfrak{Z}$; 4° on puisse appliquer l'énoncé du n° 25 non seulement rel. à $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{T}$, mais aussi rel. à $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{t}$ dont on construit (cf. 44) le réseau fermé $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$ correspondant à $\mathfrak{Z}$.

Ceci étant, supposons qu'on ait des cycles $C^p \in \Gamma_1$ et $C^{n-p} \in \Gamma_2$ (v. 56). Choisissons $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$, $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$, $\mathfrak{U} \in \Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$. D'après la propriété 2° de la famille Ξ_2, il existe des nombres $a_i \in \mathfrak{R}$ tels que

$$(1) \qquad C^p(\mathfrak{Z}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i \sigma_i^p \mod \bar{\Omega} .$$

D'après 31, il existe des nombres $b_i \in \mathfrak{R}$ tels que

$$(2) \qquad C^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \sum_{i=1}^{\alpha_p} b_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \mod \bar{B}' \overline{R - R_0} \text{ dans } \bar{B}' .$$

Posons

$$(3) \qquad C^p C^{n-p} = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i b_i .$$

Pour justifier cette définition, nous procéderons comme il suit: 1° dans 58.1 nous démontrerons que le nombre (3) reste inaltéré en remplaçant $C^p(\mathfrak{Z})$ par $C_1^p(\mathfrak{Z}) \sim \sim C^p(\mathfrak{Z}) \bmod A_1 S$ dans A_1; 2° dans 58.2 nous démontrerons que le nombre (3) reste inaltéré en remplaçant $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ par $C_1^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim C^{n-p}(\mathfrak{U}) \bmod A_2 S$ dans A_2; 3° dans 58.3 nous démontrerons que, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{U}$ étant choisis, le nombre (3) est bien déterminé; 4° dans 58.4 nous démontrerons que, $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{T}$ étant choisis, le nombre (3) ne dépend pas du choix de $\mathfrak{U} \in \Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$; 5° dans 58.5 nous donnons un lemme; 6° dans 58.6 nous démontrerons que, $\mathfrak{Z}$ étant choisi, le nombre (3) ne dépend pas du choix de $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$; 7° dans 58.7 nous démontrerons que le nombre (3) ne dépend non plus du choix $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$. Il en résulte que le nombre (3) est déterminé sans ambiguité par les deux cycles $C^p \in \Gamma_1$, $C^{n-p} \in \Gamma_2$ et qu'il jouit de la propriété 4° du n° 56; les propriétés 1°, 2°, 3°, du n° 56 sont banales.

58.1. Puisque $C^{n-p}(\mathfrak{U}) \to 0 \bmod S$, il résulte de (2) que $\sum_{i=1}^{\alpha_p} b_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \to 0 \bmod \overline{R - R_0}$. Or pour $p < n$ on a (v. 19.1, 3°)

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p} b_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \to \sum_{i=1}^{\alpha_p} \sum_{j=1}^{\alpha_{p+1}} \eta_{ji}^p b_i K^{n-p-1}(\sigma_j^{p+1}, \mathfrak{U}) \mod \overline{R - R_0} ,$$

de sorte que dans le cas $p < n$ on a [v. 19.1, 1°, 2°, et la propriété 4° de la famille $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$]

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{\alpha_p} \eta_{ji}^p b_i = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq j \leqq \alpha_{p+1} .$$

Ceci étant, soit $C_1^p(\mathfrak{Z}) \sim C^p(\mathfrak{Z}) \bmod A_1 S$ dans A_1. Puisque $\mathfrak{Z} \in \Xi_1$, il existe des nombres $a_i' \in \mathfrak{R}$ tels que

$$C_1^p(\mathfrak{Z}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i' \sigma_i^p \mod \bar{\Omega}$$

et pour $p < n$ il existe des nombres $c_j \in \mathfrak{R}$ tels que

$$\sum_{j=1}^{\alpha_{p+1}} c_j \sigma_j^{p+1} \to \sum_{i=1}^{\alpha_p} (a_i' - a_i)\, \sigma_i^p \quad \operatorname{mod} \bar{\Omega} \text{ dans } A_1 \,,$$

tandis que pour $p = n$ on a $\sum_{i=1}^{\alpha_n} (a_i' - a_i)\, \sigma_i^n = 0 \operatorname{mod} \bar{\Omega}$. On a donc dans les deux cas

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p} (a_i' - a_i - \sum_{j=1}^{\alpha_{p+1}} \eta_{ji}^p c_j)\, \sigma_i^p = 0 \quad \operatorname{mod} \bar{\Omega} \,,$$

en convenant que $\sum_1^{\alpha_{p+1}} = 0$ pour $p = n$. Il en résulte que

$$a_i' - a_i = \sum_{j=1}^{\alpha_{p+1}} \eta_{ji}^p c_j \quad (= 0 \text{ pour } p = n)$$

pour chaque valeur de i telle que $\sigma_i^p \neq 0 \operatorname{mod} \bar{\Omega}$. Or on a, en vertu de $(*)$,

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p} b_i \sum_{j=1}^{\alpha_{p+1}} \eta_{ji}^p c_j = 0$$

de sorte que, pour arriver au but $\sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i b_i = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i' b_i$ il suffit de montrer que pour $\sigma_i^p = 0 \operatorname{mod} \bar{\Omega}$ on a soit $a_i' = a_i = \sum_{j=1}^{\alpha_{p+1}} \eta_{ji}^p c_j = 0$, soit $b_i = 0$. Supposons que ceci ne soit pas vrai pour une certaine valeur de i telle que $\sigma_i^p = 0 \operatorname{mod} \bar{\Omega}$. Les chaînes $\sum a_i \sigma_i^p$, $\sum a_i' \sigma_i^p$, $\sum c_j \sigma_j^{p+1}$ étant situées dans A_1, on aurait $\sigma_i^p = 0 \operatorname{mod} A_1$; la chaîne $\sum b_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ étant située dans $\bar{B}' \subset \bar{B}$, on aurait $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) = 0 \operatorname{mod} \bar{B}$. Soit Z_1 un sommet de σ_i^p et soit U un sommet d'un simplexe de $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ [v. la propriété 4° de la famille $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$]; on aurait $Z_1 \bar{\Omega} \neq 0$, $Z_1 A_1 \neq 0$, $U\bar{B} \neq 0$ et aussi $UZ_1 \neq 0$ en vertu de 19.3. Or d'après la propriété 3° de la famille $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$, il existe un sommet Z_2 de $\mathfrak{Z}$ tel que $U \subset Z_2$. On aurait donc $Z_1 Z_2 \neq 0$, $Z_1 A_1 \neq 0$, $Z_2 \bar{B} \neq 0$, $Z_1 \bar{\Omega} \neq 0$, ce qui est une contradiction, car $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$.

58.2. D'après la définition de la famille $\mathfrak{Z}$, il existe un affinement $\mathfrak{z} \in \Xi_2$ de $\mathfrak{Z}$ et une projection $\pi = \operatorname{Pr.}(\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$ dont on obtient $\mathfrak{T}$ moyennant la construction du n° 24 (après avoir choisi le réseau fermé $\mathfrak{t}$ correspondant à $\mathfrak{z}$). Faisons usage des notations du n° 24. On peut poser [v. 58 (1)].

$$C^p(\mathfrak{z}) = \sum_{\nu=1}^{\beta_p} a_\nu' \tau_\nu^p \quad \operatorname{mod} \bar{\Omega} \,.$$

Or on a $C^p(\mathfrak{z}) \to 0 \operatorname{mod} S$, d'où $\sum_{\nu=1}^{\beta_p} a_\nu' \tau_\nu^p \to 0 \operatorname{mod} \bar{\Omega}$, donc

$$\sum_{\nu=1}^{\beta_p} \sum_{\mu=1}^{\beta_{p-1}} \eta_{\nu\mu}^{p-1} a_\nu' \tau_\mu^{p-1} = 0 \quad \operatorname{mod} \bar{\Omega} \,.$$

Il en résulte que

$$(*)\qquad \sum_{\nu=1}^{\beta_p} \zeta_{\nu\mu}^{p-1} a'_\nu = 0$$

pour chaque valeur de μ telle que $\tau_\mu^{p-1} \neq 0 \bmod \bar{\Omega}$. Pour $1 \leqq i \leqq \alpha_p$ posons $a''_i = \sum_\nu a'_\nu$, la sommation étant étendue à toutes les valeurs de ν telles que $\pi\tau_\nu^p = \sigma_i^p$. On a

$$\pi\, C^p(\mathfrak{z}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a''_i \sigma_i^p \mod \bar{\Omega}\,.$$

Ceci étant, remplaçons $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ par $C_1^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim C^{n-p}(\mathfrak{U}) \bmod A_2 S$ dans A_2. Il existe [v. 58 (2)] des nombres $b'_i \in \mathfrak{R}$ tels que

$$(3')\qquad C_1^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \sum_{i=1}^{\alpha_p} b'_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \mod \bar{B}'\,\overline{R - R_0} \text{ dans } \bar{B}'\,.$$

Il s'agit de montrer que $\sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i b_i = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i b'_i$. Or d'après 58.1 on a $\sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i b_i = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a''_i b_i$, $\sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i b'_i = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a''_i b'_i$, car $\pi\, C^p(\mathfrak{z}) \sim C^p(\mathfrak{Z}) \bmod A_1 S$ dans A_1. Il suffit donc de prouver que $\sum_{i=1}^{\alpha_p} a''_i(b'_i - b_i) = 0$. Posons $b''_\nu = 0$ pour $\gamma_p + 1 \leqq \nu \leqq \beta_p$ ainsi que pour toutes les valeurs de ν telles que $1 \leqq \nu \leqq \gamma_p$, $\pi\tau_\nu^p = 0$; pour $1 \leqq \nu \leqq \gamma_p$, $\pi\tau_\nu^p = \sigma_i^p$ posons $b''_\nu = b'_i - b_i$. D'après la définition de a''_i on a alors

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p} a''_i(b'_i - b_i) = \sum_{\nu=1}^{\beta_p} a'_\nu b''_\nu\,;$$

on doit donc démontrer que $\sum_{\nu=1}^{\beta_p} a'_\nu b''_\nu = 0$. On a [v. (3), (3') ainsi que 40. (3)] $\sum_{\nu=1}^{\beta_p} b''_\nu\, k^{n-p}(\tau_\nu^p, \mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} (b'_i - b_i) K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \bmod \bar{B}'\,\overline{R - R_0}$ dans $\bar{B}'$, et les deux membres de cette égalité sont $\sim 0 \bmod \bar{B}'\,\overline{R - R_0}$ dans $\bar{B}'$. D'après 44, il existe donc des nombres $d_\mu \in \mathfrak{R}$ tels que

$$\sum_{\mu=1}^{\beta_{p-1}} d_\mu\, k^{n-p+1}(\tau_\mu^{p-1}, \mathfrak{U}) \to \sum_{\nu=1}^{\beta_p} b''_\nu\, k^{n-p}(\tau_\nu^p, \mathfrak{U}) \mod \bar{\Omega} \text{ dans } \bar{B}\,,$$

de manière que (v. 19.1, 3°)

$$\sum_{\nu=1}^{\beta_p} \Big(b''_\nu - \sum_{\mu=1}^{\beta_{p-1}} \eta_{\nu\mu}^{p-1} d_\mu\Big)\, k^{n-p}(\tau_\nu^p, \mathfrak{U}) = 0 \mod \bar{\Omega} \text{ dans } \bar{B}\,,$$

d'où il résulte (v. 19.1, 2° et la propriété 4° de la famille Φ) que

$$(**) \qquad b''_\nu = \sum_{\mu=1}^{\beta_{p-1}} \eta_{\nu\mu}^{p-1} d_\mu$$

pour chaque valeur de ν telle que $k^{n-p}(\tau_\nu^p, \mathfrak{U}) \neq 0 \bmod \overline{\Omega}$.

Remarque 1. Si $\tau_\mu^{p-1} = 0 \bmod \overline{\Omega}$ on a soit $d_\mu = 0$ soit $\sum_{\nu=1}^{\beta_p} \eta_{\nu\mu}^{p-1} a'_\nu = 0$.

Remarque 2. Si $k^{n-p}(\tau_\nu^p, \mathfrak{U}) = 0 \bmod \overline{\Omega}$ on a soit $a'_\nu = 0$ soit $\sum_{\mu=1}^{\beta_{p-1}} \eta_{\nu\mu}^{p-1} d_\mu = 0$.

En supposant la validité de ces remarques, on obtient de $(*)$ et de $(**)$ que

$$\sum_{\nu=1}^{\beta_p} a'_\nu b''_\nu = \sum_{\nu=1}^{\beta_p} \sum_{\mu=1}^{\beta_{p-1}} \eta_{\nu\mu}^{p-1} a'_\nu d_\mu = 0\,, \quad \text{q. f. d.}$$

Il ne reste donc qu'à démontrer les deux remarques. Supposons donc que les indices ν et μ soient tels que $\eta_{\nu\mu}^{p-1} \neq 0$ et que soit $\tau_\mu^{p-1} = 0 \bmod \overline{\Omega}$ soit $k^{n-p}(\tau_\nu^p, \mathfrak{U}) = 0 \bmod \overline{\Omega}$. Puisque la chaîne $\sum_{\nu=1}^{\beta_p} a'_\nu \tau_\nu^p$ est située dans A_1 et puisque les chaînes $\sum_{\nu=1}^{\beta_p} b''_\nu\, k^{n-p}(\tau_\nu^p, \mathfrak{U})$ et $\sum_{\mu=1}^{\beta_{p-1}} d_\mu\, k^{n-p+1}(\tau_\mu^{p-1}, \mathfrak{U})$ sont situées dans $\overline{B}$, dans le cas $a'_\nu \neq 0$ ou $\sum_{\nu=1}^{\beta_p} \eta_{\nu\mu}^{p-1} a'_\nu \neq 0$ on a $Z_1 A_1 \neq 0$ pour chaque sommet Z_1 de τ_μ^{p-1} et dans le cas $d_\mu \neq 0$ ou $\sum_{\mu=1}^{\beta_{p-1}} \eta_{\nu\mu}^{p-1} d_\mu \neq$ $\neq 0$ on a $U\overline{B} \neq 0$ pour chaque sommet U de chaque simplexe de $k^{n-p}(\tau_\nu^p, \mathfrak{U})$.[64] Puisque soit $\tau_\mu^{p-1} = 0 \bmod \overline{\Omega}$, soit $k^{n-p}(\tau_\nu^p, \mathfrak{U}) = 0 \bmod \overline{\Omega}$, on a $(Z_1 + U)\overline{\Omega} \neq 0$. D'autre part on a $UZ_1 \neq 0$ d'après 19.3. D'après la propriété 3° de la famille $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$ il existe un sommet Z_2 de $\mathfrak{Z}$ tel que $U \subset Z_2$. Donc $Z_1 Z_2 \neq 0$, $(Z_1 + Z_2)\overline{\Omega} \neq 0$ et, si une de nos deux remarques n'était pas vraie, on aurait encore $Z_1 A_1 \neq 0$, $Z_2 \overline{B} \neq 0$ ce qui donnerait une contradiction, car $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$.

58.3. Il résulte de 58.1 que le nombrd (3) est indépendant du choix des nombres a_i pourvu que ces nombres satisfassent à (1). Il résulte de 58.2 que le nombre (3) est indépendant du choix des nombres b_i pourvu que ces nombres satisfassent à (2). Donc, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{U}$ étant choisis, le nombre (3) est bien déterminé.

58.4. Il est presque évident que $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{T}$ étant choisis, le nombre (3) ne dépend pas du choix de $\mathfrak{U} \in \Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$. La famille $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$ étant complète, il suffit de prouver que le nombre (3) est le même pour $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1$ et pour $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_2 \in \Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$ étant un affinement de $\mathfrak{U}_1 \in \Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$. A cet effet il suffit de remarquer que, si les nombres $b_i \in \mathfrak{R}$ sont telles qu'on ait (2) pour $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_2$, on a aussi (2) pour $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1$; et cette remarque est évidente en vertu de 19.2 (v. aussi 19.1, 1°).

64 Il faut tenir compte de ce que chaque simplexe de $k^{n-p+1}(\tau_\mu^{p-1}, \mathfrak{U})$ est (v. la démonstration de 19.1) une face d'un simplexe de $k^{n-p}(\gamma_\nu^p, \mathfrak{U})$.

58.5. **Lemme.** Soit $\mathfrak{z} \in \Xi_2$ un affinement de $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$; soit $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$. Soit $\mathfrak{t} \in \Delta(\mathfrak{z})$; construisons le réseau fermé $\mathfrak{T}$ correspondant à $\mathfrak{Z}$ selon la manière du n° 24, en faisant usage de $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ et π. On a $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$ et on obtient la même valeur pour C^pC^{n-p}, en le calculant soit relativement à $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{T}$, soit relativement à $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{t}$.

Démonstration. On voit sans aucune difficulté que $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$. Faisons usage des notations du n° 24. Déterminons les nombres a_ν, $b_i \in \mathfrak{R}$ de manière que

$$C^p(\mathfrak{z}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_\nu \tau_\nu^p \mod \bar{\Omega}\,,$$

$$C^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \sum_{i=1}^{\alpha_p} b_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \mod \bar{B}'\, \overline{R - R_0} \text{ dans } \bar{B}'\,,$$

où le réseau $\mathfrak{U}$ commode rel. à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ (et donc aussi rel. à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$, v. 24) est choisi (v. 58.4) si fin qu'il appartienne à $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$ et à $\Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{t})$. Pour $1 \leqq i \leqq \alpha_p$, soit $a_i' = \sum a_\nu$, la sommation se rapportant à toutes les valeurs de ν telles que $\pi\tau_\nu^p = \sigma_i^p$. On a alors

$$\pi\, C^p(\mathfrak{z}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i'\sigma_i^p \mod \bar{\Omega}\,,$$

de sorte que C^pC^{n-p}, calculé rel. à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$ a la valeur $\sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i'b_i$. D'autre part on a, d'après 24 (3)

$$C^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \sum_{\nu=1}^{\beta_p} b_\nu'\, k^{n-p}(\tau_\nu^p, \mathfrak{U}) \mod \bar{B}'\, \overline{R - R_0} \text{ dans } \bar{B}'\,,$$

où l'on a posé: 1° $b_\nu' = 0$ pour $\gamma_p + 1 \leqq \nu \leqq \beta_p$ ainsi que pour toutes les valeurs de ν telles que $1 \leqq \nu \leqq \gamma_p$, $\pi\tau_\nu^p = 0$; 2° $b_\nu' = b_i$ pour $1 \leqq \nu \leqq \gamma_p$, $\pi\tau_\nu^p = \sigma_i^p$. Donc le nombre C^pC^{n-p}, calculé rel. à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$, a la valeur $\sum_{\nu=1}^{\beta_p} a_\nu b_\nu'$. On doit donc seulement démontrer que $\sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i'b_i = \sum_{\nu=1}^{\beta_p} a_\nu b_\nu'$ ce qui est évident d'après la définition même des nombres a_i' et b_ν'.

58.6. Supposons donné $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$, $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$, $\mathfrak{U} \in \Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$. Soient U_ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ tous les sommets de $\mathfrak{U}$ tels que $UR_0 \neq 0$ (v. 8). Pour chaque ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ on peut (v. 8.1, 6°) indiquer un $\mathfrak{Z}$-simplexe intérieur $\sigma(\nu) = \sigma_i^h$ tel que 1° $U_\nu\, T(\sigma_i^h) \neq 0$; 2° $U_\nu T_j = 0$ pour chaque valeur de j $(1 \leqq j \leqq \alpha_0)$ telle que σ_j^0 n'est pas un sommet de $\sigma(\nu)$. Choisissons un point $a_\nu \in U\, T(\sigma_i^h)$ $(1 \leqq \nu \leqq m)$. On ne peut avoir $a_\nu = a_\mu$ que si $\sigma(\nu) = \sigma(\mu)$. Soit V_ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ un entourage de a_ν si petit que 1° $V_\nu \subset U_\nu$; 2° $V_\nu V_\mu = 0$ pour $a_\nu \neq a_\mu$; soit V_ν' un entourage de a_ν si petit que $\bar{V}_\nu' \subset V_\nu$. Soit N l'ensemble de tous les souples (i, U) $(1 \leqq i \leqq \alpha_0, U \in \mathfrak{U})$ tels que $UT_i = 0$ et par suite aussi (v. 8.1, 5°) $\bar{U}T_i = 0$. Soit $\mathfrak{V}$ un réseau si fin que pour $(i, U) \in N$ aucun sommet de $\mathfrak{V}$ ne rencontre simultanément $\bar{U}$ et T_i. Soit $\mathfrak{z} \in \Xi_2$ un affinement de $\mathfrak{Z}$ si petit que 1° $z_1, z_2 \in \mathfrak{z}$, $z_1z_2 \neq 0$, $z_1\bar{V}_\nu' \neq 0$ $(1 \leqq \nu \leqq m)$ entraîne $z_2 \subset V_\nu$ (v. 1.2); 2° $\mathfrak{z}$ est un affinement de $\mathfrak{B}$; 3° la chaîne $G^n(\mathfrak{z})$ n'est située dans $R - V'_\nu$ pour aucune valeur de ν $(1 \leqq \nu \leqq m$; v. 17.5). En vertu de la propriété 3° de $\mathfrak{z}$, il existe pour chaque ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ un $(n, \mathfrak{z})$-simplexe intérieur ϱ^n_ν dont le noyau rencontre V'_ν; en vertu de la propriété 1° de $\mathfrak{z}$, chaque sommet de ϱ^n_ν fait partie de V_ν; il existe donc une h-face [h étant déterminé par l'égalité $\sigma^h_i = \sigma(\nu)$] ϱ^h_ν de ϱ^n_ν. On peut supposer que $\varrho^h_\nu = \varrho^h_\mu$ pour $a_\nu = a_\mu$. Puisque $V_\mu V_\nu = 0$ pour $a_\mu \neq a_\nu$, on peut évidemment choisir la projection $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$ de manière que 1° $\pi\varrho^h_\nu = \sigma(\nu)$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$; 2° $\tau^0 \in \mathfrak{z}$, $\pi\tau^0 = \sigma^0_i$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ entraîne que $\tau^0 T_i \neq 0$. Choisissons $\mathfrak{t} \in \Delta(\mathfrak{z})$. Puisque chaque sommet de ϱ^h_ν est un sous-ensemble de U_ν, on a $t(\varrho^h_\nu) \subset U_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$. A l'aide de $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ et π, construisons le réseau fermé $\mathfrak{T}^*$ correspondant à $\mathfrak{Z}$ (v. 8) suivant la manière expliquée au n° 24. Supposons que $T^*(\sigma^h_i)$ ait la même signification rel. à $\mathfrak{T}^*$ que $T(\sigma^h_i)$ rel. à $\mathfrak{T}$. Puisque $t(\varrho^h_\nu) \subset T^*(\sigma^h_i)$ [$\sigma^h_i = \sigma(\nu)$] [v. 24 (2)] et puisque $t(\varrho^h_\nu) \subset \subset U_\nu$, on a $U_\nu T^*(\sigma^h_i) \neq 0$.[65] Autrement dit: $0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$, $U \in \mathfrak{U}$, $U\,T(\sigma^h_i) \neq 0$ entraîne $U\,T^*(\sigma^h_i) \neq 0$. Réciproquement supposons que, pour de certaines valeurs de i, h, U $(0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$, $U \in \mathfrak{U})$ on ait $U\,T(\sigma^h_i) = 0$ et par suite $\bar{U}\,T(\sigma^h_i) = 0$. Nous prouverons que $\bar{U}\,T^*(\sigma^h_i) = 0$. D'après 8.1, 5° et 6°, il existe un sommet σ^0_j de σ^h_i tel que $\bar{U}T_j = 0$. Il suffit de prouver que $\bar{U}T^*_j = 0$. Dans le cas contraire, il existerait un sommet τ^0 de $\mathfrak{z}$ tel que $\bar{U}\tau^0 \neq 0$, $\pi\tau^0 = \sigma^0_j$. D'après la propriété 2° de la projection π, on aurait $\tau^0 T_j \neq 0$ d'où la contradiction $\bar{U}\tau^0 = 0$ d'après la propriété 2° du réseau $\mathfrak{z}$. Maintenant on voit sans peine que le réseau $\mathfrak{U}$ est commode non seulement rel. à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$, mais aussi rel. à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}^*$. Puisque $\mathfrak{t} \in \Delta(\mathfrak{z})$, on a $\mathfrak{T}^* \in \Delta(\mathfrak{Z})$ (v. 58.5). Choisissons un affinement $\mathfrak{U}_1$ de $\mathfrak{U}$ de manière que $\mathfrak{U}_1 \in \in \Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T}^*)$. Déterminons les nombres $a_i \in \mathfrak{R}$ d'après 58 (1). Déterminons les nombres $b_i \in \mathfrak{R}$ de manière que

$$C^{n-p}(\mathfrak{U}_1) \sim \sum_{i=1}^{\alpha_p} b_i\, {}^*K^{n-p}(\sigma^p_i, \mathfrak{U}_1) \mod \bar{B}'\,\overline{R - R_0} \text{ dans } \bar{B}',$$

${}^*K$ désignant les chaînes fondamentales (v. 19.1) relatives à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}^*$. On voit sans peine (v. 58.4) que la relation (*) reste vraie en y remplaçant $\mathfrak{U}_1$ par $\mathfrak{U}$. Or on déduit facilement de 19.1 que ${}^*K^{n-h}(\sigma^h_i, \mathfrak{U}) = K^{n-h}(\sigma^h_i, \mathfrak{U})$. Par suite, la relation 58 (2) est vraie. Donc on obtient la même valeur pour le nombre C^pC^{n-p} en le calculant soit rel. à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$, soit rel. à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}^*$ et par suite, d'après le lemme du n° 58.5, aussi en le calculant rel. à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$.

Ceci étant, supposons qu'on ait donné $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$ et $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2 \in \Delta(\mathfrak{Z})$. On voit sans peine que l'on peut déterminer $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{t}$ de manière que les conditions qui ont été énoncées plus haut soient vérifiées simultanément pour $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1$ et pour $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_2$. Il en résulte que le nombre C^pC^{n-p} reste le même en le calculant soit rel. à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}_1$, soit rel. à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}_2$.

[65] $t(\varrho^h_\nu) \neq 0$ car $\mathfrak{z} \in \Xi$ et par suite (v. 23) le noyau de ϱ^h_ν contient un point b n'appartenant à la fermeture d'aucun sommet de $\mathfrak{z}$ qui ne soit pas un sommet de ϱ^h_ν, d'où il résulte sans peine que $b \in t(\varrho^h_\nu)$.

58.7. Le nombre C^pC^{n-p} dépend donc tout au plus du choix de $\mathfrak{Z} \in \Xi$, le choix de $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$ et celui de $\mathfrak{U} \in \Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$ étant sans influence sur lui. Or supposons donné $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2 \in \Xi_2$. La famille Ξ_2 étant complète, il existe un affinement simultané $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{Z}_1$ et de $\mathfrak{Z}_2$. D'après 58.5 le nombre C^pC^{n-p}, calculé rel. à $\mathfrak{z}$ est le même que si on le calcule rel. à $\mathfrak{Z}_1$ ou rel. à $\mathfrak{Z}_2$. Donc C^pC^{n-p} peut être calculé indifféremment soit rel. à $\mathfrak{Z}_1$ soit rel. à $\mathfrak{Z}_2$.

59.1. Si les deux ensembles A_1, A_2 du n° 56 sont sans point commun, on a $C^pC^{n-p} = 0$ pour chaque $C^p \in \Gamma_1$, $C^{n-p} \in \Gamma_2$. La facile démonstration sera laissée au soin du lecteur.

59.2. Soient A_1 et A_2 deux sous-ensembles bicompacts donnés de R, assujettis à la condition $A_1A_2S = 0$. Définissons Γ_1 et Γ_2 comme dans 56. Soit F un sous-ensemble bicompact de R tel que $F \supset S$, $A_1A_2F = 0$. Tous les axiomes supposés au n° 55 restent évidemment vérifiés en remplaçant S par F. Désignons par Γ'_1 et Γ'_2 ce que deviennent les familles Γ_1 et Γ_2 si on remplace S par F. Soit $C^p \in \Gamma_1$, $C^{n-p} \in \Gamma_2$. Il existe évidemment des cycles $C^p_1 \in \Gamma'_1$, $C^{n-p}_1 \in \Gamma'_2$ tels que $C^p(\mathfrak{Z}) = C^p_1(\mathfrak{Z}) \bmod F$, $C^{n-p}(\mathfrak{Z}) = C^{n-p}_1(\mathfrak{Z}) \bmod F$ dans chaque réseau $\mathfrak{Z}$. On voit sans peine que $C^pC^{n-p} = C^p_1C^{n-p}_1$.

VII.

60. Dans ce Chapitre, nous ferons de nouveau les hypothèses énoncées au n° 55.

61. Supposons donné un sous-ensemble bicompact S_2 de S. Posons $S_1 = S - S_2$. Soit Γ_1 l'ensemble de tous les (p, R)-cycles mod SA_1 dans A_1, où A_1 parcourt tous les sous-ensembles bicompacts de R tels que $SA_1 \subset S_1$; deux éléments C^p_1, C^p_2 de Γ_1 seront considérés comme égaux si l'on peut attacher à chaque entourage Ω_1 de S_1 [66] un sous-ensemble bicompact A_1 de R tel que 1° $SA_1 \subset \Omega_1$, 2° $C^p_1 \sim C^p_2 \bmod \overline{\Omega}_1A_1$ dans A_1. L'ensemble Γ_1 est évidemment un module. Soit Γ_2 l'ensemble de tous les $(n-p, R)$-cycles mod SA_2 dans A_2 où A_2 parcourt tous les sous-ensembles bicompacts de R tels que $SA_2 \subset S_2$; deux éléments C^{n-p}_1, C^{n-p}_2 de Γ_2 seront considérés comme égaux si l'on peut attacher à chaque entourage Ω_2 de S_2 un sous-ensemble bicompact A_2 de R tel que 1° $SA_2 \subset \Omega_2$; 2° $C^{n-p}_1 \sim C^{n-p}_2 \bmod \overline{\Omega}_2A_2$ dans A_2. L'ensemble Γ_2 est aussi un module.

D'après le n° 56, on peut attacher à chaque couple $C^p \in \Gamma_1$, $C^{n-p} \in \Gamma_2$ un nombre $C^pC^{n-p} \in \mathfrak{R}$ de manière que:

$$1^\circ \quad (rC^p)\, C^{n-p} = C^p(rC^{n-p}) = r(C^pC^{n-p}) \quad \text{pour } r \in \mathfrak{R}\,;$$
$$2^\circ \quad (C^p_1 + C^p_2)\, C^{n-p} = C^p_1C^{n-p} + C^p_2C^{n-p}\,;$$
$$3^\circ \quad C^p(C^{n-p}_1 + C^{n-p}_2) = C^pC^{n-p}_1 + C^pC^{n-p}_2\,.$$

[66] On voit sans peine qu'on peut supposer que $\Omega_1S_2 = 0$.

En vertu de 56, 4° (v. aussi 59) on voit sans peine que le nombre C^pC^{n-p} est toujours bien déterminé, malgré les conventions que nous venons de faire sur l'égalité de deux éléments de Γ_1 et de Γ_2.

Le but de ce Chapitre est de montrer[67] que, relativement à la multiplication C^pC^{n-p} considérée, *les deux modules* Γ_1 *et* Γ_2 *sont duels* (primitifs),[68] c'est-à-dire, outre les propriétés 1°, 2°, 3° déjà énoncées, on a encore les deux suivantes (les égalités $C^p = 0$, $C^{n-p} = 0$ y ont le sens conventionnel adopté): 4° lorsque le cycle $C^p \in \Gamma_1$ est tel que $C^pC^{n-p} = 0$ pour chaque choix de $C^{n-p} \in \Gamma_2$, on a $C^p = 0$; 5° lorsque le cycle $C^{n-p} \in \Gamma_2$ est tel que $C^pC^{n-p} = 0$ pour chaque choix de $C^p \in \Gamma_1$, on a $C^{n-p} =$ $= 0$. La propriété 4° sera démontrée dans le n° 62, la propriété 5° dans le n° 63.

62. Soit A_1 un sous-ensemble bicompact de R tel que $A_1S \subset S_1$. Soit C^p un (p, R)-cycle mod A_1S dans A_1. Supposons que C^p, considéré comme élément du module Γ_1, soit $\neq 0$. Il existe alors un entourage $\Omega_1 \subset R - S_2$ de S_1 tel que, A'_1 étant un sous-ensemble bicompact de R assujetti à la condition $A'_1S \subset \Omega_1$, on n'ait jamais $C^p \sim 0 \bmod A'_1\bar{\Omega}_1$ dans A'_1. On doit prouver qu'il existe un élément C^{n-p} de Γ_2 tel que $C^pC^{n-p} = 1$.

Soit Ω'_1 un entourage de S_1 si petit que $\bar{\Omega}'_1 \subset \Omega_1$, $\bar{\Omega}'_1 - S \subset \Omega_1$.[69] Posons $A_2 =$ $= R - \Omega'_1$ de sorte que A_2 est un sous-ensemble bicompact de R tel que $A_2S = S_2$. Soit Θ la famille de tous les entourages Ω_2 de S_2 si petits que $A_1\bar{\Omega}_2 = 0$. Pour chaque $\Omega_2 \in \Theta$, désignons par $\Pi(\Omega_2)$ la famille de tous les $(n - p, R)$-cycles C^{n-p} mod $A_2\bar{\Omega}_2$ dans A_2 et tels que $C^pC^{n-p} = 1$ (v. 59.2 où on remplace F par $S + \bar{\Omega}_2$). Lorsque Ω_2, $\Omega_2^* \in \Theta$; $\Omega_2^* \subset \Omega_2$, on voit sans peine (v. 59.2) qu'avec chaque $C^{n-p} \in \Pi(\Omega_2^*)$ il existe un $^*C^{n-p} \in \Pi(\Omega_2)$ tel que $C^{n-p} = {}^*C^{n-p}$ mod $A_2\bar{\Omega}_2$. Si $\Pi(\Omega_2) \neq 0$, c'est évidemment un système linéaire (v. *Homologie*, I, 14). D'après le théorème du n° 6.1 (v. aussi 59.2), où on remplace R par A_2 et S par S_2 (ce qui est évidemment permis) il suffit donc de montrer que $\Pi(\Omega_2) \neq 0$ pour chaque $\Omega_2 \in \Theta$.

Soit donc $\Omega_2 \in \Theta$ et choisissons un entourage Ω'_2 de S_2 si petit que $\bar{\Omega}'_2 \subset \Omega_2$. Choisissons un réseau $\mathfrak{Z}$ de la famille Ξ_2 (v. 57 pour $p = 0$ et 58 pour $p \geqq 1$) suffisamment fin pour que les conditions suivantes aient lieu: 1° pour chaque sommet Z de $\mathfrak{Z}$ l'inégalité $Z\Omega'_1 \neq 0$ entraîne que $Z \subset \Omega_1$ ou bien $Z \subset \Omega_2$; 2° $\bar{Z} \subset \Omega'_1 + \Omega'_2$ pour chaque sommet extérieur Z de $\mathfrak{Z}$; 3° pour chaque sommet Z de $\mathfrak{Z}$ l'inégalité $Z\Omega'_2 \neq 0$ entraîne que $Z \subset \Omega_2$; 4° il n'existe aucune chaîne $D^{p+1}(\mathfrak{Z})$ dans $R - \Omega_2$ telle que $F\,D^{p+1}(\mathfrak{Z}) = C^p(\mathfrak{Z})$ mod $\bar{\Omega}_1$ (c'est possible, car $C^p \nsim 0$ mod $A'_1\bar{\Omega}_1$ dans A'_1 pour $A'_1 = R - \Omega_2$); 5° aucun sommet de $\mathfrak{Z}$ ne rencontre simultanément A_1 et $\bar{\Omega}_2$. Choisissons $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$ et supposons que $\mathfrak{U}$ parcoure la famille $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$ (v. 57 pour $p = 0$ et 58 pour $p \geqq 1$).

D'après la propriété 2° du réseau $\mathfrak{Z}$, on a (v. 8) $\overline{R - R_0} \subset \Omega'_1 + \Omega'_2$. Il existe donc

[67] C'est essentiellement le premier théorème de dualité de M. Lefschetz [v. S. Lefschetz, Topology, p. 142, formule (7)].

[68] V. Pontrjagin, Math. Ann., t. 105, 1931, pp. 165—205.

[69] Ω'_1 existe, car $R - S_2$ est un espace normal.

(v. la propriété 5° de $\mathfrak{Z}$) des nombres a_i tels que

$$C^p(\mathfrak{Z}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i \sigma_i^p \bmod A_1\overline{\Omega}_1 \text{ dans } A_1 .$$

Posons

$$C^{n-p}(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} b_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$$

les nombres $b_i \in \mathfrak{R}$ étant assujettis aux conditions suivantes: 1° $b_i = 0$ si σ_i^p possède un sommet σ_j^0 tel que $\sigma_j^0 \Omega_1' \neq 0$; 2° $\sum_{i=1}^{\alpha_p} \eta_{ji}^p b_i = 0$ pour chaque valeur de j $(1 \leqq j \leqq \leqq \alpha_{p+1})$ telle qu'aucun sommet de σ_j^{p+1} ne rencontre Ω_2'; 3° $\sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i b_i = 1$. Supposons pour un moment qu'on puisse vérifier ces conditions. D'après 1°, la chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ est située dans $R - \Omega_1' = A_2$. D'après 2°, 19.1, 3° et 19.3 le chaîne $F\,C^{n-p}(\mathfrak{U})$ est située dans $A_2 \overline{R - R_0} + \sum_j T(\sigma_j^{p+1})$, j parcourant seulement de telles valeurs que σ_j^{p+1} possède un sommet rencontrant Ω_2' et par suite (v. la propriété 3° de $\mathfrak{Z}$) contenu dans Ω_2; donc $F\,C^{n-p}(\mathfrak{U}) \subset \Omega_2$. Donc $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ est un $(n-p, \mathfrak{U})$-cycle mod $A_2\overline{\Omega}_2$ dans A_2. En faisant varier les $\mathfrak{U}$, on voit (v. 19.2) que les chaînes $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ définissent un $(n-p, R)$-cycle mod $A_2\overline{\Omega}_2$ dans A_2. D'après la propriété 3° des nombres b_i, on a $C^pC^{n-p} = 1$.

Reste à prouver que les conditions posées pour les nombres $b_i \in \mathfrak{R}$ sont réalisables. Il résulte de la théorie élémentaire des équations linéaires que, dans le cas contraire, il existerait des nombres $c_j \in \mathfrak{R}$ $(1 \leqq j \leqq \alpha_{p+1})$ tels que 1° $c_j = 0$ pour chaque valeur de j telle que σ_j^{p+1} possède un sommet rencontrant Ω_2'; 2° pour chaque valeur de i telle qu'aucun sommet de σ_i^p ne rencontre Ω_1' on a

$$a_i = \sum_{j=1}^{\alpha_{p+1}} \eta_{ji}^p c_j .$$

Or des conditions imposées pour $\mathfrak{Z}$ on déduit sans peine que l'on aurait dans ce cas $C^p(\mathfrak{Z}) \sim 0 \bmod \overline{\Omega}_1$ dans $R - \Omega_2$ ce qui est une contradiction.

63. Soit A_2 un sous-ensemble bicompact de R tel que $A_2 S \subset S_2$. Soit C^{n-p} un $(n-p, R)$-cycle mod A_2S dans A_2. Supposons que C^{n-p}, considéré comme élément du module Γ_2, soit $\neq 0$. Il existe donc un entourage Ω_2 de S_2 tel que, A_2' étant un sous-ensemble bicompact de R assujetti à la condition $A_2'S \subset \Omega_2$, on n'ait jamais $C^{n-p} \sim \sim 0 \bmod A_2'\overline{\Omega}_2$ dans A_2'. On doit prouver qu'il existe un élément C^p de Γ_1 tel que $C^pC^{n-p} = 1$.

Soit Ω_2' un entourage de S_2 tel que $\overline{\Omega}_2' \subset \Omega_2$. Posons $A_1 = R - \Omega_2'$ de sorte que A_1 est un sous-ensemble bicompact de R tel que $A_1 S \subset S_1$. Il suffit donc de prouver qu'il existe un (p, R)-cycle C^p mod A_1S dans A_1 tel que $C^pC^{n-p} = 1$. Or soit Θ la famille de tous les entourages Ω de S si petits que $A_2\overline{\Omega} \subset \Omega_2'$. Pour chaque $\Omega \in \Theta$, désignons par $\Pi(\Omega)$ la famille de tous les (p, R)-cycles C^p mod $A_1\overline{\Omega}$ dans A_1 et tels que $C^p C^{p-n} = 1$ (v. 59.2, où l'on remplace F par $\overline{\Omega}$). Lorsque Ω, $\Omega^* \in \Theta$; $\Omega^* \subset \Omega$, on voit sans peine (v. 59.2) qu'à chaque $C^p \in \Pi(\Omega^*)$ il existe un $^*C^p \in \Pi(\Omega)$ tel que $C^p = {}^*C^p$ mod $A_1\overline{\Omega}$. Si $\Pi(\Omega) \neq 0$, c'est évidemment un système linéaire. D'après le théorème du n° 6.1 (v. aussi 59.2), où l'on remplace R par A_1 et S par A_1S (ce qui est permis), il suffit donc de montrer que $\Pi(\Omega) \neq 0$ pour chaque $\Omega \in \Theta$.

Soit donc $\Omega \in \Theta$ et choisissons un entourage Ω' de S si petit que $\overline{\Omega}' \subset \Omega$. Soit B un entourage de A_2 si petit que $BS \subset \Omega_2'$. Choisissons un réseau $\mathfrak{Z}$ de la famille Ξ_2 (v. 57 pour $p = 0$ et 58 pour $p \geqq 1$). Soit $\mathfrak{z} \in \Xi_2$ un affinement de $\mathfrak{Z}$ si fin que les conditions suivantes aient lieu: 1° pour chaque sommet extérieur z de $\mathfrak{z}$ on a $Bz \subset \Omega_2$; 2° $z \in \mathfrak{z}$, $z\Omega' \neq 0$ entraîne que $z \subset \Omega$; 3° $z \in \mathfrak{z}$, $z\Omega_2' \neq 0$ entraîne que $z \subset \Omega_2$; 4° $\mathfrak{z}$ est un affinement de $\mathfrak{Z}$ normal rel. aux cycles mod $A_1\overline{\Omega}$ dans A_1.

Choisissons $\mathfrak{t} \in \Delta(\mathfrak{z})$ et supposons que $\mathfrak{U}$ parcoure la famille $\Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{t})$ (v. 57 pour $p = 0$ et 58 pour $p \geqq 1$). Choisissons une projection $\pi = \text{Pr.}(\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$. Construisons le réseau fermé $\mathfrak{T}$ correspondant à $\mathfrak{Z}$ d'après n° 24, en y faisant usage de $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ et π. Employons les notations du n° 24. Evidemment (v. 58.5) on a $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$, $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T}) \supset \Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{t})$.

D'après 31 et 24 (3), il existe des nombres $b_i \in \mathfrak{R}$ [70] tels que

$$C^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \sum_{i=1}^{\alpha_p} b_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \sim \sum_{\nu=1}^{\beta_p} b_\nu' k^{n-p}(\tau_\nu^p, \mathfrak{U}) \bmod \overline{\Omega}_2 \text{ dans } \overline{B},$$

nous y avons posé: 1° $b_\nu' = 0$ pour $\gamma_p + 1 \leqq \nu \leqq \beta_p$ ainsi que pour $1 \leqq \nu \leqq \gamma_p$, $\pi\tau_\nu^p = 0$; 2° $b_\nu' = b_i$ pour $1 \leqq \nu \leqq \gamma_p$, $\pi\tau_\nu^p = \sigma_i^p$. Posons

$$C^p(\mathfrak{z}) = \sum_{\nu=1}^{\beta_p} a_\nu' \tau_\nu^p,$$

les nombres $a_\nu' \in \mathfrak{R}$ étant assujettis aux conditions suivantes: 1° $a_\nu' = 0$ si un sommet de τ_ν^p rencontre Ω_2'; 2° $\sum_{\nu=1}^{\beta_p} \eta_{\nu\mu}^{p-1} a_\nu' = 0$ pour chaque valeur de μ $(1 \leqq \mu \leqq \beta_{p-1})$ telle qu'aucun sommet de τ_μ^{p-1} ne rencontre Ω';[71] 3° $\sum_{\nu=1}^{\beta_p} a_\nu' b_\nu' = 1$. Supposons pour un moment qu'on puisse vérifier ces conditions. D'après 1°, la chaîne $C^p(\mathfrak{z})$ est située dans $R - \Omega_2' = A_1$; d'après 2°, chaque simplexe de la chaîne $F\,C^p(\mathfrak{z})$ possède un sommet rencontrant Ω' de sorte que la chaîne $F\,C^p(\mathfrak{z})$ est située dans Ω en vertu de la propriété 2° du réseau $\mathfrak{z}$. Donc $C^p(\mathfrak{Z}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i \sigma_i^p$ est un $(p, \mathfrak{Z})$-cycle essentiel (v. la

[70] On voit sans peine (v. 26) qu'on peut supposer que les nombres b_i soient indépendants du choix de $\mathfrak{U} \in \Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{t})$.

[71] Cette condition n'exige rien si $p = 0$.

propriété 4° de $\mathfrak{z}$) mod $A_1\overline{\Omega}$ dans A_1. On voit sans peine que $\sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i b_i = 1$. Il existe donc un (p, R)-cycle C^p mod $A_1\overline{\Omega}$ dans A_1 et tel que $C^p C^{n-p} = 1$, c. q. f. d.

Reste à prouver que les conditions posées pour les nombres a'_ν sont réalisables. On voit sans peine que, dans le cas contraire, on pourrait déterminer des nombres $c_\mu \in \mathfrak{R}$ $(1 \leqq \mu \leqq \beta_{p-1})$ tels que: 1° $c_\mu = 0$ si le simplexe τ_μ^{p-1} possède un sommet rencontrant Ω'; 2° $b'_\nu = \sum_{\mu=1}^{\beta_{p-1}} \eta_{\nu\mu}^{p-1} c_\mu$ pour chaque valeur de ν $(1 \leqq \nu \leqq \beta_p)$ telle qu'aucun sommet de τ_ν^p ne rencontre Ω'_2.[72] Or d'après 1°, la chaîne

$$D^{n-p+1}(\mathfrak{U}) = \sum_{\mu=1}^{\beta_{p-1}} c_\mu\, k^{n-p+1}(\tau_\mu^{p-1}, \mathfrak{U})$$

serait située dans $R - \Omega'$ et d'après 2° on aurait, en tenant compte de la propriété 3° du réseau $\mathfrak{z}$,

$$F\, D^{n-p+1}(\mathfrak{U}) = \sum_{\nu=1}^{\beta_p} b'_\nu\, k^{n-p}(\tau_\nu^p, \mathfrak{U}) \quad \text{mod}\, \overline{\Omega}_2.^{73}$$

Donc on aurait $C^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod $\overline{\Omega}_2$ dans $R - \Omega'$ et par suite, la famille $\Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{t})$ étant complète, $C^{n-p} \sim 0$ mod $A'_2\overline{\Omega}_2$ dans A'_2 pour $A'_2 = R - \Omega'$, ce qui est une contradiction.

64. Pour $S = S_2$, Γ_2 est (v. 6.2) le $(n - p)^{\text{ème}}$ groupe de Betti de l'espace R mod S. En désignant par $\varkappa$ la famille de tous les sous-ensembles bicompacts de $R - S$, on voit sans peine que, dans le cas actuel $S = S_2$, Γ_1 est le $p^{\text{ème}}$ groupe de Betti *bicompact* (= d'espèce $\varkappa$ au sens de l'*Homologie*, V, 9) de l'espace $R - S$. Pareillement, pour $S_2 = 0$, Γ_2 est le $(n - p)^{\text{ème}}$ groupe de Betti bicompact de $R - S$ et Γ_1 est le $p^{\text{ème}}$ groupe de Betti de R mod S.

Donc, *pour $q = p$ ou $q = n - p$, le $q^{\text{ème}}$ groupe de Betti de l'espace R mod S est duel au $(n - q)^{\text{ème}}$ groupe de Betti bicompact de l'espace $R - S$.*

VIII.

65. *Soit $0 \leqq p \leqq \frac{1}{2}(n - 1)$. Supposons la validité de tous les axiomes du Chap. I et II ainsi que celle des axiomes G^k (v. 21) pour $n - p \leqq k \leqq n - 1$ et des axiomes H^k (v. 27) pour $n - p - 1 \leqq k \leqq n - 2$. Alors les axiomes G^k $(0 \leqq k \leqq p)$ sont aussi vérifiés.*

Démonstration. Il suffit de montrer la validité de G^p (pour G^k on remplace p par k). Soit donc $a \in R - S$. On doit prouver qu'à chaque entourage $U \subset R - S$

[72] Pour $p = 0$: On aurait $b'_\nu = 0$ pour chaque valeur de ν $(1 \leqq \nu \leqq \beta_0)$ telle que $\tau_\nu^0 \Omega'_2 = 0$.

[73] Pour $p = 0$: On aurait $\sum_{\nu=1}^{\beta_0} b'_\nu k^n(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}) = 0$ mod $\overline{\Omega}_2$.

de a on peut attacher un entourage V tel que chaque (p, R)-cycle dans $\overline{V}$ est ~ 0 dans $\overline{U}$. Or il suffit de prouver que l'entourage V de a peut être choisi de telle sorte que chaque (p, R)-cycle dans $\overline{V}$ soit ~ 0 dans un sous-ensemble bicompact de $R - S$. En effet, le cas général s'en déduit en remplaçant S par $R - U$, ce qui est sans influence sur la validité de nos axiomes.

Soit donc $a \in R - S$; soit $U \subset\subset R - S$ un entourage de a; soit Ω un entourage de S si petit que $\overline{U}\overline{\Omega} = 0$. C^p étant un (p, R)-cycle dans $\overline{U}$ et C^{n-p} étant un $(n - p, R)$-cycle mod S, pour calculer le nombre C^pC^{n-p} on peut (v. 59.2) remplacer C^{n-p} par un $(n - p, R)$-cycle C_1^{n-p} mod $\overline{\Omega}$ homologue à C^{n-p} mod $\overline{\Omega}$. Il existe évidemment un réseau $\mathfrak{Z}$ et un réseau fermé $\mathfrak{T}$ correspondant qui soient tels que: 1° l'énoncé du n° 31 est vrai pour $A = B = R$; 2° $R - R_0 \subset \Omega$; 3° le point a appartient à un sommet unique (nécessairement intérieur) de $\mathfrak{Z}$ de manière que $a \in R_0 - R_1$ (dans les notations de 8). Ceci étant, on peut (d'après 31) attacher à chaque C^{n-p} un $C_1^{n-p} \sim$ $\sim C^{n-p}$ mod $\overline{\Omega}$ de manière que (v. 19.3) C_1^{n-p} soit un $(n - p, R)$-cycle mod $\overline{\Omega}$ dans R_p. Or soit V un entourage de a si petit que $\overline{V} \subset R - \overline{\Omega} - R_1$; si C^p est un (p, R)-cycle dans $\overline{V}$, on a, en excluant d'abord le cas $p = 0$, $C^pC_1^{n-p} = 0$ d'après 59.1 et par suite aussi $C^pC^{n-p} = 0$ pour chaque choix du $(n - p, R)$-cycle C^{n-p} mod S. D'après 62 (où on pose $S_2 = S$; v. 64) il en résulte que $C^p \sim 0$ dans un sous-ensemble bicompact de $R - S$, pour chaque choix du (p, R)-cycle C^p dans $\overline{V}$, c. q. f. d.

Dans le cas $p = 0$ le raisonnement précédant ne s'applique plus. Or on peut alors (v. 14.1 et 17.5) déterminer un entourage $U \subset\subset R - S$ de a de manière qu'on puisse attacher à chaque (n, R)-cycle C^n mod S un nombre $r \in \mathfrak{R}$ de manière que $C^n -$ $- rG^n \sim 0 \bmod (R - U)$. Soit V un entourage de a tel que $\overline{V} \subset U$. Pour chaque 0-cycle C^0 dans $\overline{V}$ on a alors $C^0(C^n - rG^n) = 0$ d'après 59.1 (v. aussi 59.2). Il en résulte que si C^0 est tel que $C^0G^n = 0$ on a $C^0C^n = 0$ pour chaque (n, R)-cycle C^n mod S. Il suffit donc de montrer que $I(C^0) = 0$ (v. [38]) entraîne que $C^0G^n = 0$. Or soit C_a^0 le $(0, R)$-cycle (dans $\overline{V}$) correspondant (v. *Homologie*, III, 17) au point a. Posons $C_a^0G^n = s$. On a $s \neq 0$; en effet, dans le cas contraire, on aurait $C_a^0C^n = 0$ pour chaque C^n et par suite, d'après 62 evec $S_2 = S$ (v. aussi 64) $C_a^0 \sim 0$ dans un sous-ensemble bicompact de R, ce qui entraînerait, comme on sait, que $I(C_a^0) = 0$, tandis que, évidemment, $I(C_a^0) = 1$. Puisque $s \neq 0$, on peut attacher à chaque 0-cycle C^0 dans $\overline{V}$ un nombre $t \in \mathfrak{R}$ tel que $(C^0 - tC_a^0)\, G^n = 0$, ce qui entraîne que $C^0 - tC_a^0 \sim 0$ dans un sous-ensemble bicompact de R, d'où $I(C_0 - tC_a^0) = 0$. Or $I(C^0 - tC_a^0) =$ $= I(C^0) - t\,I(C_a^0) = I(C^0) - t$, donc $t = I(C^0)$. Par suite $I(C^0) = 0$ entraîne que $t = 0$, d'où $C^0G^n = 0$, c. q. f. d.

65.1. *Les axiomes des Chap. I et II entraînent que l'espace $R - S$ est localement connexe.*

Cela résulte de 65 (avec $p = 0$), car l'axiome G^0 équivaut évidemment (v. *Homologie*, III, 14–18) à la connexité locale de $R - S$.

66. *Soit $0 \leqq p \leqq \frac{1}{2}n - 1$. Supposons la validité de tous les axiomes des Chap. I et II ainsi que celle des axiomes G^k (v. 21) pour $n - p \leqq k \leqq n - 1$ et des axiomes*

H^k (v. 27) pour $n-p-1 \leqq k \leqq n-2$. Alors les axiomes H^k $(0 \leqq k \leqq p)$ sont aussi vérifiés.

La démonstration sera donnée au n° 66.2.

66.1. **Lemme.** Soit $0 \leqq p \leqq n-2$. Supposons que R soit un espace normal et que $S = \bar{S} \subset R$. Supposons la validité de l'axiome G^{n-p-1} (v. 21). Soit $a \in R - S$. Soit $U \subset\subset R - S$ un entourage de a. Il existe un entourage $V \subset\subset U$ de a jouissant de la propriété suivante: Soit C^{n-p} un $(n-p, R)$-cycle mod $(S + \bar{V})$; il existe un $(n-p, R)$-cycle C_1^{n-p} mod S et un $(n-p, R)$-cycle C_2^{n-p} mod $\bar{V}$ dans $\bar{U}$ tels que $C^{n-p} \sim C_1^{n-p} + C_2^{n-p}$ mod $(S + \bar{V})$.

Démonstration. D'après l'axiome G^{n-p-1}, déterminons l'entourage $V \subset\subset U$ de manière que l'on ait $\Gamma^{n-p-1} \sim 0$ dans $\bar{U}$ pour chaque $(n-p-1, R)$-cycle Γ^{n-p-1} dans $\bar{V}$. Soit Φ la famille (complète) de tous les réseaux dont aucun sommet ne rencontre simultanément $\bar{V}$ et S. Pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$, on a

$$F\, C^{n-p}(\mathfrak{U}) = \Gamma_1^{n-p-1}(\mathfrak{U}) + \Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{U}),$$

où $\Gamma_1^{n-p-1}(\mathfrak{U})$ $[\Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{U})]$ est un $(n-p-1, \mathfrak{U})$-cycle dans S [dans $\bar{V}$]. Lorsque $\mathfrak{V} \in \Phi$ est un affinement de $\mathfrak{U} \in \Phi$, on a, en posant $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, $\pi\, C^{n-p}(\mathfrak{V}) \sim$ $\sim C^{n-p}(\mathfrak{U})$ mod $(S + \bar{V})$. Il existe donc une $(n-p+1, \mathfrak{U})$-chaîne $E^{n-p+1}(\mathfrak{U})$ et deux $(n-p, \mathfrak{U})$-chaînes $E_1^{n-p}(\mathfrak{U})$, $E_2^{n-p}(\mathfrak{U})$ telles que $E_1^{n-p}(\mathfrak{U}) \subset S$, $E_2^{n-p}(\mathfrak{U}) \subset \bar{V}$ et

$$\pi\, C^{n-p}(\mathfrak{V}) - C^{n-p}(\mathfrak{U}) = F\, E^{n-p+1}(\mathfrak{U}) + E_1^{n-p}(\mathfrak{U}) + E_2^{n-p}(\mathfrak{U}),$$

d'où

$$\begin{aligned} &\pi\, \Gamma_1^{n-p-1}(\mathfrak{V}) - \Gamma_1^{n-p-1}(\mathfrak{U}) - F\, E_1^{n-p}(\mathfrak{U}) = \\ &= \pi\, \Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{V}) - \Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{U}) - F\, E_2^{n-p}(\mathfrak{U}). \end{aligned}$$

Or la chaîne à gauche (à droite) est située dans S (dans $\bar{V}$); d'après la définition de la famille Φ, on en déduit que chacune de ces deux chaînes est égale a zéro, d'où $\pi\, \Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{V}) \sim \Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{U})$ dans $\bar{V}$. Il en résulte que $\Gamma_2^{n-p-1} = \{\Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{U})\}$ est un $(n-p-1, R)$-cycle dans $\bar{V}$. D'après la définition de V, il existe donc pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$ une $(n-p, \mathfrak{U})$-chaîne dans $\bar{U}$ dont la frontière est égale à $\Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{U})$. Pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$, soit $L_2^{n-p}(\mathfrak{U})$ la famille de tous les $(n-p, \mathfrak{U})$-cycles $C_2^{n-p}(\mathfrak{U})$ mod $\bar{V}$ dans $\bar{U}$ tels que $F\, C_2^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{U})$ dans $\bar{V}$. Nous venons de voir que $L_2^{n-p}(\mathfrak{U}) \neq 0$ pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$. On voit sans peine que $L_2^{n-p}(\mathfrak{U})$ est un système linéaire et que $\pi\, L_2^{n-p}(\mathfrak{V}) \subset L_2^{n-p}(\mathfrak{U})$. D'après *Homologie*, II, 21, on peut donc choisir $C_2^{n-p}(\mathfrak{U}) \in$ $\in L_2^{n-p}(\mathfrak{U})$ pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$ de manière que $C_2^{n-p} = \{C_2^{n-p}(\mathfrak{U})\}$ soit un $(n-p, R)$-cycle mod $\bar{V}$ dans $\bar{U}$. Puisque $C_2^{n-p}(\mathfrak{U}) \in L_2^{n-p}(\mathfrak{U})$, il existe pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$ une $(n-p, \mathfrak{U})$-chaîne $D_2^{n-p}(\mathfrak{U})$ dans $\bar{V}$ telle que

$$F\, C_2^{n-p}(\mathfrak{U}) = \Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{U}) + F\, D_2^{n-p}(\mathfrak{U}).$$

Le cycle C_2^{n-p} étant déterminé, il s'agit encore de démontrer l'existence de C_1^{n-p}. Or désignons pour $\mathfrak{U} \in \Phi$ par $L_1^{n-p}(\mathfrak{U})$ la famille de tous les $(n-p, \mathfrak{U})$-cycles $C_1^{n-p}(\mathfrak{U})$

mod S tels que:

$$C^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim C_1^{n-p}(\mathfrak{U}) + C_2^{n-p}(\mathfrak{U}) \quad \text{mod}\,(S + \bar{V})\,.$$

En supposant pour un moment que $L_1^{n-p}(\mathfrak{U}) \neq 0$, on voit sans peine que c'est un système linéaire. Or on a évidemment $\pi\, L_1^{n-p}(\mathfrak{B}) \subset L_1^{n-p}(\mathfrak{U})$. Il résulte donc de l'*Homologie*, II, 21 que le cycle C_1^{n-p} existe. On doit encore démontrer que $L_1^{n-p}(\mathfrak{U}) \neq 0$; c'est évident, car on voit sans peine que

$$C^{n-p}(\mathfrak{U}) - C_2^{n-p}(\mathfrak{U}) + D_2^{n-p}(\mathfrak{U}) \in L_1^{n-p}(\mathfrak{U})\,.$$

66.2. Passons à la démonstration du théorème du n° 66. Il suffit de démontrer la validité de l'axiome H^p. Il suffit même de prouver l'énoncé E suivant: Soit $a \in R - S$; soit $P_1 \subset\subset R - S$ un entourage donné de a. A chaque entourage $P_2 \subset P_1$ de a on peut attacher un entourage $P_3 \subset P_2$ de a de manière que: Si C^p est un (p, R)-cycle dans $\bar{P}_1 - P_2$ tel que $C^p \sim 0$ dans un sous-ensemble bicompact de $R - S$, on ait aussi $C^p \sim 0$ dans un sous-ensemble bicompact de $R - (S + \bar{P}_3)$. En effet, d'une part, l'axiome H^p, sous la forme énoncée au n° 27, est une conséquence de E si $P = R - S$; d'autre part, en remplaçant S par $R - P$ (et donc $R - S$ par P) on ne détruit pas la validité des axiomes supposés vrais au n° 66.

Soit donc $a \in R - S$ et soient P_1, P_2 deux entourages de a tels que $P_2 \subset P_1 \subset\subset R - S$. Choisissons un entourage $U \subset\subset P_2$ de a et déterminons l'entourage $V = P_3$ de a d'après 66.1. Soit C^p un (p, R)-cycle dans $\bar{P}_1 - P_2$ tel que $C^p \sim 0$ dans un sous-ensemble bicompact de $R - S$. D'après 64, on a $C^pC^{n-p} = 0$ pour chaque $(n - p, R)$-cycle C^{n-p} mod S. On doit prouver que $C^p \sim 0$ dans un sous-ensemble bicompact de $R - (S + \bar{P}_3)$. Or le théorème du n° 64 reste évidemment vrai en y remplaçant S par $S + \bar{P}_3$ (car les axiomes dont on a déduit ce théorème restent vrais). Or on a évidemment $\bar{P}_1 - P_2 \subset R - (S + \bar{P}_3)$ de sorte qu'il suffit de prouver que $C^pC^{n-p} = 0$ pour chaque $(n - p, R)$-cycle C^{n-p} mod $(S + \bar{P}_3)$. D'après 66.1 il existe un $(n - p, R)$-cycle C_1^{n-p} et un $(n - p, R)$-cycle C_2^{n-p} mod $\bar{P}_3$ dans $\bar{U}$ tel que

$$C^{n-p} \sim C_1^{n-p} + C_2^{n-p} \quad \text{mod}\,(S + \bar{P}_3)\,.$$

On a donc (v. 56, 3° et 4°)

$$C^pC^{n-p} = C^pC_1^{n-p} + C^pC_2^{n-p}\,.$$

Or nous savons que $C^pC_1^{n-p} = 0$; d'autre part, $C^pC_2^{n-p} = 0$ d'après 59.1, car $C^p \subset \bar{P}_1 - P_2$, $C_2^{n-p} \subset \bar{U}$, $\bar{U}(\bar{P}_1 - P_2) = 0$.

67. Faisons les hypothèses du n° 55. Il se peut qu'il existe un nombre infini de $(n - p, R)$-cycles mod S lin. indépendants mod S (c'est-à-dire tels qu'aucune combinaison linéaire de ces cycles ne soit ~ 0 mod S); or il résulte du théorème du n° 31 que, Ω étant un entourage donné de S, il n'existe qu'un nombre fini de $(n - p, R)$-cycles mod S lin. indépendants mod $\bar{\Omega}$; autrement dit, Ω étant donné, on peut indiquer un nombre fini de $(n - p, R)$-cycles mod S tels que chaque $(n - p, R)$-cycle mod S

soit homologue mod S à une combinaison linéaire de ces cycles donnés, augmentée d'un $(n - p, R)$-cycle mod S dans $\bar{\Omega}$.

Pareillement il peut exister un nombre infini de $(n - p, R)$-cycles absolus, dont chacun est situé dans un sous-ensemble bicompact de $R - S$, et tels qu'aucune combinaison linéaire de ces cycles ne soit homologue à zéro dans un sous-ensemble bicompact de $R - S$. Mais, A étant un sous-ensemble bicompact de $R - S$ donné, il existe un nombre fini de $(n - p, R)$-cycles dans A tels que chaque $(n - p, R)$-cycle situé dans A soit homologue à une combinaison linéaire de ces cycles dans un sous-ensemble bicompact de $R - S$.

Du théorème du n° 64 on déduit (v. 59.1) que ces remarques restent vraies en remplaçant p par $n - p$.

Supposons en particulier que $S = 0$. Alors l'ensemble $R - S = R$ lui même est bicompact, et par suite la $p^{\text{ème}}$, ainsi que le $(n - p)^{\text{ème}}$ nombre de Betti de R est fini. Ces deux nombres sont égaux l'un à l'autre d'après 64 (*théorème de dualité de Poincaré*).

68. Soit $0 \leqq p \leqq n - 1$. Supposons la validité des axiomes énumérés au n° 55, en y remplaçant S par 0.

Soit S un sous-ensemble bicompact de R. Soit Δ_1 l'ensemble de tous les (p, R)-cycles C^p dans A homologues à zéro dans R, où A parcourt la classe K de tous les sous-ensembles bicompacts de $R - S$; considérons deux éléments C_1^p, C_2^p de Δ_1 comme égaux si l'on peut déterminer $A \in K$ de manière que $C_1^p \sim C_2^p$ dans A. Soit Δ_2 l'ensemble de tous les $(n - p - 1, R)$-cycles Γ^{n-p-1} dans S homologues à zéro dans R; deux éléments Γ_1^{n-p-1}, Γ_2^{n-p-1} de Δ_2 seront considérés comme égaux si $\Gamma_1^{n-p-1} \sim$ $\sim \Gamma_2^{n-p-1}$ dans S.

Nous allons définir une multiplication $C^p \times \Gamma^{n-p-1}$ rel. à laquelle les deux modules Δ_1 et Δ_2 sont duels (*théorème de dualité de M. Pontrjagin*)[74].

Soit $\Gamma^{n-p-1} \in \Delta_2$. Pour chaque réseau $\mathfrak{U}$, il existe un système linéaire $L^{n-p}(\mathfrak{U})$ de $(n - p, \mathfrak{U})$-cycles $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ dans R tels que $F\,C^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{n-p-1}(\mathfrak{U})$ dans S. De l'*Homologie* II, 21 on déduit sans peine qu'on peut choisir $C^{n-p}(\mathfrak{U}) \in L^{n-p}(\mathfrak{U})$ de manière que $C^{n-p} = \{C^{n-p}(\mathfrak{U})\}$ soit un $(n - p, R)$-cycle dans S. Posons $C^{n-p} =$ $= \varphi(\Gamma^{n-p-1})$; la fonction φ n'est pas du reste univoque. Ceci étant, posons

$$C^p \times \Gamma^{n-p-1} = C^p\,\varphi(\Gamma^{n-p-1}).$$

Les propriétés 1°, 2°, 3° dans la définition de dualité de deux modules (n° 61) sont évidentes. Reste à montrer: A_1: le produit $C^p \times \Gamma^{n-p-1}$ est univoquement déterminé; A_2: si $C^p \in \Delta_1$ jouit de la propriété que $C^p \times \Gamma^{n-p-1} = 0$ pour chaque $\Gamma^{n-p-1} \in \Delta_2$, on a $C^p = 0$; A_3: si $\Gamma^{n-p-1} \in \Delta_2$ jouit de la propriété que $C^p \times \Gamma^{n-p-1} = 0$ pour chaque $C^p \in \Delta_1$, on a $\Gamma^{n-p-1} = 0$.

[74] Göttinger Nachrichten, 1928, p. 448 (Satz I).

Démonstration de A_1. Soit

$$C_1^p = C_2^p, \quad \Gamma_1^{n-p-1} = \Gamma_2^{n-p-1},$$
$$C_1^{n-p} = \varphi(\Gamma_1^{n-p-1}), \quad C_2^{n-p} = \varphi(\Gamma_2^{n-p-1}).$$

On doit prouver que

$$C_1^p C_1^{n-p} = C_2^p C_2^{n-p}.$$

L'égalité $C_1^p = C_2^p$ signifie qu'il existe un sous-ensemble bicompact A de $R - S$ tel que $C_1^p - C_2^p \sim 0$ dans A. Donc d'après 64, on a $(C_1^p - C_2^p)C_2^{n-p} = 0$, car C_2^{n-p} est un $(n-p, R)$-cycle mod S. Reste à prouver que $C_1^p(C_1^{n-p} - C_2^{n-p}) = 0$. Or l'égalité $\Gamma_1^{n-p-1} = \Gamma_2^{n-p-1}$ signifie que $\Gamma_1^{n-p-1} \sim \Gamma_2^{n-p-1}$ dans S. D'autre part, dans chaque réseau $\mathfrak{U}$ on a $F\,C_1^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \Gamma_1^{n-p-1}(\mathfrak{U})$ dans S, $F\,C_2^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{U})$ dans S d'où il résulte qu'on peut déterminer une $(n-p, \mathfrak{U})$-chaîne $D^{n-p}(\mathfrak{U})$ dans S telle que $C_1^{n-p}(\mathfrak{U}) - C_2^{n-p}(\mathfrak{U}) - D^{n-p}(\mathfrak{U}) \to 0$. Pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ désignons par $L^{n-p}(\mathfrak{U})$ la famille de tous les $(n-p, \mathfrak{U})$-cycles absolus de la forme

$$C_1^{n-p}(\mathfrak{U}) - C_2^{n-p}(\mathfrak{U}) - D^{n-p}(\mathfrak{U}) + E^{n-p}(\mathfrak{U}) + F\,H^{n-p+1}(\mathfrak{U}),$$

où $E^{n-p}(\mathfrak{U})$ parcourt tous les $(n-p, \mathfrak{U})$-cycles dans S tandis que $H^{n-p+1}(\mathfrak{U})$ parcourt toutes les $(n-p+1, \mathfrak{U})$-chaînes. D'après *Homologie*, II, 21 on voit sans peine qu'il est possible de choisir $C^{n-p}(\mathfrak{U}) \in L^{n-p}(\mathfrak{U})$ de manière que $C^{n-p} = \{C^{n-p}(\mathfrak{U})\}$ soit un $(n-p, R)$-cycle (absolu). Evidemment $C^{n-p} \sim C_1^{n-p} - C_2^{n-p}$ mod S, d'où $C_1^p(C_1^{n-p} - C_2^{n-p}) = C_1^p C^{n-p}$, de sorte qu'on doit seulement prouver que $C_1^p C^{n-p} = 0$, ce qui résulte de 64 (en y remplaçant S par 0), car $C_1^p \sim 0$ mod R.

Démonstration de A_2. Supposons que le cycle $C^p \in \Delta_1$ ne soit homologue à zéro dans aucun sous-ensemble bicompact de $R - S$. On doit prouver qu'il existe un $\Gamma^{n-p-1} \in \Delta_2$ tel que $C^p \times \Gamma^{n-p-1} = 1$. Or d'après 64 il existe un $(n-p, R)$-cycle C^{n-p} mod S tel que $C^p C^{n-p} = 1$. Pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ soit $\Gamma^{n-p-1}(\mathfrak{U}) = F\,C^{n-p}(\mathfrak{U})$. On voit sans peine que $\Gamma^{n-p-1} = \{\Gamma^{n-p-1}(\mathfrak{U})\}$ est un élément de Δ_2 tel que $C^{n-p} = \varphi(\Gamma^{n-p-1})$, d'où $C^p \times \Gamma^{n-p-1} = 1$.

Démonstration de A_3. Supposons que le cycle $\Gamma^{n-p-1} \in \Delta_2$ ne soit pas homologue à zéro dans S. Soit $C_0^{n-p} = \varphi(\Gamma^{n-p-1})$. On doit prouver qu'il existe un $C_0^p \in \Delta_1$ tel que $C_0^p C_0^{n-p} = 1$. On voit sans peine que le $(n-p, R)$-cycle C^{n-p} mod S n'est homologue mod S à aucun $(n-p, R)$-cycle absolu. Supposons par impossible que, pour chaque réseau $\mathfrak{U}$, le $(n-p, \mathfrak{U})$-cycle mod S: $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ soit homologue mod S à un $(n-p, \mathfrak{U})$-cycle absolu $B^{n-p}(\mathfrak{U})$; désignons par $L^{n-p}(\mathfrak{U})$ la famille de tous ces $B^{n-p}(\mathfrak{U})$; de l'*Homologie*, II, 21 on déduit sans peine qu'on peut choisir $B^{n-p}(\mathfrak{U}) \in L^{n-p}(\mathfrak{U})$ de manière que $B^{n-p} = \{B^{n-p}(\mathfrak{U})\}$ soit un $(n-p, R)$-cycle absolu, d'où il résulte la contradiction $C_0^{n-p} \sim B^{n-p}$ mod S.

Soit donc $\mathfrak{U}_0$ un réseau tel que $C_0^{n-p}(\mathfrak{U})$ ne soit homologue mod S à aucun $(n-p, \mathfrak{U}_0)$-cycle absolu; on voit sans peine (v. la démonstration de 6.1) qu'il existe un entourage Ω de S tel que, dans le réseau $\mathfrak{U}_0$, les frontières, cycles, homologies mod S soient les mêmes comme mod $\overline{\Omega}$. Donc $C_0^{n-p}(\mathfrak{U})$ n'est homologue mod $\overline{\Omega}$ à aucun $(n-p, \mathfrak{U}_0)$-cycle absolu; par suite C_0^{n-p} n'est homologue mod $\overline{\Omega}$ à aucun $(n-p, R)$-cycle absolu. D'après 67, il existe un ensemble fini τ de $(n-p, R)$-cycles mod S tel que chaque $(n-p, R)$-cycle mod S soit homologue mod S à une combinaison linéaire de ces cycles, augmentée d'un $(n-p, R)$-cycle mod S dans $\overline{\Omega}$, tandis qu'aucune combinaison linéaire de ces cycles ne soit ~ 0 mod $\overline{\Omega}$. On voit sans peine qu'on peut supposer que le cycle C_0^{n-p} appartienne à la famille τ; en outre, on peut supposer que la famille τ contienne des cycles $C_1^{n-p}, C_2^{n-p}, \ldots, C_h^{n-p}$ $(h = 0, 1, 2, \ldots)$ tels qu'un $(n-p, R)$-cycle mod S est $\sim \sum_{i=1}^{h} a_i C_i^{n-p}$ mod Ω si et seulement s'il est homologue mod $\overline{\Omega}$ à un $(n-p, R)$-cycle absolu. Soit

$$C_0^{n-p}, C_1^{n-p}, \ldots, C_h^{n-p}, C_{h+1}^{n-p}, \ldots, C_k^{n-p}$$

$(0 \leqq h \leqq k)$ la famille τ. K_0 étant la famille de tous les sous-ensembles bicompacts de $R - \overline{\Omega}$, il résulte facilement de 64 (où l'on remplace S par $\overline{\Omega}$) qu'il existe des (p, R)-cycles absolus

$$C_0^p, C_1^p, \ldots, C_h^p, C_{h+1}^p, \ldots, C_k^p,$$

C_i^p $(0 \leqq i \leqq k)$ étant situé dans $A_i \in K_0$, tels que pour $0 \leqq i \leqq k$, $0 \leqq j \leqq k$: $C_i^p C_j^{n-p} = 1$ pour $i = j$, $= 0$ pour $i \neq j$.

Je dis que C_0^p est élément cherché du module Δ_1. Puisque $C_0^p C_0^{n-p} = 1$, il faut seulement démontrer que $C_0^p \sim 0$ dans R. D'après 64, il suffit de prouver que $C_0^p C^{n-p} = 0$ pour chaque $(n-p, R)$-cycle absolu C^{n-p}. Or d'après ce que nous venons de dire, il existe des nombres $a_i \in \mathfrak{R}$ et un $(n-p, R)$-cycle $*C^{n-p}$ mod S dans $\overline{\Omega}$ tels que

$$C^{n-p} \sim \sum_{i=1}^{h} a_i C_i^{n-p} + *C^{n-p} \quad \mathrm{mod}\, S\,,$$

d'où

$$C_0^p C^{n-p} = \sum_{i=1}^{h} a_i C_0^p C_i^{n-p} + C_0^p *C^{n-p}\,.$$

Or nous savons que $C_0^p C_i^{n-p} = 0$ pour $1 \leqq i \leqq h$; d'autre part, $C_0^p *C^{n-p} = 0$, car $C_0^p \subset A_0$, $*C^{n-p} \subset \overline{\Omega}$, $A_0\overline{\Omega} = 0$.

Remarque. Soit $\delta_i = 1$ pour $i = 0$, $\delta_i = 0$ pour $i \geqq 1$. Supposons que le $p^{\text{ème}}$ et le $(n-p-1)^{\text{ème}}$ nombre de Betti de l'espace R soient resp. égaux à δ_p et à δ_{n-p-1}. Alors Δ_1 est le module de tous les (p, R)-cycles C^p bicompacts dans $R - S$ (tels que $I(C^p) = 0$ si $p = 0$) tandis que Δ_2 est le module de tous les $(n-p-1, R)$-cycles C^{n-p-1} dans S (tels que $I(C^{n-p-1}) = 0$ si $n-p-1 = 0$). Le fait que les deux modules Δ_1 et Δ_2 sont duels constitue *le théorème de dualité de M. Alexander.*

69. Faisons l'hypothèse du n° 55. Soit Γ_1 l'ensemble de tous les (p, R)-cycles absolus dans A, où A parcourt tous les sous-ensembles bicompacts de $R - S$; deux éléments C_1^p, C_2^p seront considérés comme égaux si $C_1^p \sim C_2^p$ mod S. Soit Γ_2 l'ensemble qui s'obtient de Γ_1 en remplaçant p par $n - p$. On voit sans peine (v. 56, 4°) que le produit C^pC^{n-p} où $C^p \in \Gamma_1$, $C^{n-p} \in \Gamma_2$, est bien déterminé malgré les conventions faites sur l'égalité de deux éléments de Γ_1 ou de Γ_2. En procédant comme dans les n^{os} 62 et 63, on démontre sans peine que les deux modules Γ_1 et Γ_2 sont duels relativement à la multiplication C^pC^{n-p}. C'est *le second théorème de dualité de M. Lefschetz.*[75]

70. Soient A_1 et A_2 deux sous-ensembles de $R - S$, fermés dans $R - S$ et tels que $\overline{A_1A_2} \subset R - S$. Soit C^p un (p, R)-cycle mod $\bar{A}_1S$ dans A_1; soit C^{n-p} un $(n - p, R)$-cycle mod $\bar{A}_2S$ dans $\bar{A}_2$. On voit sans peine qu'on peut étendre la définition du produit C^pC^{n-p} du Chap. VII (qui a été exposée seulement sous l'hypothèse $\bar{A}_1\bar{A}_2 = 0$) au cas plus général ici envisagé, et que les propriétés 1°, 2°, 3°, 4° du n° 61 restent vraies.

Sous la forme ainsi généralisée, le produit C^pC^{n-p} ne dépend évidemment (cf. 6.3) que de l'espace $R - S$ (et de son orientation).

On pourrait aussi généraliser le théorème général de dualité du n° 61 en lui donnant une forme qui ne dépend plus que de l'espace $R - S$.[76] Nous omettons de le faire, car on n'arrive qu'à un énoncé fort compliqué et peu susceptible d'applications; d'ailleurs, il est évident que l'important théorème de dualité du n° 64 exprime une propriété topologique de l'espace $R - S$ (v. 6.3).

[75] Cf. Lefschetz, Topology, p. 149, formule (20).

[76] Cf. Lefschetz, Topology, p. 134, formule (18).

16

APPLICATION DE LA THÉORIE DE L'HOMOLOGIE À LA THÉORIE DE LA CONNEXITÉ, I.

Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou
Masarykovy university.
Brno *188* (1933), 40 pp.

(Traduit de tchèque:
Užití theorie homologie
na theorii souvislosti, I.)

I. Espaces métriques

1. Pour pouvoir lire le présent Mémoire il faut connaître la première partie (I.) de l'article *Sur les ensembles connexes irréductibles entre n points* (voir 4), qui sera désigné par M, ainsi que les articles *Contribution à la théorie de la dimension* (voir 11), dénoté par D, et *Introduction à la théorie de l'homologie* (voir 56) dénoté par H.

2. Soit φ une fonction dont le domaine (voir H, p. 150, note 6) est l'espace R (voir M 1). Supposons que $\varphi(R)$ (voir H, p. 150, note 7) soit aussi un espace. Lorsque $S \subset \varphi(R)$, $\varphi_{-1}(S)$ désigne l'ensemble des $x \in R$ pour lesquels $\varphi(x) \in S$. La fonction φ est dite *continue* lorsque $\varphi_{-1}(S)$ est *fermé* dans R chaque fois que S est *fermé* dans $\varphi(R)$. Bien entendu on peut remplacer les mots "*fermé*" (tous les deux!) par "*ouvert*".

3. La fonction φ dans le domaine R est dite *biunivoque*, lorsque $\varphi(x) = \varphi(y)$ entraîne $x = y$. Pour chaque $\xi \in \varphi(R)$ il existe alors un et un seul $x \in R$ tel que $\varphi(x) = \xi$; nous écrivons $x = \varphi_{-1}(\xi)$. Alors φ_{-1} est une fonction biunivoque dans le domaine $\varphi(R)$.

4. Deux espaces R et R^* sont manifestement *homéomorphes* (voir M 3) si et seulement si, il existe une fonction biunivoque φ dans le domaine R telle que $\varphi(R) = R^*$ et que les deux fonctions φ et φ_{-1} soient continues.

5. Soit R un ensemble quelconque. A chaque paire $a \in R$, $b \in R$ soient associés deux nombres réels $\varrho_1(a, b)$, $\varrho_2(a, b)$ jouissant des propriétés M 5.1, 5.2, 5.3. Si nous prenons ϱ_1, ou respectivement ϱ_2, pour distance, R devient espace métrique, que nous désignerons par R_1 ou R_2 respectivement. Lorsque l'application identique de R sur R est un homéomorphisme entre R_1 et R_2, nous disons que ϱ_1 et ϱ_2 sont deux *métriques équivalentes* de l'espace R.

6. Soit R un espace métrique. Soit $\{x_n\}$ une suite de points de R; soit $x \in R$. Nous disons que x est la limite de la suite $\{x_n\}$, et nous écrivons $\lim x_n = x$, lorsque à tout $\delta > 0$ on peut associer un nombre m tel que $n > m$ entraîne $\varrho(x_m, x) < \delta$. On a alors les théorèmes suivants[1]:

6.1. *Si* $\lim x_n = x$, $\lim x_n = y$, *alors* $x = y$.

6.2. *Si la suite* $\{y_n\}$ *est une sous-suite de* $\{x_n\}$ (c'est-à-dire que $y_1 = x_{i_1}$, $y_2 = x_{i_2}, \ldots, i_1 < i_2 < \ldots$) et *que* $\lim x_n = x$, *alors* $\lim y_n = x$.

Si la limite $x = \lim x_n$ existe, nous disons que la suite $\{x_n\}$ est *convergente* dans R. Si $S \subset R$, $x_n \in S$, alors $\{x_n\}$ est convergente dans S si et seulement si $x \in S$.

7. *Soit R un espace métrique; soit $S \subset R$. L'ensemble S est fermé dans R si et seulement si toute suite $\{x_n\} \subset S$ convergente dans R est convergente dans S.*

8. *Soient R, S deux espaces métriques. Soit φ une fonction ayant R pour son domaine; soit $\varphi(R) = S$. La fonction φ est continue si et seulement si $\{x_n\} \subset R$,* $\lim x_n = x$ *implique* $\lim \varphi(x_n) = \varphi(x)$.

9. Soient ϱ_1, ϱ_2 deux métrique dans R (cf. 5). La limite par rapport à la métrique ϱ_1 (c'est-à-dire la limite dans l'espace R_1) sera désignée par lim; la limite par rapport à ϱ_2 (c'est-à-dire la limite dans l'espace R_2) sera désignée par Lim. Alors:

9.1. *ϱ_1 et ϱ_2 sont deux métriques équivalentes si et seulement si les relations* $\lim x_n = x$, $\operatorname{Lim} x_n = x$ *entraînent l'une l'autre.*

II. Espaces métriques compacts

1. Un espace métrique R est dit *compact* lorsque chaque suite $\{x_n\} \subset R$ contient une (au moins) sous-suite convergente.

Un sous-ensemble S de l'espace R sera dit compact si S est compact en tant qu'espace, c'est-à-dire si chaque suite $\{x_n\} \subset S$ contient une sous-suite convergente dans S.

Certains auteurs disent que $S \subset R$ est compact si chaque suite $\{x_n\} \subset S$ contient une sous-suite convergente dans R. On démontre aisément que $S \subset R$ est compact, en ce sens-ci, si et seulement si $\bar{S}$ (voir M 4) est compact au sens adopté ici.

2. *Soit R un espace métrique; soit $S \subset R$. Supposons S compact. Alors S est fermé dans R.*

3. *Soit R un espace métrique compact; soit $S \subset R$. Alors S est fermé dans R si et seulement si S est compact.*

4. *Soit R un espace métrique. R est compact si, et seulement si, il jouit de la propriété suivante: Si $\{A_n\}$ est une suite de sous-ensembles de R, non-vides et fermés dans R, telle que $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout n, alors* $\prod_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

[1] Par manque d'espace, j'omets quelques démonstrations simples dans les chapîtres I et II; le Lecteur les complètera facilement lui-même.

Démonstration. I. Supposons que R ait la propriété mentionnée. Soit $\{x_n\} \subset R$. Supposons que $\{x_n\}$ ne contienne aucune sous-suite convergente. Il est aisé de voir que les ensembles A_n des points $x_n, x_{n+1}, \ldots$ sont fermés dans R; il existe donc $x \in \prod_{n=1}^{\infty} A_n$. Mais alors il est possible de $\{x_n\}$ choisir une sous-suite $\{y_n\}$ telle que $y_n = x$ pour tout n, donc $\lim y_n = x$, ce qui est une contradiction.

II. Supposons R compact. Dans chaque A_n prenons un x_n; la suite $\{x_n\}$ contient une sous-suite $\{y_n\}$ convergente, $\lim y_n = x$. Il est aisé de voir qu'on a alors $x \in \prod_{n=1}^{\infty} A_n$.

5. *Soit R un espace métrique compact. Soit $\delta > 0$. Il est alors possible de trouver un nombre fini de points de R tels que tout point de R se trouve à une distance plus petite que δ d'un ce ces points choisis.*

Démonstration. Supposons le contraire; on peut alors trouver toute une suite de points $x_n \in R$ tels que $m < n$ entraîne $\varrho(x_m, x_n) \geqq \delta$. Mais une telle suite ne peut contenir aucune sous-suite convergente.

6. Soit R un espace métrique. Nous disons que R est *séparable* lorsque ou bien $R = \emptyset$ ou bien il existe une suite $\{x_n\} \subset R$ telle que pour tout $x \in R$ on peut trouver dans $\{x_n\}$ une sous-suite $\{y_n\}$ pour laquelle $\lim y_n = x$.

7. *Soit R un espace métrique compact. Alors R est séparable.*

Démonstration. Soit $R \neq \emptyset$. D'après 5, on peut trouver dans R une suite

$$(1) \qquad a_{11}, \ldots, a_{1r_1}\,;\; a_{21}, \ldots, a_{2r_2}\,;\; a_{31}, \ldots, a_{3r_3}\,;\; a_{41}, \ldots$$

telle que pour tout i $(= 1, 2, 3, \ldots)$ et pour tout $x \in R$ on peut trouver un indice j $(1 \leqq j \leqq r_i)$ tel que $\varrho(x, a_{ij}) < 1/i$. Alors pour tout $x \in R$ on peut trouver dans (1) une sous-suite $\{y_n\}$ telle que $\lim y_n = x$.

8. *Soit $R \neq \emptyset$ un espace métrique. R est séparable si, et seulement si, il jouit de la propriété suivante: Dans tout système d'ensembles ouverts dans R, recouvrant R* (voir D 1) *on peut trouver une suite $\{U_n\}$ recouvrant R.*

Démonstration. I. Supposons que R jouisse de la propriété donnée. Pour $m = 1, 2, 3, \ldots$ soit Φ_m le système des sphères (voir D 7) $\mathrm{K}(x, 1/m)$, où x parcourt l'espace R entier. Alors (voir D 8) Φ_m est un système d'ensembles ouverts dans R, recouvrant R. Il existe donc une suite $\{x_{mn}\} \subset R$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ telle que la suite correspondante $\{\mathrm{K}(x_{mn}, 1/m)\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ recouvre R. Réarrangeons la suite double $\{x_{mn}\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots; n = 1, 2, 3, \ldots)$ en une suite simple $\{y_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Pour tout $x \in R$, la suite $\{y_n\}$ contient une sous-suite $\{z_n\}$ telle que $\lim z_n = x$.

II. Supposons qu'il existe dans R une suite $\{x_n\}$ telle que pour tout $x \in R$ on puisse trouver dans $\{x_n\}$ une sous-suite $\{y_n\}$ telle que $\lim y_n = x$. Pour $m = 1, 2, 3, \ldots$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ soit $K_{nm} = \mathrm{K}(x_n, 1/m)$ (voir D 7). Rearrangeons la suite double $\{K_{nm}\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots; n = 1, 2, 3, \ldots)$ en une suite simple $\{H_n\}$.

Soit Φ un système d'ensembles ouverts dans R, recouvrant R. A chaque $x \in R$ associons un $U_x \in \Phi$, $x \in U_x$. D'après D 6, il existe un nombre m $(= 1, 2, 3, \ldots)$ tel que $\mathrm{K}(x, 1/m) \subset U_x$. Il existe une suite $\{i_n\}$, $i_1 < i_2 < \ldots$ telle que $\lim x_{i_n} = x$. Il existe un nombre n tel que $\varrho(x, x_{i_n}) < 1/2m$. On démontre aisément que $x \in \in K_{i_n, 2m} \subset U_x$. Autrement dit: à tout $x \in R$ on peut associer un indice $k(x)$ et un ensemble $U_x \in \Phi$ tels que $x \in H_{k(x)} \subset U_x$. La suite $\{H_n\}$ contient une sous-suite $\{H'_n\}$ telle que H_n fait partie de $\{H'_n\}$ si et seulement si il existe un point $x \in R$ pour lequel $k(x) = n$. Pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ il existe un point $z_n \in R$ tel que $H'_n = H_{k(z_n)} \subset \subset U_{z_n}$. La suite $\{U_{z_n}\}$ est formée d'éléments de Φ et recouvre R.

9. *Soit R un espace métrique. R est compact si, et seulement si, il jouit de la propriété suivante: Dans tout système Φ d'ensembles ouverts dans R, recouvrant R, on peut trouver un réseau dans R* (voir H III 2).

Démonstration. Soit $R \neq \emptyset$. I. Supposons que R ait la propriété citée. Soient A_n des ensembles fermés dans R, $A_n \neq \emptyset$, $A_n \supset A_{n+1}$. Les ensembles $R - A_n$ sont ouverts dans R. Si $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, alors les ensembles $R - A_n$ recouvrent l'espace R; il existe donc un nombre m tel que $R = \sum_{n=1}^{m} (R - A_n) = R - \prod_{n=1}^{m} A_n = R - A_m$ donc $A_m = \emptyset$, ce qui est une contradiction. Donc $\prod_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$, et R est compact d'après 4.

II. Soit R compact. Soit Φ un système d'ensembles ouverts dans R, recouvrant R. D'après 7 et 8 on peut trouver dans Φ une suite $\{U_n\}$ recouvrant R. Nous avons à démontrer l'existence d'un nombre m tel que $\sum_{n=1}^{m} U_n = R$. Supposons le contraire, et posons $A_m = R - \sum_{n=1}^{m} U_n$. D'après 4, nous avons alors $\prod_{n=1}^{m} A_n \neq \emptyset$, donc $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} U_n \neq \neq R$, c'est-à-dire $\sum_{m=1}^{\infty} U_m \neq R$, ce qui est une contradiction.

10. *Soit R un espace métrique compact. Soit Φ un système d'ensembles ouverts dans R, recouvrant R. Il existe alors un nombre $\delta > 0$ tel qu'à chaque $x \in R$ on peut associer un ensemble $U \in \Phi$ tel que $y \in R$, $\varrho(x, y) < \delta$ implique $y \in U$.*

Démonstration. Supposons le contraire. Alors pour tout $n = 1, 2, 3, \ldots$ il existe un point x_n jouissant de la propriété suivante: Lorsque $x_n \in U_n \in \Phi$, il existe $y \in R - U$ tel que $\varrho(x_n, y) < 1/n$. La suite $\{x_n\}$ contient une sous-suite $\{x_{i_n}\}$ convergente. Soit $x = \lim x_{i_n}$; soit $x \in U \in \Phi$. Il existe alors (voir D 6 et 7) un nombre $\delta > 0$ tel que $\mathrm{K}(x, 2\delta) \subset U$. Il existe un nombre n tel que $1/i_n < \delta$, $\varrho(x, x_{i_n}) < \delta$. Alors $x_{i_n} \in U$. Il existe donc un point $y \in R - U$ pour lequel $\varrho(x_{i_n}, y) < \delta$. Mais alors $\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, x_{i_n}) + \varrho(x_{i_n}, y) < 2\delta$, donc $y \in \mathrm{K}(x, 2\delta) \subset U$, ce qui est une contradiction.

11. *Soit R un espace métrique compact. Il existe alors une suite $\{\mathfrak{Z}_n\}$ de réseaux dans R telle que*: 1° *pour tout n le réseau $\mathfrak{Z}_{n+1}$ est un raffinement* (voir H III 4)

du réseau $\mathfrak{Z}_n$; 2° à tout réseau $\mathfrak{U}$ on peut associer un nombre n tel que $\mathfrak{Z}_n$ soit un raffinement de $\mathfrak{U}$.

Démonstration. Pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ soit Φ_n le système de toutes les sphères de centre $x \in R$ et de rayon $1/n$ (voir D 7). D'après 9 on peut trouver dans Φ_n un réseau $\mathfrak{B}_n$. Formons maintenant la suite $\{\mathfrak{Z}_n\}$ récurrement: 1° $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{B}_1$; 2° étant donné les réseaux $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots, \mathfrak{Z}_n$, nous prenons pour $\mathfrak{Z}_{n+1}$ un raffinement commun des réseaux $\mathfrak{Z}_n$ et $\mathfrak{B}_{n+1}$ (ce qui est possible d'après H III 4.1). Soit $\mathfrak{U}$ un réseau quelconque dans R. D'après 10, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in R$ on peut trouver un ensemble $U_x \in \mathfrak{U}$ tel que $y \in R$, $\varrho(x, y) < \delta$ implique $y \in U_x$. Prenons $n > 1/\delta$. Nous avons à montrer que le réseau $\mathfrak{Z}_n$ est un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$. Comme $\mathfrak{Z}_n$ est un raffinement du réseau $\mathfrak{B}_n$, il suffit de montrer que le réseau $\mathfrak{B}_n$ est un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$. Soit V un sommet quelconque du réseau $\mathfrak{B}_n$; nous avons donc à démontrer qu'il existe un sommet U du réseau $\mathfrak{U}$ tel que $V \subset U$. Comme $\mathfrak{B}_n$ fait partie de Φ_n, il existe un point $x \in R$ tel que $V = \mathrm{K}(x, 1/n)$ (voir D 7). Si $y \in V$, nous avons $\varrho(x, y) < 1/n < \delta$, donc $y \in U_x$, d'où $V \subset U_x$.

12. Soit R un espace topologique. Nous appelons *voisinage*[2] du point $a \in R$ tout ensemble U ouvert dans R et contenant a. Nous appelons *voisinage*[2] d'un ensemble $A \subset R$ tout ensemble U ouvert dans R et tel que $A \subset U$.

13. *Soit R un espace métrique compact. Soit $\{A_n\}$ une suite d'ensembles fermés dans R tels que $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout n.* Soit $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$. *Soit U un voisinage de l'ensemble A. Il existe alors un nombre m tel que $A_n \subset U$ pour toùt $n > m$.*

Démonstration. Supposons le contraire. Alors il existe des indices $i_1 < i_2 < < i_3 < \ldots$ tels que $A_{i_n} - U \neq \emptyset$ pour tout n. Soit $B_n = A_{i_n} - U = A_{i_n}(R - U)$. D'après 4 nous avons $\emptyset \neq \prod_{n=1}^{\infty} B_n = (\prod_{n=1}^{\infty} A_{i_n}) - U$. Comme $A_n \supset A_{n+1}$ et $i_n < i_{n+1}$, nous avons $\prod_{n=1}^{\infty} A_{i_n} = \prod_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Donc $A - U \neq \emptyset$, ce qui est une contradiction.

14. *Soit R un espace métrique séparable. Soit Φ une classe non-vide d'ensembles fermés dans R. Supposons que $A_n \in \Phi$, $A_n \supset A_{n+1}$ implique $\prod_{n=1}^{\infty} A_n \in \Phi$. Il existe alors un ensemble $A \in \Phi$ tel que $B \in \Phi$, $B \subset A$ implique $B = A$.*

C'est ce qu'on appelle *théorème de réduction de Brouwer.*

Démonstration. Supposons le contraire. Alors $R \neq \emptyset$; si pour $A \in \Phi$ nous dénotons par $\Psi(A)$ la classe des $B \in \Phi$, $B \subset A$, $B \neq A$, nous avons $\Psi(A) \neq \emptyset$ pour tout $A \in \Phi$.

Soit $m = 1, 2, 3, \ldots$ D'après 8, il existe une suite $\{x_{mn}\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ dans R telle que la suite $\{\mathrm{K}(x_{mn}, 1/m)\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ (voir D 7) recouvre R. Réarrangeons

[2] Si besoin est, nous disons *voisinage dans l'espace R.*

la suite double $\{K(x_{mn}, 1/m)\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots; n = 1, 2, 3, \ldots)$ en une suite simple $\{H_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Soit $A \in \Phi$, $B \in \Psi(A)$. Alors $A - B \neq \emptyset$ nous pouvons donc prendre un point $x \in A - B$. Comme $x \in R - B$ et que $R - B$ est ouvert dans R, il existe d'après D 6 un nombre $\delta > 0$ tel que $K(x, 2\delta) \subset R - B$. Choisissons un entier positif p tel que $1/p < \delta$. Il existe alors un entier positif q tel que $x \in K(x_{pq}, 1/p)$, donc $\varrho(x, x_{pq}) < < 1/p$. Si $y \in K(x_{pq}, 1/p)$, nous avons $\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, x_{pq}) + \varrho(y, x_{pq}) < 2/p < 2\delta$, donc $y \in R - B$. Il s'en ensuit que B. $K(x_{pq}, 1/p) = \emptyset$, tandis que A . $K(x_{pq}, 1/p) \neq \emptyset$, car $x \in A$. $K(x_{pq}, 1/p)$.

Donc, l'ensemble $A \in \Phi$ étant donné, il est possible d'associer à chaque $B \in \Psi(A)$ un indice i tel que $AH_i \neq \emptyset = BH_i$. Comme tout ensemble non-vide d'entiers positifs contient un élément minimum, on peut associer à chaque $A \in \Phi$ un ensemble $\varphi(A) \in \in \Psi(A)$ et un indice $f(A)$ entier positif, tels que $A \,.\, H_{f(A)} \neq \emptyset = \varphi(A) \,.\, H_{f(A)}$; or $1 \leqq i < f(A)$, $B \in \Psi(A)$, $AH_i \neq \emptyset$ impliquent $BH_i \neq \emptyset$.

Prenons maintenant arbitrairement un ensemble $A_1 \in \Phi$ et posons $A_{n+1} = \varphi(A_n)$, $i_n = f(A_n)$. Alors $A_n \in \Phi$, $A_{n+1} \subset A_n$, $A_n H_{i_n} \neq \emptyset = A_{n+1} H_{i_n}$, mais pour $1 \leqq i < i_n$, $B \in \Psi(A_n)$, $A_n H_i \neq \emptyset$ entraîne $BH_i \neq \emptyset$. Si $m > n$, nous avons $A_m \subset A_{n+1}$, $A_{n+1} H_{in} = = \emptyset$, donc $A_m H_{i_n} = \emptyset$, mais $A_m H_{i_m} \neq \emptyset$. Donc $i_n \neq i_m$ pour $n \neq m$.

Soit $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$. Comme $A_n \in \Phi$, $A_n \supset A_{n+1}$, nous avons $A \in \Phi$. Soit $B \in \psi(A)$; comme $A \subset A_n$, nous avons $B \in \Psi(A_n)$ pour tout n. Comme $B \in \Psi(A)$, il existe un indice i tel que $AH_i \neq \emptyset = BH_i$. Comme $i_n \neq i_m$ pour $n \neq m$, il existe un indice n tel que $i < i_n$. On a alors $B \in \Psi(A_n)$, $1 \leqq i < i_n$, $A_n H_i \supset AH_i \neq \emptyset$, donc $BH_i \neq \emptyset$, ce qui est une contradiction.

15. *Soient a, b deux nombres réels, $a < b$. Soit R l'intervalle $a \leqq x \leqq b$. Pour $x \in R$, $y \in R$ soit $\varrho(x, y) = |x - y|$. Alors R est un espace métrique compact.*

16. *Soit R un espace métrique compact. Soit S un espace métrique. Soit f une fonction continue dans le domaine R, $f(R) = S$. Alors S est compact.*

III. Produit combinatoire de deux espaces

1. Soient R et S deux ensembles quelconques. L'ensemble de toutes les paires ordonnées (a, b) où $a \in R$, $b \in S$ sera appelé *produit combinatoire* des ensembles R et S est désigné par $R \times S$. Il faut donc bien distinguer le symbole $R \times S$ de RS ou $R \,.\, S$ qui désigne l'ensemble des éléments communs des deux ensembles R et S.

2. *Soient R et S deux espaces métriques. Il est alors possible d'introduire dans $R \times S$ une telle métrique que l'on ait* $\lim (x_n, y_n) = (x, y)$ $(x_n \in R, x \in R, y_n \in S, y \in S)$ *si et seulement si* $\lim x_n = x$ *et* $\lim y_n = y$.

Avant de procéder à la démonstration convenons d'appeler produit combinatoire de deux espaces métriques R et S l'ensemble $R \times S$ muni d'une métrique jouissant de la propriété donnée. Le choix concret d'une telle métrique est sans importance pour l'espace topologiques $R \times S$ car toutes ces métriques sont équivalentes en vertu de I 9.1.

Démonstration. Soient ϱ_1, ϱ_2 les métriques données dans R et S respectivement. La métrique cherchée dans $R \times S$ peut être donnée par une quelconque des formules suivantes

$$\varrho[(x, y), (\xi, \eta)] = \max . [\varrho_1(x, \xi), \varrho_2(y, \eta)] ,$$
$$\varrho[(x, y), (\xi, \eta)] = \varrho_1(x, \xi) + \varrho_2(y, \eta) ,$$
$$\varrho[(x, y), (\xi, \eta)] = \sqrt{\{[\varrho_1(x, \xi)]^2 + [\varrho_2(y, \eta)]^2\}} .$$

3. *Soient R et S deux espaces métriques. Soit U un ensemble ouvert dans R, soit V un ensemble ouvert dans S. Alors l'ensemble $U \times V$ est ouvert dans $R \times S$.*

4. *Soient R et S deux espaces métriques. Soit $(a, b) \in R \times S$. Soit Z un voisinage du point (a, b) dans l'espace $R \times S$. Il existe alors un voisinage U du point a dans l'espace R et un voisinage V du point b dans l'espace S tels que $U \times V \subset Z$.*

5. *Soient R et S deux espaces métriques compacts. Alors $R \times S$ est un espace métrique compact.*

6. Soient R et S deux espaces métriques. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R, soit $\mathfrak{V}$ un réseau dans S. Dénotons par $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ l'ensemble des $U \times V$ tels que $U \in \mathfrak{U}$ et $V \in \mathfrak{V}$. Alors d'après 3 $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ est un réseau dans $R \times S$.

7. *Soient R et S deux expaces métriques compacts. Soit $\mathfrak{Z}$ un réseau dans $R \times S$. Il existe alors un réseau $\mathfrak{U}$ dans R et un réseau $\mathfrak{V}$ dans S tels que $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ est un raffinement du réseau $\mathfrak{Z}$.*

Démonstration. Soit a un point donné dans R. A chaque point $b \in S$ on peut associer un ensemble $Z_{ab} \in \mathfrak{Z}$ tel que $(a, b) \in Z_{ab}$. L'ensemble Z_{ab} étant ouvert dans $R \times S$, il existe d'après 4 un voisinage P_{ab} du point a dans R et un voisinage Q_{ab} du point b dans S tels que $P_{ab} \times Q_{ab} \subset Z_{ab}$. Pour a fixe, les ensembles Q_{ab} où b parcourt S sont tous ouverts dans S et recouvrent S. D'après II 9 il existe des points $b_{a1}, b_{a2}, \ldots$ $\ldots, b_{ak(a)}$ dans S, en nombre fini, tels que les ensembles correspondants $Q_{a.b_j}$ $(1 \leqq j \leqq$ $\leqq k(a))$ sont les sommets d'un réseau $\mathfrak{Q}_a$ dans S. Soit $U_a = \prod_{j=1}^{k(a)} P_{a.b_j}$. D'après M 1.7, l'ensemble U_a est ouvert dans R. Lorsque a parcourt R, les ensembles U_a recouvrent R. D'après II 9 il existe donc des points $a_1, a_2, \ldots, a_h$ de R, en nombre fini h, tels que les ensembles $U_{a_1}, U_{a_2}, \ldots, U_{a_h}$ sont les sommets d'un réseau $\mathfrak{U}$ dans R. D'après H III 4.1 il existe un réseau $\mathfrak{V}$ dans S qui est un raffinement commun de tous les réseaux $\mathfrak{Q}_{a_i}$ $(1 \geqq i \leqq h)$. Alors $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ est un réseau dans $R \times S$. Soit $U_{a_i} \times V$ un sommet du réseau $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$. Nous avons à montrer qu'il existe un ensemble $Z \in \mathfrak{Z}$ tel que $U_{a_i} \times V \subset Z$. L'ensemble V étant sommet du réseau $\mathfrak{V}$ qui est un raffinement du réseau $\mathfrak{Q}_{a_i}$, il existe un indice j $(1 \leqq j \leqq k(a_i))$ tel que $V \subset Q_{a_i,b_j}$. Comme $U_{a_i} \subset$ $\subset P_{a_i b_j}$, nous avons

$$U_{a_i} \times V \subset P_{a_i,b_{aj}} \times Q_{a_i,b_{aj}} \subset Z_{a_i,b_{aj}} \in \mathfrak{Z} \, .$$

8. *Soit R un espace métrique compact. Soit T l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$. Soit S un ensemble fermé dans R. Supposons qu'il existe une fonction continue f dans le domaine $S \times T$ telle que*: $1°$ $f(S \times T) = M \subset R$; $2°$ $f(x, 0) = x$ *pour tout* $x \in S$. *Soit* $S^* = f(S \times (1))$. *Soit $\mathfrak{U}$ un réseau arbitraire dans R. Il existe alors un raffinement $\mathfrak{B}$ du réseau $\mathfrak{U}$, jouissant de la propriété suivante*: *Soit* $p = 0, 1, 2, \ldots$; *soit $\Gamma^p(\mathfrak{B})$ un $(p, \mathfrak{B})$-cycle absolu dans S, soit* $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$; *alors il existe un $(p, \mathfrak{U})$-cycle absolu $\Delta^p(\mathfrak{U})$ dans S^* tel que $\pi\, \Gamma^p(\mathfrak{B}) \sim \Delta^p(\mathfrak{U})$ dans M.*

Démonstration. T est un espace métrique compact d'après II 15. S est un espace métrique compact d'après II 3. Donc $S \times T$ est un espace métrique compact d'après 5. Donc M est compact d'après II 16, d'où il résulte d'après II 2 que M est fermé dans R.

Soit U un sommet du réseau $\mathfrak{U}$; la fonction f étant continue, nous voyons d'après I 2 que l'ensemble $f_{-1}(UM)$ est ouvert dans $S \times T$. Lorsque U parcourt tous les sommets du réseau $\mathfrak{U}$ tels que $UM \neq \emptyset$, alors évidemment $f_{-1}(UM)$ parcourt tous les sommets d'un réseau $\mathfrak{Z}$ dans $S \times T$. D'après 7 il existe un réseau $\mathfrak{W}$ dans S et un réseau $\mathfrak{T}$ dans T tels que le réseau $\mathfrak{W} \times \mathfrak{T}$ soit un raffinement du réseau $\mathfrak{Z}$; soit $\varphi =$ $= \text{Pr.}\,(\mathfrak{W} \times \mathfrak{T}, \mathfrak{Z})$. L'espace T est connexe d'après M 21. Donc $B^0(T) = 1$ d'après H IV 8; comme $T \neq \emptyset$, il en résulte $B^0(\mathfrak{T}) = 1$ (voir H IV 7.1), de sorte que (cf. H II 15) il existe des sommets $T_0, T_1, \ldots, T_m$ du réseau $\mathfrak{T}$ tels que $0 \in T_0$, $1 \in T_m$, $T_{i-1} \,.\, T_i \neq \emptyset$ pour $1 \leqq i \leqq m$.

Soit W un sommet arbitraire du réseau $\mathfrak{W}$. Alors $Z = \varphi(W \times T_0)$ est un sommet du réseau $\mathfrak{Z}$. D'après la définition du réseau $\mathfrak{Z}$ il existe un sommet $U = \psi_1 W$ du réseau $\mathfrak{U}$, tel que $f(W \times T_0) = MU$. Comme $0 \in T_0$ et $f(x, 0) = x$ pour tout $x \in S$ nous avons $S \supset W = f(W \times (0)) \subset f(W \times T_0)$, c'est-à-dire $W \subset MU$ et même $W \subset$ $\subset SU$, car $W \subset S$. Il s'en ensuit que le réseau $\mathfrak{W}$ est un raffinement du réseau $S\mathfrak{U}$ (voir H III 5) et qu'il existe une projection $\chi_1 = \text{Pr.}\,(\mathfrak{W}, S\mathfrak{U})$ telle que $\chi_1 W =$ $= S \,.\, \psi_1 W$, $M \,.\, \psi_1 W = f(Z)$, où $Z = \varphi(W \times T_0)$.

Tout sommet W du réseau $\mathfrak{W}$ est un ensemble ouvert dans S et contenu dans $\chi_1 W =$ $= SU$ où $U = \psi_1 W$. Il en résulte aisément qu'il existe un ensemble $V = \psi_2 W$ ouvert dans R et tel que $W = SV$, $V \subset U$. Désignons par G l'ensemble $\sum \psi_2 W$, la somme étant étendue à tous les sommets W du réseau $\mathfrak{W}$. Alors G est un ensemble ouvert dans R et $G \supset S$. A chaque point $x \in R - G$ nous pouvons évidemment associer un ensemble H_x ouvert dans R et contenu dans $U_x - S$, U_x étant sommet du réseau $\mathfrak{U}$. D'après II 3 l'ensemble $R - G$ est compact. Donc d'après II 9 il existe un nombre fini de points x_ν $(1 \leqq \nu \leqq k)$ de $R - G$ tels que $\sum_{\nu=1}^{k} (R - G)\, H_{x_\nu} = R - G$. Les ensembles H_{x_ν} $(1 \leqq \nu \leqq k)$ joints aux ensembles $\psi_2 W$ où W parcourt les sommets du réseau $\mathfrak{W}$, forment alors un réseau $\mathfrak{B}$ dans R. Il est évident que $\mathfrak{B}$ est un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$ et qu'il existe une projection $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$ telle que $\pi\psi_2 W = \psi_1 W$ pour tout sommet W du réseau $\mathfrak{W}$.

Pour $0 \leqq i \leqq m$, $W \in \mathfrak{W}$, soit $\omega_i W$ l'ensemble $W \times T_i$; il est évident alors que ω_i est une application simplicielle (voir H II 17) du réseau $\mathfrak{W}$ dans le réseau $\mathfrak{W} \times \mathfrak{T}$; comme $T_{i-1}T_i \neq \emptyset$ pour $1 \leqq i \leqq m$, il est évident que les applications simplicielles ω_{i-1} et ω_i sont voisines (voir H II 18).

Soit maintenant $\Gamma^p(\mathfrak{B})$ un $(p, \mathfrak{B})$-cycle absolu dans S. Il découle de la définition du réseau $\mathfrak{B}$ que nous avons $S\mathfrak{B} = \mathfrak{W}$ (cf. H III 5). Comme $\Gamma^p(\mathfrak{B})$ est situé dans S, nous avons évidemment (voir H IV 3):

$$(1) \qquad \Gamma^p(\mathfrak{B}) = \sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}(\psi_2 W_{\nu_0}, \psi_2 W_{\nu_1}, \ldots, \psi_2 W_{\nu_p}),$$

$$(\mathfrak{W} \mid \mathfrak{B})\, \Gamma^p(\mathfrak{B}) = \sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}(W_{\nu_0}, W_{\nu_1}, \ldots, W_{\nu_p})$$

$$\omega_i(\mathfrak{W} \mid \mathfrak{B})\, \Gamma^p(\mathfrak{B}) = \sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}(W_{\nu_0} \times T_i, W_{\nu_1} \times T_i, \ldots, W_{\nu_p} \times T_i).$$

Comme $\Gamma^p(\mathfrak{B}) \to 0$, nous avons d'après H IV 3 (2)

$$(\mathfrak{W} \mid \mathfrak{B})\, \Gamma^p(\mathfrak{B}) \to 0,$$

de sorte que d'après H II 18

$$\omega_{i-1}(\mathfrak{W} \mid \mathfrak{B})\, \Gamma^p(\mathfrak{B}) \sim \omega_i(\mathfrak{W} \mid \mathfrak{B})\, \Gamma^p(\mathfrak{B}) \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq m,$$

donc

$$\omega_0(\mathfrak{W} \mid \mathfrak{B})\, \Gamma^p(\mathfrak{B}) \sim \omega_m(\mathfrak{W} \mid \mathfrak{B})\, \Gamma^p(\mathfrak{B}),$$

de façon que

$$(2) \qquad \varphi\, \omega_0(\mathfrak{W} \mid \mathfrak{B})\, \Gamma^p(\mathfrak{B}) \sim \varphi\, \omega_m(\mathfrak{W} \mid \mathfrak{B})\, \Gamma^p(\mathfrak{B}).$$

Posons $Z_\nu = \varphi(W_\nu \times T_0)$, $Z'_\nu = \varphi(W_\nu \times T_m)$, alors (2) deviendra

$$\sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}(Z_{\nu_0}, Z_{\nu_1}, \ldots, Z_{\nu_p}) \sim \sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}(Z'_{\nu_0}, Z'_{\nu_1}, \ldots, Z'_{\nu_p}).$$

Il existe donc une $(p + 1, \mathfrak{Z})$-chaîne $\sum b_{\mu_0\mu_1\ldots\mu_{p+1}}(Z''_{\mu_0}, Z''_{\mu_1}, \ldots, Z''_{\mu_{p+1}})$ (ou Z''_μ sont des sommets du réseau $\mathfrak{Z}$) telle que

$$(3) \qquad \sum b_{\mu_0\mu_1\ldots\mu_{p+1}}(Z''_{\mu_0}, Z''_{\mu_1}, \ldots, Z''_{\mu_{p+1}}) \to \sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}(Z_{\nu_0}, Z_{\nu_1}, \ldots, Z_{\nu_p}) - \sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}(Z'_{\nu_0}, Z'_{\nu_1}, \ldots, Z'_{\nu_p}).$$

D'après la définition du réseau $\mathfrak{Z}$ il existe des sommets U_ν, U'_ν, U''_μ du réseau $\mathfrak{U}$ tels que $f(Z_\nu) = MU_\nu$, $f(Z'_\nu) = MU'_\nu$, $f(Z''_\mu) = MU''_\mu$. Il s'ensuit de (3) que l'on a

$$(4) \qquad \sum b_{\mu_0\mu_1\ldots\mu_{p+1}}(U''_{\mu_0}, U''_{\mu_1}, \ldots, U''_{\mu_{p+1}}) \to \sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}(U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \ldots, U_{\nu_p}) - \sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}(U'_{\nu_0}, U'_{\nu_1}, \ldots, U'_{\nu_p}).$$

Comme $\prod_{i=0}^{p+1} Z''_{\mu_i} \neq \emptyset$, nous avons $\prod_{i=0}^{p+1} f(Z''_{\mu_i}) = M \,.\, \prod_{i=0}^{p+1} U''_{\mu} \neq \emptyset$, donc la $(p + 1, \mathfrak{U})$-chaîne du premier membre de (4) est située dans M. Comme $Z_\nu = \varphi(W_\nu \times T_0)$, nous avons $f(Z_\nu) = M \,.\, \psi_1 W_\nu$, donc $U_\nu = \psi_1 W_\nu = \pi\psi_2 W_\nu$, d'où d'après (1) nous obtenons $\sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}(U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \ldots, U_{\nu_p}) = \pi\, \Gamma^p(\mathfrak{B})$. Comme $1 \in T_m$, $Z'_\nu \supset W_\nu \times T_m$, nous avons

$$(S \times (1)) \,.\, \prod_{i=0}^{p} Z'_{\nu_i} \to \prod_{i=0}^{p} W_{\nu_i} \times (1) \neq \emptyset\,,$$

de sorte que $S^* \,.\, \prod_{i=0}^{p} U'_{\nu_i} \neq \emptyset$, car $S^* = f(S \times (1))$, $U'_\nu \supset f(Z'_\nu)$. Donc $\Delta^p(\mathfrak{U}) =$ $= \sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}(U'_{\nu_0}, U'_{\nu_1}, \ldots, U'_{\nu_p})$ est un $(p, \mathfrak{U})$-cycle absolu dans S^*, et de (4) on déduit facilement que $\pi\, \Gamma^p(\mathfrak{B}) \sim \Delta^p(\mathfrak{U})$ dans M, c. q. f. d.

IV. Théorèmes d'addition

1. (*Lemma.*) *Soit R un espace normal* (voir D 9). *Soit S un ensemble fermé dans R. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R. Alors il existe un voisinage G de l'ensemble S et un raffinement $\mathfrak{B}$ du réseau $\mathfrak{U}$ tels que, K étant le noyau d'une $\mathfrak{B}$-simplexe, $KG \neq \emptyset$, on a $KS \neq \emptyset$.*

Démonstration. Soient $U_1, U_2, \ldots, U_m$ les sommets du réseau $\mathfrak{U}$. D'après D 14 il existe un réseau $\mathfrak{U}'$ de sommets $U'_1, U'_2, \ldots, U'_m$ tels que $\overline{U}'_i \subset U_i$ pour $1 \leqq i \leqq m$. D'après D 12 où nous remplaçons $F_1, F_2, \ldots, F_m$ par $S, \overline{U}'_1, \overline{U}'_2, \ldots, \overline{U}'_m$, il existe des ensembles $G, W_1, W_2, \ldots, W_m$ ouverts dans R tels que $G \supset S$, $W_i \supset \overline{U}'_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$ et que l'on a $S \,.\, \prod_{i=0}^{p} \overline{U}'_{\nu_i} \neq \emptyset$ chaque fois que $G \,.\, \prod_{i=0}^{p} W_{\nu_i} \neq \emptyset$, $(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_p)$ étant une combinaison quelconque des indices $1, 2, \ldots, m$. Il est évident que les ensembles $U_1W_1, U_2W_2, \ldots, U_mW_m$ sont les somets du réseau $\mathfrak{B}$ cherché.

2. (*Lemma.*) *Soit R un espace normal. Soient φ et ψ deux ensembles fermés dans R. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R. Il existe alors un raffinement $\mathfrak{B}$ du réseau $\mathfrak{U}$ et une projection $\pi =$ Pr. $(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$ tels que si une $(p, \mathfrak{B})$-chaîne $C^p(\mathfrak{B})$ est située à la fois dans φ et dans ψ, alors la $(p, \mathfrak{U})$-chaîne $\pi\, C^p(\mathfrak{B})$ est située dans $\varphi\psi$.*

Démonstration. Suivant 1, nous trouvons un raffinement $\mathfrak{W}$ du réseau $\mathfrak{U}$ est un voisinage G de l'ensemble $\varphi\psi$; soit $\pi_1 = \mathfrak{Pr}.\,(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})$. Les ensembles $\varphi - G$, $\psi - G$ sont fermés dans R et $(\varphi - G)(\psi - G) = \emptyset$; donc, d'après D 9, il existe deux ensembles P, Q, ouverts dans R, et tels que $P \supset \varphi - G$, $Q \supset \psi - G$, $PQ = \emptyset$. Les trois ensembles $P, Q, G + [R - (\varphi + \psi)]$ forment évidemment un réseau $\mathfrak{T}$ dans R. Soit (voir H III 4.1) $\mathfrak{B}$ un raffinement commun des deux réseaux $\mathfrak{W}$ et $\mathfrak{T}$; soit $\pi_2 =$ Pr. $(\mathfrak{B}, \mathfrak{W})$.

Soit K le noyau d'un $(p, \mathfrak{V})$-simplexe; soit $KG = \emptyset$, soit $K\varphi \neq \emptyset \neq K\psi$. Alors K ne fait pas partie du sommet $G + [R - (\varphi + \psi)]$du réseau $\mathfrak{T}$; mais K fait partie d'un sommet du réseau $\mathfrak{V}$, donc aussi d'un sommet du réseau $\mathfrak{T}$. Nous avons donc ou bien $K \subset P$, ou bien $K \subset Q$. Comme $PQ = \emptyset$, on a donc ou bien $KP = \emptyset$, ou bien $KQ = \emptyset$. Mais cela est impossible, car $K\varphi \neq \emptyset \neq K\psi$, $KG = \emptyset$, $\varphi - G \subset P$, $\psi - G \subset Q$.

Donc, si K est le noyau d'un $(p, \mathfrak{V})$-simplexe, alors $K\varphi \neq \emptyset \neq K\psi$ implique $KG \neq \emptyset$. Soit maintenant $C^p(\mathfrak{V}) = \Sigma r_i \tau_i^p$ $(r_i \in \mathfrak{R}, r_i \neq 0)$ une $(p, \mathfrak{V})$-chaîne, soit $C^p(\mathfrak{V}) \subset \varphi$, $C^p(\mathfrak{V}) \subset \psi$. Nous avons à montrer que $\pi_1\pi_2 C^p(\mathfrak{V}) = \varphi\psi$. Si K_i est le noyau de τ_i^p, alors $K_i\varphi \neq \emptyset \neq K_i\psi$, donc $K_iG \neq \emptyset$. On a donc ou bien $\pi_2\pi_i^p = \emptyset$, ou bien le noyau K_i' du simplexe $\pi_2\tau_i^p$ coupe G, (en effet, $K_i' \supset K_i$). Comme $\pi_2\tau_i^p$ est un $(p, \mathfrak{W})$-simplexe, on a $K_i' \,.\, \varphi\psi \neq \emptyset$ d'après la définition de $\mathfrak{W}$. Donc $\pi_2\, C^p(\mathfrak{V}) \subset \subset \varphi\psi$, de sorte que $\pi_1\pi_2\, C^p(\mathfrak{V}) \subset \varphi\psi$ d'après H III 6.

3. (*Premier théorème d'addition pour les cycles.*) *Soit R un espace normal. Soient A, B et S des ensembles fermés dans R. Soit $A + B = R$. Soit $p = 0, 1, 2, \ldots$; $m = 1, 2, 3, \ldots$ Soient C_i^{p+1} $(1 \leqq i \leqq m)$ des $(p + 1, R)$-cycles* mod S *tels que*: *si H_1^{p+1} est un $(p + 1, R)$-cycle* mod AS *dans A, H_2^{p+1} est un $(p + 1, R)$-cycle* mod BS *dans B et que $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1} \sim H_1^{p+1} - H_2^{p+1}$* mod S *$(r_i \in \mathfrak{R})$, alors $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Il existe alors des (p, R)-cycles Γ_i^p $(1 \leqq i \leqq m)$* mod ABS *dans AB tels que* 1° *$\Gamma_i^p \sim \emptyset$* mod AS *dans A ainsi que* mod BS *dans B $(1 \leqq i \leqq m)$*; 2° *$\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p \sim \emptyset$* mod ABS *dans AB $(1 \leqq i \leqq m)$ implique $r_1 = \ldots = r_m = 0$.*

Démonstration. Pour tout réseau $\mathfrak{U}$ dans R désignons par $h(\mathfrak{U})$ le rang du module $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$ de tous les vecteurs (voir H I 9) $(r_1, \ldots, r_m)$ pour lesquels il existe un $(p + 1, \mathfrak{U})$-cycle $H_1^{p+1}(\mathfrak{U})$ mod AS dans A et un $(p + 1, \mathfrak{U})$-cycle $H_2^{p+1}(\mathfrak{U})$ mod BS dans B tels que $\sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^{p+1}(\mathfrak{U}) \sim H_1^{p+1}(\mathfrak{U}) - H_2^{p+1}(\mathfrak{U})$ mod S. Il est évident que $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$ est un module fini (d'après H I 19 nous avons $p(\mathfrak{U}) \leqq m$). Si un réseau $\mathfrak{V}$ est un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$, nous déduisons facilement de H III 7 que $\mathfrak{M}(\mathfrak{V})$ est sous-module du module $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$, de façon que (cf H I 19) $h(\mathfrak{V}) \leqq h(\mathfrak{U})$. Il existe évidemment un réseau $\mathfrak{U}_1$ tel que l'on ait $h(\mathfrak{U}) \leqq h(\mathfrak{U}_1)$ pour tout réseau $\mathfrak{U}$; donc pour tout raffinement $\mathfrak{U}$ du réseau $\mathfrak{U}_1$ nous avons $h(\mathfrak{U}) = h(\mathfrak{U}_1)$, donc (cf. H I 19) $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_1)$. Supposons que $h(\mathfrak{U}_1) > 0$. Alors il existe des nombres $r_1, \ldots, r_m \in \mathfrak{R}$, dont un au moins est différent de zéro, et tels que le vecteur $(r_1, \ldots, r_m)$ appartient au module $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_1)$ donc aussi à $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$ pour tout raffinement $\mathfrak{U}$ du réseau $\mathfrak{U}_1$, donc il appartient à $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$ pour tout réseau $\mathfrak{U}$. De H IV 5 nous déduisons facilement que les chaînes $H_1^{p+1}(\mathfrak{U})$ qui figurent dans les homologies $\sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^{p+1}(\mathfrak{U}) \sim H_1^{p+1}(\mathfrak{U}) - H_2^{p+1}(\mathfrak{U})$ mod S peuvent être choisies d'une telle manière, qu'elles définissent un $(p + 1, R)$-cycle H_1^{p+1} mod AS dans A; de H IV 5 nous déduisons alors que les chaînes $H_2^{p+1}(\mathfrak{U})$ correspondantes peuvent être choisies d'une telle manière qu'elles définissent un $(p+1, R)$-cycle H_2^{p+1} mod BS dans B. Mais dans ce cas-là on a $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1} \sim H_1^{p+1} - H_2^{p+1}$ mod S, donc $r_1 = \ldots = r_m = 0$, en contradiction avec ce que nous avons supposé. Il en résulte que $h(\mathfrak{U}_1) = 0$, c'est-à-dire que le module $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_1)$ ne contient que le zéro.

Pour tout raffinement $\mathfrak{U}$ du réseau $\mathfrak{U}_1$ soit $k(\mathfrak{U})$ le rang du module $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ de tous les $(p, \mathfrak{U}_1)$-cycles $\Gamma^p(\mathfrak{U}_1)$ homologues à $\pi\ \Gamma^p(\mathfrak{U})$ mod ABS dans AB, où $\Gamma^p(\mathfrak{U})$ parcourt tous les $(p, \mathfrak{U})$-cycles mod ABS dans AB homologues à zéro mod AS dans A et mod BS dans B; $\pi = \text{Pr.}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_1)$, (le choix, concret de π est sans importance en vertu de H III 7). $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ est un sous-module du module fini (cf. H II 3) de toutes les $(p, \mathfrak{U})$-chaînes, donc (cf. H I 19) c'est aussi un module fini. Lorsque $\mathfrak{V}$ est un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$, il est évident que $\mathfrak{N}(\mathfrak{V})$ est un sous-module du module $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$, donc $k(\mathfrak{V}) \leqq k(\mathfrak{U})$. Il existe évidemment un raffinement $\mathfrak{U}_2$ du réseau $\mathfrak{U}_1$ tel que $k(\mathfrak{U}) \geqq k(\mathfrak{U}_1)$, pour tout raffinement $\mathfrak{U}$ du réseau $\mathfrak{U}_1$, donc $k(\mathfrak{U}) = k(\mathfrak{U}_1)$ et $\mathfrak{N}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{U}_1)$ pour tout raffinement $\mathfrak{U}$ du réseau $\mathfrak{U}_2$. Soit $\pi_{21} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$.

Déterminons, suivant 2, un raffinement $\mathfrak{U}_3$ du réseau $\mathfrak{U}_2$ et une projection $\pi_{32} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$ en posant $\varphi = AS$, $\psi = BS$, ensuite un raffinement $\mathfrak{U}_4$ du réseau $\mathfrak{U}_3$ et une projection $\pi_{43} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_3)$ en posant $\varphi = B$, $\psi = S$, puis un raffinement $\mathfrak{U}_5$ du réseau $\mathfrak{U}_4$ et une projection $\pi_{54} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_5, \mathfrak{U}_4)$ en posant $\varphi = A$, $\psi = S$, et enfin un raffinement $\mathfrak{U}_6$ du réseau $\mathfrak{U}_5$ et une projection $\pi_{65} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_6, \mathfrak{U}_5)$ en posant $\varphi = A$, $\psi = B$. Soit $\pi_{31} = \pi_{21}\pi_{32}$; $\pi_{41} = \pi_{31}\pi_{43}$, etc.

Comme $R = A + B$, nous pouvons poser $C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_6) = C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6)$, ou $C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) \subset A$, $C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}) \subset B$. Comme $C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_6) \to 0$ mod S, nous avons $F\, C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) = F\, C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6)$ mod S. Soit $\Delta_i^p(\mathfrak{U}_6)$ la partie de la chaîne $F\, C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6)$ dont les simplexes sont $\neq \emptyset$ mod S.[3] Alors $\Delta_i^p(\mathfrak{U}_6)$ est aussi la partie de la chaîne $F\, C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6)$ dont les simplexes sont $\neq \emptyset$ mod S. Comme $C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) \subset A$, nous avons $F\, C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) \subset A$, donc $\Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset A$, $F\, C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset A$. De manière analogue, nous trouvons que $\Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset B$, $F\, C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset B$. D'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_5$ nous avons $\pi_{65}\ \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset AB$. Ensuite on a $F\, C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset S$, $F\, C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset S$, donc d'après la définition des réseaux $\mathfrak{U}_5$ et $\mathfrak{U}_4$ on a $\pi_{64}F\, C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - \pi_{64}\ \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset AS$, $\pi_{63}F\, C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - \pi_{63}\ \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset BS$ d'où en passant à la frontière nous trouvons $\pi_{64}F\ \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset AS$, $\pi_{63}\ \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset BS$, de sorte que $\pi_{62}F\ \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset ABS$ d'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_3$. Il en résulte donc que $\pi_{62}\ \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6)$ est un $(p, \mathfrak{U}_2)$-cycle mod ABS dans AB; de plus $\pi_{62}\ C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) \to \pi_{62}\ \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6)$ mod AS, $\pi_{62}\ C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) \to \pi_{62}\ \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6)$, d'où $\pi_{61}\ \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \in \mathfrak{N}(\mathfrak{U}_2)$. D'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_2$ nous avons $\pi_{61}\ \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \in \mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ pour tout raffinement $\mathfrak{U}$ du

[3] Cela signifie, bien entendu: si σ_j^p $(1 \leqq j \leqq \alpha)$ sont tous les $(p, \mathfrak{U}_6)$-simplexes et que l'on ait $F\, C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) = \sum_{j=1}^{\alpha} r_j \sigma_j^p$, alors on a $\Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) = \sum_{j=1}^{\alpha} s_j \sigma_j^p$ où $s_j = 0$ ou $s_j = r_j$ suivant que $\sigma_j^p \subset S$ ou non.

réseau $\mathfrak{U}_1$. Nous pouvons donc pour tout raffinement $\mathfrak{U}$ du réseau $\mathfrak{U}_1$ choisir un $(p, \mathfrak{U})$-cycle $\Gamma_i^p(\mathfrak{U})$ mod ABS dans AB tel que pour $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_1)$ on ait $\pi\, \Gamma_i^p(\mathfrak{U}) \sim$ $\sim \pi_{61}\, \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6)$ mod ABS dans AB et $\Gamma_i^p(\mathfrak{U}) \sim \emptyset$ mod AS dans A et mod BS dans B. Si un réseau $\mathfrak{U}$ n'est pas raffinement du réseau $\mathfrak{U}_1$, prenons un réseau $\mathfrak{V}$ qui soit un raffinement commun des deux réseaux $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}_1$ et choisissons $\Gamma_i^p(\mathfrak{U}) \sim \pi^1\, \Gamma_i^p(\mathfrak{V})$ mod ABS dans AB, où $\pi' = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. De H IV 5 nous déduisons facilement que les chaînes $\Gamma_i^p(\mathfrak{U})$ peuvent être choisies de telle façon qu'elles définissent un (p, R)-cycle Γ_i^p mod ABS dans AB. On a évidemment $\Gamma_i^p \sim \emptyset$ mod AS dans A et mod BS dans B, ainsi que $\Gamma_i^p(\mathfrak{U}_1) \sim \pi_{61}\, \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6)$ mod ABS dans AB.

Il nous reste donc à montrer que $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p \sim \emptyset$ mod ABS dans AB implique $r_1 =$ $= \ldots = r_m = 0$. Supposons donc que l'homologie en question ait lieu. Alors nous avons $\pi_{61} \sum_{i=1}^{m} r_i\, \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \sim \emptyset$ mod ABS dans AB. Donc, il existe une $(p+1, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $D^{p+1}(\mathfrak{U}_1) \subset AB$ telle que $D^{p+1}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{61} \sum_{i=1}^{m} r_i\, \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6)$ mod ABS. Comme $\pi_{64}\, C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) \to \pi_{64}\, \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_6)$ mod AS, $\pi_{63}\, C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) \to \pi_{63}\, \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_6)$ mod BS, $\pi_{61}\, C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_6) = \pi_{61}\, C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - \pi_{61}\, C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) \sim C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_1)$ mod S, nous avons

$$\sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_1) \sim H_1^{p+1}(\mathfrak{U}_1) - H_2^{p+1}(\mathfrak{U}_1) \bmod S,$$

où

$$H_1^{p+1}(\mathfrak{U}_1) = \pi_{61} \sum_{i=1}^{m} C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - D^{p+1}(\mathfrak{U}_1)$$

est un $(p+1, \mathfrak{U}_1)$-cycle mod AS dans A et

$$H_2^{p+1}(\mathfrak{U}_1) = \pi_{61} \sum_{i=1}^{m} C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - D^{p+1}(\mathfrak{U}_1)$$

est un $(p+1, \mathfrak{U}_1)$-cycle mod BS dans B. Donc $(r_1, \ldots, r_m) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_1)$, d'où $r_1 = \ldots =$ $= r_m = 0$, c. q. f. d.

4. (*Deuxième théorème d'addition pour les cycles.*) *Soit R un espace normal. Les ensembles A, B, S soient fermés dans R. Soit $A + B = R$. Soit $p = 0, 1, 2, \ldots$; $m = 1, 2, 3, \ldots$ Soient Γ_i^p $(1 \leqq i \leqq m)$ des (p, R)-cycles* mod ABS *dans AB tels que*: 1° $\Gamma_i^p \sim 0$ mod AS *dans A et* mod BS *dans B* $(1 \leqq i \leqq m)$; 2° $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p \sim 0$ mod ABS *dans AB implique $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Alors il existe des $(p+1, R)$-cycles C_i^{p+1} $(1 \leqq i \leqq m)$* mod S *tels que: si H_1^{p+1} est un (p, R)-cycle* mod AS *dans A, H_2^{p+1} un (p, R)-cycle* mod BS *dans B et que l'on ait* $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1} \sim H_1^{p+1} - H_2^{p+1}$ mod S, *alors $r_1 = \ldots = r_m = 0$.*

Démonstration. Pout tout réseau $\mathfrak{U}$ dans R soit $h(\mathfrak{U})$ le rang du module fini $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$ de tous les vecteurs $(r_1, \ldots, r_m)$ pour lesquels $\sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^p(\mathfrak{U}) \sim \emptyset \bmod ABS$ dans AB. Lorsque $\mathfrak{V}$ est un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$, il est évident que $\mathfrak{M}(\mathfrak{V})$ est un sous-module du module $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$, donc $h(\mathfrak{V}) \leqq h(\mathfrak{U})$. Il existe évidemment un réseau $\mathfrak{U}_1$ tel que pour tous réseau $\mathfrak{U}$ on ait $h(\mathfrak{U}) \geqq h(\mathfrak{U}_1)$; pour tout raffinement $\mathfrak{U}$ du réseau $\mathfrak{U}_1$ on aura donc $h(\mathfrak{U}) = h(\mathfrak{U}_1)$, d'où $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_1)$. Si $(r_1, \ldots, r_m) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_1)$, nous avons $\sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^p(\mathfrak{U}) \sim \emptyset \bmod ABS$ dans AB pour tout raffinement $\mathfrak{U}$ du réseau $\mathfrak{U}_1$, donc pour tout réseau $\mathfrak{U}$, de sorte que $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p \sim \emptyset \bmod ABS$ dans AB. Donc $\sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_1) \sim \emptyset \bmod ABS$ dans AB implique $r_1 = \ldots = r_m = 0$.

Déterminons, suivant 2, d'abord un raffinement $\mathfrak{U}_2$ du réseau $\mathfrak{U}_1$ et une projection $\pi_{21} = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$ en posant $\varphi = AB$, $\psi = S$, ensuite un raffinement $\mathfrak{U}_3$ du réseau $\mathfrak{U}_2$ et une projection $\pi_{32} = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$ en posant $\varphi = A$, $\psi = B$. Soit $\mathfrak{U}_4$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_3$ normal par rapport aux $(p + 1)$-cycles mod S (voir H III 9 et 10). Soit $\pi_{43} = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_3)$, $\pi_{31} = \pi_{21}\pi_{32}$, $\pi_{41} = \pi_{31}\pi_{43}$, $\pi_{42} = \pi_{32}\pi_{43}$.

Comme pour $1 \leqq i \leqq m$ nous avons $\Gamma_i^p \sim \emptyset \bmod AS$ dans A et mod BS dans B, il existe des $(p + 1, \mathfrak{U}_4)$-chaînes $D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \subset A$ et $D_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \subset B$ telles que $D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \to \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \bmod AS$ et $D_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \to \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \bmod BS$, de sorte que $D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - D_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) = D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$ est un $(p + 1, \mathfrak{U}_4)$-cycle mod S. D'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_4$, $\pi_{43}\, D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$ est un $(p + 1, \mathfrak{U}_4)$-cycle essentiel mod S, donc, d'après H IV 6.1 il existe un $(p + 1, R)$-cycle C_i^{p+1} mod S tel que $C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_3) = \pi_{43}\, D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$. Soit H_1^{p+1} un $(p + 1, R)$-cycle mod AS dans A, soit H_2^{p+1} un $(p + 1, R)$-cycle mod BS dans B. Soit $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1} \sim H_1^{p+1} - H_2^{p+1} \bmod S$. Nous avons à démontrer que $r_1 = \ldots = r_m = 0$.

Comme $C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_3) = \pi_{43}\, D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$, il existe une $(p + 2, \mathfrak{U}_3)$-chaîne $E^{p+2}(\mathfrak{U}_3)$ telle que $E^{p+2}(\mathfrak{U}_3) \to \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i\, D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - H_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) + H_2^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \bmod S$. Comme $R = A + B$, nous pouvons poser $E^{p+2}(\mathfrak{U}_3) = E_1^{p+2}(\mathfrak{U}_3) - E_2^{p+2}(\mathfrak{U}_3)$, où $E_1^{p+2}(\mathfrak{U}_3) \subset A$, $E_2^{p+2}(\mathfrak{U}_3) \subset B$. Alors nous avons

$$F\, E_1^{p+2}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i\, D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) + H_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) = \tag{1}$$

$$= F\, E_2^{p+2}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i\, D_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) + H_2^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \bmod S\,.$$

Désignons par $K^{p+1}(\mathfrak{U}_3)$ la partie du premier, et donc aussi du second membre de (1), les simplexes de laquelle sont $\neq \emptyset \bmod S$. Comme $E_1^{p+2}(\mathfrak{U}_3) \subset A$, $D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \subset A$, $H_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset A$, nous avons $K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset A$; de manière semblable nous trouvons

$K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset B$. Donc $\pi_{32} K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset AB$ d'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_3$. Ensuite nous avons

$$K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) - [F E_1^{p+2}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) + H_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3)] \subset S .$$

En formant la frontière, nous obtenons

$$F K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) + \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) + \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} [F D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4)] + \\ + F H_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset S .$$

Mais $F D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset S$, $F H_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset S$. Donc

$$F K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) + \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset S .$$

Mais $\pi_{32} K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset AB$, $\Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset AB$. Il résulte alors de la définition du réseau $\mathfrak{U}_2$ que nous avons $\pi_{31} F K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) + \pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset ABS$, de sorte que π_{41} . $. \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \sim \emptyset \bmod ABS$ dans AB. Or, $\pi_{41} \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \sim \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_1) \bmod ABS$ dans AB, donc $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_1) \sim \emptyset \bmod ABS$ dans AB, donc d'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_1$ on a $r_1 = \ldots = r_m = 0$, c. q. f. d.

5. (*Premier théorème d'addition pour les nombres de Betti locaux.*) *Soit R un espace normal. Soient A, B deux ensembles fermés dans R; soit $A + B = R$. Soit $a \in AB$. Soit $p = 0, 1, 2, \ldots$ Soit $\beta_{p+1}(a, A) = \beta_{p+1}(a, B) = 0$. Alors $\beta_p(a, AB) \geqq \beta_{p+1}(a, R)$.*

Démonstration. De la définition des nombres de Betti locaux (voir H IV 10), on déduit aisément qu'il suffit de démontrer l'énoncé suivant: Soit $m = 1, 2, 3, \ldots$, soit U un voisinage du point a (dans l'espace R) tel que $\beta_{p+1}(a, U; R) \geqq m$. Alors $\beta_p(V, U; AB, R) \geqq m$ pour tout voisinage $V \subset U$ du point a.

Comme $\beta_{p+1}(a, A) = \beta_{p+1}(a, A, R) = 0$, nous avons $\beta_{p+1}(a, V; A, R) = 0$. Il existe donc un voisinage $W_1 \subset V$ du point a, tel que $\beta_{p+1}(W_1', V; A, R) = 0$ pour tout voisinage $W_1' \subset W_1$ du point a. De manière analogue, il existe un voisinage $W_2 \subset V$ du point a tel que $\beta_{p+1}(W_2' V; B, R) = 0$ pour tout voisinage $W_2' \subset W_2$ du point a. Soit $W = W_1 W_2$; alors $a \in W \subset V$, $\beta_{p+1}(W, V; A, R) = \beta_{p+1}(W, V; B, R) = 0$.

Comme $\beta_{p+1}(a, U; R) \geqq m$, nous avons $\beta_{p+1}(W, U; R) \geqq m$. Il existe donc des $(p + 1, R)$-cycles C_i^{p+1} $(1 \leqq i \leqq m) \bmod (R - U)$ tels que $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1} \sim \emptyset$ $\bmod (R - W)$ implique $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Comme au début de la démonstration du théorème 4 nous trouvons qu'il existe un réseau $\mathfrak{U}_1$ tel que $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_1) \sim \emptyset$

$\bmod (R - W)$ implique $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Soit $\mathfrak{U}_2$ (cf. H III 10) un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_1$, normal par rapport aux $(p + 1)$-cycles $\bmod (B - V)$ dans B; soit $\pi_{21} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$. Déterminons suivant 2 un raffinement $\mathfrak{U}_3$ du réseau $\mathfrak{U}_2$ et une projection $\pi_{32} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$ en posant $\varphi = B$, $\psi = R - V$. Soit $\mathfrak{U}_4$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_3$ normal par rapport aux $(p + 1)$-cycles $\bmod (A - V)$ dans A; soit $\pi_{43} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_3)$. Déterminons suivant 2 un raffinement $\mathfrak{U}_5$ du réseau $\mathfrak{U}_4$ et une projection $\pi_{54} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_5, \mathfrak{U}_4)$ en posant $\varphi = A$, $\psi = R - V$. Soit ensuite $\mathfrak{U}_6$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_5$ normal par rapport aux p-cycles $\bmod (AB - U)$ dans AB; soit $\pi_{65} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_6, \mathfrak{U}_5)$. Déterminons suivant 2 d'abord un raffinement $\mathfrak{U}_7$ du réseau $\mathfrak{U}_6$ et une projection $\pi_{76} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_7, \mathfrak{U}_6)$ en posant $\varphi = AB$, $\psi = R - U$, et puis un raffinement $\mathfrak{U}_8$ du réseau $\mathfrak{U}_7$ et une projection $\pi_{87} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_8, \mathfrak{U}_7)$ en posant $\varphi = A$, $\psi = B$. Soit ensuite $\pi_{31} = \pi_{21}\pi_{32}$, etc.

Comme $A + B = R$, nous pouvons poser $C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_8) = C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) - C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8)$, où $C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) \subset A$, $C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) \subset B$. Soit $\Delta_i^p(\mathfrak{U}_8)$ la partie de la $(p, \mathfrak{U}_8)$-chaîne $F\, C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8)$ dont les simplexes sont $\neq \emptyset \bmod (R - U)$. Comme $F\, C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_8) \subset R - U$, nous voyons que $\Delta_i^p(\mathfrak{U}_8)$ est aussi la partie de la chaîne $F\, C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8)$ dont les simplexes sont $\neq \emptyset \bmod (R - U)$. Comme $C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) \subset A$, on a $\Delta_i^p(\mathfrak{U}_8) \subset A$; comme $C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) \subset B$, on a $\Delta_i^p(\mathfrak{U}_8) \subset B$. Donc d'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_8$ nous avons $\pi_{87}\, \Delta_i^p(\mathfrak{U}_8) \subset AB$, donc $F\pi_{87}\, \Delta_i^p(\mathfrak{U}_8) \subset AB$. Comme $\Delta_i^p(\mathfrak{U}_8) = F\, C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) \bmod (R - U)$ nous avons $F\, \Delta_i^p(\mathfrak{U}_8) \subset R - U$. D'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_7$ nous avons donc $F\pi_{86}\, \Delta_i^p(\mathfrak{U}_8) \subset AB - U$, de sorte que $\pi_{86}\, \Delta_i^p(\mathfrak{U}_8)$ est un $(p, \mathfrak{U}_6)$-cycle $\bmod (AB - U)$ dans AB. D'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_6$, $\pi_{85}\, \Delta_i^p(\mathfrak{U}_8)$ est donc un $(p, \mathfrak{U}_5)$-cycle essentiel $\bmod (AB - U)$ dans AB, de sorte qu'il existe, d'après H IV 6.1 un (p, R)-cycle Γ_i^p $(1 \leqq i \leqq m) \bmod (AB - U)$ dans AB tel que $\Gamma_i^p(\mathfrak{U}_5) = \pi_{85}\, \Delta_i^p(\mathfrak{U}_8)$. Soit $\sum_{i=1}^m r_i \Gamma_i^p \sim \emptyset \bmod (AB - V)$ dans AB. Il suffit d'en déduire que $r_1 = \ldots = r_m = 0$, car alors $\beta_p(V, U; AB, R) \leqq m$, ce qu'il faut démontrer.

Comme $\Gamma_i^p(\mathfrak{U}_5) = \pi_{85}\, \Delta_i^p(\mathfrak{U}_8)$, nous avons $\pi_{85} \sum_{i=1}^m r_i\, \Delta_i^p(\mathfrak{U}_8) \sim \emptyset \bmod (AB - V)$ dans AB. Il existe donc une $(p + 1, \mathfrak{U}_5)$-chaîne $D^{p+1}(\mathfrak{U}_5) \subset AB$ telle que

$$F\, D^{p+1}(\mathfrak{U}_5) = \pi_{85} \sum_{i=1}^m r_i\, \Delta_i^p(\mathfrak{U}_8) \bmod (AB - V).$$

Mais $C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) \to \Delta_i^p(\mathfrak{U}_8) \bmod (AB - U) \subset (R - V)$. Il s'en ensuit que la $(p + 1, \mathfrak{U}_5)$-chaîne $\pi_{85} \sum_{i=1}^m r_i\, C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) - D^{p+1}(\mathfrak{U}_5)$ est située dans A et que sa frontière se trouve dans $(R - V)$. D'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_5$ on a $F[\pi_{84} \sum_{i=1}^m r_i\, C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{54}\, D^{p+1}(\mathfrak{U}_5)] \subset A - V$, d'où (d'après la definition du réseau $\mathfrak{U}_4$) il résulte que $\pi_{81} \sum_{i=1}^m r_i\, C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51}\, D^{p+1}(\mathfrak{U}_5)$ est un $(p + 1, \mathfrak{U}_1)$-cycle essentiel $\bmod (A - V)$

dans A. Donc d'après H IV 6.1, il existe un $(p + 1, R)$-cycle $H_1^{p+1} \bmod (A - V)$ dans A tel que

$$(1) \qquad H_1^{p+1}(\mathfrak{U}_1) = \pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i \, C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} \, D^{p+1}(\mathfrak{U}_5) .$$

De manière analogue, la $(p + 1, \mathfrak{U}_5)$-chaîne $\pi_{85} \sum_{i=1}^{m} r_i \, C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) - D^{p+1}(\mathfrak{U}_5)$ est située dans B et sa frontière se trouve dans $R - V$. D'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_3$ nous voyons que $\pi_{82} \sum_{i=1}^{m} r_i \, C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{52} \, D^{p+1}(\mathfrak{U}_5)$ est un $(p + 1, \mathfrak{U}_2)$-cycle $\bmod (B - V)$ dans B, d'où il résulte (d'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_2$) que π_{81} . . $\sum_{i=1}^{m} r_i \, C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} \, D^{p+1}(\mathfrak{U}_5)$ est un $(p + 1, \mathfrak{U}_1)$-cycle essentiel mod $B - V$ dans B. D'après H IV 6.1, il existe donc un $(p + 1, R)$-cycle $H_2^{p+1} \bmod (B - V)$ dans B tel que

$$(2) \qquad H_2^{p+1}(\mathfrak{U}_1) = \pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i \, C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} \, D^{p+1}(\mathfrak{U}_5) .$$

Comme $\beta_{p+1}(W, V; A, R) = \beta_{p+1}(W, V; B, R) = 0$, nous avons $H_1^{p+1} \sim \emptyset \bmod (A - W)$ dans A, $H_2^{p+1} \sim \emptyset \bmod (B - W)$ dans B. En vertu de (1) et (2) il existe donc deux $(p + 2, \mathfrak{U}_1)$-chaînes $E_1^{p+2}(\mathfrak{U}_1) \subset A$ et $E_2^{p+2}(\mathfrak{U}_1) \subset B$ telles que

$$E_1^{p+2}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i \, C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} \, D^{p+1}(\mathfrak{U}_5) \bmod (A - W) ,$$

$$E_2^{p+2}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i \, C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} \, D^{p+1}(\mathfrak{U}_5) \bmod (B - W) ,$$

de sorte que

$$E_1^{p+2}(\mathfrak{U}_1) - E_2^{p+2}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i \, C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_8) \bmod (R - W) ,$$

c'est-à-dire que $\pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i \, C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_8) \sim \emptyset \bmod (R - W)$. Or, $\pi_{81} \, C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_8) \sim C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_1)$ $\bmod (R - W)$, donc $\sum_{i=1}^{m} r_i \, C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_1) \sim \emptyset \bmod (R - W)$. D'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_1$, il en résulte que $r_1 = \ldots = r_m = 0$, c. q. f. d.

6. (*Deuxième théorème d'addition pour les nombres de Betti locaux.*) *Soit R un espace normal. Soient A, B deux ensembles fermés dans R; soit $A + B = R$. Soit $a \in AB$. Soit $p = 0, 1, 2, \ldots$ Soit $\beta_p(a, A) = \beta_p(a, B) = 0$. Alors $\beta_p(a, AB) \leqq$ $\leqq \beta_{p+1}(a, R)$.*

D é m o n s t r a t i o n. De la définition des nombres de Betti locaux (voir H IV 10) on déduit aisément qu'il suffit de démontrer l'énoncé suivant: Soit $m = 1, 2, 3, \ldots$;

soit U un voisinage du point a (dans l'espace R), tel que $\beta_p(a, U; AB, R) \geqq m$. Alors il existe un voisinage $V \subset U$ du point a, pour lequel $\beta_{p+1}(a, V; R) \geqq m$.

Comme $\beta_p(a, A) = \beta_p(a, A; R) = 0$, nous avons $\beta_p(a, U; A, R) = 0$, et, de façon semblable, $\beta_p(a, U; B, R) = 0$. Il existe donc un voisinage $V \subset U$ du point a tel que $\beta_p(V, U; A, R) = \beta_p(V, U; B, R) = 0$. Nous avons à montrer que l'on a $\beta_{p+1}(W, V; R) \geqq m$ pour tout voisinage $W \subset V$ du point a.

Comme $\beta_p(a, V; AB, R) \geqq m$, on a $\beta_p(W, V; AB, R) \geqq m$. Il existe donc des (p, R)-cycles Γ_i^p $(1 \leqq i \leqq m)$ mod $(AB - U)$ dans AB tels que $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p \sim \emptyset$ mod $(AB - W)$ dans AB implique $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Tout comme au début de la démonstration du théorème 4 nous trouvons qu'il existe un réseau $\mathfrak{U}_1$ tel que $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_1) \sim \emptyset$ mod $(AB - W)$ dans AB implique $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Déterminons suivant 2 d'abord un raffinement $\mathfrak{U}_2$ du réseau $\mathfrak{U}_1$ et une projection $\pi_{21} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$ en posant $\varphi = AB$, $\psi = R - W$, puis un raffinement $\mathfrak{U}_3$ du réseau $\mathfrak{U}_2$ et une projection $\pi_{32} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$ en posant $\varphi = A$, $\psi = B$. Soit ensuite $\mathfrak{U}_4$ (voir H IV 10) un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_3$ normal par rapport aux $(p + 1)$-cycles mod $(R - V)$. Soit

$$\pi_{43} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_3)\,, \quad \pi_{31} = \pi_{21}\pi_{32}\,, \quad \pi_{41} = \pi_{31}\pi_{43}\,, \quad \pi_{42} = \pi_{32}\pi_{43}\,.$$

Comme Γ_i^p sont des (p, R)-cycles mod $(AB - U)$ dans AB, ce sont aussi des (p, R)-cycles mod $(A - U)$ dans A. Comme $\beta_p(V, U; A, R) = 0$, nous avons $\Gamma_i^p \sim \emptyset$ mod $(A - V)$ dans A. De manière semblable, $\Gamma_i^p \sim \emptyset$ mod $(B - V)$ dans B. Il existe donc deux $(p + 1, \mathfrak{U}_4)$-chaînes $D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \subset A$ et $D_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \subset B$ telles que

$$\begin{aligned} D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) &\to \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \bmod (A - V)\,, \\ D_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) &\to \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \bmod (B - V)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Donc $D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - D_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) = D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$ est un $(p + 1, \mathfrak{U}_4)$-cycle mod $(R - V)$; il en résulte, d'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_4$ que la chaîne $\pi_{43}\, D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$ est un $(p + 1, \mathfrak{U}_3)$-cycle essentiel mod $(R - V)$. D'après H IV 6.1, il existe donc des $(p + 1, R)$-cycles C_i^{p+1} $(1 \leqq i \leqq m)$ mod $(R - V)$ tels que $C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_3) = \pi_{43}\, D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$.

Soit $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1} \sim \emptyset$ mod $(R - W)$. Il suffit d'en déduire $r_1 = \ldots = r_m = 0$, car alors $\beta_{p+1}(W, V; R) \geqq m$, ce qui nous avons à démontrer. Comme $C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_3) = \pi_{43}\, D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$, il existe une $(p + 2, \mathfrak{U}_3)$-chaîne $E^{p+2}(\mathfrak{U}_3)$ telle que $E^{p+2}(\mathfrak{U}_3) \to \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i\, D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$ mod $(R - W)$. Comme $R = A + B$, nous pouvons poser $E^{p+2}(\mathfrak{U}_3) = E_1^{p+2}(\mathfrak{U}_3) - E_2^{p+2}(\mathfrak{U}_3)$, où $E_1^{p+2}(\mathfrak{U}_3) \subset A$, $E_2^{p+2}(\mathfrak{U}_3) \subset B$. Evidemment

$$\begin{aligned} &\pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i\, D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - F\, E_1^{p+2}(\mathfrak{U}_3) = \\ &= \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i\, D_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - F\, E_2^{p+2}(\mathfrak{U}_3) \bmod (R - W)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Désignons par $K^{p+1}(\mathfrak{U}_3)$ la partie du premier, et donc aussi du second membre de (2), dont les simplexes sont $\neq \emptyset \bmod (R - W)$. Nous avons alors $K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset A$, $K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset B$, donc $\pi_{32} K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset AB$ d'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_3$. De plus

$$F\, E_1^{p+2}(\mathfrak{U}_3) = \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i\, D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \bmod (R - W)\,,$$

de sorte que $\pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i\, D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \to \emptyset \bmod (R - W)$. Il s'en ensuit d'après (1) que l'on a $F\, K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset R - W$. Donc, la $(p, \mathfrak{U}_2)$-chaîne

$$F\pi_{32}\, K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \tag{3}$$

est située dans $R - W$. Comme $\pi_{32}\, K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset AB$, $\Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset AB$, nous voyons que la chaîne (3) se trouve également dans AB. D'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_2$ nous avons donc $F\pi_{31}\, K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset AB - W$. Donc $\pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \sim \emptyset \bmod (AB - W)$ dans AB. Or, $\pi_{41}\, \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \sim \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_1) \bmod (AB - U)$ dans AB. Comme $W \subset U$, nous avons $\sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_1) \sim \emptyset \bmod (AB - W)$ dans AB, d'où il résulte d'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_1$ que l'on a $r_1 = \ldots = r_m = 0$, c. q. f. d.

7. (*Premier théorème d'addition pour l'acyclicité locale.*) *Soit R un espace normal. Soient A, B deux ensembles fermés dans R, $A + B = R$. Soit $a \in AB$. Soit $p = 0, 1, 2, \ldots$ Supposons que les ensembles A et B soient localement acycliques d'ordre $p + 1$ dans le point a. Supposons que l'ensemble AB soit localement acyclique d'ordre p en ce même point a. Alors l'espace R est localement acyclique d'ordre $p + 1$ dans le point a.*

Démonstration. Supposons au contraire (voir H IV 14) que nous ayons $\gamma_{p+1}(a, R) \neq 0$. Il existe alors un voisinage U du point a tel que $\gamma_{p+1}(a, U; R) \neq 0$. Comme $\gamma_{p+1}(a; A, R) = \gamma_{p+1}(a; B, R) = 0$, nous avons $\gamma_{p+1}(a, U; A, R) = \gamma_{p+1}(a, U; B, R) = 0$. Il existe donc un voisinage $V \subset U$ du point a tel que $\gamma_{p+1}(V, U; A, R) = \gamma_{p+1}(V, U; B, R) = 0$. Comme $\gamma_p(a; AB, R) = 0$, nous avons $\gamma_p(a, V; AB, R) = 0$. Il existe donc un voisinage $W_1 \subset V$ du point a tel que $\gamma_p(W_1, V; AB, R) = 0$. D'aprés D 10, il existe un voisinage W_2 du point a tel que $\overline{W}_2 \subset W_1$. Comme $\gamma_{p+1}(a, U; R) \neq 0$, nous avons $\gamma_{p+1}(W_2, U; R) \neq 0$.

Il existe donc un $(p + 1, R)$-cycle absolu C^{p+1} qui est situé dans W_2 et qui n'est pas homologue à zéro dans $\overline{U}$. Il existe donc un réseau $\mathfrak{U}_1$ tel que $C^{p+1}(\mathfrak{U}_1)$ n'est pas $\sim\emptyset$ dans $\overline{U}$. Soit (voir H III 9.3 et 10) $\mathfrak{U}_2$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_1$ normal à la fois par rapport aux $(p + 1)$-cycles absolus dans $\overline{AV}$ et par rapport aux $(p + 1)$-cycles absolus dans $\overline{BV}$. Soit $\mathfrak{U}_3$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_2$ normal par rapport aux p-cycles absolus dans $\overline{ABW_1}$. Déterminons, suivant 2, un raffinement $\mathfrak{U}_4$ du réseau $\mathfrak{U}_3$ et une projection $\pi_{43} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_3)$ en posant $\varphi = A\overline{W}_2$, $\psi = B\overline{W}_2$. Soit $\pi_{21} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{32} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{42} = \pi_{32}\pi_{43}$, $\pi_{41} = \pi_{21}\pi_{42}$.

Comme $C^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \subset \overline{W}_2$, nous pouvons poser $C^{p+1}(\mathfrak{U}_4) = C_1^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - C_2^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$, où $C_1^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \subset A\overline{W}_2$, $C_2^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \subset B\overline{W}_2$. Comme $C^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \to 0$, nous pouvons poser

$$F\, C_1^{p+1}(\mathfrak{U}_4) = F\, C_2^{p+1}(\mathfrak{U}_4) = \Delta^p(\mathfrak{U}_4)\,. \tag{1}$$

Nous avons $\Delta^p(\mathfrak{U}_4) \subset A\overline{W}_2$, $\Delta^p(\mathfrak{U}_4) \subset B\overline{W}_2$, donc $\pi_{43}\, \Delta^p(\mathfrak{U}_4) \subset AB\overline{W}_2$ d'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_4$. Comme $W_2 \subset W_1$, $\pi_{43}\, \Delta^p(\mathfrak{U}_4)$ est un $(p, \mathfrak{U}_3)$-cycle absolu dans $\overline{ABW_1}$. D'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_3$ (voir aussi H IV 6.1) il existe un (p, R)-cycle absolu Γ^p dans $\overline{ABW_1}$ tel que $\Gamma^p(\mathfrak{U}_2) = \pi_{42}\, \Delta^p(\mathfrak{U}_4)$. Comme $\gamma_p(W_1, V; AB, R) = 0$, nous avons $\Gamma^p \sim 0$ dans $\overline{ABV}$. Il existe donc une $(p + 1, \mathfrak{U}_2)$-chaîne $D^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset \overline{ABV}$ telle que $D^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \to \pi_{42}\, \Delta^p(\mathfrak{U}_4)$. Donc d'après (1)

$$\pi_{42}\, C_1^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - D^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \to 0\,,$$
$$\pi_{42}\, C_2^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - D^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \to 0\,.$$

Comme $C_1^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \subset A\overline{W}_2$, $D^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset \overline{ABV}$, $\overline{W}_2 \subset W_2 \subset V$, nous avons $\pi_{42}\, C_1^{p+1}(\mathfrak{U}_2) - D^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset \overline{AV}$. Donc, d'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_2$ (voir aussi H IV 6.1) il existe un $(p + 1, R)$-cycle absolu E_1^{p+1} dans $\overline{AV}$ tel que

$$E_1^{p+1}(\mathfrak{U}_1) = \pi_{41}\, C_1^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - \pi_{21}\, D^{p+1}(\mathfrak{U}_2)\,.$$

De manière analogue, il existe un $(p + 1, R)$-cycle absolu E_2^{p+1} dans $\overline{BV}$ tel que

$$E_2^{p+1}(\mathfrak{U}_1) = \pi_{41}\, C_2^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - \pi_{21}\, D^{p+1}(\mathfrak{U}_2)\,.$$

Comme $\gamma_{p+1}(V, U; A, R) = \gamma_{p+1}(V, U; B, R) = 0$, nous avons $E_1^{p+1} \sim 0$ dans $\overline{AU}$, $E_2^{p+1} \sim 0$ dans $\overline{BU}$. Il existe donc deux $(p + 2, \mathfrak{U}_1)$-chaînes $H_1^{p+2}(\mathfrak{U}_1) \subset \overline{AU}$ et $H_2^{p+2}(\mathfrak{U}_1) \subset \overline{BU}$ telles que

$$H_1^{p+2}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{41}\, C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - \pi_{21}\, D^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \quad (i = 1, 2)\,,$$

de sorte que

$$H_1^{p+2}(\mathfrak{U}_1) - H_2^{p+2}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{41}\, C^{p+1}(\mathfrak{U}_4)\,,$$

donc $\pi_{41}\, C^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \sim 0$ dans $\overline{U}$. Comme C^{p+1} est un $(p + 1, R)$-cycle absolu dans $\overline{W}_2 \subset \overline{U}$, nous avons $\pi_{41}\, C^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \sim C^{p+1}(\mathfrak{U}_1)$ dans $\overline{U}$. Donc $C^{p+1}(\mathfrak{U}_1) \sim 0$ dans U, en contradiction avec la définition du réseau $\mathfrak{U}_1$.

8. (*Deuxième théorème d'addition pour l'acyclicité locale.*) *Soit R un espace normal. Les ensembles A, B soient fermés dans R; $A + B = R$. Soit $a \in AB$. Soit $p = 0, 1, 2, \ldots$ Supposons que les ensembles A et B soient localement acycliques*

d'ordre p dans le point a. Supposons que l'espace R soit localement acyclique d'ordre p + 1 en ce point. Alors l'ensemble AB est localement acyclique d'ordre p dans le point a.

Démonstration. Soit au contraire $\gamma_p(a; AB, R) \neq 0$. Il existe alors un voisinage U_1 du point a, tel que $\gamma_p(a, U_1; AB, R) \neq 0$. D'après D 10, il existe un voisinage U_2 du point a, tel que $\overline{U}_2 \subset U_1$. Comme $\gamma_{p+1}(a; R) = 0$, nous avons $\gamma_{p+1}(a, U_2; R) = 0$. Il existe donc un voisinage $V \subset U_2$ du point a, tel que $\gamma_{p+1}(V, U_2; R) = 0$. Comme $\gamma_p(a; A, R) = \gamma_p(a; B, R) = 0$, nous avons $\gamma_p(a, V; A, R) = \gamma_p(a, V; B, R) = 0$. Il existe donc un voisinage $W \subset V$ du point a, tel que $\gamma_p(W, V; A, E) = \gamma_p(W, V; B, R) = 0$. Comme $\gamma_p(a, U_1; AB, R) \neq 0$, nous avons $\gamma_p(W, U_1; AB, R) \neq 0$.

Il existe donc un (p, R)-cycle absolu Γ^p qui est situé dans $\overline{ABW}$, et qui n'est pas ~ 0 dans $\overline{ABU}_1$. Il existe donc un réseau $\mathfrak{U}_1$ tel que $\Gamma^p(\mathfrak{U}_1)$ n'est pas ~ 0 dans $\overline{ABU}_1$. Déterminons, suivant 2, un raffinement $\mathfrak{U}_2$ du réseau $\mathfrak{U}_1$ et une projection $\pi_{21} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$ en posant $\varphi = AU_2$, $\psi = B\overline{U}_2$. Soit $\mathfrak{U}_3$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_2$ normal par rapport aux $(p + 1)$-cycles dans $\overline{V}$. Soit $\pi_{32} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{31} = \pi_{21}\pi_{32}$.

Comme $\overline{ABW} \subset \overline{AW}$, Γ^p est un (p, R)-cycle absolu dans $\overline{AW}$. Comme $\gamma_p(W, V; A, R) = 0$, nous avons $\Gamma^p \sim 0$ dans $\overline{AV}$. De manière analogue, nous trouvons $\Gamma^p \sim 0$ dans $\overline{BV}$. Donc, il existe des $(p + 1, \mathfrak{U}_3)$-chaînes $D_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset \overline{AV}$, $D_2^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset \overline{BV}$ telles que

$$D_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \to \Gamma^p(\mathfrak{U}_3)\,, \quad D_2^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \to \Gamma^p(\mathfrak{U}_3)\,. \tag{1}$$

Il en résulte que $D_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) - D_2^{p+1}(\mathfrak{U}_3)$ est un $(p + 1, \mathfrak{U}_3)$-cycle absolu dans $\overline{V}$. D'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_3$ (cf. aussi H IV 6.1), il existe un $(p + 1, R)$-cycle absolu C^{p+1} dans $\overline{V}$, tel que

$$C^{p+1}(\mathfrak{U}_2) = \pi_{32}\, D_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{32}\, D_2^{p+1}(\mathfrak{U}_3)\,.$$

Comme $\gamma_{p+1}(V, U; R) = 0$, on a $C^{p+1} \sim 0$ dans $\overline{U}_2$. Il existe donc une $(p + 2, \mathfrak{U}_2)$-chaîne $H^{p+2}(\mathfrak{U}_2) \subset U_2$ telle que

$$H^{p+2}(\mathfrak{U}_2) \to \pi_{32}\, D_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{32}\, D_2^{p+1}(\mathfrak{U}_3)\,.$$

Comme $R = A + B$, nous pouvons poser $H^{p+2}(\mathfrak{U}_2) = H_1^{p+2}(\mathfrak{U}_2) - H_2^{p+2}(\mathfrak{U}_2)$, où $H_1^{p+2}(\mathfrak{U}_2) \subset A\overline{U}_2$, $H_2^{p+2}(\mathfrak{U}_2) \subset BU_2$. On peut donc poser

$$\begin{aligned}\pi_{32}\, D_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) - F\, H_1^{p+2}(\mathfrak{U}_2) = \pi_{32}\, D_2^{p+1}(\mathfrak{U}_3) - F\, H_2^{p+3}(\mathfrak{U}_2) = \\ = K^{p+1}(\mathfrak{U}_2)\,.\end{aligned} \tag{2}$$

Comme $D_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset \overline{AV}$, $H_1^{p+2}(\mathfrak{U}_2) \subset A\overline{U}_2$, $V \subset U_2$, nous avons $K^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset A\overline{U}_2$. De façon analogue, $K^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset B\overline{U}_2$. Donc, d'après la définition du réseau $\mathfrak{U}_2$ nous avons $\pi_{21}\, K^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset AB\overline{U}_2$. Comme $\overline{U}_2 \subset U_1$ nous avons $\pi_{21}\, K^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset \overline{ABU}_1$. D'après (1) et (2) on a cependant $\pi_{21}\, K^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \to \pi_3\, \Gamma^p(\mathfrak{U}_3)$, de sorte que $\pi_{31}\,.$ $.\, \Gamma^p(\mathfrak{U}_3) \sim 0$ dans $\overline{ABU}_1$. Comme Γ^p est un (p, R)-cycle absolu dans $\overline{ABW} \subset \overline{ABU}_1$, on a $\pi_{31}\ \Gamma^p(\mathfrak{U}_3) \sim \Gamma^p(\mathfrak{U}_1)$ dans $\overline{ABU}_1$. Donc $\Gamma^p(\mathfrak{U}_1) \sim 0$ dans $\overline{ABU}_1$, ce qui est en contradiction avec la définition du réseau $\mathfrak{U}_1$.

V. Cycles de dimension $\geqq n$ dans l'espace de dimension n

1. *Soit R un espace. Soit S un ensemble fermé dans R. Soit* (voir D 3) $\dim R = n < p\ (= 1, 2, 3, \ldots)$. Alors $B^p(R, S) = 0$.

Démonstration. Soit C^p un (p, R)-cycle $\operatorname{mod} S$. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R. Nous avons à démontrer que $C^p(\mathfrak{U}) \sim 0 \operatorname{mod} S$. D'après D 3 il existe un réseau $\mathfrak{B}$ d'ordre $\leqq n$ qui est raffinement du réseau $\mathfrak{U}$. Soit $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$, donc $\pi\, C^p(\mathfrak{B}) \sim C^p(\mathfrak{U}) \operatorname{mod} S$. Comme l'ordre du réseau $\mathfrak{B}$ est $<p$, on a $C^p(\mathfrak{B}) = \emptyset$. Donc $C^p(\mathfrak{U}) \sim 0 \operatorname{mod} S$.

2. *Soit R un espace. Soit* $\dim R = n < p\ (= 1, 2, 3, \ldots)$. *Soit $a \in R$. Alors* $\beta_p(a, R) = 0$.

Démonstration. Soient U et V deux voisinages du point a, soit $U \supset V$. Soit C^p un (p, R)-cycle $\operatorname{mod}(R - U)$. Il suffit de montrer que $C^p \sim 0 \operatorname{mod}(R - V)$. Or d'après 1 on a même $C^p \sim 0 \operatorname{mod}(R - U)$.

3. *Soit R un espace. Soit* $\dim R = n < p\ (= 1, 2, 3, \ldots)$. *Soit $a \in R$. Alors R est localement acyclique d'ordre p dans le point a.*

Démonstration. Soient U et V deux voisinages du point a, soit $U \supset V$. Soit Γ^p und (p, R)-cycle absolu dans $\overline{V}$. Il suffit de montrer que $\Gamma^p \sim 0$ dans $\overline{U}$. Or d'après 1 on a même $\Gamma^p \sim 0$ dans $\overline{V}$.

4. *Soit R un espace métrique compact. Soit* $\dim R = n\ (= 1, 2, 3, \ldots)$. *Soient S, T deux ensembles fermés dans R; soit $S \subset T$. Soit C^n un (n, R)- cycle* mod *S dans T. Alors il existe un ensemble T_0 fermé dans R et tel que*: 1° $S \subset T_0 \subset T$; 2° *il existe un (n, R)-cycle C_0^n* mod *S dans T_0 tel que $C^n \sim C_0^n$* mod *S dans T*; 3° *si T_1 est fermé dans R, $S \subset T_1 \subset T_0$, $T_1 \neq T_0$, et C_1^n est un (n, R)-cycle* mod *S dans T_1, alors on n'a pas $C^n \sim C_1^n$* mod *S dans T.*

Démonstration. Soit Φ la classe de tous les ensembles A fermés dans R et tels que $S \subset A \subset T$ et qu'il existe un (n, R)-cycle $C_A^n \operatorname{mod} S$ dans A tel que $C^n \sim C_A^n \operatorname{mod} S$ dans T. D'après II 14 (voir aussi II 7) il suffit de montrer que $A_k \in \Phi$, $A_k \supset A_{k+1}$, $B = \prod_{k=1}^{\infty} A_k$ implique $B \in \Phi$.

Comme $A_k \in \Phi$, il existe un (n, R)-cycle $C_k^n \operatorname{mod} S$ dans A_k tel que $C^n \sim C_k^n \operatorname{mod} S$ dans T. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R. D'après IV 1 (voir aussi D 16), il existe un voisinage $G(\mathfrak{U})$ de l'ensemble B et un raffinement $f\mathfrak{U}$ du réseau $\mathfrak{U}$ tels que si K est le noyau d'un $f\mathfrak{U}$-simplexe et $K \,.\, G(\mathfrak{U}) \neq \emptyset$, alors $KB \neq \emptyset$ également. D'aprés III 13 il existe un indice $m(\mathfrak{U})$ tel que $A_{m(\mathfrak{U})} \subset G(\mathfrak{U})$. Soit $\pi_{\mathfrak{U}} = \text{Pr.}\,(f\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$. Soit $D^n(\mathfrak{U}) = \pi_{\mathfrak{U}}\, C_{m(\mathfrak{U})}^n(f\mathfrak{U})$.

Il suffit de montrer que les chaînes $D^n(\mathfrak{U})$ définissent un (n, R)-cycle D^n mod S dans B tel que $C^n \sim D^n$ mod S dans T.

Comme $F\, C^n_{m(\mathfrak{U})}(f\mathfrak{U}) \subset S$, on a $F\, D^n(\mathfrak{U}) \subset S$. Comme $C^n_{m(\mathfrak{U})}(f\mathfrak{U}) \subset A_{m(\mathfrak{U})} \subset G(\mathfrak{U})$, on a, d'après la définition du réseau $f\mathfrak{U}$, $C^n_{m(\mathfrak{U})}(f\mathfrak{U}) \subset B$, donc $D^n(\mathfrak{U}) \subset B$. Il en résulte que $D^n(\mathfrak{U})$ est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod S dans B.

Comme

$$D^n(\mathfrak{U}) = \pi_{\mathfrak{U}}\, C^n_{m(\mathfrak{U})}(f\mathfrak{U}) \sim C^n_{m(\mathfrak{U})}(\mathfrak{U}) \bmod S$$

dans $A_{m(\mathfrak{U})} \subset T$, $C^n_{m(\mathfrak{U})}(\mathfrak{U}) \sim C^n(\mathfrak{U})$ mod S dans T, nous avons

(1) $$D^n(\mathfrak{U}) \sim C^n(\mathfrak{U}) \bmod S \text{ dans } T.$$

Soit $\mathfrak{B}$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$, soit $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Comme $\dim R = n$, il existe un réseau $\mathfrak{W}$ d'ordre $\leqq n$ et qui est raffinement des deux réseaux $f\mathfrak{U}$ et $f\mathfrak{B}$. Soit $\pi_1 = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{W}, f\mathfrak{U})$, $\pi_2 = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{W}, f\mathfrak{B})$. On a

$$C^n_{m(\mathfrak{U})}(f\mathfrak{U}) \sim \pi_1\, C^n_{m(\mathfrak{U})}(\mathfrak{W}) \bmod S \text{ dans } A_{m(\mathfrak{U})}.$$

Comme $A_{m(\mathfrak{U})} \subset G(\mathfrak{U})$, nous avons d'après la définition du réseau $f\mathfrak{U}$

(2) $$C^n_{m(\mathfrak{U})}(f\mathfrak{U}) \sim \pi_1\, C^n_{m(\mathfrak{U})}(\mathfrak{W}) \bmod S \text{ dans } B$$

et de manière analogue

(3) $$C^n_{m(\mathfrak{B})}(f\mathfrak{B}) \sim \pi_2\, C^n_{m(\mathfrak{B})}(\mathfrak{W}) \bmod S \text{ dans } B.$$

D'après (1) et comme $C^n \sim C^n_{m(\mathfrak{U})}$ mod S dans T, il existe une $(n+1, \mathfrak{W})$-chaîne $E^{n+1}(\mathfrak{W})$ telle que

$$F\, E^{n+1}(\mathfrak{W}) = C^n_{m(\mathfrak{U})}(\mathfrak{W}) - D^n(\mathfrak{W}) \bmod S.$$

Comme l'ordre du réseau $\mathfrak{W}$ est $\leqq n$, nous avons $E^{n+1}(\mathfrak{W}) = 0$, donc

(4) $$C^n_{m(\mathfrak{U})}(\mathfrak{W}) = D^n(\mathfrak{W}) \bmod S.$$

De manière analogue

(5) $$C^n_{m(\mathfrak{B})}(\mathfrak{W}) = D^n(\mathfrak{W}) \bmod S.$$

D'après (2), (3), (4) et (5) nous avons

$$D^n(\mathfrak{U}) \sim \pi_{\mathfrak{U}}\pi_1\, D^n(\mathfrak{W}) \bmod S \text{ dans } B,$$
$$\pi\, D^n(\mathfrak{B}) \sim \pi\pi_{\mathfrak{B}}\pi_2\, D^n(\mathfrak{W}) \bmod S \text{ dans } B.$$

Comme $D^n(\mathfrak{W})$ est un (n, R)-cycle mod S dans B, nous avons d'après H III 7

$$\pi_{\mathfrak{U}}\pi_1\, D^n(\mathfrak{W}) \sim \pi\pi_{\mathfrak{B}}\pi_2\, D^n(\mathfrak{W}) \bmod S \text{ dans } B.$$

Donc

$$D^n(\mathfrak{U}) \sim \pi\, D^n(\mathfrak{B}) \bmod S \text{ dans } B.$$

VI. Les espaces R_n, S_n et T_n

1. R_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ désigne *l'espace euclidien à n dimensions*, c'est-à-dire l'ensemble des n-tuples ordonnés $(x_1, \ldots, x_n)$ de nombres réels, la métrique étant définie par la formule

$$\varrho(x, y) = \sqrt{[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2]} \quad \text{pour} \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)\,.$$

D'une façon évidente (voir III 1),

$$(1) \qquad R_{n+1} = R_n \times R_1 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

2. S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ désigne l'ensemble des $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in R_{n+1}$ pour lesquels $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1$.

3. T_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ désigne l'ensemble des $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n$ pour lesquels $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqq 1$.

4. *Soit* $a = (\pm 1, 0, \ldots, 0) \in S_n$. *Alors les espaces* R_n *et* $S_n - (a)$ *sont homéomorphes.*

Démonstration. A chaque $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in S_n - (a)$ associons le point $f(x) = y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R_n$ par la relation

$$(2) \qquad y_j = \frac{x_j}{1 \mp x_0} \quad (1 \leqq j \leqq n)\,.$$

Il est aisé de voir que les équations (2) sont équivalentes aux équations

$$(3) \qquad x_0 = \pm \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 1}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 1}\,, \quad x_j = \frac{2y_j}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 1} \quad (1 \leqq j \leqq n)\,.$$

Donc la fonction f est biunivoque dans le domaine $S_n - (a)$; on a $f[S_n - (a)] = R_n$ et les deux fonctions f et f_{-1} sont continues.

5. *L'ensemble* T_n $(n = 2, 3, \ldots)$ *contient un sous-ensemble homéomorphe à* $S_{n-1} \times T_1$.

Démonstration. Le sous-ensemble en question est p. ex. l'ensemble des $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_n$ pour lesquels $1/4 \leqq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqq 1$.

6. *Soit* $n = 1, 2, 3, \ldots$. *On a* $S_n = T_n' + T_n''$ *où les ensembles* T_n' *et* T_n'' *sont homéomorphes à* T_n. *L'ensemble* $T_1' T_2''$ *est composé de deux points. Si* $n \geqq 2$, *l'ensemble* $T_n' T_n''$ *est homéomorphe à* S_{n-1}.

Démonstration. Il suffit de prendre pour T_n' et T_n'' l'ensemble des points $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ pour lesquels $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1$ et $x_0 \geqq 0$ ou $x_0 \leqq 0$ respectivement.

7. *S_n et T_n sont des espaces métriques compacts.*

Démonstration. Soit U_n l'ensemble des points $(x_1, \ldots, x_n)$ pour lesquels $-1 \leqq \leqq x_i \leqq 1$ $(1 \leqq i \leqq n)$. D'après II 15, U_1 est compact. Evidemment $U_{n+1} = U_n \times U_1$, donc d'après III 5 U_n est compact. Il est évident que T_n est fermé dans U_n et S_n est fermé dans U_{n+1}. Donc S_n et T_n sont compacts d'après II 3.

8. $\dim R_n = \dim S_n = \dim T_n \leqq n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.[4]

Démonstration. I. D'après D 26 et D 28 nous avons $\dim T_n \leqq \dim R_n$. D'après 4, D 26 et D 28 nous avons $\dim R_n \leqq \dim S_n$. D'après 6, D 16 et D 23 nous avons $\dim S_n \leqq \dim T^n$. Donc $\dim R_n = \dim S_n = \dim T_n$.

II. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans T_1. D'après II 9 et II 15 il existe un nombre $\delta > 0$ tel que l'on peut associer à chaque $x \in T_1$ un sommet U du réseau $\mathfrak{U}$ tel que $y \in T_1$, $|y - x| < 2\delta$, implique $y \in U$. Soit $-1 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = 1$, $|a_i - a_{i-1}| < \delta$. Alors les intervalles $-1 \leqq x < a_2$, $a_1 < x < a_3, \ldots, a_{m-3} < x < < a_{m-1}$, $a_{m-2} < x \leqq 1$ forment un réseau d'ordre 1 qui est un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$. Donc $\dim T_1 \leqq 1$.

III. Il nous reste à démontrer que $\dim S_{n-1} \leqq n - 1$ implique $\dim S_n \leqq n$ $(= 2, 3, 4, \ldots)$. D'après 5, D 26 et D 28 il suffit de déduire de $\dim S_{n-1} \leqq n - 1$ la relation $\dim S_{n-1} \times T_1 \leqq n$. Soit $\mathfrak{Z}$ un réseau donné dans $S_{n-1} \times T_1$. D'après 7 et III 7 il existe un réseau $\mathfrak{U}$ dans S_{n-1} et un réseau $\mathfrak{T}$ dans T_1 tels que le réseau $\mathfrak{U} \times \mathfrak{T}$ soit un raffinement du réseau $\mathfrak{Z}$. Comme $\dim S_{n-1} \leqq n - 1$ il existe un réseau $\mathfrak{V}$ dans S_{n-1}, d'ordre $\leqq n - 1$, et qui est raffinement du réseau $\mathfrak{U}$. Soient $V_1, V_2, \ldots, V_m$ les sommets de ce réseau $\mathfrak{V}$. D'après II 9 et II 15 il existe un nombre $\delta > 0$ tel que si $-1 \leqq x < y \leqq 1$, $y - x < (m + 1)\,\delta$, il existe un sommet du réseau $\mathfrak{T}$ qui contient tous les nombres z, $x \leqq z \leqq y$. Soit $-1 = a_0 < a_1 < \ldots < < a_{km-1} < a_{km} = 1$, $|a_i - a_{i-1}| < \delta$ pour $1 \leqq i \leqq km$. Pour $1 \leqq i \leqq m$ soit W_{i0} l'ensemble des $x \in T_1$ pour lesquels on a $-1 \leqq x < a_i$. Pour $1 \leqq i \leqq m$ soit W_{ik} l'ensemble des $x \in T_1$ pour lesquels on a $a_{(k-1)m+i-1} < x \leqq 1$. Pour $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq k - 1$ soit W_{ij} l'ensemble des $x \in T_1$ pour lesquels $a_{(j-1)m+i-1} < x < < a_{jm+1}$. Pour $1 \leqq i \leqq m$, $W_{i0}, W_{i1}, \ldots, W_{ik}$ sont évidemment les sommets d'un réseau $\mathfrak{W}_i$ dans T_1, qui est un raffinement du réseau $\mathfrak{T}$. De plus, si $x \in T_1$, alors ou bien x n'appartient qu'à un seul sommet du réseau $\mathfrak{W}_i$, pour tout i $(1 \leqq i \leqq m)$, ou bien il existe un indice i_0 $(1 \leqq i_0 \leqq m)$ tel que x appartient à deux sommets (et à deux seulement) du réseau $\mathfrak{W}_{i_0}$, tandis que pour $1 \leqq i \leqq m$, $i \neq i_0$, x n'appartient qu'à un seul sommet du réseau $\mathfrak{W}_i$. Les ensembles $V_i \times W_{ij}$ $(1 \leqq i \leqq m, 0 \leqq j \leqq k)$ sont les sommets d'un réseau $\mathfrak{P}$ dans $S_{n-1} \times T_1$ qui est un raffinement du réseau

[4] Voir plus loin notre théorème 14.

$\mathfrak{B} \times \mathfrak{T}$, donc aussi du réseau $\mathfrak{Z}$. Comme l'ordre du réseau $\mathfrak{B}$ est $\leqq n - 1$, il découle de la propriété mentionnée des réseaux $\mathfrak{W}_i$ que l'ordre du réseau $\mathfrak{P}$ est $\leqq n$.

9. *Soit* $n = 1, 2, 3, \ldots$; $p = 0, 1, 2, \ldots$ *Alors* $B^0(T_n) = 1$, $B^p(T_n) = 0$ *pour* $p \geqq 1$.

Démonstration. Soit Γ^p un (p, T_n)-cycle absolu; si $p = 0$ soit $J(\Gamma^0) = 0$. Nous avons à montrer (voir H IV 9.1) que $\Gamma^p \sim 0$. Soit T l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$. Pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_n$, $t \in T$, soit $f(x, 1 - t) = (tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$. Alors f est une fonction continue dans le domaine $T_n \times T$ telle que: 1° $f(T_n \times T) = T_n$; 2° $f(x, 0) = x$ pour tout $x \in T_n$; 3° $f(T_n \times (1)) = (c)$ où $c = (0, 0, \ldots, 0) \in T_n$. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau arbitraire dans T_n. D'après III 8, il existe un raffinement $\mathfrak{B}$ du réseau $\mathfrak{U}$ et un $(p, \mathfrak{U})$-cycle absolu $\Delta^p(\mathfrak{U})$ dans (c) tels que $\pi\, \Gamma^p(\mathfrak{B}) \sim \Delta^p(\mathfrak{U})$ où $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Comme $\Delta^p(\mathfrak{U}) \subset (c)$ et $J[\Delta^0(\mathfrak{U})] = J(\Gamma^0) = 0$ pour $p = 0$, nous avons évidemment $\Delta^p(\mathfrak{U}) = 0$. Donc $\pi\, \Gamma^p(\mathfrak{B}) = 0$. Or $\pi\, \Gamma^p(\mathfrak{B}) \sim \Gamma^p(\mathfrak{U})$. Donc $\Gamma^p(\mathfrak{U}) \sim 0$.

10. *Soit* $n = 1, 2, 3, \ldots$; $p = 0, 1, 2, \ldots$ *Pour* $p \neq 0$, $p \neq n$ *on a* $B^p(S_n) = 0$. *Pour* $p = 0$ *ou* $p = n$ *on a* $B^p(S_n) = 1$.

Démonstration. I. D'après 9 et H IV 8 T_n est connexe. Donc d'après 6 et M 12 S_n est connexe de sorte que d'après H IV 8 $B^0(S_n) = 1$.

II. Pour $p \geqq 2$ on a $B^p(S_1) = 0$ d'après 8 et V 1.

III. D'après 6, 9 et H IV 8 et 9.1 nous avons $S_1 = T_1' + T_1''$ où les ensembles T_1' et T_1'' sont fermés dans S_1 et $B_0^0(T_1') = B_0^0(T_1'') = 0$, $B_0^0(T'T'') = 1$. Il existe donc un $(0, S_1)$-cycle absolu Γ^0 dans $T_1'T_1''$ qui n'est pas ~ 0 dans $T_1'T_1''$, mais qui est ~ 0 et dans T_1' et dans T_1''. D'après II 4 où nous remplaçons R, A, B, S, p, m respectivement par S_1, T_1', T_1'', $\emptyset$, 0, 1, il existe un $(1, S_1)$-cycle absolu C^1 qui n'est pas ~ 0. Donc $B^1(S_1) \geqq 1$. Si l'on avait $B^1(S_1) \geqq 2$, il existerait, d'après 6 et 9, un $(1, S_1)$-cycle absolu D^1 tel que pour tous deux $(1, S_1)$-cycles absolus H_1^1 et H_2^1 dans T_1' et T_1'' respectivement, l'homologie $rC^1 + sD^1 \sim H_1^1 - H_2^1$ entraînerait $r = s = 0$. Donc, d'après II 3 avec S_1, T_1', T_1'', $\emptyset$, 0, 2 pris à la place de R, A, B, S, p, m il existerait des $(0, S_1)$-cycles absolus Γ_1^0 et Γ_2^0 tels que: 1° $\Gamma_1^0 \sim \Gamma_2^0 \sim 0$ dans T_1'; 2° $r_1\Gamma_1^0 + r_2\Gamma_2^0 \sim 0$ dans $T_1'T_1''$ implique $r_1 = r_2 = 0$. D'après H II 11 on aurait alors $J(\Gamma_1^0) = J(\Gamma_2^0) = 0$, donc $B_0^0(T_1'T_1'') = 0$, ce qui est une contradiction. Donc $B^1(S_1) = 1$.

IV. Il nous reste à démontrer que pour $p \geqq 1$ on a $B^p(S_n) = 0$ pour $p \neq n$ et que $B^n(S_n) = 1$. Pour $n = 1$ c'est déjà démontré en II et III. Supposons donc que nous l'ayons démontré pour S_{n-1}.

V. Soit d'abord $p \geqq 1$, $p \neq n$, $n \geqq 2$ de sorte que $B^{p-1}(S_{n-1}) = 0$ pour $p \geqq 2$ et $B_0^0(S_{n-1}) = 0$. Supposons que $B^p(S_n) > 0$. D'après 6 et 9 nous avons $S_n = T_n' + T_n''$ où T_n' et T_n'' sont fermés dans S_n et $B^p(T_n') = B^p(T_n'') = 0$, $B^{p-1}(T_n'T_n'') = 0$ pour $p \geqq 2$, $B_0^0(T_n'T_n'') = 0$. Comme $B^p(S_n) > 0$, il existe un (p, S_n)-cycle absolu C^p tel que pour tous deux (p, S_n)-cycles absolus H_1^p et H_2^p dans T_n' et T_n'' respectivement, l'homologie $rC^p \sim H_1^p - H_2^p$ implique $r = 0$. D'après IV 3 où nous remplaçons R, A, B, S, p, m respectivement par S_n, T_n', T_n'', $\emptyset$, $p - 1$, 1, il existe un $(p - 1, S_n)$-cycle absolu Γ^{p-1} qui est homologue à zéro dans T_n' mais ne l'est pas dans $T_n'T_n''$.

Donc $B^{p-1}(T_n'T_n'') \geqq 1$ et pour $p = 1$ aussi (cf. H II 11) $B_0^0(T_n'T_n'') \geqq 1$ ce qui est une contradiction.

VI. Soit enfin $p = n \geqq 2$, de sorte que $B^{n-1}(S_{n-1}) = 1$. Si l'on avait $B^n(S_n) \neq 1$, on aurait ou bien $B^n(S_n) = 0$, ou bien $B^n(S_n) \geqq 2$. Supposons d'abord $B^n(S_n) \geqq 2$. D'après 6 et 9, nous avons $S_n = T_n' + T_n''$, où les ensembles T_n' et T_n'' sont fermés dans S_n et $B^n(T_n') = B^n(T_n'') = 0$, $B^{n-1}(T_n'T_n'') = 1$. Comme $B^n(S_n) \geqq 2$, il existe des (n, S_n)-cycles absolus C_1^n, C_2^n tels que chaque fois que nous avons deux (n, S_n)-cycles absolus H_1^n et H_2^n dans T_n' et T_n'' respectivement, l'homologie $r_1C_1^n + r_2C_2^n \sim H_1^n - H_2^n$ implique $r_1 = r_2 = 0$. D'après IV 3 où nous remplaçons R, A, B, S, p, m respectivement par S_n, T_n', T_n'', $\emptyset$, $n-1$, 2, il existe des $(n-1, S_n)$-cycles absolus Γ_1^{n-1}, Γ_2^{n-1} dans $T_n'T_n''$ tels que l'homologie $r_1\Gamma_1^{n-1} + r_2\Gamma_2^{n-1} \sim 0$ dans $T_n'T_n''$ implique $r_1 = r_2 = 0$. Donc $B^{n-1}(T_n'T_n'') \geqq 2$, ce qui est une contradiction.

Il reste à démontrer que $B^n(S_n) > 0$. Comme $B^{n-1}(T_n'T_n'') = 1$, tandis que $B^{n-1}(T_n') = B^{n-1}(T_n'') = 0$, il existe un $(n-1, S_n)$-cycle absolu Γ^{n-1} dans $T_n'T_n''$ qui est homologue à zéro et dans T_n' et dans T_n'' mais qui ne l'est pas dans $T_n'T_n''$. D'après IV 4 où nous remplaçons R, A, B, S, p, m respectivement par S_n, T_n', T_n'', $\emptyset$, $n-1$, 1, il existe un (n, S_n)-cycle absolu C^n qui n'est pas homologue à zéro. Donc $B^n(S_n) > 0$.

11. *Soit A un ensemble fermé dans S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $A \neq S_n$. Alors $B^n(A) = 0$.*

Démonstration. Il découle aisément de 4 qu'il existe dans S_n un ensemble fermé $B \supset A$, homéomorphe à T_n. D'après 9 on a $B^n(B) = 0$. Soit Γ^n un (n, S_n)-cycle absolu dans A. Nous avons à démontrer que $\Gamma^n \sim 0$ dans A. Comme $A \subset B$, nous avons $\Gamma^n \sim 0$ dans B. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau arbitraire dans S_n. D'après 8, il existe un réseau $\mathfrak{B}$ d'ordre $\leqq n$ qui est un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$; soit $\pi = \text{Pr.}(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$, de sorte que $\Gamma^n(\mathfrak{U}) \sim \pi\, \Gamma^n(\mathfrak{B})$ dans B. Comme $\Gamma^n \sim 0$ dans B, il existe une $(n+1, \mathfrak{B})$-chaîne $E^{n+1}(\mathfrak{B})$ telle que $F\, E^{n+1}(\mathfrak{B}) = \Gamma^n(\mathfrak{B})$. L'ordre du réseau $\mathfrak{B}$ étant $\leqq n$, nous avons $E^{n+1}(\mathfrak{B}) = 0$. Donc $\Gamma^n(\mathfrak{B}) = 0$, d'où $\Gamma^n(\mathfrak{U}) \sim 0$ dans B.

12. *Soit $n = 1, 2, 3, \ldots$. Soit Γ^n un (n, S_n)-cycle absolu qui n'est pas homologue à zéro. Soit $A \neq S_n$ un ensemble fermé dans S_n. Alors on n'a pas $\Gamma^n \sim 0 \bmod A$.*

Démonstration. Soit au contraire $\Gamma^n \sim 0 \bmod A$. Alors pour tout réseau $\mathfrak{U}$ il existe un $(n, \mathfrak{U})$-cycle absolu $D^n(\mathfrak{U}) \subset A$ tel que $\Gamma^n(\mathfrak{U}) \sim D^n(\mathfrak{U})$. Soit $\Phi(\mathfrak{U})$ l'ensemble de tous ces $D^n(\mathfrak{U})$. Il est évident que $\Phi(\mathfrak{U})$ est un système linéaire (voir H I 26) par rapport au module de tous les $(n, \mathfrak{U})$-cycles absolus dans A. De plus, si $\mathfrak{B}$ est un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$, $\pi = \text{Pr.}(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$ et que $D^n(\mathfrak{B}) \in \Phi(\mathfrak{B})$, alors évidemment $\pi\, D^n(\mathfrak{B}) \in \Phi(\mathfrak{U})$. D'après H IV 5 il existe donc un (n, S_n)-cycle absolu C^n dans A tel que pour tout réseau $\mathfrak{U}$ on a $D^n(\mathfrak{U}) \sim C^n(\mathfrak{U})$ dans A, d'où $\Gamma^n \sim C^n$. D'après 11 nous avons donc $C^n \sim 0$ dans A. Donc $\Gamma^n \sim 0$, ce qui est une contradiction.

13. *Soit A un ensemble fermé dans S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; soit $\emptyset \neq A \neq S_n$. Si $n \geqq 2$ et $B^{n-1}(A) < \infty$, alors $B^n(S_n, A) = B^{n-1}(A) + 1$. Si $n = 1$ ou bien $B^{n-1}(A) = \infty$, alors $B^n(S_n, A) = B^{n-1}(A)$.*

Nous ferons la démonstration pour le cas de $n \geqq 2$ seulement, en laissant au Lecteur la tâche de faire les modifications nécessaires dans le cas de $n = 1$. Soit (voir 10) C_0^n un (n, S_n)-cycle absolu qui ne soit pas homologue à zéro.

I. Soient Γ_i^{n-1} $(1 \leqq i \leqq m;\ m = 0, 1, 2, \ldots)$ des $(n-1, S_n)$-cycles absolus dans A tels que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^{n-1} \sim 0$ dans A implique $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Comme au début de la démonstration du théorème IV 4 nous voyons qu'il existe un réseau $\mathfrak{U}$ tel que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i\ \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{U}) \sim 0$ dans A implique $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Il est évidemment possible de choisir $\mathfrak{U}$ d'une telle manière que $C_0^n(\mathfrak{U})$ ne soit pas homologue à zéro. Soit $\mathfrak{B}$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$, normal par rapport aux n-cycles mod A; soit $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. D'après 10 on a $\Gamma_i^{n-1} \sim 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$, de sorte qu'il existe des $(n, \mathfrak{B})$-cycles $D_i^n(\mathfrak{B})$ mod A tels que $D_i^n(\mathfrak{B}) \to \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{B})$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Alors $\pi\ D_i^n(\mathfrak{B})$ $(1 \leqq i \leqq m)$ sont des $(n, \mathfrak{U})$-cycles essentiels mod A, de sorte que (cf. H IV 6.1) il existe des (n, S_n)-cycles C_i^n mod A $(1 \leqq i \leqq m)$ tels que $C_i^n(\mathfrak{U}) = \pi\ D_i^n(\mathfrak{B})$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Soit $\sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n \sim 0$ mod A. Alors $\sum_{i=0}^{m} r_i\ C_i^n(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod A, c'est-à-dire $r_0\ C_0^n(\mathfrak{U}) + \pi \sum_{i=1}^{m} r_i\ D_i^n(\mathfrak{B}) \sim 0$ mod A; il existe donc une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $E^n(\mathfrak{U}) \subset A$ telle que $r_0\ C_0^n(\mathfrak{U}) + \pi \sum_{i=1}^{m} r_i\ D_i^n(\mathfrak{U}) - E^n(\mathfrak{U}) \to 0$, donc $F\,E^n(\mathfrak{U}) = \pi \sum_{i=1}^{m} r_i\ \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{B})$, donc $\pi \sum_{i=1}^{m} r_i\ \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{B}) \sim 0$ dans A. Mais $\pi\ \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{B}) \sim \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans A, donc $\sum_{i=1}^{m} r_i\ \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{U}) \sim 0$ dans A, d'où $r_1 = \ldots = r_m = 0$, donc $r_0\ C_0^n(\mathfrak{U}) \sim 0$, d'où $r_0 = 0$. L'homologie $\sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n \sim 0$ mod A entraîne donc $r_0 = r_1 = \ldots = r_m = 0$. Nous avons donc $B^n(S_n, A) \geqq m + 1$. Donc $B^n(S_n, A) \geqq B^{n-1}(A) + 1$ (avec $\infty + 1 = \infty$).

II. Soient C_i^n $(1 \leqq i \leqq m;\ m = 0, 1, 2, \ldots)$ des (n, S_n)-cycles mod A tels que l'homologie $\sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n \sim 0$ mod A implique $r_0 = r_1 = \ldots = r_m = 0$. (D'après 12 on n'a pas $C_0^n \sim 0$ mod A.) Soit $\mathfrak{U}_0$ un réseau tel que l'homologie $\sum_{i=0}^{m} r_i\ C_i^n(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod A implique $r_0 = r_1 = \ldots = r_m = 0$. Soit $\mathfrak{U}_1$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_0$, normal par rapport aux n-cycles absolus. Soit $\mathfrak{U}_2$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_1$ normal par rapport aux $(n-1)$-cycles absolus dans A. Soit $\pi_{10} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_0)$, $\pi_{21} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{20} = \pi_{10}\pi_{21}$. Soit $\Delta_i^{n-1}(\mathfrak{U}_2) = F\ C_i^n(\mathfrak{U}_2)$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Alors $\pi_{21}\ \Delta_i^{n-1}(\mathfrak{U}_2)$ sont des $(n-1, \mathfrak{U}_2)$-cycles absolus essentiels dans A, et d'après H IV 6.1 il existe donc des $(n-1, S_n)$-cycles absolus Γ_i^{n-1} dans A $(1 \leqq i \leqq m)$ tels que $\Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{U}_1) = \pi_{21}\ \Delta_i^{n-1}(\mathfrak{U}_2)$. Soit $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^{n-1} \sim 0$ dans A. Alors $\pi_{21} \sum_{i=1}^{m} r_i \,.\, F C_i(\mathfrak{U}_2) \sim 0$ dans A, donc il existe une $(n, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $D^n(\mathfrak{U}_1) \subset A$ telle que $D^n(\mathfrak{U}_1) -$

$- \pi_{21} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^n(\mathfrak{U}_2) \to 0$. Alors $\pi_{10}\, D^n(\mathfrak{U}_1) - \pi_{20} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^n(\mathfrak{U}_2)$ est un $(n, \mathfrak{U}_0)$-cycle absolu essentiel d'où il résulte qu'il existe un (n, S_n)-cycle absolu E^n tel que $E^n(\mathfrak{U}_0) = \pi_{10}\, D^n(\mathfrak{U}_1) - \pi_{20} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^n(\mathfrak{U}_2)$. D'après 10 nous avons $E^n \sim r_0 C_0^n$ donc $E^n(\mathfrak{U}_0) \sim r_0\, C_0^n(\mathfrak{U}_0) \sim r_0 \pi_{20}\, C_0^n(\mathfrak{U}_2)$, de sorte que $\pi_{20} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^n(\mathfrak{U}_2) - \pi_{10}\, D^n(\mathfrak{U}_1) \sim 0$. Comme $D^n(\mathfrak{U}_1) \subset A$, on a $\pi_{20} \sum_{i=0}^{m} r_i\, C_i^n(\mathfrak{U}_2) \sim 0 \bmod A$, donc $\sum_{i=0}^{m} r_i\, C_i^n(\mathfrak{U}_0) \sim 0 \bmod A$, donc $r_0 = r_1 = \ldots = r_m = 0$. Nous voyons donc que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^{n-1} \sim 0$ dans A entraîne $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Donc $B^{n-1}(A) \geqq m$. Il en résulte que $B^{n-1}(A) + 1 \geqq B^n(S_n, A)$.

14. *On a* $\dim R_n = \dim S_n = \dim T_n = n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Démonstration. Dans le cas contraire on aurait $\dim S_n \leqq n - 1$ d'après 8, d'où en vertu de V 1 aussi $B^n(S_n) = 0$, ce qui est en contradiction avec 10.

15. *Soit* $n = 1, 2, 3, \ldots$; $p = 1, 2, 3, \ldots$. *Soit* $a \in S_n$. *Alors pour* $p \neq n$ *on a* $\beta_p(a, S_n) = 0$, *tandis que* $\beta_n(a, S_n) = 1$.

Démonstration. Il découle facilement de 4 (cf. H IV 10 (1)) qu'il suffit de démontrer que pour $a \in R_n$ on a $\beta_p(a, R_n) = 0$ (si $p \neq n$) et $\beta_n(a, R_n) = 1$ (si $p = n$).

Soient U et V deux voisinages du point a (dans l'espace R_n) tels que $V \subset U$, U étant borné. D'après D 6 et 8 il existe un nombre $\delta > 0$ tel que l'ensemble W des $x \in R_n$ tels que $\varrho(a, x) < \delta$ est un voisinage du point a et que $\overline{W} \subset V$. Il suffit de montrer que l'on a $\beta_p(W, U; R_n) = \delta_{pn}$, δ_{ik} étant le symbole de Kronecker ($\delta_{ik} = 0$ si $i \neq k$, $\delta_{kk} = 1$).

Il est aisé de montrer que l'ensemble $\overline{W}$ est homéomorphe à T_n et que l'ensemble $\overline{W} - W$ 1° se compose de deux points si $n = 1$; 2° est homéomorphe à S_{n-1} si $n \geqq 2$.

Soit $m = 1, 2, 3, \ldots$. Soient C_i^p $(1 \leqq i \leqq m)$ de (p, R_n)-cycles mod $(R_n - U)$ tels que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p \sim 0 \bmod (R_n - W)$ implique $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Soit H_1^p un (p, R_n)-cycle absolu dans $\overline{W}$; soit H_2^p un (p, R_n)-cycle mod $(R_n - U)$ dans $(R_n - W)$. Soit $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p \sim H_1^p - H_2^p \bmod (R_n - U)$. Nous avons $H_2^p \subset R_n - W$; H_1^p est un (p, R_n)-cycle absolu dans $\overline{W}$; comme $p \geqq 1$, nous avons $B^p(\overline{W}) = 0$ en vertu de 9, donc $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p \sim 0 \bmod (R_n - W)$, d'où $r_1 = \ldots = r_m = 0$. D'après IV 3, où nous remplaçons R, A, B, S, p respectivement par R_n, $\overline{W}$, $R_n - W$, $R_n - U$, $p - 1$, il existe des $(p - 1, R_n)$-cycles absolus Γ_i^{p-1} $(1 \leqq i \leqq m)$ dans $\overline{W} - W$, tels que 1° $\Gamma_i^{p-1} \sim 0$ dans $\overline{W}$ pour $1 \leqq i \leqq m$; 2° $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^{p-1} \sim 0$ dans $\overline{W} - W$ entraîne $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Si $p = 1$, alors $J(\Gamma_i^0) = 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$ d'après H II 11. Donc

$m \leqq B^{p-1}(\overline{W} - W)$ et pour $p = 1$ nous avons même (cf. H IV 9.1) $m \leqq B_0^0(\overline{W} - W)$. Or d'après 10 nous avons pour $n \geqq 2$ $B_0^0(\overline{W} - W) = 0$ et (pour $p \geqq 2$) $B^{p-1}(\overline{W} - W) = \delta_{pn}$; pour $n = 1$ on a évidemment $B_0^0(\overline{W} - W) = 1$ et (pour $p \geqq 2$) $B^{p-1}(\overline{W} - W) = 0$. Donc $m \leqq \delta_{pn}$. Il en résulte aisément que nous avons $\beta_p(W, U; R_n) \leqq \delta_{pn}$. Si $p \neq n$, nous avons $\delta_{pn} = 0$, donc $\beta_p(W, U; R_n) = 0$.

Il nous reste donc à montrer que $\beta_n(W, U; R_n) \geqq 1$. D'après 9 et 10, il existe pour $n \geqq 2$ un $(n-1, R_n)$-cycle absolu Γ^{n-1} dans $\overline{W} - W$, homologue à zéro dans $\overline{W}$ mais non pas dans $\overline{W} - W$. Il en est de même pour $n = 1$. Soit $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Soit T l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$. Comme U est borné, il existe un nombre r positif tel que $x \in R_n$, $\varrho(a, x) \geqq r$, entraîne $x \in R_n - U$. Pour $x \in \overline{W} - W$, $t \in T$ soit

$$f(x, t) = \left[a_1 + \frac{tr + (1-t)\delta}{\delta}(x_1 - a_1), \ldots, a_n + \frac{tr + (1-t)\delta}{\delta}(x_n - a_n)\right].$$

Alors f est une fonction continue dans le domaine $(\overline{W} - W) \times T$ et telle que 1° $f[(\overline{W} - W) \times T] \subset R_n$; 2° $f(x, 0) = x$ pour tout $x \in \overline{W} - W$; 3° $f[(\overline{W} - W) \times (1)] \subset R_n - U$. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau arbitraire dans R_n. D'après III 8 il existe un raffinement $\mathfrak{B}$ du réseau $\mathfrak{U}$ et un $(n-1, \mathfrak{B})$-cycle absolu $\Delta^{n-1}(\mathfrak{B}) \subset R_n - U$ tels que $\pi\, \Gamma^{n-1}(\mathfrak{B}) \sim \Delta^{n-1}(\mathfrak{B})$ où $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Comme $\pi\, \Gamma^{n-1}(\mathfrak{B}) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans $\overline{W} - W \subset R_n - W$, $\Delta^{n-1}(\mathfrak{B}) \subset R_n - U$, nous avons $\Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod (R_n - U)$ dans $R_n - W$. D'après IV 4 où nous remplaçons R, A, B, S, p, m respectivement par $R_n, \overline{W}, R_n - W, R_n - U, n-1, m$, il existe un (n, R_n)-cycle $C^n \bmod (R_n - U)$ tel que: si K^n est un (n, R_n)-cycle $\bmod (R_n - U)$ dans $(R_n - W)$, on ne peut avoir $C^n \sim K^n \bmod (R_n - U)$.

Il suffit de montrer que C^n n'est pas $\sim 0 \bmod (R_n - W)$. Supposons le contraire. Pour tout réseau $\mathfrak{U}$ dans R_n, il existe une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $H^n(\mathfrak{U})$ dans $R_n - W$ telle que $C^n(\mathfrak{U}) \sim H^n(\mathfrak{U}) \bmod (R_n - U)$. Soit $\Phi(\mathfrak{U})$ le système de toutes ces chaînes $H^n(\mathfrak{U})$. Évidemment, pour tout $\mathfrak{U}$ $\Phi(\mathfrak{U})$ est un système linéaire (voir H I 26) par rapport au module de tous les $(n, \mathfrak{U})$-cycles $\bmod (R_n - U)$ dans $R_n - W$. Si $\mathfrak{B}$ est un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$ et que $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$, $H^n(\mathfrak{B}) \in \Phi(\mathfrak{B})$, alors évidemment $\pi\, H^n(\mathfrak{B}) \in \Phi(\mathfrak{U})$. Donc d'après H IV 5 il existe un (n, R_n)-cycle $K^n \bmod (R_n - U)$ dans $R_n - W$ tel que dans tout réseau $\mathfrak{U}$ on a $K^n(\mathfrak{U}) \sim H^n(\mathfrak{U}) \bmod (R_n - U)$. Mais alors on a $C^n \sim K^n \bmod (R_n - U)$, ce qui est une contradiction.

16. Si $a \in A \subset S_n$, nous disons que le point a est un *point intérieur* de l'ensemble A (par rapport à l'espace S_n), lorsqu'il existe un voisinage U du point a tel que $U \subset A$. Il est aisé de voir que a est un point intérieur de l'ensemble A si et seulement si $a \in S_n - \overline{S_n - A}$.

16.1. *Soit A un ensemble fermé dans S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Soit $a \in A$. Alors $\beta_n(a, A) = 1$ ou $\beta_n(a, A) = 0$ suivant que le point a est un point intérieur de l'ensemble A ou non.*

Démonstration. I. Soit a un point intérieur de l'ensemble A. D'après 12 et H IV 10 (1) nous avons alors $\beta_n(a, A) = \beta_n(a, S_n) = 1$.

II. Soit $a \in A \,.\, \overline{S_n - A}$. Soit U un voisinage (dans l'espace S_n) du point a. Nous avons à démontrer que $\beta_n(a, U; A, S_n) = 0$, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage $W \subset U$ du point a, tel que $\beta_n(W, U; A, S_n) = 0$. Comme $\beta_n(a, S_n) = 1$ (voir 15), nous avons $\beta_n(a, U; S_n) \leqq 1$. Alors il existe un voisinage $W \subset U$ du point a tel que $\beta_n(W, U; S_n) \leqq 1$. Comme $a \in \overline{S_n - A}$, nous avons $W - A \neq \emptyset$. Soit C^n un (n, S_n)-cycle mod $(A - W)$ dans A. Nous avons à montrer que $C^n \sim 0 \bmod (A - W)$ dans A. D'après 10, il existe un (n, S_n)-cycle absolu Γ^n qui n'est pas ~ 0. D'après 12 on n'a donc pas $\Gamma^n \sim 0 \bmod (S_n - W)$. Comme C^n et Γ^n sont deux (n, S_n)-cycles mod $(S_n - W)$ et $\beta_n(W, U, S_n) \leqq 1$, mais que Γ^n n'est pas $\sim 0 \bmod (S_n - W)$, il existe un nombre $r \in \mathfrak{R}$ tel que $C^n \sim r\Gamma^n \bmod (S_n - W)$. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau tel que $\Gamma^n(\mathfrak{U})$ ne soit pas $\sim 0 \bmod (S_n - W)$. Soit $\mathfrak{B}$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}$, normal par rapport aux n-cycles absolus dans $A + (S_n - W)$; soit $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Comme $C^n \sim r\Gamma^n \bmod (S_n - W)$ il existe une $(n, \mathfrak{B})$-chaîne $D^n(\mathfrak{B}) \subset S_n - W$ telle que l'on a $C^n(\mathfrak{B}) - r\Gamma^n(\mathfrak{B}) - D^n(\mathfrak{B}) \to 0$, donc $C^n(\mathfrak{B}) - D^n(\mathfrak{B}) \to 0$. Nous voyons donc que $\pi[C^n(\mathfrak{B}) - D^n(\mathfrak{B})]$ est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle essentiel dans $A + (S_n - W)$ et d'après 11 nous avons $\pi[C^n(\mathfrak{B}) - D^n(\mathfrak{B})] \sim 0$, car $A + (S_n - W) \neq S_n$ puisque $W - A \neq \emptyset$. Comme $\pi\, C^n(\mathfrak{B}) \sim C^n(\mathfrak{U}) \sim r\, \Gamma^n(\mathfrak{U}) \bmod (S_n - W)$ et $D^n(\mathfrak{B}) \subset S_n - W$, nous avons $r\, \Gamma^n(\mathfrak{U}) \sim 0$, donc $r = 0$, d'où $C^n \sim 0 \bmod (S_n - W)$.

Soit $\mathfrak{U}_0$ un réseau arbitraire. Déterminons, suivant IV 2, un raffinement $\mathfrak{U}_1$ du réseau $\mathfrak{U}_0$ et une projection $\pi_{10} = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_0)$ en posant $\varphi = A$, $\psi = S^n - W$. D'après 8 il existe un réseau $\mathfrak{U}_2$ d'ordre $\leqq n$, raffinement du réseau $\mathfrak{U}_1$. Soit $\pi_{21} = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_2 . \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{20} = \pi_{10}\pi_{21}$. Comme $C^n(\mathfrak{U}_2) \sim 0 \bmod (S_n - W)$ et que $\mathfrak{U}_2$ est d'ordre $\leqq n$, nous avons $C^n(\mathfrak{U}_2) \subset S_n - W$. Mais $C^n(\mathfrak{U}_2) \subset A$. Donc $\pi_{21}\, C^n(\mathfrak{U}_2)$ est situé dans A et dans $S_n - W$, donc $\pi_{20}\, C^n(\mathfrak{U}_2) \subset A - W$. Mais $C^n(\mathfrak{U}_0) \sim \pi_{20}\, C^n(\mathfrak{U}_2) \bmod (A - W)$ dans A. Donc $C^n(\mathfrak{U}_0) \sim 0 \bmod (A - W)$ dans A. Donc $C^n \sim 0 \bmod (A - W)$ dans A.

17. *Soit $A \subset S_n$, $B \subset S_n$.*[5] *Soit f une application homéomorphe de l'ensemble A sur l'ensemble B. Soit a un point intérieur de l'ensemble A, $b = f(a)$. Alors b est un point intérieur de l'ensemble B.*

Démonstration. Si l'ensemble A (donc aussi B) est compact, il résulte de 16 (cf. aussi II 2) que a est un point intérieur de l'ensemble A si et seulement si $\beta_n(a, A) = 1$. Or nous avons évidemment $\beta_n(a, A) = \beta_n(b, B)$. Si l'ensemble A est arbitraire et que a soit un point intérieur de l'ensemble A, il existe un ensemble compact $C \subset A$ tel que a soit un point intérieur de C, alors b est un point intérieur de l'ensemble $f(C) \subset B$, donc aussi de l'ensemble B.

18. *Soit $a \in S_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Soit $p = 0, 1, 2, \ldots$. Alors $\gamma_p(a, S_n) = 0$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer (voir 4 et H IV 14 (1)) que pour $a \in R_n$ on a $\gamma_p(a, R_n) = 0$. Soient U et V deux voisinages du point a tels que $V \subset U$. Il existe évidemment un voisinage $W \subset V$ du point a, tel que $\overline{W}$ soit homéomorphe à T_n. Il

[5] Le théorème 17 reste évidemment vrai, même si nous y remplaçons l'espace S_n par l'espace R_n.

suffit donc de démontrer que $\gamma_p(W, U; R_n) = 0$. Soit C^p un (p, S_n)-cycle absolu dans $\overline{W}$; si $p = 0$, soit $J(C^0) = 0$. Nous avons à montrer que $C^p \sim 0$ dans $\overline{U}$; or d'après 9 on a même $C^p \sim 0$ dans $\overline{W}$.

19. *Soit A un ensemble fermé dans S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; soit $a \in A$. Alors $\gamma_p(a, A) = 0$.*

Démonstration. Soit U un voisinage du point a (dans l'espace S_n). D'après 18 nous avons $\gamma_n(a, U; S_n) = 0$, il existe donc un voisinage $V \subset U$ du point a tel que $\gamma_n(V, U; S_n) = 0$. Il suffit de montrer que $\gamma_n(V, U; A, S_n) = 0$. Soit C^n un (n, S_n)-cycle absolu dans $\overline{AV}$. Nous avons à montrer que $C^n \sim 0$ dans $\overline{AU}$. Comme $\gamma_n(V, U; A, S_n) = 0$, nous avons $C^n \sim 0$ dans $\overline{U}$. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau arbitraire. D'après 8, il existe un réseau $\mathfrak{B}$ d'ordre $\leqq n$ qui est raffinement du réseau $\mathfrak{U}$; soit $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Comme $C^n \sim 0$ dans $\overline{U}$, il existe une $(n + 1, \mathfrak{B})$-chaîne $D^{n+1}(\mathfrak{B}) \to C^n(\mathfrak{B})$. Comme $\mathfrak{B}$ est d'ordre $\leqq n$, nous avons $D^{n+1}(\mathfrak{B}) = 0$, donc $C^n(\mathfrak{B}) = 0$. Or $\pi\, C^n(\mathfrak{B}) \sim C^n(\mathfrak{U})$ dans $\overline{AV}$, donc $C^n(\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $\overline{AV} \subset \overline{AU}$.

VII. Décomposition de l'espace S_n par un ensemble fermé

1. *Soient A et B deux ensembles fermés dans S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Soit G un ensemble ouvert dans S_n; soit $\emptyset \neq G \subset S_n - A$. Soit $\overline{G} - G \subset A$, et soit $G - B \neq \emptyset$. Il existe alors un (n, S_n)-cycle* mod A *dans $(G + A)$ qui n'est pas homologue à zéro* mod $(A + B)$.

Démonstration. D'après VI 10 il existe un (n, S_n)-cycle absolu Γ^n qui n'est pas ~ 0. Comme $AG = \emptyset \neq G - B$, nous voyons que $A + B + (S_n - G) \neq S_n$. D'après VI 12 on n'a donc pas $\Gamma^n \sim 0 \bmod [A + B + (S_n - G)]$. Il existe donc un réseau $\mathfrak{U}_0$ tel que $\Gamma^n(\mathfrak{U}_0)$ n'est pas $\sim 0 \bmod [A + B - (S_n - G)]$. Soit $\mathfrak{U}_1$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_0$, normal par rapport aux n-cycles mod A dans $(G + A)$; soit $\pi_{10} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_0)$. Déterminons suivant IV 2 un raffinement $\mathfrak{U}_2$ du réseau $\mathfrak{U}_1$ et une projection $\pi_{21} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$ en posant $\varphi = G + A$, $\psi = S_n - G$. [$G + A$ est fermé dans S_n, puisque $\overline{G} - G \subset A$.] Soit $\pi_{20} = \pi_{10}\pi_{21}$. Comme $S_n = (G + A) + (S_n - G)$, nous pouvons poser $\Gamma^n(\mathfrak{U}_2) = C^n(\mathfrak{U}_2) - D_n(\mathfrak{U}_2)$, où $C^n(\mathfrak{U}_2) \subset G + A$, $D^n(\mathfrak{U}_2) \subset S_n - G$. Comme $F\,\Gamma^n(\mathfrak{U}_2) = \emptyset$, nous voyons que $F\,C^n(\mathfrak{U}_2)$ est situé et dans $G + A$, et dans $S_n - G$. Donc $F\,\pi_{21}\,C^n(\mathfrak{U}_2) \subset A$. $\pi_{20}\,C^n(\mathfrak{U}_2)$ est donc un $(n, \mathfrak{U}_0)$-cycle essentiel mod A dans $(G + A)$, de sorte que (cf. H IV 6.1) il existe un (n, S_n)-cycle E^n mod A dans $G + A$ tel que $E^n(\mathfrak{U}_0) = \pi_{20}\,C^n(\mathfrak{U}_2)$. Soit $E^n \sim 0 \bmod (A + B)$. Alors $\Gamma^n(\mathfrak{U}_0) \sim \pi_{20}\,\Gamma^n(\mathfrak{U}_2) \sim \pi_{20}[C^n(\mathfrak{U}_2) - D^n(\mathfrak{U}_2)] \sim E^n(\mathfrak{U}_0) - \pi_{20}\,D^n(\mathfrak{U}_2) \sim 0 \bmod [A + B + (S_n - G)]$, ce qui est contradictoire.

2. *Soit A un ensemble fermé dans S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Soit G un ensemble ouvert et connexe dans S_n; soit $\emptyset \neq G \subset S_n - A$. Soit $\overline{G} - G \subset A$. Alors $B^n(G + A, A) = 1$.*

Démonstration. D'après 1 où nous posons $B = \emptyset$, nous avons $B^n(G + A, A) \geqq \geqq 1$. Supposons que nous ayons $B^n(G + A, A) \geqq 2$. Il existe alors deux (n, S_n)-cycles $C_1^n + C_2^n \bmod A$ dans $(G + A)$ tels que $r_1 C_1^n + r_2 C_1^n \sim 0 \bmod A$ dans $(G + A)$ implique $r_1 = r_2 = 0$. Fixons un point $a \in G$; alors G sera un voisinage du point a. D'après VI 16.1 nous avons $\beta_n(a, G + A) = 1$, donc $\beta_n(a, G; G + A, S_n) \leqq 1$. Il existe donc un voisinage $U \subset G$ du point a tel que $\beta_n(U, G; G + A, S_n) \leqq 1$. Comme C_1^n et C_2^n sont deux (n, S_n)-cycles $\bmod A = (G + A) - G$ dans $(G + A)$, il existe deux nombres $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$ $(r_1 \neq 0$ ou $r_2 \neq 0)$ tels que $C^n = r_1 C_1^n + r_2 C_2^n \sim 0 \bmod (G + A - U)$ dans $(G + A)$. D'après V 4 il existe dans S_n un ensemble fermé T tel que 1° $A \subset T \subset G + A$; 2° il existe un (n, S_n)-cycle $E^n \bmod A$ dans T homologue à $C^n \bmod A$ dans $(G + A)$; tel que si T est un ensemble fermé dans S_n, $A \subset T' \subset T$, $T' \neq T$, alors C^n n'est pas homologue $\bmod A$ dans $(G + A)$ à aucun (n, S_n)-cycle $\bmod A$ dans T'. Si l'on avait $T = A$, on aurait $C^n \sim 0 \bmod A$ dans $(G + A)$; ce qui est contradictoire. Comme $C^n \sim 0 \bmod (G + A - U)$ dans $(G + A)$ il existe pour tout réseau $\mathfrak{U}$ un $(n, \mathfrak{U})$-cycle $D^n(\mathfrak{U}) \bmod A$ dans $(G + A - U)$ tel que $C^n(\mathfrak{U}) \sim \sim D^n(\mathfrak{U}) \bmod A$ dans $G + A$. D'après H IV 5 nous trouvons aisément que les chaînes $D^n(\mathfrak{U})$ peuvent être choisies d'une telle manière qu'elles définissent un (n, S_n)-cycle $D^n \bmod A$ dans $G + A - U$. Comme $C^n \sim D^n \bmod A$ dans $G + A$, nous avons $T \neq G + A$.

Nous avons donc $G = TG + (G - T)$, les deux sommandes étant non vides. Comme G et connexe et TG fermé dans G, nous voyons que $G - T$ n'est pas fermé dans G, de sorte qu'il existe (voir M 6) un point $b \in GT . \overline{G - T} \subset T . \overline{S_n - T}$. D'après VI 16.1 nous avons $\beta_n(b, T) = 0$, donc $\beta_n(b, G; T, S_n) = 0$, de sorte qu'il existe un voisinage $V \subset G$ du point b tel que $\beta_n(V, G; T, S_n) = 0$. Comme E^n est un (n, S_n)-cycle $\bmod A \subset T - G$ dans T, nous avons $E^n \sim 0 \bmod (T - V)$ dans T. Pour tout réseau $\mathfrak{U}$ il existe donc un $(n, \mathfrak{U})$-cycle $H^n(\mathfrak{U}) \bmod A$ dans $(T - V)$ tel que $E^n(\mathfrak{U}) \sim H^n(\mathfrak{U}) \bmod A$ dans T. En vertu de H IV 5 nous pouvons choisir les chaînes $H^n(\mathfrak{U})$ de telle façon qu'elles définissent un (n, S_n)-cycle $H^n \bmod A$ dans T. Nous avons $E^n \sim H^n \bmod A$ dans T, $E^n \sim C^n \bmod A$ dans $(G + A)$, donc aussi $H^n \sim C^n \bmod A$ dans $(G + A)$. D'après la définition de l'ensemble T nous avons donc $T - V = T$, c'est-à-dire $TV \neq \emptyset$, ce qui est évidemment faux, car $b \in TV$.

3. *Soit A un ensemble fermé dans S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Soit $S_n - A = \sum_{i=1}^{m} P_i$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ aux termes séparés. Soit W un ensemble ouvert dans S_n, $WP_i \neq \emptyset$ pour $1 \leqq i \leqq m$. Alors il existe des (n, S_n)-cycles $C_i^n \bmod A$ $(1 \leqq i \leqq m)$ tels que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n \sim 0 \bmod [A + (S_n - W)]$ implique $r_1 = \ldots = r_m = 0$.*

Démonstration. Les ensembles P_i sont (cf. M 7) ouverts dans $S_n - A$, donc (cf. M 5) aussi dans S_n. Les ensembles P_i sont également fermés dans $S_n - A$, de sorte que (cf. M 6) $\bar{P}_i - P \subset A$. Donc d'après 1 (où nous posons $B = S_n - WP_i$) il existe pour $1 \leqq i \leqq m$ un (n, S_n)-cycle $C_i^n \bmod A$ dans $P_i + A$ qui n'est pas ~ 0

mod $[A + (S_n - WP_i)]$. Soit $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n \sim 0 \bmod [A + (S_n - W)]$ et soit p. ex. $r_1 \neq 0$. Comme pour $2 \leqq i \leqq m$ nous avons $C_i^n \subset P_i + A \subset S_n - WP_1$, nous avons $\sum_{i=2}^{m} r_i C_i^n \sim 0 \bmod [A + (S_n - WP_1)]$, $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n \sim 0 \bmod [A + (S_n - WP_1)]$, donc aussi $r_1 C_1^n \sim 0 \bmod [A + (S_n - WP_1)]$, d'où $r_1 = 0$, ce qui est contradictoire à notre supposition.

4. *Soit A un ensemble fermé dans S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Soit W un ensemble ouvert dans S_n. Soit $m = 1, 2, 3, \ldots$. Soient C_i^n $(1 \leqq i \leqq m)$ des (n, S_n)-cycles* mod A. *Supposons que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n \sim 0 \bmod [A + (S_n - W)]$ implique $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Alors il existe une décomposition $S_n - A = \sum_{i=1}^{m} P_i$ aux termes séparés, telle que $WP_i \neq \emptyset$ pour $1 \leqq i \leqq m$.*

Démonstration. D'après VI 18 et H IV 18.2, l'espace S_n est localement connexe. Donc, d'après H IV 18.3, les composantes de l'ensemble $S_n - A$ sont ouvertes dans S_n. Soit μ $(= 1, 2, 3, \ldots$, ou $= \infty)$ le nombre des composantes de l'ensemble $S_n - A$ qui intersectent W. Si $\mu \geqq m$, soient P_i $(1 \leqq i \leqq m - 1)$ des composantes, distinctes l'une de l'autre, de l'ensemble $S_n - A$ qui intersectent W et soit P_m la somme de toutes les autres composantes de $S_n - A$. Alors $S_n - A = \sum_{i=1}^{m} P_i$ aux termes ouverts et disjoints, donc séparés.

Soit donc $\mu < m$. Soient P_i $(1 \leqq i \leqq \mu)$ les composantes de l'ensemble $S_n - A$ qui intersectent W. Soit P_0 la somme des autres composantes de l'ensemble $S_n - A$. Alors $S_n - A = \sum_{i=0}^{\mu} P_i$ aux termes séparés et $WP_0 = \emptyset$, tandis que $WP_k \neq \emptyset$ pour $1 \leqq k \leqq \mu$. Les ensembles P_k sont (cf. M 7) fermés dans $S_n - A$, de sorte que $\bar{P}_k - P_k \subset A$ (cf. M 6) pour $0 \leqq k \leqq \mu$.

Tout comme au début de la démonstration du théorème IV 4 nous trouvons qu'il existe un réseau $\mathfrak{U}_0$ tel que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_2) \sim 0 \bmod [A + (S_n - W)]$ implique $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Soit (voir H III 9.4 et 10) $\mathfrak{U}_1$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_0$ normal par rapport aux n-cycles mod A dans $P_k + A$ simultanément pour tous les k, $0 \leqq \mu \leqq k$. Déterminons successivement, suivant IV 2, des raffinements $\mathfrak{U}_{k+2}$ des réseaux $\mathfrak{U}_{k+1}$ $(0 \leqq k \leqq \mu)$ en posant $\varphi = P_k + A$, $\psi = \sum_{\substack{h \neq k \\ h=0}}^{\mu} (P_k + A)$. Soit $\pi_{10} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_0)$, $\pi_{21} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, etc., $\pi_{20} = \pi_{10}\pi_{21}$, etc.

Pour $1 \leqq k \leqq \mu$, l'ensemble P_k est ouvert et connexe et l'on a $A\bar{P}_k = \bar{P}_k - P_k$. Donc, d'après 2, nous avons $B^n(P_k + A, A) = 1$. Donc, pour $1 \leqq k \leqq \mu$, il existe un (n, S_n)-cycle E_k^n mod A dans $P_k + A$ qui n'est pas ~ 0 mod A dans $P_k + A$. On a évidemment $S_n = \sum_{k=0}^{\mu} (P_k + A)$, les termes de cette somme étant fermés dans S_n. Donc pour $1 \leqq i \leqq m$ nous pouvons poser $C_i^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) = \sum_{k=0}^{\mu} C_{ik}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2})$, où $C_{ik}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) \subset \subset P_k + A$. On a $F\, C_{ik}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) \subset P_k + A$, $F\, C_i^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) \subset A$. Donc $F\, C_{ik}(\mathfrak{U}_{\mu+2}) \subset \subset \sum_{\substack{h=0 \\ h \neq k}}^{\mu} (P_h + A) = B_k$, de sorte que $\pi_{\mu+2,k+2} F\, C_{ik}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2})$ est situé et dans $P_k + A$ et dans B_k; il en résulte donc que $\pi_{\mu+2,k+1} F\, C_{ik}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) \subset (P_k + A)\, B_k = A$. Donc, $\pi_{\mu+2,1}\, C_{ik}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2})\, (1 \leqq i \leqq m, 0 \leqq k \leqq \mu)$ sont des $(n, \mathfrak{U}_1)$-cycles mod A dans $P_k + A$, de sorte qu'il existe d'après H IV 6 des (n, S_n)-cycles D_{ik}^n mod A dans $P_k + A$ $(1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq k \leqq \mu)$ tels que $D_{ik}^n(\mathfrak{U}_0) = \pi_{\mu+2,0}\, C_{ik}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2})$. Pour $1 \leqq k \leqq \mu$ nous avons $B^n(P_k + A, A) = 1$; il existe donc pour $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq k \leqq \mu$ des nombres $s_{ik} \in \mathfrak{R}$ tels que $\pi_{\mu+2,0}\, C_{ik}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) \sim s_{ik}\, E_k^n(\mathfrak{U}_0)$ mod A. Donc pour $r_1, r_2, \ldots, r_m \in \mathfrak{R}$ arbitraires nous avons

$$(1) \qquad \pi_{\mu+2,0} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) \sim \pi_{\mu+2,0} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_{i0}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) + \sum_{k=1}^{\mu} t_k\, E_k^n(\mathfrak{U}_0) \bmod A\,,$$

où

$$t_k = \sum_{i=1}^{m} r_i s_{ik} \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq \mu\,.$$

Comme $\mu < m$, nous pouvons choisir les nombres $r_1, \ldots, r_m$ de façon que nous ayons $t_1 = \ldots = t_\mu = 0$, mais non pas $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Comme $C_{i0}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) \subset P_0 + A \subset \subset A + (S_n - W)$, nous aurons d'après (1)

$$\sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^n(\mathfrak{U}_0) \sim \pi_{\mu+2,0} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) \sim 0 \bmod A + (S_n - W)\,,$$

ce qui est une contradiction.

5. *Soit A un ensemble fermé dans S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Soit $\emptyset \neq A \neq S_n$. Si $n \geqq 2$ et $B^{n-1}(A) < \infty$, alors l'ensemble $S_n - A$ a $B^{n-1}(A) + 1$ composantes. Si $n = 1$ ou $B^{n-1}(A) = \infty$, alors l'ensemble $S_n - A$ a $B^{n-1}(A)$ composantes.*

Démonstration. En vertu de IV 13 nous avons à démontrer que le nombre de composantes de l'ensemble $S_n - A$ est égal à $B^n(S_n, A)$. Soit $m = 1, 2, 3, \ldots$. Nous avons donc à montrer que le nombre de composantes de l'ensemble $S_n - A$ est $\geqq m$ si et seulement si $B^n(S_n, A) \geqq m$. Si $S_n - A$ a m composantes au moins, alors d'après M 18 et 19 $S_n - A = \sum_{i=1}^{m} P_i$ aux termes séparés non vides; d'après 3 (où nous posons $W = S_n$) nous avons $B^n(S_n, A) \geqq m$. Si $B^n(S_n, A) \geqq m$, alors d'après 4 (où nous posons $W = S_n$) nous avons $S_n - A = \sum_{i=1}^{m} P_i$ aux termes séparés, donc $S_n - A$ a m composantes au moins.

VIII. Décomposition locale de l'espace S_n par un ensemble fermé

1. Soit R un espace, A un ensemble fermé dans R. Soit $a \in A$. Soient U, V des voisinages du point a dans l'espace R. Si a est un point intérieur de l'ensemble A par rapport à R (voir VI 16), nous posons $\alpha(a, A, R) = 0$. Soit donc $a \in A . \overline{R - A}$.

L'ensemble U étant donné, soit $\alpha(a, U; A, R) = B_0^0(V - A)$, où $V \subset U$ est choisi de façon à rendre $B_0^0(V - A)$ minimal. Donc (voir H IV 8 et 9.1) s'il existe un ensemble $V \subset U$ tel que l'ensemble $V - A$ ait un nombre fini de composantes et si nous choisissons $V \subset U$ de telle manière que ce nombre soit le plus petit possible, le nombre $\alpha(a, U; A, R) + 1$ sera égal au nombre de composantes de l'ensemble $V - A$; si pour tout $V \subset U$ l'ensemble $V - A$ a un nombre infini de composantes, on a $\alpha(a, U; A, R) = \infty$.

Si $V \subset U$, on a évidemment $\alpha(a, V; A, R) \geqq \alpha(a, U; A, R)$. Il s'en ensuit que les trois cas suivants sont possibles:

I. Il existe un nombre m $(= 0, 1, 2, \ldots)$ et un voisinage U tels que $\alpha(a, V; A, R) = m$ pour tout voisinage $V \subset U$. Nous posons alors $\alpha(a, A, R) = m$ et disons que *A décompose R localement au point a en $m + 1$ parties.* Si $m = 0$, nous disons que *A ne décompose pas l'espace R localement au point a.*

II. Le nombre $\alpha(a, V; A, R)$ est fini pour tout voisinage V, mais pour tout nombre m $(= 0, 1, 2, \ldots)$ il existe un voisinage U tel que $\alpha(a, V; A, R) > m$ pour tout $V \subset U$. Nous posons alors $\alpha(a, A, R) = \omega$ et disons que *A décompose R localement au point a en un nombre croissant de parties.*

III. Il existe un voisinage U tel que $\alpha(a, V; A, R) = \infty$ pour tout $V \subset U$. Nous posons alors $\alpha(a, A, R) = \infty$ et disons que *A décompose R localement en a en un nombre infini de parties.*

Nous considérons le symbole ω, comme plus petit que ∞, mais plus grand que tout nombre $m = 0, 1, 2, \ldots$.

2. *Soit R un espace localement connexe. Soit A un ensemble fermé dans R. Soit $a \in A . \overline{R - A}$. Soit U un voisinage du point a. Soit $m = 0, 1, 2, \ldots$. Nous avons $\alpha(a, U; A, R) \geqq m$ si et seulement si à tout voisinage $V \subset U$ du point a on peut associer une décomposition $U - A = \sum_{i=0}^{m} P_i$ aux termes séparés telle que $VP_i \neq \emptyset$ pour $0 \leqq i \leqq m$.*

Démonstration. I. Soit $\alpha(a, U; A, R) \geqq m$. Soit $V \subset U$ un voisinage du point a. Soit μ le nombre de composantes de l'ensemble $U - A$ qui intersectent V. Si $\mu \leqq m$, soient K_k $(1 \leqq k \leqq \mu)$ toutes ces composantes et soit $W = \sum_{k=1}^{\mu} K_k$. Nous avons $V - A \subset W \subset U$; l'ensemble W est ouvert d'après H IV 18.3. On a donc $a \in V + W \subset U$, de sorte que l'ensemble $(V + W) - A$ a $(m + 1)$ composantes au moins. Or c'est une contradiction, car $(V + W) - A = W$ a $\mu \leqq m$ composantes. Donc $\mu \geqq m + 1$.

Soient $P_1, \ldots, P_m$ m composantes de l'ensemble $U - A$, distinctes et intersectant V; soit P_0 la somme des autres composantes de l'ensemble $U - A$. Alors $U - A = \sum_{i=0}^{m} P_i$ aux termes séparés (voir H IV 18.3) et $VP_i \neq \emptyset$ pour $0 \leqq i \leqq m$.

II. Supposons qu'à tout voisinage $V \subset U$ du point a on puisse associer une décomposition $U - A = \sum_{i=0}^{m} P_i$ aux termes séparés telle que $VP_i \neq \emptyset$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Alors chaque P_i contient (voir M 11) au moins une composante de l'ensemble $V - A$. Il en résulte que l'ensemble $V - A$ a $m + 1$ composantes au moins. Donc $\alpha(a, U; A, R) \geqq m$.

3. *Soit A un ensemble fermé dans S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; soit $a \in A$. Alors on a $\alpha(a, A, S_n) = \beta_{n-1}(a, A)$.*

Démonstration. Si a est un point intérieur de l'ensemble A, nous avons $\alpha(a, A; S_n) = 0$; mais alors en vertu de VI 10 et H IV 10 (1) nous avons aussi $\beta_{n-1}(a, A) = \beta_{n-1}(a, S_n) = 0$. Soit donc $a \in A \,.\, \overline{S_n - A}$.

I. Démontrons d'abord l'inégalité $\alpha(a, A, S_n) \leqq \beta_{n-1}(a, A)$. Soit U un voisinage du point a; soit $\alpha(a, U; A, S_n) \geqq m$ $(= 1, 2, 3, \ldots)$. Il suffit de démontrer que $\beta_{n-1}(V, U; A, S_n) \geqq m$ pour tout voisinage $V \subset U$ du point a. D'après VI 10 nous avons $\beta_n(a, V; S_n) \leqq 1$; il existe donc un voisinage $W \subset V$ du point a tel que $\beta_n(W, V, S_n) \leqq 1$. Comme $a \in \overline{S_n - A}$, nous avons $W - A \neq \emptyset$. D'après VI 10 et 12 il existe un (n, S_n)-cycle absolu Γ^n qui n'est pas $\sim 0 \bmod (S_n - W)$. L'espace S_n est localement connexe d'après VI 7 et 18 et H IV 18.2. Donc, d'après 2, il existe une décomposition $U - A = \sum_{i=0}^{m} P_i$ aux termes séparés telle que $WP_i \neq \emptyset$ pour $0 \leqq i \leqq m$. D'après VII 3 (où nous remplaçons A par $A + (S_n - U)$), il existe des (n, S_n)-cycles $C_i^n \bmod [A + (S_n - U)]$ $(0 \leqq i \leqq m)$ tels que l'homologie $\sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n \sim 0 \bmod [A + (S_n - W)]$ implique $r_0 = r_1 = \ldots = r_m = 0$. Il existe donc un réseau $\mathfrak{U}_1$ tel que l'on n'a pas $\Gamma^n(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod (S_n - W)$ et que l'homologie $\sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod [A + (S_n - W)]$ entraîne $r_0 = r_1 = \ldots = r_m = 0$. Soit $\mathfrak{U}_2$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_1$ normal par rapport aux n-cycles mod $(S_n - V)$. Soit $\mathfrak{U}_3$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_2$ normal par rapport aux $(n - 1)$-cycles mod $(A - U)$ dans A. Déterminons, suivant IV 2, un raffinement $\mathfrak{U}_4$ du réseau $\mathfrak{U}_3$ et une projection $\pi_{43} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_3)$ en posant $\varphi = A$, $\psi = R - U$. Soit $\pi_{21} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{32} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{31} = \pi_{21}\pi_{32}$ etc.

Comme C_i^n sont des (n, S_n)-cycles mod $[A + (S_n - U)]$ il existe des $(n - 1, \mathfrak{U}_4)$-chaînes $D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset A$, $E_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset S_n - U$ telles que $C_i^n(\mathfrak{U}_4) \to D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) - E_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4)$ $(0 \leqq i \leqq m)$. On a $F\, D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset A$, $F\, D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) = F\, E_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset S_n - U$, donc $F\, \pi_{43}\, D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset A - U$. Donc, $\pi_{42}\, D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4)$ sont des $(n - 1, \mathfrak{U}_2)$-

cycles essentiels mod $(A - U)$ dans A. En vertu de H IV 5 il existe donc des $(n-1, S_n)$-cycles G_i^{n-1} mod $(A - U)$ dans A $(0 \leqq i \leqq m)$ tels que $C_i^n(\mathfrak{U}_2) = \pi_{42} D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4)$. Nous avons à montrer que l'homologie $\sum_{i=0}^{m} r_i G_i^{n-1} \sim 0 \bmod (A - V)$ dans A détermine les rapports $r_0 : r_1 : \ldots : r_m$ d'une façon univoque. Lorsque $\sum_{i=0}^{m} r_i G_i^{n-1} \sim 0$ mod $(A - V)$ dans A, nous avons $\pi_{42} \sum_{i=0}^{m} r_i D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \sim 0 \bmod (A - V)$ dans A. Il existe donc une $(n, \mathfrak{U}_2)$-chaîne $H^n(\mathfrak{U}_2) \subset A$, $H^n(\mathfrak{U}_2) \to \pi_{42} \sum_{i=0}^{m} r_i D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4)$ mod $(A - V)$. Comme $C_i^n(\mathfrak{U}_4) \to D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \bmod (R - U)$, nous avons $\pi_{42} \cdot \sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_4) - H^n(\mathfrak{U}_2) \to 0 \bmod (R - V)$. Donc (cf. H IV 5), il existe un (n, S_n)-cycle K^n mod $(R - V)$ tel que $K^n(\mathfrak{U}_1) = \pi_{41} \sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_4) - \pi_{21} H^n(\mathfrak{U}_2)$. Comme $\beta_n(W, V, S_n) \leqq 1$; il existe un nombre $s \in \mathfrak{R}$ tel que $K^n \sim s\Gamma^n \bmod (S_n - W)$. Donc $\pi_{41} \sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_4) - \pi_{21} H^n(\mathfrak{U}_2) - s\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod (S_n - W)$. Comme $\pi_{41} C_i^n(\mathfrak{U}_4) \sim$ $\sim C_i^n(\mathfrak{U}_1) \bmod [A + (S_n - W)]$, $H^n(\mathfrak{U}_2) \subset A$, nous avons $\sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_1) \sim s\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_1)$ mod $[A(S_n - W)]$. L'homologie $\sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod [A + (S_n - W)]$ étant donné, les rapports $r_0 : r_1 : \ldots : r_m$ sont déterminés sans ambiguité.

II. Démontrons maintenant l'inégalité $\alpha(a, A, S_n) \geqq \beta_{n-1}(a, A)$. Soit U un voisinage du point a; soit $\beta_{n-1}(a, U; A, S_n) \geqq m$ $(= 1, 2, 3, \ldots)$. Il suffit de démontrer qu'il existe un voisinage $V \subset U$ du point a tel que $\alpha(a, V; A, S_n) \geqq m$. D'après VI 10 nous avons $\beta_{n-1}(a, U; S_n) = 0$, il est donc possible de choisir V de telle façon que l'on ait $\beta_{n-1}(V, U; S_n) = 0$. Soit $W \subset V$ un voisinage du point a. D'après VI 10 et 12, il existe un (n, S_n)-cycle absolu Γ^n qui n'est pas $\sim 0 \bmod [A + (S_n - W)]$. D'après 2, nous avons à démontrer qu'il existe une décomposition $V - A = \sum_{i=0}^{m} P_i$ aux termes séparés, $WP_i \neq \emptyset$. D'après VII 4 (où nous remplaçons A par $A + (S_n - V)$), il suffit de montrer qu'il existe des (n, S_n)-cycles C_i^n mod A $(1 \leqq i \leqq m)$ tels que l'homologie $r_0\Gamma^n + \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n \sim 0 \bmod [A + (S_n - W)]$ implique $r_0 = r_1 = \ldots =$ $= r_m = 0$. Comme $\beta_{n-1}(a, U; A, S_n) \geqq m$, nous avons $\beta_{n-1}(W, U; A, S_n) \geqq m$. Il existe donc des $(n-1, S_n)$-cycles G_i^{n-1} mod $(A - U)$ dans A $(1 \leqq i \leqq m)$ tels que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i G_i^{n-1} \sim 0 \bmod (A - W)$ dans A implique $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau tel que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i G_i^{n-1}(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod (A - W)$ dans A implique $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Déterminons un raffinement $\mathfrak{U}_2$ du réseau $\mathfrak{U}_1$ et une projection $\pi_{21} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$ en posant $\varphi = A$, $\psi = S_n - W$. Soit $\mathfrak{U}_3$ un raffinement du réseau $\mathfrak{U}_2$ normal par rapport aux n-cycles mod $[A + (S_n - V)]$. Soit $\pi_{32} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{31} = \pi_{21}\pi_{32}$.

Comme G_i^{n-1} sont des $(n-1, S_n)$-cycles mod $(S_n - U)$ et que $\beta_{n-1}(V, U; S_n) = 0$, il existe des $(n, \mathfrak{U}_3)$-chaînes $D_i^n(\mathfrak{U}_3) \to G_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3)$ mod $(S_n - V)$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Comme $G_i^{n-1} \subset A$, il existe d'après H IV 5 des (n, S_n)-cycles C_i^n mod $[A + (S_n - V)]$ $(1 \leqq i \leqq m)$ tels que $C_i^n(\mathfrak{U}_2) = \pi_{32} D_i^n(\mathfrak{U}_3)$. Soit $r_0\Gamma^n + \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n \sim 0$ mod $[A + (S_n - W)]$. (Nous avons alors à démontrer que $r_0 = r_1 = \ldots = r_m = 0$.) Il existe alors une $(n, \mathfrak{U}_2)$-chaîne $H^n(\mathfrak{U}_2) \subset A$ telle que $r_0 \Gamma^n(\mathfrak{U}_2) + \pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i D_i^n(\mathfrak{U}_3) - H^n(\mathfrak{U}_2) \to 0$ mod $(S_n - W)$. La chaîne $\pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i G_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) - F H^n(\mathfrak{U}_2)$ est donc située dans $(S_n - W)$; mais la même chaîne est située aussi dans A. Il en résulte $\pi_{21} H^n(\mathfrak{U}_2) \to \pi_{31} \sum_{i=1}^{m} r_i G_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3)$ mod $(A - W)$, donc $\sum_{i=1}^{m} r_i G_i^{n-1}(\mathfrak{U}_1) \sim \pi_{31} \cdot \sum_{i=1}^{m} r_i \cdot G_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) \sim 0$ mod $(A - W)$ dans A, d'où $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Donc $r_0\Gamma^n \sim 0$ mod $[A + (S_n - W)]$, d'où $r_0 = 0$.

17

SUR LA DÉCOMPOSITION D'UNE PSEUDOVARIÉTÉ PAR UN SOUS-ENSEMBLE FERMÉ

Comptes Rendus Hebdomadaires
des Séances de l'Academie des Sciences.
Paris *198* (1934), 1342–1345

Dans cette Note, les notions combinatoires sont entendues au sens de mon Mémoire.[1] Les coefficients des cycles sont des nombres rationnels. Au lieu de $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ j'écris C^n.

Φ étant une famille de sous-ensembles d'un espace métrique R, le *nombre réduit* d'éléments de Φ est: 1° 0 si la famille Φ est vide; 2° le nombre d'éléments de Φ diminué d'une unité si Φ est finie et non vide; 3° le symbole ω si Φ, tout en étant infinie, ne contient pour chaque $\varepsilon > 0$ qu'un nombre fini d'éléments à diamètre $>\varepsilon$; 4° le symbole ∞ s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que Φ contienne une infinité d'éléments à diamètre $>\varepsilon$.

Soit S un espace métrique. Soit $\mathfrak{M}$ un module dont les éléments sont des (p, S)-cycles absolus. Soit $\mathfrak{N}$ un sous-module de $\mathfrak{M}$ contenant tous les (p, S)-cycles absolus qui sont ~ 0. Le symbole $\varrho(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ signifie: 1° le rang du module $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ si ce rang est fini; 2° ω ou ∞ dans le cas contraire, l'égalité $\varrho(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \omega$ signifiant que, pour chaque $\varepsilon > 0$ donné, il existe des éléments Γ_i^p de $\mathfrak{M}$ en nombre fini jouissant de la propriété suivante: à chaque $\Delta^p \in \mathfrak{M}$ on peut attacher des nombres r_i, des sous-ensembles fermés A_n de S (en nombre fini) dont les diamétres soient $<\varepsilon$, enfin des cycles $\Theta_h^p \in \mathfrak{M}$, $\Theta_h^p \subset A_h$ de manière que $\Delta^p - \sum r_i \Gamma_i^p - \sum \Theta_h^p \in \mathfrak{N}$.

Théorème I. *Soit R un espace métrique et compact à n $(= 1, 2, \ldots)$ dimensions. Soit $m = 1, 2, 3, \ldots$ ou bien $m = \infty$. Supposons qu'il existe des (n, R)-cycles absolus Γ_i^n $(0 \leqq i < m)$ jouissant de la propriété suivante: F_h $(h = 1, 2)$ étant deux sous-ensembles fermés de R tels que $F_h \neq R$ et Δ_h^n étant un (n, R)-cycle absolu dans F_h, l'homologie $\sum r_i \Gamma_i^n \sim \Delta_1^n + \Delta_2^n$ entraîne que $r_i = 0$. Soit S un sous-ensemble fermé de R. Soit p le nombre réduit de toutes les composantes de $R - S$. Soit $\mathfrak{M}$ le module de tous les $(n-1, R)$-cycles absolus dans S, ~ 0 dans R; soit $\mathfrak{N}$ le module de tous $\Delta^{n-1} \in \mathfrak{M}$ qui sont ~ 0 dans S. Alors $\varrho(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \geqq pm$.*

[1] Fund. Math., 19, 1932, p. 149–183, [7].

Corollaire. *Soit R une multiplicité cantorienne fermée à n dimensions*[2] *et soit m son $n^{\text{ième}}$ nombre de Betti. Soit S un sous-ensemble fermé de R; soit q le $(n-1)^{\text{ième}}$ nombre de Betti de S. Alors $R - S$ a au plus $q/(m+1)$ composantes.*[3]

Définition. Soit $m, n = 1, 2, 3, \ldots$. R est une *pseudovariété à n dimensions m fois ramifiée* (*simple si $m = 1$*) si: 1° R est un espace métrique et compact à n dimensions; 2° il existe des (n, R)-cycles absolus Γ_i^n $(1 \leqq i \leqq m)$ jouissant des propriétés suivantes: a) F_h $(h = 1, 2)$ étant des sous-ensembles fermés de R tels que $F_h \neq R$ et Δ_h^n étant un (n, R)-cycle absolu dans F_h, l'homologie $\sum r_i \Gamma_i^n \sim \Delta_1^n + \Delta_2^n$ entraîne que $r_i = 0$; b) à chaque entourage U de chaque point x de R on peut attacher un entourage $V \subset U$ de x tel que chaque (n, R)-cycle mod $(R - U)$ soit $\sim \sum r_i \Gamma_i^n$ mod $(R - V)$.

Théorème II. *Chaque pseudovariété est un continu localement connexe.*

Une pseudovariété à une dimension est homéomorphe à une circonférence (donc simple). Or, pour $n \geqq 2$, il existe dans E_{n+1} euclidien des pseudovariétés à n dimensions m fois ramifiées pour chaque valeur de m. En effet, un sous-ensemble fermé et borné F de E_{n+1} est une telle variété, si $E_{n+1} - F$ est la somme de $m + 1$ domaines connexes et uniformément localement connexes ayant F comme frontière commune. L'existence de telles frontières a été prouvée par Wilder (loc. cit., théorème 8).

Notations. Soit R une pseudovariété à n dimensions m fois ramifiée. Soient A et S deux sous-ensembles fermés de R; soit $A \subset S$. Soit $\mathfrak{M}$ le module de tous les $(n\text{-}l, R)$-cycles absolus dans S qui sont ~ 0 dans R. Soit $\mathfrak{L}$ le module de tous les $\Delta^{n-1} \in \mathfrak{M}$ qui sont ~ 0 dans S. Soit $\mathfrak{N}$ le module de tous $\Delta^{n-1} \in \mathfrak{M}$ jouissant de la propriété suivante: il existe deux sous-ensembles fermés F_h $(h = 1, 2)$ de S tels que $A - F_h \neq \emptyset$ et des $\Delta_h^{n-1} \in \mathfrak{M}$, $\Delta_h^{n-1} \subset F_h$ tels que $\Delta^{n-1} \sim \Delta_1^{n-1} + \Delta_2^{n-1}$ dans S. Soit $\overline{\mathfrak{N}}$ le module de tous les $\Delta^{n-1} \in \mathfrak{M}$ jouissant de la propriété suivante: à chaque réseau $\mathfrak{U}$ on peut attacher un $\Theta^{n-1} \in \mathfrak{N}$ tels que $\Delta^{n-1}(\mathfrak{U}) \sim \Theta^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans S.

Théorème III. *Soit q le nombre réduit de composantes Q de $R - S$ telles que $A - FrQ \neq \emptyset$; soit $c = 1$ s'il existe une composante P de $R - S$ telle que $A \subset FrP$, soit $c = 0$ dans le cas contraire. Alors $\varrho(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = m(q - c)$.*

Théorème IV. *Soit p le nombre réduit de composantes P de $R - S$ telles que $A \subset FrP$. Alors $\varrho(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = mp$.*

Théorème V. *L'égalité $\overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un $\varepsilon > 0$ jouissant de la propriété suivante: A chaque composante P de $R - S$ telle que $A - FrP \neq \emptyset$ on peut attacher un point x de A dont la distance de FrP soit $> \varepsilon$.*

[2] P. Alexandroff, Annals of Math, 30, 1929, p. 101—186 (déf. à la page 176).

[3] R. L. Wilder, Math. Ann., 109, 1933, p. 273—306, théorème 6; au lieu de $q/(m+1)$, une limite moins précise (pour $m \geqq 2$) y figure (à savoir q). Le théorème 5 du Mémoire cité peut être précisé de la même manière.

Définitions. Soit R une pseudovariété à n dimensions m fois ramifiée. Soit S un sous-ensemble fermé de R. Soit x un point donné de S. Soit U un entourage de x. Posons $\alpha(U)$ égal au nombre $(= 0, 1, 2$ ou bien $= \infty)$ des composantes P de $U - S$ tels qu'il existe un arc simple $C \subset P + (x)$ contenant x. Nous dirons que *l'ordre d'accessibilité de S en x* est égal à $\alpha(R)$. Nous dirons que *l'ordre local d'accessibilité de S en x* est égal à: 1° p $(= 0, 1, 2, \ldots)$ si $\alpha(U) = p$ pour chaque U suffisamment petit; 2° ω, si $\alpha(U)$ est toujours fini, mais tend vers l'infini si le diamètre de U tend vers zéro; 3° ∞, s'il existe un U tel que $\alpha(U) = \infty$.

Théorème VI. *Supposons que le $(n-1)^{\text{ième}}$ nombre de Betti de R, ainsi que le $(n-1)^{\text{ième}}$ nombre de Betti local*[4] *de R en x, soient égaux à* 0. *L'ordre d'accessibilité de S en x est un invariant topologique de S et de x, pourvu que cet ordre soit* $= 2$.

Théorème VII. *Supposons que le $(n-1)^{\text{ième}}$ nombre de Betti local de R en x soit égal à* 0. *L'ordre local d'accessibilité de S en x est un invariant topologique de S et de x, pourvu que cet ordre soit* $= 2$.

[4] La définition du nombre de Betti local se trouve au Mémoire de l'auteur: *Introduction à la théorie de l'homologie*, Publications de la Fac. des Sc. de l'Univ. Masaryk, n° 184, 1933, [56], ainsi que (indépendamment) dans la Note de M. P. Alexandroff, *Comptes rendus*, 198, 1934, p. 227–229.

18

SUR LES ARCS INDÉPENDANTS DANS UN CONTINU LOCALEMENT CONNEXE

Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou
Masarykovy university.
Brno *193* (1934), 10 pp.

Une des propriétés les plus importantes d'un continu R localement connexe est exprimée par le *n-Bogensatz*, démontré d'abord par M. Menger dans le cas particulier où R est une courbe régulière [Fund. Math. X], ensuite par M. Nöbeling dans le cas général où R est un continu localement connexe arbitraire [Fund. Math. XVIII; cf. aussi l'exposition donnée dans la *Kurventheorie* de M. Menger, chap. VI]. Une autre démonstration (ou on suppose d'ailleurs un peu plus généralement que R soit un espace *localement* compact et localement connexe) a été donné récemment par M. Zippin [Annals of Math., XXXIV].

Dans une conférence faite le 4 juillet 1933 dans le Math. Kolloquium de M. Menger, j'ai exposé une démonstration du *n-Bogensatz* (d'ailleurs un peu généralisé) qui, tout en suivant les grandes lignes de la démonstration de M. Nöbeling, en est différente dans les détails du raisonnement. C'est cette démonstration que je reproduis dans la Note présente.

1. Un *graphe* G est un ensemble composé d'un nombre fini de points où l'on a distingué certains couples de points, appelés *côtés* du graphe. Si $G_1 \subset G$, le couple $a \in G_1$, $b \in G_1$ est un côté de G_1 si et seulement si c'est un côté de G. Un *chemin* dans G est une suite finie $\gamma = (a_0, a_1, \ldots, a_m)$ de points $a_i \in G$ $(m \geqq 0)$ telle que (a_i, a_{i+1}) $(0 \leqq i \leqq m-1)$ sont des côtés de G. Les chemins $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ s'appellent *indépendants* si chaque point $a \in G$ appartient au plus à un d'eux. Soient A et B des ensembles de points *donnés d'avance* (pas nécessairement contenus dans G) $\gamma = (a_0, a_1, \ldots, a_m)$ est un chemin *de A à B* si $a_0 \in A$, $a_m \in B$. $C \subset G$ est une *coupure* de G (entre A et B) si le graphe $G - C$ ne contient aucun chemin de A à B. (P. ex. AG ou BG est une coupure.) Soit $n = 0, 1, 2, \ldots$. On dit que G est *n fois connexe* (entre A et B) si chaque coupure de G contient au moins n points. (Chaque graphe est donc 0 fois connexe.)

Lemme. *Un graphe G n fois connexe contient n chemins indépendants entre A et B.*

Démonstration. Le théorème est banal pour $n = 0$, donc pour $G = 0$. On peut donc faire la supposition Σ que le théorème soit vrai (pour chaque choix de A, B, n)

pour tous les graphes $G_1 \neq G \supset G_1$. On peut admettre que le graphe $G - (a)$ ne soit n fois connexe pour aucun choix de $a \in G$ (car autrement le théorème est une conséquence de la supposition Σ). Or chaque graphe $G - (a)$ est évidemment $(n - 1)$ fois connexe car, C étant une coupure de $G - (a)$, $C + (a)$ en est une de G. Donc il existe, d'après Σ, des chemins $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ indépendants dans $G - (a)$. Si $a \in AB$, alors (a), $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ sont n chemins indépendants dans G. Supposons donc que $ABG = 0$.

Prouvons d'abord qu'il existe une coupure C contenant n points et telle que $AG - C \neq 0 \neq BG - C$. Si $G - (A + B) \neq 0$, choisissons $a_1 \in G - (A + B)$. Puisque $G - (a_1)$ est $(n - 1)$ fois connexe, mais non n fois connexe, il existe dans $G - (a_1)$ une coupure C_1 contenant $n - 1$ points. Alors $C = C_1 + (a_1)$ est une coupure de G contenant n points et l'ensemble AGC contient au plus $n - 1$ points, car $a_1 \in C - AG$. Or AG contient au moins n points puisque c'est une coupure de G. Donc $AG - C \neq 0$ et pareillement on voit que $BG - C \neq 0$. Reste à étudier le cas $G \subset A + B$. Puisque $ABG = 0$ et que l'on puisse supposer $n > 0$, il existe un côté (a_1, a_2) de G tel que $a_1 \in A$, $a_2 \in B$. Si le graphe $G - (a_1) - (a_2)$ est $(n - 1)$ fois connexe, il existe (en vertu de Σ) $n - 1$ chemins indépendants $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ dans $G - (a_1) - (a_2)$. Mais alors (a_1, a_2), $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ sont n chemins indépendants dans G de manière que ce cas peut être exclu. Donc il existe une coupure $C' = (a_3, \ldots, a_s)$ $(s \leqq n)$ dans $G - (a_1) - (a_2)$. Alors $C = (a_1) + (a_2) + C'$ est une coupure de G. Puisque G est n fois connexe, on a $s = n$. Comme $ABG = 0$, $a_1 \in AG$, $a_2 \in BG$ et que les ensembles AG et BG, étant des coupures de G, contiennent chacun au moins n points, on a, ici encore, $AG - C \neq 0 \neq BG - C$.

Soit donc $C = (c_1, \ldots, c_n)$ une coupure de G contenant n points et telle que $AG - C \neq 0 \neq BG - C$. Soit $G_1 \subset G$ l'ensemble de tous les points $b \in G$ tels qu'il existe dans G un chemin $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ $(m \geqq 0)$ tel que $a_0 \in AG$, $a_m = b$, $a_i \in G - C$ pour $0 \leqq i \leqq m - 1$. En remplaçant dans cette définition de G_1 l'ensemble A par B, on obtient $G_2 \subset G$. Soit $c \in G_1G_2$; alors il existe dans G un chemin $(a_0, \ldots, a_h, \ldots, a_k)$ tel que $a_0 \in BG$, $a_k \in BG$, $a_h = c$ et $a_i \in G - C$ pour $i \neq h$; puisque C est une coupure, il en résulte que $c \in C$. Nous avons donc prouvé que $G_1G_2 \subset C$. Comme $AG \subset G_1$, $AG - C \neq 0$, $G_1G_2 \subset C$, on a $G_2 \neq G$; pareillement on obtient que $G_1 \neq G$.

Soit D un sous-ensemble de G_1 contenant au plus $n - 1$ points. Comme $G_1 \subset G$ et que G soit n fois connexe, il existe un chemin γ dans $G - D$ de A à B. C étant une coupure, γ contient évidemment un chemin γ' de A à C. On voit sans peine que γ' est contenu dans $G_1 - D$. Il en résulte que le graphe G_1 est n fois connexe entre A et C. D'après la supposition Σ, il existe donc dans G_1 n chemins indépendants $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_n$ de A à C; on peut supposer que $\gamma'_i.C = (c_i)$. Pareillement il existe dans G_2 n chemins indépendants $\gamma''_1, \gamma''_2, \ldots, \gamma''_n$ de C à B tels que $\gamma''_i.C = (c_i)$. Puisque $G_1G_2 \subset C$, les $\gamma'_1 + \gamma''_1, \ldots, \gamma'_n + \gamma''_n$ sont n chemins indépendants dans G de A à B.

2. Soit R un espace métrique. Soient A et B deux sous-ensembles fermés de R sans point commun. Soit D un sous-ensemble fermé de $A + B$. On dit que R est *n fois*

connexe entre A et B mod D $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ si, T étant un sous-ensemble de $R - D$ contenant au plus $n - 1$ points et du reste arbitraire, il existe dans $R - T$ un arc de A à B (c'est-à-dire un arc simple aux extrémités $a \in A$ et $b \in B$).

Soit $k = 0, 1, 2, \ldots$. Soient $H_1, \ldots, H_k$ des sous-ensembles donnés de $R - D$. Soient $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ des nombres positifs donnés. Soit $T \subset R - D$. Désignons par $[k, \varepsilon, T, H]$ l'ensemble de tous les arcs $C \subset R - T$ de A à B tels qu'on ait $\varrho(t, C) > \varepsilon_i$ pour chaque point $t \in TH_i$ $(1 \leqq i \leqq m$; ϱ signifie la distance).

Lemme. ***Prémisse:*** *Soit R un espace compact, localement connexe et n-fois connexe entre A et B mod D. Soient $\{H_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ des sous-ensembles donnés de $R - D$, fermés dans R et $\neq 0$.*

Thèse: *Il existe des nombres positifs ε_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, $\varepsilon_i < \varrho(H_i, D)$ $(= \infty$ si $D = 0)$ tels que $[k, \varepsilon, T, H] = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ et pour chaque $T \subset R - D$ contenant au plus $n - 1$ points.*

Démonstration. Les nombres ε_i vont être construits par récurrence. Soit donc $k = 0, 1, 2, \ldots$ et supposons que l'on ait déjà déterminé des nombres ε_i $(1 \leqq i \leqq k)$ tels que $0 < \varepsilon_i < \varrho\ (H_i, D)$ et que $[k, \varepsilon, T, H] \neq 0$ pour chaque $T \subset R - D$ contenant au plus $n - 1$ points. Il s'agit de prouver l'existence d'un nombre $\varepsilon_{k+1} > 0$ tel que $[k + 1, \varepsilon, T, H] \neq 0$ pour chaque $T \subset R - D$ contenant au plus $n - 1$ points. [On peut alors supposer que $\varepsilon_{k+1} < \varrho\ (H_{k+1}, D)$ car il est évidemment permis de diminuer le nombre ε_{k+1}.] Supposons au contraire que pour $v = 1, 2, 3, \ldots$ et $\varepsilon_{k+1} = 1/v$ il existe toujours un ensemble $T_v \subset R - D$ contenant au plus $n - 1$ points et tel que $[k + 1, \varepsilon, T_v, H] = 0$, ce qui veut dire que $\varrho(T_v H_{k+1}, C) \leqq 1/v$ pour chaque arc $C \in [k, \varepsilon, T_v, H]$. Remarquons que la suite d'ensembles $\{T_v\}$ peut être remplacée par une sous-suite arbitraire, sans qu'elle perde ses propriétés; nous servirons couramment de cette remarque dans ce qui suit.

Tout d'abord, on peut supposer que tous les ensembles T_v contiennent le même nombre s de points $(1 \leqq s \leqq n - 1)$: soit $T_v = (t_{v1}, t_{v2}, \ldots, t_{vs})$. Ensuite, l'espace R étant compact, on peut admettre que les limites $\lim\limits_{v=\infty} t_{vj} = t_j$ existent pour $1 \leqq j \leqq s$. Soit T_v' l'ensemble qui s'obtient de $T_v = (t_{v1}, t_{v2}, \ldots, t_{vs})$ en remplaçant chaque point t_{vj} par t_j si $t_j \in R - D$; les autres points t_{vj} passant inaltérés T_v à T_v'. L'ensemble T_v' contient au plus $s \leqq n - 1$ points et l'on a $T_v' \subset R - D$, de manière qu'il existe un arc $C_v \in [k, \varepsilon, T_v', H]$.

Soit U, resp. V, un entourage ouvert de DA, resp. de DB si petit que (1) $\bar{U}\bar{V} = \bar{U}B = \bar{V}A = 0$, (2) $\varrho(H_i, \bar{U} + \bar{V}) > \varepsilon_i$ pour $1 \leqq i \leqq k$, (3) $\varrho(H_{k+1}, \bar{U} + \bar{V}) > 0$, (4) $t_j \in R - (\bar{U} + \bar{V})$ pour chaque valeur de j $(1 \leqq j \leqq s)$ telle que $t_j \in R - D$. En remplaçant $\{T_v\}$ par une sous-suite on obtient que $t_{vj} \in U$ si $t_j \in DA$, et $t_{vj} \in V$ si $t_j \in DB$. Soient $a_v \in A$ et $b_v \in B$ les deux extrémités de C_v; on peut supposer que $C_v - (a_v) - (b_v) \subset R - (A + B)$. En remplaçant $\{T_v\}$ par une sous-suite on parvient à réaliser un des quatre cas qui suivent:

Cas I. Soit $a_v \in A - D$, $b_v \in B - D$ pour chaque v. Comme $C_1 T_1' = 0$, $D = 0$, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que $\varrho(t_j, C_1) > \eta$ pour $1 \leqq j \leqq s$. Comme $C_1 \in$ $\in [k, \varepsilon, T_1', H]$ et que l'on ait $H_i D = 0$, on a $\varrho(t_j, C_1) > \varepsilon_i$ pour $1 \leqq j \leqq s, 1 \leqq i \leqq k$, $t_j \in H_i$. Pour ν suffisamment grand on a aussi $\varrho(t_{\nu j}, C_1) > \eta$ pour $1 \leqq j \leqq s$, ainsi que $\varrho(t_{\nu j}, C_i) > \varepsilon_i$ pour $1 \leqq j \leqq s$, $1 \leqq i \leqq k$, $t_j \in H_i$. Donc $C_1 \in [k, \varepsilon, T_\nu, H]$ et $\varrho(T_\nu, H_{k+1}, C_1) > \eta$, d'où $C_1 \in [k + 1, \varepsilon, T_\nu, H]$, ce qui est une contradiction, car $[k + 1, \varepsilon, T_\nu, H] = 0$.

Cas II. Soit $a_\nu \in A - D$, $b_\nu \in BD$ pour chaque ν. Puisque l'espace R est compact et localement connexe, il existe un nombre fini u de continus K_r $(1 \leqq r \leqq u)$ localement connexes et tels que $F(U) = \bar{U} - U \subset \sum_{r=1}^{u} K_r$, les continus K_r étant si petits que l'on ait (1) $\sum_{r=1}^{u} K_r$, $(T_\nu + T_\nu') = 0$ pour chaque ν, (2) $\varrho(H_i, \sum_{r=1}^{u} K_r) > \varepsilon_i$ pour $1 \leqq i \leqq k$, (3) $\varrho(H_{k+1}, \sum_{r=1}^{u} K_r) > 0$. Les extrémités de l'arc C_ν étant $a_\nu \in U$ et $b_\nu \in$ $\in R - \bar{U}$, C_ν rencontre $F(U)$ et par suite aussi $\sum_{r=1}^{u} K_r$. Soit p_ν le premier point d'intersection de l'arc C_ν (orienté de a_ν à b_ν) avec $\sum_{r=1}^{u} K_r$. Par un passage à une sous-suite on obtient que $p_\nu \in K' = K_{r_0}$ pour chaque ν. Le point p_ν décompose l'arc C_ν en deux arcs: C_ν' aux extrémités a_ν et p_ν et C_ν'' aux extrémités p_ν et b_ν. Comme $p_1 \in K'$, $p_\nu \in K'$, où K' est un continu localement connexe, il existe un arc simple $E_\nu \subset K'$ aux extrémités p_ν et p_1. La somme $C_\nu' + E_\nu + C_1''$ contient un arc C_ν^* aux extrémités a_ν et b_1. On voit sans peine que, pour les valeurs suffisamment grandes de ν, ou a $C_\nu^* \in$ $\in [k, \varepsilon, T_\nu, H]$, d'où $\varrho(T_\nu H_{k+1}, C_\nu^*) \geqq 1/\nu$ d'après la définition de T_ν. Comme $C_\nu' \subset U$, $E_1 \subset K'$, $\bar{U}H_{k+1} = K'H_{k+1} = 0$, il en résulte que $\varrho(T_\nu H_{k+1}, C_1'') \leqq 1/\nu$, ce qui est évidemment une contradiction.

Cas III. $a_\nu \in AD$, $b_\nu \in B - D$ ne diffère que formellement du cas II.

Cas IV. Soit $a_\nu \in AD$, $b_\nu \in BD$ pour chaque ν. Posons $F(U) \subset \sum_{r=1}^{u} K_r$, les continus K_r jouissant des mêmes propriètés comme dans le cas II, et posons analoguement $F(V) \subset \sum_{r=1}^{v} K_r'$. De nouveau, soit p_ν le premier point d'intersection de l'arc C_ν avec $\sum_{r=1}^{u} K_r$ et soit q_ν le dernier point d'intersection de C_ν avec $\sum_{r=1}^{v} K_r'$. On peut supposer que $p_\nu \in K_1$, $q_\nu \in K_1'$ pour chaque ν. Les points p_ν et q_ν décomposent l'arc C_ν en trois arcs C_ν', C_ν'', C_ν''' aux extrémités a_ν, p_ν; p_ν, q_ν; q_ν, b_ν. Les continus K_1 et K_1' étant localement connexes, il existe des arcs simples $E_1 \subset K_1$ et $E_1' \subset K_1'$ dont les extrémités sont resp. p_1, p_ν et q_1, q_ν. La somme $C_\nu' + E_1 + C_1'' + E_1'' + C_\nu'''$ contient un arc simple C_ν^* aux extrémités a_ν et b_ν. On voit sans peine que, pour les valeurs suffisamment grandes de ν, on a $C_\nu^* \in [k, \varepsilon, T_\nu, H]$, d'où $\varrho(T_\nu H_{k+1}, C_\nu^*) \geqq 1/\nu$. Comme $C_\nu' \subset \bar{U}$, $C_\nu''' \subset \bar{V}$, $(\bar{U} + \bar{V}) H_{k+1} = 0$, $E_1 \subset K_1$, $E_1' \subset K_1'$, $(K_1 + K_1') H_{k+1} = 0$, il en résulte que $\varrho(T_\nu H_{k+1}, C_1^*) \leqq 1/\nu$, ce qui est une contradiction.

3. **Lemme.** ***Prémisse:*** *L'espace R soit compact, localement connexe et n fois connexe entre A et B mod D.*

Thèse: *Il existe une décomposition $R - D = \sum_{k=1}^{\infty} K_\lambda$ telle que (1) les ensembles K_λ sont ouverts et connexes, (2) Z étant un entourage arbitraire de D, il existe un entier l tel que $K_\lambda \subset Z$ pour tous les $\lambda > 1$, (3) $s \leqq n - 1$ valeurs arbitraires $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ de λ étant donnés, R contient un arc C de A à B tel que les inégalités $CK_\lambda \neq 0 \neq$ $\neq K_\lambda K_\mu$ entraînent que $K_\mu K_{\lambda_1} = \ldots = K_\mu K_{\lambda_s} = 0$.*

Démonstration. L'ensemble D étant fermé dans l'espace compact R, il existe une suite $\{W_\nu\}$ d'entourages ouverts de D telle que $\overline{W}_{\nu+1} \subset W_\nu$ et qu'à chaque entourage Z de D on puisse attacher un nombre ν tel que $Z \supset W_\nu$, d'où $\prod_1^{\infty} W_\nu = D$. Soit $G_\nu = R - \overline{W}_\nu$, d'où $\overline{G}_\nu \subset G_{\nu+1}$ et $R - D_\nu = \sum_1^{\infty} \overline{G}_\nu$. Soit $G_0 = 0$, $H_\nu = \overline{G}_\nu -$ $- G_{\nu-1}$, donc $R - D = \sum_1^{\infty} H_\nu$. A la suite d'ensembles $\{H_\nu\}$ attachons une suite $\{\varepsilon_\nu\}$ de nombres positifs d'après le lemme du n° 2. Chaque point $p \in H_\nu$ est contenu dans un ensemble $L_\nu(p)$ ouvert, connexe et si petit que (1) le diamètre de $L_\nu(p)$ soit inférieur aux nombres $\frac{1}{3}\varepsilon_\mu$ [max. $(1, \nu - 4) \leqq \mu \leqq \nu + 4$], (2) $L_\nu(p) \subset G_{\nu+1}$ pour $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, (3) $L_\nu(p) \subset R - G_{\nu-2}$ pour $\nu = 3, 4, 5, \ldots$. L'ensemble H_ν étant compact en soi, on peut extraire de la famille $\{L_\nu(p)\}$ une suite finie $L_{\nu 1}, L_{\nu 2}, \ldots, L_{\nu r_\nu}$ recouvrant H_ν. On voit sans peine que la suite

$$K_1 = L_{11}, \ldots, K_{r_1} = L_{1r_1}, K_{r_1+1} = L_{21}, \ldots, K_{r_1+r_2} = L_{2r_2}, K_{r_1+r_2+1} = L_{31}, \ldots$$

fournit la décomposition cherchée $R - D$.

4. **Théorème.** *Soit A et B deux sous-ensembles fermés et disjoints d'un espace R compact et localement connexe. Soit D un sous-ensemble fermé de $A + B$. Supposons que R soit n fois connexe entre A et B mod D. Il existe n arcs $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ entre A et B tels que $\Delta_i \Delta_j \subset D$ pour $1 \leqq i < j \leqq n$.*

Démonstration. Construisons une décomposition $R - D = \sum_1^{\infty} K_\lambda$ d'après le lemme du n° 3. Pour $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$, choisissons un point $p_\lambda \in K_\lambda$. Ordonnons tous les couples (K_λ, K_μ) tels que $K_\lambda K_\mu \neq 0$ dans une suite simple $\{L_k\} = \{(K_{\lambda_k}, K_{\mu_k})\}$. Les ensembles K_{λ_k} et K_{μ_k} étant ouverts et connexes; l'ensemble $K_{\lambda_k} + K_{\mu_k}$ est aussi ouvert et connexe, car $K_{\lambda_k} K_{\mu_k} \neq 0$. Comme l'espace R est compact et localement connexe, il existe (pour $k = 1, 2, 3, \ldots$) un arc simple $C'_k \subset K_{\lambda_k} + K_{\mu_k}$ aux extrémités p_{λ_k} et p_{μ_k}.

On peut même construire pour chaque k un arc simple $C_k \subset K_{\lambda_k} + K_{\mu_k}$ aux extrémités p_{λ_k} et p_{μ_k} de manière que, pour $h < k$, l'intersection $C_h C_k$ ait un nombre fini de composantes. On construira les arcs C_k par récurrence, en posant $C_1 = C'_1$. Supposons généralement que, pour une valeur donnée de k ($= 2, 3, \ldots$), on ait déjà construit les arcs $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}$. Divisons l'arc C'_k en des arcs partiels en nombre fini de manière que, γ étant un arc partiel quelconque, ou bien toutes les deux extrémités de γ appartiennent à l'ensemble $\sum_{h=1}^{k-1} C_h$, ou bien l'ensemble $\gamma \sum_{h=1}^{k-1} C_h$ contienne précisément un point, ce point étant une extrémité de γ. Une telle division de C'_k est évidemment possible; en vertu de l'inclusion $C'_k \subset K_{\lambda_k} + K_{\mu_k}$, on peut même supposer que les arcs partiels soient si petits que, si γ est un arc partiel dont les deux extrémités α_1 et α_2 appartiennent à l'ensemble $\sum_{h=1}^{k-1} C_k$, il soit possible de joindre α_1 à α_2 par un arc contenu dans $(K_{\lambda_k} + K_{\mu_k}) \, . \sum_{h=1}^{k-1} C_h$. L'arc C_k cherché s'obtient alors de C'_k en y omettant d'abord les arcs partiels dont les extrémités sont situés dans $\sum_{h=1}^{k-1} C_h$, ensuite en remplaçant chaque arc omis par un arc qui possède les mêmes extrémités et qui est situé dans $(K_{\lambda_k} + K_{\mu_k}) \, . \sum_{h=1}^{k-1} C_h$, enfin en prenant dans le continu élémentaire ainsi obtenu un arc simple C_k aux extrémités p_{λ_k} et p_{μ_k}.

Aucun arc C_k ne rencontre l'ensemble D; d'ailleurs, à partir d'un certain rang, tous les arcs C_k sont contenus dans un entourage arbitrairement donné de D. Il en résulte que chaque arc de la suite $\{C_k\}$ ne peut rencontrer qu'un nombre fini d'arcs de cette suite. En divisant convenablement chaque arc C_k, on obtient une suite infinie $\{c_r\}$ d'arcs simples tels que: (1) chaque arc c_r est contenu dans un arc C_k; (2) pour $1 \leqq r < s$, l'ensemble $c_r c_s$ est vide ou bien se réduit à une extrémité commune de c_r et de c_s; (3) $\sum_{r=1}^{\infty} c_r = \sum_{k=1}^{\infty} C_k$. A chaque c_r on peut attacher un $C_k \supset c_r$ par suite deux indices λ et μ tels que $c_r \subset K_\lambda + K_\mu$, $K_\lambda K_\mu \neq 0$.

Soit $\{U_\nu\}$ une suite décroissante d'entourages ouverts de AD et telle que $\prod_1^{\infty} \overline{U}_\nu = AD$; soit $\{V_\nu\}$ une suite pareille relative à l'ensemble BD. Pour chaque ν soit $Q_\nu = \sum C_k$, la sommation s'étendant à toutes les valeurs (en nombre fini) de k telles qu'une au moins des deux égalités $K_{\lambda_k}(U_\nu + V_\nu) = 0$, $K_{\mu_k}(U_\nu + V_\nu) = 0$ ait lieu. Q_ν est une somme d'un nombre fini d'arcs de la suite $\{c_r\}$. Soit G_ν l'ensemble de toutes les extrémités des arcs $c_r \subset Q_\nu$; G_ν est un graphe, si l'on définit comme côtés de G_ν les couples (t_r, τ_r), où t_r et τ_r sont les deux extrémités de $c_r \subset Q_\nu$. Pour chaque valeur de ν soit α_ν l'ensemble de tous les points p_{λ_k} tels que $K_{\lambda_k}(A + U_\nu) \neq 0 = K_{\mu_k}(A + U_\nu)$ et de tous les points p_{μ_k} tels que $K_{\lambda_k}(A + U_\nu) = 0 \neq K_{\mu_k}(A + U_\nu)$. L'ensemble β_ν se définit pareillement, en remplaçant $A + U_\nu$ par $B + V_\nu$. Evidemment $\alpha_\nu + \beta_\nu \subset G_\nu$.

Chaque graphe G_ν est n fois connexe entre α_ν et β_ν. Soit $T = (t_1, \ldots, t_s)$ un sous-ensemble de G_ν contenant $s \leqq n - 1$ points. On doit prouver que l'ensemble Q_ν contient un arc de α_ν à β_ν sans point commun avec T. Pour $1 \leqq j \leqq s$, il existe un indice ν_j tel que $t_j \in K_{\nu_j}$. D'après le lemme du N° 3, l'espace R contient un arc Γ

aux extrémités $a \in A$ et $b \in B$ tel que les inégalités $\Gamma K_\lambda \neq 0 \neq K_\lambda K_\mu$ entraînent que $K_\mu K_{\nu_j} = 0$ pour $1 \leqq j \leqq s$. Si $a \in A - D$ posons $a_0 = a$; si $a \in AD$ choisissons le point $a_0 \in \Gamma$, $a_0 \neq a$ si proche de a que l'on ait $K_\lambda \subset U$ pour chaque valeur de λ telle que $a_0 \in K_\lambda$. Déterminons pareillement le point b_0. Soit l'arc $\Gamma_0 \subset \Gamma$ aux extrémités a_0 et b_0. Soit l'ensemble $\mathfrak{K}$ de tous les K_μ tels que $\Gamma_0 K_\mu \neq 0$. L'ensemble $\mathfrak{K}$, étant un recouvrement de l'ensemble connexe Γ_0 contient une suite finie $K_{\mu_0}, K_{\mu_1}, \ldots$ $\ldots, K_{\mu_m}$ telle que $a_0 \in K_{\mu_0}$, $b_0 \in K_{\mu_m}$, $K_{\mu_i} \cdot K_{\mu_{i+1}} \neq 0$ pour $0 \leqq i \leqq m - 1$. A cette suite correspond une suite $q_0, q_1, \ldots, q_m$ de points tels que, pour $0 \leqq i \leqq m - 1$, les points q_i et q_{i+1} sont les deux extrémités de l'arc C_{k_i}, l'indice k_i étant déterminé d'après la condition $L_{k_i} = (K_{\mu_i}, K_{\mu_{i+1}})$. L'ensemble $\sum_{i=0}^{m-1} C_{k_i}$, sans point commun avec T, contient un arc de α_ν à β_ν, cet arc étant un sous-ensemble de Q_ν.

D'après le lemme du N° 1, l'ensemble Q_ν contient donc n arcs $\gamma_{\nu 1}, \gamma_{\nu 2}, \ldots, \gamma_{\nu n}$ de α_ν à β_ν, ces arcs étant disjoints deux à deux. Evidemment Q_ν ne peut contenir qu'un nombre *fini* de tels groupes de n arcs; d'ailleurs on voit sans peine que chaque arc $\gamma_{\nu+1,i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ contient un arc partiel $\gamma'_{\nu i} \subset Q_\nu$ de α_ν à β_ν. Il suffit donc de remplacer $\{Q_\nu\}$ par une sous-suite pour qu'on puisse supposer que l'on ait $\gamma_{\nu i} \subset \gamma_{\nu+1,i}$ pour $1 \leqq i \leqq n$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ Posons $\Gamma_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Quatre cas sont possibles.

Cas I. Γ_i est un arc simple aux extrémités $a_i \in A - D$, $b_i \in B - D$. On pose alors $\Delta_i = \Gamma_i$, $A_i = A_i^* = (a_i)$, $B_i = B_i^* = (b_i)$.

Cas II. $\bar{\Gamma}_i = A_i + \Gamma_i$, $\Gamma_i B = b_i \in B - D$, où A_i est un continu (pouvant se réduire à un point) contenu dans AD. On pose alors $\Delta_i = \Gamma_i + A_i^*$, $B_i = (b_i)$, $A_i^* = A_i$ si A_i se réduit à un point, $A_i^* = 0$ dans le cas contraire.

Cas III. $\bar{\Gamma}_i = B_i + \Gamma_i$, $\Gamma_i A = a_i \in A - D$, où B_i est un continu (ou un point) contenu dans BD. On pose $\Delta_i = \Gamma_i + B_i^*$, $A_i = (a_i)$, $B_i^* = B_i$ si B_i se réduit à un point, $B_i^* = 0$ dans le cas contraire.

Cas IV. $\bar{\Gamma}_i = A_i + \Gamma_i + B_i$, où A_i et B_i sont des continus (dont chacun peut se réduire à un point) tels que $A_i \subset AD$, $B_i \subset BD$. On pose $\Delta_i = A_i^* + \Gamma_i + B_i^*$, où $A_i^* =$ $= A_i$ si A_i se réduit à un point, $A_i^* = 0$ dans le cas contraire, et pareillement pour B_i.

Si l'ensemble D ne contient qu'un nombre fini de points, les $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ sont les n arcs cherchés. Or on peut toujours se réduire à ce cas spécial; à ce but, il suffit évidemment d'indiquer un sousensemble fini D^* de D tel que R soit n fois connexe de A à B mod D^*. Nous allons voir qu'il suffit de poser $D^* = \sum_{i=1}^{n} (A_i^* + B_i^*)$. En effet, soit un sous-ensemble T de $R - D^*$ contenant $n - 1$ points au plus. On voit sans peine qu'il existe une valeur de i $(1 \leqq i \leqq n)$ telle que $\Delta_i T = 0$. Il existe un point $a'_i \in A_i - T$ et un point $b'_i \in B_i - T$. L'espace R étant localement connexe, il existe un arc δ_1 de a'_i à Δ_i et un arc δ_2 de b'_i à Δ_i tels que $(\delta_1 + \delta_2)\, T = 0$. L'ensemble $\delta_1 + \Delta_i + \delta_2$, sans point commun avec T, contient un arc de A à B.

19

SUR LES NOMBRES DE BETTI LOCAUX[1]

Annals of Mathematics
(2) *35* (1934), 678–701

Soit R un espace topologique arbitraire; soit a un point donné de R; soit $k = = 0, 1, 2, \ldots$. Au Chap. I, je définis le $k^{\text{ième}}$ *nombre de Betti local de R au point a*, désigné par $\beta_k(a, R)$. La signification du nombre $\beta_0(a, R)$ est très simple (v. n° 3). Si $k \geqq 1$ et si l'espace R est un polyèdre, le nombre $\beta_k(a, R)$ coïncide, comme on pourrait le démontrer sans peine, avec le nombre maximum des $(k - 1)$-cycles en a linéairement indépendants, au sens de *M. E. R. van Kampen.*[2]

Au Chap. II, je prouve deux théorèmes d'addition pour les nombres de Betti locaux. Ces théorèmes pourraient être sans peine généralisés.

Au Chap. III, je donne une nouvelle forme aux axiomes de ma théorie des variétés, exposée récemment dans ce Journal.[3] Dans la nouvelle forme, ces axiomes reposent sur la notion des nombres de Betti locaux et sur celle de la connexité locale d'ordre supérieur que j'étudie dans un autre Mémoire (cité au n° 4). En se basant sur les nouveaux axiomes, on pourrait un peu simplifier quelques démonstrations dans *Variétés.*

Soit R un espace topologique arbitraire; soit S un sous-ensemble fermé de R; soit a un point donné de S; soit $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Au Chap. IV, je définis ce qu'on pourrait appeler le $k^{\text{ième}}$ *nombre de Betti extérieur de S au point a*, désigné par $\alpha_k(a, R - S)$. Si l'espace R est régulier et localement connexe, l'ensemble S coupe l'espace R au point a localement en $\alpha_0(a, R - S) + 1$ régions (v. n° 25); autrement

[1] J'ai exposé quelques résultats de ce Mémoire dans une conférence que j'ai faite le 5 juillet 1933 dans le Math. Kolloquium de M. Menger.

Après avoir terminé ce travail j'ai pris connaissance de deux notes de M. P. Alexandroff: *Sur les propriétés locales des ensembles fermés* (C. R. Paris 198, p. 227, 15 janvier 1934) et *Les groupes de Betti en un point* (ibidem, p. 315, 22 janvier 1934) qui semblent avoir beaucoup de points de contact avec mes recherches.

[2] *Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze*, den Haag 1929, p. 26.

[3] *Théorie générale des variétés et de leurs théorèmes de dualité*, Annals of Math., t. 34, 1933, p. 621–730, [15]. Cité: *Variétés.*

dit S détermine en a une "lokale Zerschneidung" de R d'ordre $\alpha_0(a, R - S) + 1$ au sens de M. K. Zarankiewicz.[4]

Au Chap. V, je donne une localisation du théorème de dualité: *Si S est un sous-ensemble fermé de l'espace euclidien R_n à n dimensions,*[5] *on a en chaque point a de S: $\beta_r(a, S) = \alpha_q(a, R - S)$, $0 \leqq p \leqq n - 1$, $q = n - p - 1$.* En particulier l'ordre de coupure locale est un invariant topologique (local) de S.

Soit S un sous-ensemble fermé de R_{n-1}; soit a un point de S. Si a est un point intérieur de S, on a $\beta_{n-1}(a, S) = 1$; si a est un point frontière de S, on a $\beta_{n-1}(a, S) = 0$ (Cf. n° 7, 6° et 7°). Donc, *si l'on immerge S dans un R_n, a est un point de coupure locale si et seulement si c'est un point intérieur de S, et l'ordre de coupure locale est alors égal à deux.*

Un cas particulier ($R = R_n$, $k = n - 1$) du théorème du n° 5 est: *Soient A et B deux sous-ensembles fermés de R_n; soit a un point de AB; supposons que a soit un point intérieur de $A + B$, mais un point frontière de A et de B. Alors AB coupe R_n localement en a.*

Un cas particulier ($R = R_n$, $k = n - 1$) du théorème du n° 6 est: *Soient A et B deux sous-ensembles fermés de R_n; soit a un point de AB. Si AB coupe R_n localement en a, tandis que ni A ni B ne coupe R_n localement en a, alors a est un point intérieur de $A + B$.*

Un cas particulier ($R = R_2$, $k = 0$) du théorème du n° 5 est: *Soient A et B deux sous-ensembles fermés du plan; soit a un point de AB. Si ni A ni B ne coupent localement le plan en a, tandis que $A + B$ coupe localement le plan en a, alors ou bien a est un point isolé de AB (et alors $A + B$ coupe le plan localement en a en deux régions), ou bien chaque entourage de a contient une infinité de composantes de AB.*

Un cas particulier ($R = R_2$, $k = 0$) du théorème du n° 5 est: *Soient A et B deux sous-continus du plan; soit a un point de AB. Si a est un point isolé de AB, alors $A + B$ coupe le plan localement en a. Si chaque entourage de a contient une infinité de composantes de AB, alors a est un point de coupure locale du plan d'ordre infini pour $A + B$.*

Les deux derniers théorèmes constituent dans un certain sens une localisation des deux théorèmes classiques de *Janiszewski*.[6] Une localisation entièrement différente de ces théorèmes de *Janiszewski* se trouve au Mémoire cité au n° 4.

Je suppose dans tous ce Mémoire que les coefficients des cycles et des homologies appartiennent à $\mathfrak{R}$, où $\mathfrak{R}$ signifie ou bien l'ensemble de tous les nombres rationnels ou bien l'ensemble de tous les entiers réduits mod p, p étant un nombre premier donné d'avance.

Pour les domaines $\mathfrak{R}$ ici considérés, les théorèmes locaux de dualité constituent

[4] *Über die lokale Zerschneidung der Ebene*, Monatshefte f. Math. u. Phys., t. 39, 1932, p. 371.
[5] Le théorème est même démontré pour des espaces plus généraux que R_n.
[6] *Sur les coupures locales faites par les continus*, Práce mat.-fiz., t. 29, 1913, pp. 11—63.

une généralisation du *allgemeiner dimensionstheoretischer Rechtfertigungssatz* de *M. P. Alexandroff.*[7]

Quant à la théorie de l'homologie, je m'appuie sur mon Mémoire *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque,*[8] cité: *Homologie.* Comme dans *Variétés* (p. 622, I), j'écrit C^p(p. ex.) au lieu de $\{C^p(\mathfrak{U})\}$ (*Homologie*, II, 20). Donc C^p est l'ensemble de tous les $C^p(\mathfrak{U})$, $\mathfrak{U}$ parcourant les réseaux[9] dans R. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau; soit $C^0(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} r_i U_i (r_i \in \mathfrak{R}, U_i \in \mathfrak{U})$ un $(0, \mathfrak{U})$-cycle. Je pose $J[C^0(\mathfrak{U})] = \sum_{i=1}^{\alpha_0} r_i$. Si C^0 est un $(0, R)$-cycle absolu, le nombre $J[C^0(\mathfrak{U})]$ est, comme on le voit sans peine, indépendant du réseau $\mathfrak{U}$; je désigne ce nombre par $J(C^0)$.

I.

1. Soit R un espace topologique (*Homologie*, III, 1). Soit S un sous-ensemble fermé de R. Soit a un point donné de S. Soit $k = 0, 1, 2, \dots$ Les lettres U, V, W désignent des entourages[10] de a dans R.

Soit $U \supset V$. Soit $\mathfrak{B}_k(V, U; S)$ l'ensemble de tous les (k, R)-cycles mod $(S - U)$ dans S; deux éléments C^k et D^k de $\mathfrak{B}_k(V, U; S)$ seront considérés comme égaux si et seulement si $C^k \sim D^k \bmod (S - V)$ dans S. L'ensemble $\mathfrak{B}_k(V, U; S)$ est un module (*Homologie*, I, 1). Désignons par $\beta_k(V, U; S)$ le rang (*Homologie*, I, 3) de ce module si ce rang est fini; dans le cas contraire posons $\beta_k(V, U; S) = \infty$.

Pour $W \subset V \subset U$ on a évidemment $\beta_k(W, U; S) \leqq \beta_k(V, U; S)$.

Il en résulte que, l'entourage U de a étant donné, le nombre $\beta_k(V, U; S)$ a une valeur fixe (indépendante de V) pour tous les voisinages $V \subset U$ de a suffisamment petits; désignons par $\beta_k(a, U; S)$ cette valeur fixe.

Pour $W \subset V \subset U$ on a évidemment $\beta_k(W, V; S) \geqq \beta_k(W, U; S)$. On en déduit sans peine que $\beta_k(a, V; S) \geqq \beta_k(a, U; S)$ pour $V \subset U$. Par suite trois cas sont à distinguer:

1° Il existe un nombre fini m $(= 0, 1, 2, \dots)$ tel que $\beta_k(a, U; S) = m$ pour tous les entourages U de a suffisamment petits; dans ce cas on pose $\beta_k(a, S) = m$.

2° Le nombre $\beta_k(a, U; S)$ est fini pour tous les entourages U de a, mais si m est un nombre fini arbitrairement donné, on a $\beta_k(a, U; S) > m$ pour tous les entourages U de a suffisamment petits; dans ce cas on pose $\beta_k(a, S) = \omega$.

3° On a $\beta_k(a, U; S) = \infty$ pour tous les entourages U de a suffisamment petits; dans ce cas on pose $\beta_k(a, S) = \infty$.

[7] *Dimensionstheorie*, Math. Annalen, t. 106, pp. 161–238 (v. p. 208).

[8] Fund. Math., t. 19, 1932, pp. 149–183, [7].

[9] La famille fondamentaie de réseaux (*Homologie*, II, 1) est dans tout ce Mémoire celle de tous les réseaux ouverts (*Homologie*, III, 2).

[10] *Entourage* d'un point ou d'un sous-ensemble est un ensemble ouvert contenant le point ou le sous-ensemble considéré.

2. De *Homologie*, III, 3 – 11 on déduit sans peine que le nombre $\beta_k(a, S)$ ne dépend nullement de l'espace R, mais seulement du nombre k, du point a et (localement) de l'espace S.

3. *Si l'espace R est régulier au point a,*[11] *le nombre $\beta_0(a, S)$ a toujours une des trois valeurs* 0, 1, ∞: *On a $\beta_0(a, S) = 0$ si et seulement s'il existe un entourage U de a tel que chaque composante de S a un point commun avec $R - U$. On a $\beta_0(a, S) = 1$ si et seulement si a est un point isolé de l'espace S. On a $\beta_0(a, S) = \infty$ si et seulement si, pour chaque entourage U de a, une infinité de composantes de S sont contenues dans SU.*

Démonstration. Si a est un point isolé de S, on a évidemment $\beta_0(a, S) = 1$, car $\beta_0(V, U; S) = 1$ si U est tel que $SU = (a)$. S'il existe un entourage U de a tel que chaque composante de S rencontre $R - U$, d'après *Homologie*, III, 16 on a $\beta_0(W, V; S) = 0$ si $V \subset U$, d'où $\beta_0(a, S) = 0$. Ces deux cas étant exclus, pour chaque entourage U de a l'ensemble US contient une infinité de composantes de S et donc aussi une infinité de quasicomposantes de S. L'espace R étant régulier au point a, il existe un entourage V de a tel que $\bar{V} \subset U$. L'ensemble VS contient une infinité de quasicomposantes de S; chaque telle quasicomposante est évidemment essentielle mod $(S - U)$ au sens de *Homologie*, III, 15, d'où $\beta_0(V, U; S) = \infty$ d'après *Homologie*, III, 17. Donc $\beta_0(a, S) = \infty$.

II.

4. **Lemme.** *Soit R un espace complètement normal* (*Homologie*, III, 19). *Soient φ et χ deux sous-ensembles fermés de R. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau donné dans R. Il existe un affinement $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{U}$ tel que, si une $(p, \mathfrak{B})$-chaîne est contenue dans φ et dans χ* (*Homologie*, II, 5), *elle est aussi contenue dans $\varphi\chi$.*

La démonstration se trouve au n° 12 de mon Mémoire *Sur la connexité locale d'ordre supérieur* (à paraître dans Compositio Mathematica), [63].

5. *Soit R un espace complètement normal. Soit $R = A + B$, A et B étant des sous-ensembles fermés de R. Soit $k = 0, 1, 2, \ldots$ Soit $a \in AB$. Soit $\beta_{k+1}(a, A) = \beta_{k+1}(a, B) = 0$. Alors $\beta_k(a, AB) \geqq \beta_{k+1}(a, R)$.*

Démonstration. On voit sans peine qu'il suffit de prouver que, U étant un entourage donné de a, l'inégalité $\beta_{k+1}(a, U; R) \geqq m$ $(= 0, 1, 2, \ldots)$ entraîne que $\beta_k(a, U; AB) \geqq m$. Soit donc $\beta_{k+1}(a, U; R) \geqq m$ et soit $V \subset U$ un entourage de a. Evidemment, il suffit d'en déduire que $\beta_k(V, U; AB) \geqq m$.

Puisque $\beta_{k+1}(a, A) = 0$, on a $\beta_{k+1}(a, V; A) = 0$. Donc il existe un entourage $W_1 \subset V$ de a tel que $\beta_{k+1}(W_1', V; A) = 0$ pour chaque entourage $W_1' \subset W_1$ de a. Pareille-

[11] Cela signifie, comme on sait, que chaque entourage U de a contient un entourage V de a tel que $\bar{V} \subset U$.

ment on voit qu'il existe un entourage $W_2 \subset V$ de a tel que $\beta_{k+1}(W_2', V; B) = 0$ pour chaque entourage $W_2' \subset W_2$ de a. Posons $W = W_1 W_2$ de manière que $\beta_{k+1}(W, V; A) = \beta_{k+1}(W, V; B) = 0$.

Puisque $\beta_{k+1}(a, U; R) \geqq m$, on a $\beta_{k+1}(W, U; R) \geqq m$. Donc il existe des $(k+1, R)$-cycles $C_i^{k+1} \bmod (R - U)$ $(1 \leqq i \leqq m)$ tels que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{k+1} \sim 0 \bmod$ $(R - W)$ $(r_i \in \mathfrak{R})$ entraîne que $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Donc il existe un réseau $\mathfrak{U}_1$ tel que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod (R - W)$ entraîne que $r_1 = \ldots = r_m = 0$.

Soit $\mathfrak{U}_2$ un affinement de $\mathfrak{U}_1$ normal (*Homologie*, II, 15 et 16) rel. aux cycles $\bmod (B - V)$ dans B. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_3$ de $\mathfrak{U}_2$ d'après 4, en y posant $\varphi = B, \chi = R - V$. Soit $\mathfrak{U}_4$ un affinement de $\mathfrak{U}_3$ normal rel. aux cycles $\bmod (A - V)$ dans A. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_5$ de $\mathfrak{U}_4$ d'après 4, en y posant $\varphi = A, \chi =$ $= R - V$. Soit $\mathfrak{U}_6$ un affinement de $\mathfrak{U}_5$ normal rel. aux cycles $\bmod (AB - U)$ dans AB. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_7$ de $\mathfrak{U}_6$ d'après 4, en y posant $\varphi = AB, \chi = R - U$ ainsi qu'un affinement $\mathfrak{U}_8$ de $\mathfrak{U}_7$ de nouveau d'après 4, mais en y posant $\varphi = A$, $\chi = B$. Soit $\pi_{21} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1), \ldots, \pi_{87} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_8, \mathfrak{U}_7)$, $\pi_{31} = \pi_{21}\pi_{32} \ldots$

Comme $A + B = R$, on peut poser $C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_8) = C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8)$ $(1 \leqq i \leqq$ $\leqq m)$, où $C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \subset A$, $C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \subset B$. Soit $\Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8)$ cette partie de la $(k, \mathfrak{U}_8)$-chaîne $F\, C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8)$ dont les simplexes sont $\neq 0 \bmod (R - U)$. Comme $C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \to 0$ $\bmod (R - U)$, on a $F\, C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) = F\, C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \bmod (R - U)$; donc $\Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8)$ est aussi cette partie de la chaîne $F\, C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8)$ dont les simplexes sont $\neq 0 \bmod (R - U)$. Comme $C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \subset A$, on a $\Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) \subset A$. Comme $C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \subset B$, on a $\Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) \subset B$. D'après la définition de $\mathfrak{U}_8$ il en résulte que $\Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) \subset AB$, d'où $F\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_3) \subset AB$. Comme $\Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) = F\, C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \bmod (R - U)$, on a $F\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) \subset R - U$. Donc $F\pi_{87}\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) \subset AB$, $F\pi_{87}\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) \subset R - U$, d'où $F\pi_{87}\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) \subset AB - U$ d'après la définition de $\mathfrak{U}_7$. Donc $\pi_{86}\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8)$ est un $(k, \mathfrak{U}_6)$-cycle $\bmod (AB - U)$ dans AB. D'après la définition de $\mathfrak{U}_6$, $\pi_{85}\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8)$ est un $(k, \mathfrak{U}_5)$-cycle essentiel $\bmod (AB - U)$ dans AB.

Il ne reste qu'à démontrer que les $(k, \mathfrak{U}_5)$-cycles $\pi_{85}\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8)$ $(1 \leqq i \leqq m)$ ne sont liés par aucune homologie $\bmod (AB - V)$ dans AB, car alors (*Homologie*, II, 28) $\beta_k(V, U; AB) \geqq m$, c. q. f. d.

Soit donc $\sum_{i=1}^{m} r_i \pi_{85}\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) \sim 0 \bmod (AB - V)$ dans AB $(r_i \in \mathfrak{R})$; on doit prouver que $r_1 = \ldots = r_m = 0$. L'homologie qui vient d'être écrite signifie qu'il existe une $(k+1, \mathfrak{U}_5)$-chaîne $D^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$ dans AB telle que

$$(1) \quad F\, D^{k+1}(\mathfrak{U}_5) = \pi_{85} \sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) \bmod (AB - V).$$

Or $\sum_{i=1}^{m} r_i\, C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \to \sum_{i=1}^{m} r_i \,.\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) \bmod (R - U)$. Donc la $(k+1, \mathfrak{U}_5)$-chaîne

$\pi_{85} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - D^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$ est située dans A et sa frontière est située dans $(R - V)$.

D'après la définition de $\mathfrak{U}_5$, on a donc $F\pi_{85} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - F D^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \subset$ $\subset A - V$. Donc $\pi_{84} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{54} D^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$ est un $(k + 1, \mathfrak{U}_4)$-cycle mod $(A - V)$ dans A. D'après la définition de $\mathfrak{U}_4$, $\pi_{83} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{53} D^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$ est un $(k + 1, \mathfrak{U}_3)$-cycle essentiel mod $(A - V)$ dans A et par suite

(2) $\pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} D^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$

est un $(k + 1, U_1)$-cycle essentiel mod $(A - V)$ dans A. De plus $\sum_{i=1}^{m} r_i C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \to$ $\to \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8)$ mod $(R - U)$. On voit donc, en tenant compte aussi de (1), que la $(k + 1, \mathfrak{U}_3)$-chaîne $\pi_{83} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{53} D^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$ est située dans B et que sa frontière est située dans $(R - V)$. D'après la définition de $\mathfrak{U}_3$, on a donc $F\pi_{83} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - F\pi_{53} D^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \subset B - V$. Donc $\pi_{82} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{52}$. $D^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$ est un $(k + 1, \mathfrak{U}_2)$-cycle mod $(B - V)$ dans B. D'après la définition de $\mathfrak{U}_2$

(3) $\pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} D^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$

est un $(k + 1, \mathfrak{U}_1)$-cycle essentiel mod $(B - V)$ dans B.

Comme $\beta_{k+1}(W, V; A) = 0$, il résulte de (2) (en vertu de *Homologie*, II, 28) que $\pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} D^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \sim 0$ mod $(A - W)$ dans A. Comme $\beta_{k+1}(W, V; B) = 0$, il résulte de (3) que $\pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} D^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \sim 0$ mod $(B - W)$ dans B. Donc il existe des $(k + 2, \mathfrak{U}_1)$-chaînes $E_1^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \subset A$ et $E_2^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \subset B$ telles que

$$E_1^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} D^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \bmod (A - W),$$

$$E_2^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} D^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \bmod (B - W).$$

Donc $E_1^{k+2}(\mathfrak{U}_1) - E_2^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_8)$ mod $(R - W)$, d'où $\pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i$ . . $C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \sim 0$ mod $(R - W)$. Or, C_i^{k+1} étant un $(k + 1, R)$-cycle mod $(R - U)$, on a $\pi_{81}\, C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \sim C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \bmod (R - U) \subset (R - W)$. Donc $\sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \sim 0$ $\bmod (R - W)$. D'après la définition de $\mathfrak{U}_1$, il en résulte que $r_1 = \ldots = r_m = 0$, c. q. f. d.

6. *Soit R un espace complètement normal. Soit $R = A + B$, A et B étant des sous-ensembles fermés de R. Soit $a \in AB$. Soit $k = 0, 1, 2, \ldots$ Soit $\beta_k(a, A) = \beta_k(a, B) = 0$. Alors $\beta_k(a, AB) \leqq \beta_{k+1}(a, R)$.*

Démonstration. On voit sans peine qu'il suffit de prouver que, U étant un entourage donné de a, il existe un entourage $V \subset U$ de a tel que l'inégalité $\beta_k(a, U; AB) \geqq m$ $(= 0, 1, 2, \ldots)$ entraîne que $\beta_{k+1}(a, V; R) \geqq m$. Soit donc $\beta_k(a, U; AB) \geqq m$. Comme $\beta_k(a, A) = \beta_k(a, B) = 0$, on a

$$\beta_k(a, U; A) = \beta_k(a, U; B) = 0\,.$$

Donc on peut choisir l'entourage $V \subset U$ de a de manière que

$$\beta_k(V, U; A) = \beta_k(V, U; B) = 0\,.$$

Il s'agit de prouver que, W étant un entourage de a contenu dans V, on a $\beta_{k+1}(W, V; R) \geqq m$.

Puisque $\beta_k(a, U; AB) \geqq m$, on a $\beta_k(W, U; AB) \geqq m$. Donc il existe des (k, R)-cycles $\Gamma_i^k \bmod (AB - U)$ dans AB $(1 \leqq i \leqq m)$ tels que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^k \sim 0$ $\bmod (AB - W)$ dans AB $(r_i \in \mathfrak{R})$ entraîne que $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Donc il existe un réseau $\mathfrak{U}_1$ tel que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod (AB - W)$ dans AB entraîne que $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Déterminons d'après 4 d'abord un affinement $\mathfrak{U}_2$ de $\mathfrak{U}_1$ et ensuite un affinement $\mathfrak{U}_3$ de $\mathfrak{U}_2$, en y posant dans le premier cas $\varphi = AB$, $\chi = R - W$ et dans le second $\varphi = A$, $\chi = B$. Soit $\mathfrak{U}_4$ un affinement de $\mathfrak{U}_3$ normal rel. aux cycles $\bmod (R - V)$ dans R. Soit $\pi_{21} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{32} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{43} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_3)$, $\pi_{42} = \pi_{32}\pi_{43}, \ldots$ Puisque les Γ_i^k $(1 \leqq i \leqq m)$ sont des (k, R)-cycles $\bmod (AB - U)$ dans AB, ce sont aussi des (k, R)-cycles $\bmod (A - U)$ dans A. Or $\beta_k(V, U; A) = 0$, de manière que $\Gamma_i^k \sim 0 \bmod (A - V)$ dans A. Pareillement $\Gamma_i^k \sim 0 \bmod (B - V)$ dans B, car $\beta_k(V, U; B) = 0$. Donc il existe des $(k + 1, \mathfrak{U}_4)$-chaînes $C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_4) \subset A$ et $C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_4) \subset B$ telles que

$$(1) \quad C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_4) \to \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_4) \bmod (A - V)\,, \quad C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_4) \to \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_4) \bmod (B - V).$$

Posons $C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_4) = C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_4) - C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_4)$. Alors $C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_4) \to 0 \bmod (R - V)$ de sorte que, d'après la définition de $\mathfrak{U}_4$, $\pi_{43}\, C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_4)$ est un $(k + 1, \mathfrak{U}_3)$-cycle essentiel $\bmod (R - V)$.

Il ne reste qu'à démontrer que les $\pi_{43}\, C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_4)$ $(1 \leqq i \leqq m)$ ne sont liés par aucune homologie $\bmod (R - W)$, car alors (v. *Homologie*, II, 28) on a $\beta_{k+1}(W, V; R) \geqq m$, c. q. f. d.

Soit donc $\pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_4) \sim 0 \bmod (R - W)$ $(r_i \in \mathfrak{R})$; il s'agit d'en déduire que $r_1 = \ldots = r_m = 0$. L'homologie qui vient d'être écrite signifie qu'il existe une $(k+2, \mathfrak{U}_3)$-chaîne $D^{k+2}(\mathfrak{U}_3)$ telle que

(2) $D^{k+2}(\mathfrak{U}_3) \to \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_4) \quad \bmod (R - W)$.

Puisque $R = A + B$, on peut poser $D^{k+2}(\mathfrak{U}_3) = D_1^{k+2}(\mathfrak{U}_3) - D_2^{k+2}(\mathfrak{U}_3)$, où $D_1^{k+2}(\mathfrak{U}_3) \subset A$, $D_2^{k+2}(\mathfrak{U}_3) \subset B$. Il résulte de (1) et (2) que

(3) $\pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_4) \;-\; F\, D_1^{k+2}(\mathfrak{U}_3) \;=\; \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_4) \;-\; F\, D_2^{k+2}(\mathfrak{U}_3)$ $\bmod (R - W)$. Désignons par $E^{k+1}(\mathfrak{U}_3)$ cette partie d'un (et donc aussi de l'autre) membre de (3) dont les simplexes sont $\neq 0 \bmod (R - W)$. Alors $E^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \subset A$, $E^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \subset B$, d'où $D^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \subset AB$ d'après la définition de $\mathfrak{U}_3$. En outre

$$F\, D_1^{k+2}(\mathfrak{U}_3) = \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_4) - E^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \quad \bmod (R - W)\,,$$

d'où $\pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_4) - E^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \to 0 \bmod (R - W)$. En tenant compte de (1), on en déduit que $F\, E^{k+1}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_4) \subset R - W$. Donc la $(k, \mathfrak{U}_2)$-chaîne

(4) $F\pi_{32}\, E^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \;-\; \pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_4)$

est située dans $(R - W)$. Puisque $E^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \subset AB$, $\Gamma_k^i(\mathfrak{U}_4) \subset AB$, la chaîne (4) est aussi située dans AB. D'après la définition de $\mathfrak{U}_2$, la chaîne (4) est donc située dans $AB - W$. Donc $\pi_{32}\, E^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \to \pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_4) \bmod (AB - W)$, d'où

$$\pi_{31}\, E^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \to \pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_4) \bmod (AB - W)\,.$$

Donc $\pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_4) \sim 0 \bmod (AB - W)$ dans AB. Or, Γ_i^k étant un (k, R)-cycle $\bmod (AB - U)$ dans AB, on a $\pi_{41}\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_4) \sim \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_1) \bmod (AB - U)$ dans AB. Comme $W \subset U$, il en résulte que $\sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod (AB - W)$ dans AB. D'après la définition de $\mathfrak{U}_1$, on en déduit que $r_1 = \ldots = r_m = 0$, c. q. f. d.

III.

7. Soit $n = 1, 2, 3, \ldots$ Soit R un espace topologique. Soit $S \subset R$. Nous dirons que R est *une variété à n dimensions mod S d'ordre* 0, ou *une* $V_0^n(S)$, si les axiomes suivants sont vérifiés:

1°. *R est un espace bicompact.*[12]
2°. *Chaque sous-ensemble ouvert de R est un F_σ dans R.*
3°. *L'ensemble S est fermé dans R.*
4°. *dim* $(R - S) = n$.
5°. *R est localement connexe d'ordre n rel. à* $\mathfrak{N}$ *à chaque point* $x \in R - S$.[13]
6°. *Pour* $x \in R - S$ *on a* $\beta_n(x, R) = 1$.
7°. *A étant un sous-ensemble fermé de R, on a* $\beta_n(x, A) = 0$ *pour chaque* $x \in A \,.\, \overline{R - A} - S$.

8. *Soit* $S \subset T = \overline{T} \subset R$. *Si R est une* $V_0^n(S)$, *R est évidemment aussi une* $V_0^n(T)$.

9. *Soit R un espace topologique; soit* $S \subset R$, *R est une* $V_0^n(S)$ *si et seulement s'il satisfait aux axiomes* A_1, A_2, A_3, A_4, *B*, D_1, D_2, *E énoncés dans Variétés, nos.* 1, 2, 3, 7, 9, 11, 12, 13.

Démonstration. Les axiomes A_1, A_2, A_3, A_4, B disent la même chose que les axiomes 1° — 5°. On doit donc déduire d'abord la validité de D_1, D_2, et E en supposant 1° — 7°, ce qui sera fait aux n^{os} 9.11 (pour D_1), 9.12 (pour D_2) et 9.13 (pour E), et ensuite la validité de 6° et 7° en supposant A_1, A_2, A_3, A_4, B, D_1, D_2, E, ce qui sera fait aux n^{os} 9.21 (pour 6°) et 9.22 (pour 7°).

9.11 Soit Γ^{n-1} un $(n - 1, R)$-cycle du type t_2 dans A (*Variétés*, 10). Soit H le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$ (*Variétés* 10.3) de manière que $H = \overline{H} \subset R - S$. On doit prouver (*Variétés*, 11) que l'ensemble $H - A$ est ouvert. Supposons le contraire. Il existe donc un point $a \in (H - A)\overline{R - H} \subset H \,.\, \overline{R - H} - S$. D'après l'axiome 7° on a $\beta_n(a, H) = 0$. Or soit C^n le cycle relatif correspondant à Γ^{n-1} d'après *Variétés* 10.1. Donc C^n est un (n, R)-cycle mod A dans H et $F\, C^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans A pour chaque réseau $\mathfrak{U}$. Soit U un entourage de a si petit que $UA = 0$. Puisque $\beta_n(a, H) = 0$, on a $\beta_n(a, U; H) = 0$. Donc il existe un entourage $V \subset U$ de a tel que $\beta_n(V, U; H) = 0$. Or $A \subset H - U$, de sorte que C^n est un (n, R)-cycle mod $(H - U)$ dans H. Comme $\beta_n(V, U; H) = 0$, on a $C^n \sim 0 \bmod (H - V)$ dans H. Donc il existe pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ une $(n + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $M^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset H$ et une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $D^n(\mathfrak{U}) \subset H - V$ telles que $M^{n+1}(\mathfrak{U}) \to C^n(\mathfrak{U}) - D^n(\mathfrak{U}) \to 0$, d'où $F\, D^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans A. Or ceci signifie qu'il existe pour chaque $\mathfrak{U}$ une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $E^n(\mathfrak{U}) \subset A$ telle que $D^n(\mathfrak{U}) - E^n(\mathfrak{U}) \to \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$, d'où $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $(H - V) + A \subset H$. D'après la définition de H il en résulte que $a \in H - V$, ce qui est une contradiction.

9.12. Soit $a \in R - S$. On doit prouver (*Variétés*, 12) que le point a est situé à l'intérieur d'un $(n - 1, R)$-cycle du type t_2. Soit P_2 un sommet du réseau gén. $\mathfrak{P}_2$ (*Variétés*, 9.2) contenant le point a. D'après l'axiome 6° on a $\beta_n(a, R) = 1$ d'où,

[12] Cela signifie: 1° a et b étant deux points distincts de R, il existe des ensembles ouverts U et V tels que $a \in U$, $b \in V$, $UV = 0$; 2° de chaque famille d'ensembles ouverts recouvrant R on peut extraire une famille finie recouvrant R.

[13] Cela signifie (v. le n° 18 du Mémoire cité au n° 4): Chaque entourage P de x contient un entourage Q de x tel que $\Gamma^n \sim 0$ dans $\overline{P}$ pour chaque (n, R)-cycle absolu Γ^n dans $\overline{Q}$.

comme on le voit sans peine, $\beta_n(a, \bar{P}_2) = 1$. Donc il existe un entourage $U \subset P_2$ de a tel que $\beta_n(a, U; \bar{P}_2) = 1$. Donc il existe un entourage $V \subset U$ de a tel que $\beta_n(W, U; \bar{P}_2) = 1$ pour chaque entourage $W \subset V$ de a. En particulier $\beta_n(V, U; \bar{P}_2) = 1$ de sorte qu'il existe un (n, R)-cycle $C^n \bmod (\bar{P}_2 - U)$ dans $\bar{P}_2$ qui n'est pas $\sim 0 \bmod (\bar{P}_2 - V)$ dans $\bar{P}_2$, tandis que chaque (n, R)-cycle $\bmod (\bar{P}_2 - U)$ dans $\bar{P}_2$ est $\sim r\, C^n (r \in \mathfrak{R}) \bmod (\bar{P}_2 - V)$ dans $\bar{P}_2$ et par suite aussi $\bmod (\bar{P}_2 - W)$ dans $\bar{P}_2$ pour chaque entourage $W \subset V$ de a. Comme $\beta_n(W, U; \bar{P}_2) = 1$, il en résulte que C^n n'est $\sim 0 \bmod (\bar{P}_2 - W)$ dans P pour aucun choix de $W \subset V$. Pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ soit $\Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}) = F\, C^n(\mathfrak{U})$. C^n étant un (n, R)-cycle $\bmod (\bar{P}_2 - U)$ dans $\bar{P}_2$, on voit sans peine que Γ^{n-1} est un $(n - 1, R)$-cycle absolu dans $(\bar{P}_2 - U)$. Evidemment $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{P}_2$; donc (*Variétés*, 10) Γ^{n-1} est un $(n - 1, R)$-cycle du type t_2 dans $A = \bar{P}_2 - U$. Soit H le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$. On doit prouver que $a \in H - A$. Or $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{P}_2$, de sorte que (*Variétés* 10.3) $H \subset \bar{P}_2$. Supposons par impossible que le point a n'appartienne pas à $H - A$. Alors il existe un entourage $W \subset V$ de a tel que $WH = 0$, d'où $H \subset \bar{P}_2 - W$. Or $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans H d'après la définition de H, de sorte que pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ il existe une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $D^n(\mathfrak{U}) \subset H$ telle que $F\, D^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans $A = \bar{P}_2 - U$, d'où $F[C^n(\mathfrak{U}) - - D^n(\mathfrak{U})] \sim 0$ dans $\bar{P}_2 - U$. Donc il existe une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $E^n(\mathfrak{U}) \subset \bar{P}_2 - U$ telle que $C^n(\mathfrak{U}) - D^n(\mathfrak{U}) - E^n(\mathfrak{U}) \to 0$. D'après *Homologie*, II, 21 on peut s'arranger de façon que $\{C^n(\mathfrak{U}) - D^n(\mathfrak{U}) - E^n(\mathfrak{U})\}$ soit un (n, R)-cycle dans $\bar{P}_2$. Or $P_2 \in \mathfrak{P}_2$, de sorte que $C^n(\mathfrak{U}) - D^n(\mathfrak{U}) - E^n(\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $\bar{P}_2$ d'après *Variétés*, 9.1–9.3. Donc il existe pour chaque $\mathfrak{U}$ une $(n + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $M^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset \bar{P}_2$ telle que $C^n(\mathfrak{U}) = = F\, M^{n+1}(\mathfrak{U}) + D^n(\mathfrak{U}) + E^n(\mathfrak{U})$. Or $D^n(\mathfrak{U}) \subset H \subset \bar{P}_2 - W$, $E^n(\mathfrak{U}) \subset \bar{P}_2 - U \subset \subset \bar{P}_2 - W$, de sorte que $C^n \sim 0 \bmod (\bar{P}_2 - W)$ dans $\bar{P}_2$, ce qui est une contradiction.

9.13. Soit $a \in R - S$; soit Q un entourage de a. D'après l'axiome 6° on a $\beta_n(a, R) = = 1$ et par suite aussi $\beta_n(a, \bar{Q}) = 1$. Donc il existe un entourage $Q_1 \subset Q$ de a tel que $\beta_n(a, Q_2; \bar{Q}) = 1$ pour chaque entourage $Q_2 \subset Q_1$ de a. On peut supposer que Q_1 fasse partie d'un sommet du réseau gén. $\mathfrak{P}_2$ (*Variétés*, 9.3). Soit Q_2 un entourage de a contenu dans Q_1. Comme $\beta_n(a, Q_2; \bar{Q}) = 1$, il existe un entourage Q_3 de a tel que $\beta_n(Q_3, Q_2; \bar{Q}) = 1$.

Soient Γ_1^{n-1}, Γ_2^{n-1} deux $(n - 1, R)$-cycles absolus dans $(\bar{Q}_1 - Q_2)$ qui soient ~ 0 dans $\bar{Q}_1$. Il suffit de prouver (*Variétés*, 13) qu'il existe deux nombres $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$, dont un au moins $\neq 0$, tels que $r_1 \Gamma_1^{n-1} + r_2 \Gamma_2^{n-1} \sim 0$ dans $(\bar{Q} - Q_3)$. Soient C_1^n, C_2^n les cycles relatifs correspondant a Γ_1^{n-1}, Γ_2^{n-1} d'après *Variétés*, 10.1. Ce sont donc des (n, R)-cycles $\bmod (\bar{Q}_1 - Q_2)$ dans $\bar{Q}_1$ tels que $F\, C_i^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans $(\bar{Q}_1 - Q_2)$ pour $i = 1, 2$ et pour chaque réseau $\mathfrak{U}$. Les C_i^n étant des (n, R)-cycles $\bmod (\bar{Q}_1 - Q_2)$ dans $\bar{Q}_1$, l'équation $\beta_n(Q_3, Q_2; \bar{Q}) = 1$ entraîne qu'il existe deux nombres $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$, dont un au moins $\neq 0$, tels que $r_1 C_1^n + r_2 C_2^n \sim 0 \bmod (\bar{Q} - Q_3)$ dans $\bar{Q}$. Donc il existe pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ une $(n + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $M^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset \bar{Q}$ et une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $D^n(\mathfrak{U}) \subset \bar{Q} - Q_3$ telles que

$$M^{n+1}(\mathfrak{U}) \to r_1\, C_1^n(\mathfrak{U}) + r_2\, C_2^n(\mathfrak{U}) - D^n(\mathfrak{U}) \to 0\,.$$

Or $F\,C_i^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans $\bar{Q}_1 - Q_2 \subset \bar{Q} - Q_3$, de sorte qu'il existe deux $(n, \mathfrak{U})$-chaînes $E_i^n(\mathfrak{U}) \subset \bar{Q} - Q_3$ $(i = 1, 2)$ telles que $F\,C_i^n(\mathfrak{U}) = \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{U}) + F\,E_i^n(\mathfrak{U})$, d'où $r_1\,\Gamma_1^{n-1}(\mathfrak{U}) + r_2\,\Gamma_2^{n-1}(\mathfrak{U}) = F[D^n(\mathfrak{U}) - r_1\,E_1^n(\mathfrak{U}) - r_2\,E_2^n(\mathfrak{U})]$, donc $r_1\Gamma_1^{n-1} + r_2\Gamma_2^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{Q} - Q_3$, c. q. f. d.

9.21. Soit $a \in R - S$. On doit prouver que $\beta_n(a, R) = 1$. Si l'on avait $\beta_n(a, R) > 1$, il existerait un entourage U de a tel que $\beta_n(V, U; R) > 1$ pour chaque entourage $V \subset U$ de a. Or c'est impossible d'après *Variétés*, 14.1. Donc il suffit de prouver que $\beta_n(a, R) \geqq 1$.

D'après l'axiome D_2 il existe un $(n - 1, R)$-cycle Γ^{n-1} du type t_2 dans A tel que le point a appartient à l'intérieur de Γ^{n-1}. Soit H le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$ de sorte que $a \in H - A$. D'après l'axiome D_1, l'ensemble $H - A$ est un entourage de a. Evidemment $\beta_n(a, R) = \beta_n(a, H)$. Il suffit donc de prouver que $\beta_n(a, H) \geqq 1$. Supposons au contraire que $\beta_n(a, H) = 0$, d'où $\beta_n(a, H - A; H) = 0$. Donc il existe un entourage $V \subset H - A$ de a tel que $\beta_n(V, H - A; H) = 0$. Soit C^n le cycle relatif correspondant à Γ^{n-1} d'après *Variétés*, 10.1. Donc C^n est un (n, R)-cycle mod A dans H tel que $F\,C^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans A pour chaque réseau $\mathfrak{U}$. Comme $\beta_n(V, H - A; H) = 0$, on a $C^n \sim 0 \bmod (H - V)$ dans H. Donc il existe pour chaque $\mathfrak{U}$ une $(n + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $M^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset H$ et une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $D^n(\mathfrak{U}) \subset H - V$ telles que $M^{n+1}(\mathfrak{U}) \to C^n(\mathfrak{U}) - D^n(\mathfrak{U}) \to 0$. Or $F\,C^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans A de sorte qu'il existe une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $E^n(\mathfrak{U}) \subset A$ telle que $\Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}) = F[C^n(\mathfrak{U}) + E^n(\mathfrak{U})]$. Donc $D^n(\mathfrak{U}) + E^n(\mathfrak{U}) \to \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$, d'où $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $A + (H - V)$, donc $H = A + (H - V)$ d'après la définition de H, d'où la contradiction $a \in A + (H - V)$.

9.22. Soit A un sous-ensemble fermé de R et soit $a \in A\,.\,\overline{R - A} - S$. On doit prouver que $\beta_n(a, A) = 0$. Supposons au contraire que $\beta_n(a, A) \geqq 1$. Il en résulte que $\beta_n(a, U; A) \geqq 1$ pour chaque entourage U de a suffisamment petit. D'après *Variétés* 12.1 on peut choisir cet entourage U de manière qu'il existe un $(n - 1, R)$-cycle absolu Δ^{n-1} dans $\bar{U} - U$ tel que $\Delta^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{U}$, mais non pas $\Delta^{n-1} \sim 0$ dans un vrai sous-ensemble fermé de $\bar{U}$. D'après *Variétés*, 14.1 il existe un entourage $V \subset U$ de a tel qu'à chaque couple C^n, D^n de (n, R)-cycles mod $(R - U)$ on puisse attacher deux nombres $r, s \in \mathfrak{R}$ $(r \neq 0$ ou $s \neq 0)$ de manière que $rC^n + sD^n \sim 0 \bmod (R - V)$. On peut supposer que $\bar{V} \subset R - S$. Soit (*Variétés*, 1.2) W un entourage de a tel que $\bar{W} \subset V$. Comme $\beta_n(a, U; A) \geqq 1$, on a $\beta_n(W, U; A) \geqq 1$. Comme $a \in \overline{R - A}$, il existe un ensemble ouvert $Q \neq 0$ tel que $A\bar{Q} = 0$, $\bar{Q} \subset V$. Soit Φ la famille de tous les réseaux $\mathfrak{U}$ d'ordre mod $S \leqq n$ (*Variétés*, 7.2) et tels que 1° $u \in \mathfrak{U}$, $uS \neq 0$ entraîne que $u \subset R - V$; 2° $u \in \mathfrak{U}$, $u - V \neq 0$ entraîne que $u(Q + W) = 0$, 3° $u \in \mathfrak{U}$, $uA \neq 0$ entraîne que $uQ = 0$. On voit sans peine (v. *Variétés*, 7.4) que la famille Φ est complète (rel. à la famille fondamentale de tous les réseaux ouverts; v. *Homologie*, II, 30 et III, 2). Comme $\beta_n(W, U; A) \geqq 1$, il existe un (n, R)-cycle C^n mod $(A - U)$ dans A qui n'est pas $\sim 0 \bmod (A - W)$ dans A. Comme $\Delta^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{U}$, il existe pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $D^n(\mathfrak{U}) \subset \bar{U}$ telle que $F\,D^n(\mathfrak{U}) \sim \Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans $\bar{U} - U$. D'après *Homologie*, II, 21 on peut s'arranger de façon que $D^n = \{D^n(\mathfrak{U})\}$

soit un (n, R)-cycle mod $(\bar{U} - U)$ dans $\bar{U}$. Donc C^n et D^n sont deux (n, R)-cycles mod $(R - U)$ de manière qu'il existe deux nombres $r, s \in \mathfrak{R}$ $(r \neq 0$ ou $s \neq 0)$ tels que $rC^n + sD^n \sim 0 \bmod (R - V)$. Donc il existe pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ une $(n + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $M^{n+1}(\mathfrak{U})$ et une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $E^n(\mathfrak{U}) \subset R - V$ telles que $F\ M^{n+1}(\mathfrak{U}) = r\,C^n(\mathfrak{U}) + s\,D^n(\mathfrak{U}) - E^n(\mathfrak{U})$. Soit $\mathfrak{U} \in \Phi$. L'ordre mod S de $\mathfrak{U}$ étant $\leqq n$, chaque simplexe de $M^{n+1}(\mathfrak{U})$ contient un sommet u tel que $uS \neq 0$, d'où $u \subset R - V$; il en résulte que $M^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R - V$. Donc $r\,C^n(\mathfrak{U}) + s\,D^n(\mathfrak{U}) \subset R - V$ pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$.

Soit d'abord $s = 0$, d'où $r \neq 0$ et par suite $C^n(\mathfrak{U}) \subset R - V$ pour $\mathfrak{U} \in \Phi$. Comme $C^n(\mathfrak{U}) \subset A$ et comme aucun sommet de $\mathfrak{U} \in \Phi$ ne peut rencontrer simultanément W et $R - V$, on a $C^n(\mathfrak{U}) \subset A - W$ pour $\mathfrak{U} \in \Phi$. La famille Φ étant complète, on arrive à la contradiction que $C^n \sim 0 \bmod (A - W)$ dans A.

Passons au cas $s \neq 0$. Pour $\mathfrak{U} \in \Phi$ on a $C^n(\mathfrak{U}) \subset A$, $r\,C^n(\mathfrak{U}) + s\,D^n(\mathfrak{U}) \subset R - V$, $s \neq 0$, d'autre part un sommet de $\mathfrak{U}$ ne peut rencontrer simultanément ni A et Q, ni $R - V$ et Q. Il en résulte que pour $\mathfrak{U} \in \Phi$ aucun sommet d'un simplexe de $D^n(\mathfrak{U})$ ne peut rencontrer Q. Comme $D^n(\mathfrak{U}) \subset \bar{U}$, on a $D^n(\mathfrak{U}) \subset \bar{U} - Q$ pour $\mathfrak{U} \in \Phi$. Or $F\ D^n(\mathfrak{U}) \sim \Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans $\bar{U} - U \subset \bar{U} - Q$ de manière que $\Delta^{n-1}(\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $(\bar{U} - Q)$ pour $\mathfrak{U} \in \Phi$. La famille Φ étant complète, on arrive à la contradiction que $\Delta^{n-1} \sim 0$ dans $(\bar{U} - Q)$.

10. Soit R une $V_0^n(S)$. On dit que R est *orientable mod S* s'il existe un (n, R)-cycle G^n mod S tel que, pour $A = \bar{A} \subset R$, $R - (A + S) \neq 0$, G^n n'est $\sim$ mod S à aucun (n, R)-cycle mod S dans $(A + S)$. Un tel cycle G^n s'appelle alors un *(n, R)-cycle principal mod S*. *Orienter R mod S* signifie que l'on choisit un (n, R)-cycle principal mod S bien déterminé.

11. *G^n est un (n, R)-cycle principal mod S si et seulement si pour $A = \bar{A} \subset R$, $R - (A + S) \neq 0$ on n'a jamais $G^n \sim 0$ mod $(A + S)$.*

Démonstration. I. Supposons que $G^n \sim 0 \bmod (A + S)$. On doit prouver que $G^n \sim H^n$ mod S, H^n étant un (n, R)-cycle mod S dans $(A + S)$. Or pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ il existe une $(n + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $M^{n+1}(\mathfrak{U})$ et une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $H^n(\mathfrak{U}) \subset A + S$ telles que $M^{n+1}(\mathfrak{U}) \to G^n(\mathfrak{U}) - H^n(\mathfrak{U})$ mod S, d'où $H^n(\mathfrak{U}) \to 0$ mod S, car $G^n(\mathfrak{U}) \to 0$ mod S. D'après *Homologie*, II, 21 on peut s'arranger de façon que $H^n = \{H^n(\mathfrak{U})\}$ soit un (n, R)-cycle mod S dans $(A + S)$. Evidemment $G^n \sim H^n$ mod S.

II. Supposons que $G^n \sim H^n$ mod S, H^n étant un (n, R)-cycle mod S dans $(A + S)$. Alors évidemment $G^n \sim 0 \bmod (A + S)$.

12. *Soit $S \subset T = \bar{T} \subset R$. Evidemment*, si *$R$ est une $V_0^n(S)$ orientable mod S, R est aussi une $V_0^n(T)$ orientable mod T.*

13. *Soit R une $V_0^n(S)$. R est orientable mod S si et seulement si l'axiome F (Variétés, 16) est satisfait.*

Démonstration. I. Supposons que l'axiome F soit vérifié. Nous avons construit un (n, R)-cycle principal mod S dans *Variétés* 17–17.5.

II. Soit G^n un (n, R)-cycle principal mod S. Pour chaque $x \in R - S$, soit (v. *Variétés*, 15) $\Theta_2(x)$ la famille de tous les $(n - 1, R)$-cycles du type t_2 dans A, A étant assujetti à la condition de ne pas contenir x. On doit (*Variétés*, 15 et 16) attacher à chaque $a \in R - S$, $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(a)$ un nombre $\omega(a, \Gamma^{n-1}) \in \mathfrak{R}$ selon les conditions suivantes: 1° $\omega(a, \Gamma^{n-1}) = 0$ si et seulement si le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$ ne contient pas le point a, 2° pour $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(a)$, $r \in \mathfrak{R}$ on doit avoir $\omega(a, r\Gamma^{n-1}) = r\,\omega(a, \Gamma^{n-1})$; 3° pour $\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-2}, \Gamma_1^{n-1} + \Gamma_2^{n-1} \in \Theta_2(a)$ on doit avoir $\omega(a, \Gamma_1^{n-1} + \Gamma_2^{n-1}) = \omega(a, \Gamma_1^{n-1}) + \omega(a, \Gamma_2^{n-1})$, 4° $a \in R - S$ et $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(a)$ étant donnés, il doit exister un entourage V de a tel que $x \in V$ entraîne que $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(x)$ et que $\omega(x, \Gamma^{n-1}) = \omega(a, \Gamma^{n-1})$.

Soit donc $a \in R - S$ et soit $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(a)$ un $(n - 1, R)$-cycle du type t_2 dans A. Soit H le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$. Lorsque $a \in R - H$, soit $\omega(a, \Gamma^{n-1}) = 0$. Supposons donc que $a \in H$. Soit C^n le (n, R)-cycle mod A dans H déduit de Γ^{n-1} d'après *Variétés*, 10.1. D'après *Variétés*, 11, l'ensemble $H - A$ est un entourage de a. Evidemment C^n et G^n sont deux (n, R)-cycles mod $(R - (H - A))$ dans R. D'après *Variétés*, 14.1 il existe un entourage $V \subset H - A$ de a et deux nombres $r, s \in \mathfrak{R}$ ($r \neq 0$ ou $s \neq 0$) tels que $rC^n + sG^n \sim 0 \bmod (R - V)$. D'après 11 on a $r \neq 0$. Posons $\omega(a, \Gamma^{n-1}) = -s/r$.

On vérifie sans peine que les propriétés 1° — 4° sont vérifiées.

14. *Soit R un $V_0^n(S)$. Soit $a \in R - S$. Il existe un entourage $V \subset R - S$ de a tel que R est orientable mod $(R - V)$.*

Démonstration. D'après 7,6° on a $\beta_n(a, R) = 1$. Donc il existe un entourage $U \subset R - S$ de a tel que $\beta_n(a, U; R) = 1$. Donc il existe un entourage $V \subset U$ de a tel que $\beta_n(V, U; R) = 1$. Donc il existe un (n, R)-cycle G^n mod $(R - U)$ qui n'est pas $\sim 0 \bmod (R - V)$. Soit W un ensemble ouvert tel que $0 \neq W \subset V$. Soit $b \in W$. On voit sans peine que

$$1 \leqq \beta_n(b, U; R) \leqq \beta_n(W, U; R) \leqq \beta_n(V, U; R) = 1\,,$$

d'où $\beta_n(W, U; R) = 1$. On en déduit sans peine en premier lieu qu'il existe un (n, R)-cycle C^n mod $(R - U)$ qui n'est pas $\sim 0 \bmod (R - W)$ et en second lieu qu'il existe un nombre $r \in \mathfrak{R}$ tel que $G^n \sim rC^n \bmod (R - W)$ et donc aussi mod $(R - V)$. Puisque G^n n'est pas $\sim 0 \bmod (R - V)$, on a $r \neq 0$. Donc G^n n'est $\sim 0 \bmod (R - W)$ pour aucun choix de l'ensemble W ouvert et tel que $0 \neq W \subset V$. D'après 11 G^n est un (n, R)-cycle principal mod $(R - V)$.

15. *Soit R une $V_0^n(S)$. Pour $0 \leqq k \leqq n - 1$ nous allons considérer les deux axiomes suivants*:

I^k. *R est localement connexe d'ordre k rel. à $\mathfrak{R}$ à chaque point $x \in R - S$.*

II^k. *Pour $x \in R - S$ on a $\beta_k(x, R) = 0$.*

On dit que R est une *variété à n dimensions d'ordre p $(1 \leqq p \leqq n)$ mod S*, ou une $V_p^n(S)$, si c'est une $V_0^n(S)$ vérifiant les axiomes I^k et II^k pour $n - p \leqq k \leqq n - 1$.

16. *Soit* $S \subset T = \overline{T} \subset R$, $1 \leqq p \leqq n$. *Si R est une* $V_p^n(S)$, *R est évidemment aussi une* $V_p^n(T)$.

17. *Soit* $0 \leqq p \leqq q \leqq n$. *Evidemment une* $V_q^n(S)$ *est aussi une* $V_p^n(S)$.

18. *Soit* $0 \leqq k \leqq n - 1$. *Les deux axiomes* I^k *et* II^k *sont équivalents aux axiomes* G^k (*Variétés*, 21) et H^{k-1} (*Variétés* 27; pour $k = 0$ l'axiome H^{-1} doit signifier que l'ensemble $R - S$ est dense en soi).[14]

Démonstration. L'axiome I^k est identique à l'axiome G^k. Soit d'abord $k = 0$. On doit prouver que si l'ensemble $R - S$ est localement connexe (au sens classique), l'axiome II^0 est équivalent à l'axiome H^{-1}. Or c'est une conséquence immédiate du théorème du n° 3.

Passons au cas $1 \leqq k \leqq n - 1$. Il suffit de déduire d'abord l'axiome H^{k-1} de l'axiome II^k, ce qui sera fait au n° 18.1, et ensuite l'axiome II^k des axiomes G^k et H^{k-1}, ce qui sera fait au n° 18.2.

18.1. Supposons la validité de II^k. Soit $a \in R - S$ et soit P un entourage donné de a. On a $\beta_k(a, R) = 0$, d'où $\beta_k(a, \overline{P}) = 0$. Soient P_1 et P_2 deux entourages de a tels que $P_2 \subset P_1 \subset P$. Puisque $\beta_k(a, \overline{P}) = 0$, on a $\beta_k(a, P_2; \overline{P}) = 0$. Donce il exist un entourage $P_3 \subset P_2$ de a tel que $\beta_k(P_3, P_2; \overline{P}) = 0$. Soit Γ^{k-1} un $(k - 1, R)$-cycle absolu dans $(\overline{P}_1 - P_2)$; soit $\Gamma^{k-1} \sim 0$ dans $\overline{P}_1$. Il suffit (*Variétés* 27) d'en déduire que $\Gamma^{k-1} \sim 0$ dans $(\overline{P} - P_3)$.

Comme $\Gamma^{k-1} \sim 0$ dans $\overline{P}_1$, il existe pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ une $(k, \mathfrak{U})$-chaîne $C^k(\mathfrak{U}) \subset \overline{P}_1$ telle que $F\,C^k(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{k-1}(\mathfrak{U})$ dans $\overline{P}_1 - P_2$. D'après *Homologie*, II, 21 on peut s'arranger de façon que $C^k = \{C^k(\mathfrak{U})\}$ soit un (k, R)-cycle mod $(\overline{P}_1 - P_2)$ dans $\overline{P}_1$. Comme $P_1 \subset P$, $\beta_k(P_3, P_2; \overline{P}) = 0$, on a $C^k \sim 0 \bmod (\overline{P} - P_3)$ dans $\overline{P}$. Donc il existe pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ une $(k + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $M^{k+1}(\mathfrak{U}) \subset \overline{P}$ et une $(k, \mathfrak{U})$-chaîne $D^k(\mathfrak{U}) \subset \overline{P} - P_3$ telles que $M^{k+1}(\mathfrak{U}) \to C^k(\mathfrak{U}) - D^k(\mathfrak{U}) \to 0$. Comme $F\,C^k(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{k-1}(\mathfrak{U})$ dans $(\overline{P}_1 - P_2)$, il existe une $(k, \mathfrak{U})$-chaîne $E^k(\mathfrak{U}) \subset \overline{P}_1 - P_2 \subset$ $\subset \overline{P} - P_3$ telle que $C^k(\mathfrak{U}) - E^k(\mathfrak{U}) \to \Gamma^{k-1}(\mathfrak{U})$. Donc $D^k(\mathfrak{U}) - E^k(\mathfrak{U}) - \Gamma^{k-1}(\mathfrak{U})$, d'où $\Gamma^{k-1} \sim 0$ dans $(\overline{P} - P_3)$, c. q. f. d.

18.2. Supposons la validité des axiomes G^k et H^{k-1}. Soit $a \in R - S$. On doit prouver que $\beta_k(a, R) = 0$. D'après l'axiome G^k, chaque entourage P suffisamment petit de a possède la propriété suivante: chaque (k, R)-cycle absolu dans $\overline{P}$ est ~ 0 dans R. Il suffit de prouver que $\beta_k(a, P; R) = 0$ pour chaque tel entourage P. Soit P_1 un entourage de a tel que $\overline{P}_1 \subset P$. D'après l'axiome H^{k-1}, chaque entourage P_3 suffisamment petit de a possède la propriété suivante: Si Γ^{k-1} est un $(k - 1, R)$-cycle absolu dans $(\overline{P}_1 - P_1)$ et si $\Gamma^{k-1} \sim 0$ dans $\overline{P}_1$, on a $\Gamma^{k-1} \sim 0$ dans $(\overline{P} - P_3)$. Il suffit de prouver que $\beta_k(P_3, P; R) = 0$ pour chaque tel entourage P_3. Soit C^k un (k, R)-cycle mod $(R - P)$. On doit prouver que $C^k \sim 0 \bmod (R - P_3)$.

[14] On doit remarquer que, si R est une $V_0^n(S)$, R vérifie toujours l'axiome H^{-1}, ce qui résulte p. ex. de *Variétés*, 12.2.

Soit Φ la famille complète de réseaux qui se déduit de la famille N définie dans *Homologie*, IV, 2 en y remplaçant R_1, R_2, R_3, α, α_1, α_2, α_3, resp. par $\bar{P}_1$, $R - P_1$, $\bar{P}_1 - P_1$, $R - P$, 0, $R - P$, 0. Pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$ on peut poser (v. *Homologie*, IV, 6, où on remplace n par $k - 1$) $C^k(\mathfrak{U}) = C_1^k(\mathfrak{U}) - C_2^k(\mathfrak{U})$, où $C_1^k(\mathfrak{U}) \subset \bar{P}_1$, $C_2^k(\mathfrak{U}) \subset R - P_1$. Posons $F\, C_1^k(\mathfrak{U}) = \Gamma^{k-1}(\mathfrak{U})$. Les $\Gamma^{k-1}(\mathfrak{U})$ définissent (*Homologie*, IV, 12) un $(k - 1, R)$-cycle absolu Γ^{k-1} dans $(\bar{P}_1 - P_1)$ tel que $C_1^k(\mathfrak{U}) \to \Gamma^{k-1}(\mathfrak{U})$ pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$, d'où $\Gamma^{k-1} \sim 0$ dans $\bar{P}_1$. On a donc $\Gamma^{k-1} \sim 0$ dans $(\bar{P} - P_3)$. Donc il existe pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$ une $(k, \mathfrak{U})$-chaîne $D^k(\mathfrak{U})$ dans $(\bar{P} - P_3)$ telle que $D^k(\mathfrak{U}) \to \Gamma^{k-1}(\mathfrak{U})$, d'où $C_1^k(\mathfrak{U}) - D^k(\mathfrak{U}) \to 0$. Soit $\mathfrak{U} \in \Phi$; la famille Φ étant complète, il existe un affinement $\mathfrak{B} \in \Phi$ de $\mathfrak{U}$ normal rel. aux cycles absolus dans $\bar{P}$; soit $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. On a

$$C_1^k(\mathfrak{B}) \subset \bar{P}_1 \subset \bar{P},\, D^k(\mathfrak{B}) \subset \bar{P} - P_3 \subset \bar{P},\, C_1^k(\mathfrak{B}) - D^k(\mathfrak{B}) \to 0\,.$$

Donc $\pi\, C_1^k(\mathfrak{B}) - \pi\, D^k(\mathfrak{B})$ est un $(k, \mathfrak{U})$-cycle absolu essentiel dans $\bar{P}$, d'où $\pi\, C_1^k(\mathfrak{B}) - \pi\, D^k(\mathfrak{B}) \sim 0$. Donc il existe une $(k + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $M^{k+1}(\mathfrak{U})$ telle que $M^{k+1}(\mathfrak{U}) \to \pi\, C_1^k(\mathfrak{B}) - \pi\, D^k(\mathfrak{B})$. Comme $C^k(\mathfrak{B}) = C_1^k(\mathfrak{B}) - C_2^k(\mathfrak{B})$, on a

$$M^{k+1}(\mathfrak{B}) \to \pi\, C^k(\mathfrak{B}) + \pi\, C_2^k(\mathfrak{B}) - \pi\, D^k(\mathfrak{B})\,.$$

Or $C_2^k(\mathfrak{B}) \subset R - P_1 \subset R - P_3$, $D^k(\mathfrak{B}) \subset \bar{P} - P_3 \subset R - P_3$. Par suite $\pi\, C^k(\mathfrak{B}) \sim 0 \bmod (R - P_3)$. D'autre part $\pi\, C^k(\mathfrak{B}) \sim C^k(\mathfrak{U}) \bmod (R - P) \subset R - P_3$. Donc $C^k(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod (R - P_3)$ pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$. La famille Φ étant complète, on a $C^k \sim 0 \bmod (R - P_3)$. c. q. f. d.

19. En tenant compte de 14, on déduit de 9, 13 et 18 d'après *Variétés*, 65 et 66 les théorèmes suivants.

19.1. *Soit* $0 \leqq p \leqq (n - 1)/2$. *Une* $V_p^n(S)$ *vérifie les axiomes* I^k (n° 15) *pour* $0 \leqq k \leqq p$.

19.2. *Soit* $0 \leqq p \leqq n/2 - 1$. *Une* $V_p^n(S)$ *vérifie les axiomes* II^k (n° 15) *pour* $0 \leqq k \leqq p + 1$.

19.3. *Soit* $(n - 1)/2 \leqq p \leqq n$. *Une* $V_p^n(S)$ *est une* $V_n^n(S)$.[15]

20. Soient M_1 et M_2 deux modules (*Homologie*, I, 1). D'après *M. Pontragin*,[16] nous dirons que M_1 et M_2 sont *duels* (*primitifs*) si l'on a défini le produit $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ pour $\alpha \in M_1$ et $\beta \in M_2$ jouissant des propriétés suivantes: 1° $(\alpha_1 + \alpha_2)\,\beta = \alpha_1\beta + \alpha_2\beta$ pour $\alpha_1 \in M_1$, $\alpha_2 \in M_1$, $\beta \in M_2$; 2° $\alpha(\beta_1 + \beta_2) = \alpha\beta_1 + \alpha\beta_2$ pour $\alpha \in M_1$, $\beta_1 \in M_2$, $\beta_2 \in M_2$; 3° $(r\alpha)\,\beta = \alpha(r\beta) = r(\alpha\beta)$ pour $r \in \mathfrak{R}$, $\alpha \in M_1$, $\beta \in M_2$; 4° si $\alpha \in M_1$ et si $\alpha\eta = 0$ pour chaque $\eta \in M_2$, on a $\alpha = 0$; 5° si $\beta \in M_2$ et si $\xi\beta = 0$ pour chaque $\xi \in M_1$, on a $\beta = 0$.

[15] *Ce théorème n'est pas une directe conséquence des théorèmes précedents et on ne l'utilisera dans ce qui suit.* [Réd.]

[16] Math. Annalen, t. 105, 1931, pp. 165—205. V. *Variétés*, 61.

20.1. *Soient M_1 et M_2 deux modules duels. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ des éléments de M_1 en nombre fini tels que $\sum_{i=1}^{m} r_i\alpha_i = 0$ $(r_i \in \mathfrak{R})$ entraîne que $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Il existe des éléments $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ de M_2 tels que $\alpha_i\beta_j = \delta_{ij}$ pour $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq m$, δ_{ij} étant le symbole de Kronecker: $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.*

Démonstration. I. Soit d'abord $m = 1$. On a $\alpha_1 \in M$, $\alpha_1 \neq 0$. D'après 20, 4° il existe un élément $\eta \in M_2$ tel que $\alpha_1\eta = r \neq 0$. Posons $\beta_1 = 1/r\eta$. Alors $\alpha_1\beta_1 = 1$ d'après 20,3°.

II. Soit $m \geqq 2$ et supposons que le théorème soit vrai pour $m - 1$. Donc il existe des éléments $\beta'_1, \ldots, \beta'_{m-1}$ de M_2 tels que $\alpha_i\beta'_j = \delta_{ij}$ pour $1 \leqq i \leqq m - 1$, $1 \leqq j \leqq$ $\leqq m - 1$. Soit $\alpha_m\beta'_i = r_i$ $(1 \leqq i \leqq m - 1)$. Comme $\alpha_m - \sum_{i=1}^{m-1} r_i\alpha_i \neq 0$, d'après I il existe un élément β'_m de M_2 tel que $\left(\alpha_m - \sum_{i=1}^{m-1} r_i\alpha_i\right)\beta'_m = 1$. Posons $\alpha_i\beta'_m = s_i$ $(1 \leqq i \leqq m - 1)$. Il suffit de poser

$$\beta_i = \beta'_i - r_i\beta'_m + r_i\sum_{j=1}^{m-1} s_j\beta'_j \quad (1 \leqq i \leqq m - 1), \quad \beta_m = \beta'_m - \sum_{j=1}^{m-1} s_j\beta'_j$$

pour que l'on ait $\alpha_i\beta_j = \delta_{ij}$ $(1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq m)$.

21. Rappelons encore le théorème de dualité sous la forme dont nous allons nous servir au Chap. V (*Variétés*, 64):

Soit $0 \leqq p \leqq n$. Soit $t = \min(p, n - p)$. Soit R une $V_t^n(S)$ orientable mod S. Le $p^{\text{ème}}$ groupe de Betti $\mathfrak{G}_p$ de l'espace R mod S est duel au $(n - p)^{\text{ème}}$ groupe de Betti bicompact $\mathfrak{H}_{n-p}$ de l'espace $R - S$.

Les éléments de $\mathfrak{G}_p$ sont les (p, R)-cycles mod S, deux tels cycles C^p et D^p étant considérés comme égaux si et seulement si $C^p \sim D^p$ mod S. Les éléments de $\mathfrak{H}_{n-p}$ sont les $(n - p, R)$-cycles absolus situés dans un sous-ensemble bicompact arbitraire de $R - S$, deux tels cycles Γ^{n-p} et Δ^{n-p} étant considérés comme égaux si et seulement s'il existe un sous-ensemble bicompact A de $R - S$ tel que $\Gamma^{n-p} \sim \Delta^{n-p}$ dans A.

IV.

22. Soit R un espace topologique. Soit B un sous-ensemble ouvert de R. Soit C^k un (k, R)-cycle absolu $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Nous disons que C^k *est situé à l'intérieur de B* s'il existe un ensemble $F \subset B$ fermé dans R et tel que $C^k \subset F$; nous disons que $C^k \sim 0$ *à l'intérieur de B* s'il existe un ensemble F fermé dans R et tel que $C^k \sim 0$ dans F.

23. Soit R un espace topologique. Soit A un sous-ensemble fermé de R. Soit a un point donné de A. Soit $k = 0, 1, 2, \ldots$ Les lettres U, V, W désignent des entourages de a dans R.

Soit $U \supset V$. Soit $\mathfrak{A}_k(V, U; R - A)$ l'ensemble de tous les (k, R)-cycles absolus Γ^k situés à l'intérieur de $V - A$; pour $k = 0$ il faut supposer encore que $J(\Gamma^k) = 0$. Deux éléments Γ^k et Δ^k de $\mathfrak{A}_k(V, U; R - A)$ seront considérés comme égaux si et seulement si $\Gamma^k \sim \Delta^k$ à l'intérieur de $U - A$. L'ensemble $\mathfrak{A}_k(V, U; R - A)$ est un module. Désignons par $\alpha_k(V, U; R - A)$ le rang de ce module si ce rang est fini; dans le cas contraire posons $\alpha_k\,(V, U; R - A) = \infty$.

Pour $W \subset V \subset U$ on a évidemment $\alpha_k(W, U; R - A) \leqq \alpha_k(V, U; R - A)$. Il en résulte que, l'entourage U de a étant donné, le nombre $\alpha_k(V, U; R - A)$ a une valeur fixe (indépendante de V) pour tous les voisinages $V \subset U$ de a suffisamment petits; désignons par $\alpha_k(a, U; R - A)$ cette valeur fixe.

Pour $W \subset V \subset U$ on a évidemment $\alpha_k(W, V; R - A) \geqq \alpha_k(W, U; R - A)$. On en déduit sans peine que $\alpha_k(a, V; R - A) \geqq \alpha_k(a, U; R - A)$ pour $V \subset U$. Par suite trois cas sont à distinguer:

1° Il existe un nombre fini m $(= 0, 1, 2, \ldots)$ tel que $\alpha_k(a, U; R - A) = m$ pour tous les entourages U de a suffisamment petits; dans ce cas on pose $\alpha_k(a, R - A) = m$.

2° Le nombre $\alpha_k(a, U; R - A)$ est fini pour les entourages U de a, mais si m est un nombre fini arbitrairement donné, on a $\alpha_k(a, U; R - A) > m$ pour tous les entourages U de a suffisamment petits; dans ce cas on pose $\alpha_k(a, R - A) = \omega$.

3° On a $\alpha_k(a, U; R - A) = \infty$ pour tous les entourages U de a suffisamment petits; dans ce cas on pose $\alpha_k(a, R - A) = \infty$.

24. En général, le nombre $\alpha_k(a, R - A)$ n'est pas complètement déterminé par l'espace $(R - A) + (a)$, il faut connaître aussi l'espace R. Or on voit sans peine (v. *Homologie*, III, 3–11) que, l'espace $(R - A) + (a)$ et son point a étant donnés, pour connaître le nombre $\alpha_k(a, R - A)$ il suffit de savoir encore de chaque sous-ensemble de $R - A$ s'il est ou non fermé dans R. En particulier si l'espace R est bicompact, le nombre $\alpha_k(a, R - A)$ ne dépend que de l'espace $(R - A) + (a)$ (localement) et de son point a; car un sous-ensemble de $R - A$ est alors fermé dans R si et seulement s'il est bicompact. Il suffit même que l'espace R soit localement bicompact au point a, c'est-à-dire qu'il existe un entourage U de a tel que l'ensemble soit bicompact.

25. Les énoncés suivants sont faciles à vérifier:[17]

L'équation $\alpha_0(a, R - A) = m\,(= 0, 1, 2, \ldots)$ signifie que, si U est un entourage de a suffisamment petit, le point a appartient à la frontière de $(m + 1)$ constituants[18] *de $U - A$, tandis que a n'appartient pas à la frontière de la somme de tous les autres constituants de $U - A$. Si l'espace R est régulier et localement connexe, l'équation $\alpha_0(a, R - A) = m$ signifie qu'il existe des entourages U de a arbitrairement petits tels que l'ensemble $U - A$ ait $m + 1$ composantes tandis que, pour*

[17] Le cas banal où A contient tout un entourage de a dans R y est tacitement exclu.

[18] Un *constituant* d'un sous-ensemble M de R est un sous-ensemble de M maximé (saturé) rel. à la propriété que chaque couple de ses points se laisse unir par un sous-ensemble de M connexe et fermé dans R.

chaque entourage U de a suffisamment petit, l'ensemble $U - A$ a plus que m composantes.

L'équation $\alpha_0(a, R - A) = \omega$ signifie: 1° *si U est un entourage de a suffisamment petit, le point a appartient à la frontière d'un nombre fini de constituants de $U - A$, tandis que a n'appartient pas à la frontière de la somme de tous les autres constituants de a,* 2° *m étant un nombre fini arbitrairement donné, le point a appartient à la frontière de plus que m constituants de l'ensemble $U - A$ pour chaque entourage de a suffisamment petit. Si l'espace R est régulier et localement connexe, l'équation $\alpha_0(a, R - A) = \omega$ signifie*: 1° *il existe des entourages U de a arbitrairement petits tels que l'ensemble $U - A$ ait un nombre fini de composantes*; 2° *m étant un nombre fini arbitrairement donné, l'ensemble $U - A$ a plus que m composantes pour chaque entourage U de a suffisamment petit.*

V.

26. *Soit R une $V_0^n(S)$. Soit A un sous-ensemble fermé de R. Soit $a \in A - S$. Alors $\alpha_0(a, R - A) \leqq \beta_{n-1}(a, A)$.*

Démonstration. Le théorème est banal si $a \in A - \overline{R - A}$, car alors $\alpha_0(a, R - A) = 0$. Supposons donc que $a \in \overline{R - A}$. On voit sans peine qu'il suffit de démontrer l'énoncé suivant: Soit $m = 1, 2, 3, \ldots$; soit U un entourage de a suffisamment petit; soit $\alpha_0(a, U; R - A) \geqq m$; alors $\beta_{n-1}(a, U; A) \geqq m$.

Soit $U \subset R - S$ un entourage de a si petit que (v. 14) R soit orientable mod $(R - U)$. Soit $\alpha_0(a, U; R - A) \geqq m$. On doit prouver que $\beta_{n-1}(V, U; A) \geqq m$ pour chaque entourage $V \subset U$ de a.

D'après 7, 6° on a $\beta_n(a, R) = 1$, d'où $\beta_n(a, V; R) \leqq 1$. Donc il existe un entourage $W \subset V$ de a tel que $\beta_n(W, V; R) \leqq 1$. Comme $a \in \overline{R - A}$, on a $W - A \neq 0$.

Comme $\alpha_0(a, U; R - A) \geqq m$, on a $\alpha_0(W, U; R - A) \geqq m$. Donc il existe des $(0, R)$-cycles absolus Γ_i^0 $(1 \leqq i \leqq m)$ situés à l'intérieur de $W - A$, tels que $J(\Gamma_i^0) = 0$ et tels que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^0 \sim 0$ à l'intérieur de $U - A(r_i \in \mathfrak{R})$ entraîne que $r_1 = \ldots = r_m = 0$. D'après 21 (v. aussi 20.1), où on pose $p = n$ et où on remplace S par $A + (R - U)$ (v. 8 et 12), il existe des (n, R)-cycles E_i^n $(1 \leqq i \leqq m)$ mod $(A + (R - U))$ tels que $E_i^n \Gamma_j^0 = \delta_{ij}$ pour $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq m$. Soit G^n un (n, R)-cycle principal mod $(R - U)$.

Supposons que $rG^n + \sum_{i=1}^{m} r_i E_i^n \sim 0 \bmod (A + (R - W))$ $(r \in \mathfrak{R},\ r_i \in \mathfrak{R})$. Il en résulte (*Variétés*, 56, 4°) que $(rG^n + \sum_{i=1}^{m} r_i E_i^n)\, \Gamma_j^0 = 0$ pour $1 \leqq j \leqq m$. Or on a $G^n \Gamma_j^0 = 0$, car $J(\Gamma_j^0) = 0$. (V. *Variétés*, 19.1, 4° et 57.) Donc $\sum_{i=1}^{m} r_i E_i^n \Gamma_j^0 = 0$ pour

$1 \leqq j \leqq m$, d'où $r_1 = \ldots = r_m = 0$, donc $rG^n \sim 0 \bmod (A + (R - W))$. Comme $W - A \neq 0$, le cycle G^n n'est pas $\sim 0 \bmod (A + (R - W))$ (v. 11). Donc $r = 0$.

Nous venons de prouver que les $G^n, E_1^n, \ldots, E_m^n$ ne sont liés par aucune homologie $\bmod (A + (R - W))$. Donc il existe un réseau $\mathfrak{U}_1$ tel que l'homologie $r\, G^n(\mathfrak{U}_1) + \sum_{i=1}^{m} r_i\, E_i^n(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod (A + (R - W))$ $(r \in \mathfrak{R}, r_i \in \mathfrak{R})$ entraîne que $r = r_1 = \ldots = r_m = 0$; d'après 11 on peut supposer que $G^n(\mathfrak{U}_1)$ n'est pas $\sim 0 \bmod (R - W)$. Soit $\mathfrak{U}_2$ un affinement de $\mathfrak{U}_1$ normal rel. aux cycles $\bmod (R - V)$. Soit $\mathfrak{U}_3$ un affinement de $\mathfrak{U}_2$ normal rel. aux cycles $\bmod (A - U)$ dans A. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_4$ de $\mathfrak{U}_3$ d'après 4, en y posant $\varphi = A$, $\chi = R - U$. Soit $\pi_{21} = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1), \ldots, \pi_{31} = \pi_{21} \,.\, \pi_{32}, \ldots$

Les E_i^n étant des (n, R)-cycles $\bmod (A + (R - U))$, il existe des $(n - 1, \mathfrak{U}_4)$-chaînes $C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset A$ et $D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset R - U$ telles que $E_i^n(\mathfrak{U}_4) \to C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) + D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4)$. Donc $F\, C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) = -F\, D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset R - U$. D'autre part $F\, C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset A$. Donc $F\, C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset A - U$ d'après la définition de $\mathfrak{U}_4$. En vertu de la définition de $\mathfrak{U}_3$, les $\pi_{42}\, C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4)$ $(1 \leqq i \leqq m)$ sont donc des $(n - 1, \mathfrak{U}_2)$-cycles essentiels $\bmod (A - U)$ dans A. Reste à prouver que les $\pi_{42}\, C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4)$ ne sont liés par aucune homologie $\bmod (A - V)$ dans A, car alors (v. *Homologie*, II, 28) on a $\beta_{n-1}(V, U; A) \geqq m$, c. q. f. d.

Soit donc $\pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \sim 0 \bmod (A - V)$ dans A $(r_i \in \mathfrak{R})$; on doit prouver que $r_1 = \ldots = r_m = 0$. L'homologie qui vient d'être écrite signifie qu'il existe une $(n, \mathfrak{U}_2)$-chaîne $N^n(\mathfrak{U}_2) \subset A$ et une $(n - 1, \mathfrak{U}_2)$-chaîne $T^{n-1}(\mathfrak{U}_2) \subset A - V$ telles que $N^n(\mathfrak{U}_2) \to \pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) + T^{n-1}(\mathfrak{U}_2)$. Comme $E_i^n(\mathfrak{U}_4) \to C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) + D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4)$, on a

$$\pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i\, E_i^n(\mathfrak{U}_4) - N^n(\mathfrak{U}_2) \to \pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i\, D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) - T^{n-1}(\mathfrak{U}_2) \subset R - V.$$

En vertu de la définition de $\mathfrak{U}_2$, on en déduit que $\pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i\, E_i^n(\mathfrak{U}_4) - \pi_{21}\, N^n(\mathfrak{U}_2)$ est un $(n, \mathfrak{U}_1)$-cycle essentiel $\bmod (R - V)$. Or nous savons d'une part que $G^n(\mathfrak{U}_1)$ n'est pas $\sim 0 \bmod (R - W)$, d'autre part que $\beta_n(W, V; R) \leqq 1$. On en déduit qu'il existe un nombre $r \in \mathfrak{R}$ tel que

$$r\, G^n(\mathfrak{U}_1) + \pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i\, E_i^n(\mathfrak{U}_4) - \pi_{21}\, N^n(\mathfrak{U}_2) \sim 0 \bmod (R - W),$$

ce qui entraîne que

$$r\, G^n(\mathfrak{U}_1) + \pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i\, E_i^n(\mathfrak{U}_4) \sim 0 \bmod (A + (R - W)).$$

Or $\pi_{41} E_i^n(\mathfrak{U}_4) \sim E_i^n(\mathfrak{U}_1) \bmod (A + (R - V)) \subset A + (R - W)$. Donc $r\, G^n(\mathfrak{U}_1) + \sum_{i=1}^{m} r_i E_i^n(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod (A + (R - W))$. D'après la définition de $\mathfrak{U}_1$, il en résulte que $r_1 = \ldots = r_m = 0$, c. q. f. d.

27. *Soit* $0 \leqq p \leqq n - 2$. *Soit* $q = n - p - 1$. *Soit* $t = \min(p + 1, q)$. *Soit* R *une* $V_t^n(S)$. *Soit* A *un sous-ensemble fermé de* R. *Soit* $a \in A - S$. *Soit* $\beta_{p+1}(a, R) = 0$.[19] *Alors* $\alpha_q(a, R - A) \leqq \beta_p(a, A)$.

Démonstration. On voit sans peine qu'il suffit de démontrer l'énoncé suivant: Soit $m = 1, 2, \ldots$; soit U un entourage de a suffisamment petit, soit $\alpha_q(a, U; R - A) \geqq m$; alors $\beta_p(a, U; R - A) \geqq m$.

Soit $U \subset R - S$ un entourage de a si petit que (v. 14) R soit orientable mod $(R - U)$. Soit $\alpha_q(a, U; R - A) \geqq m$. On doit prouver que $\beta_p(V, U; A) \geqq m$ pour chaque entourage $V \subset U$ de a.

Puisque $\beta_{p+1}(a, R) = 0$, on a $\beta_{p+1}(a, V; R) = 0$. Donc il existe un entourage $W \subset V$ de a tel que $\beta_{p+1}(W, V; R) = 0$. Comme $\alpha_q(a, U; R - A) \geqq m$, on a $\alpha_q(W, U; R - A) \geqq m$. Donc il existe des (q, R)-cycles absolus $\Gamma_i^q (1 \leqq i \leqq m)$ situés à l'intérieur de $W - A$ et tels que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^q \sim 0$ à l'intérieur de $A - U$ $(r_i \in \mathfrak{R})$ entraîne que $r_1 = \ldots = r_m = 0$. D'après 21 (v. aussi 20.1), où on remplace p par $p + 1$ et S par $A + (R - U)$ (v. 12 et 16) il existe des $(p + 1, R)$-cycles E_i^{p+1} $(1 \leqq i \leqq m) \bmod (A + (R - U))$ tels que $E_i^{p+1} \Gamma_j^q = \delta_{ij}$ $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq m)$.

Soit $\sum_{i=1}^{m} r_i E_i^{p+1} \sim 0 \bmod (A + (R - W))\,(r_i \in \mathfrak{R})$. Alors $\sum_{i=1}^{m} r_i E_i^{p+1} \Gamma_j^q \sim 0$ (*Variétés*, 56, 4°), d'où $r_1 = r_2 = \ldots = r_m = 0$. Donc les $E_1^{p+1}, \ldots, E_m^{p+1}$ ne sont liés par aucune homologie mod $(A + (R - W))$. Donc il existe un réseau $\mathfrak{U}_1$ tel que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod (A + (R - W))$ entraîne que $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Soit $\mathfrak{U}_2$ un affinement de $\mathfrak{U}_1$ normal rel. aux cycles mod $(R - V)$.

Soit $\mathfrak{U}_3$ un affinement de $\mathfrak{U}_2$ normal rel. aux cycles mod $(A - U)$ dans A. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_4$ de $\mathfrak{U}_3$ d'après 4, en y posant $\varphi = A$, $\chi = R - U$. Soit $\pi_{21} = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1), \ldots, \pi_{31} = \pi_{21} \cdot \pi_{32}, \ldots$

Les E_i^{p+1} étant des $(p + 1, R)$-cycles mod $(A + (R - U))$, il existe des $(p, \mathfrak{U}_4)$-chaînes $C_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset A$ et $D_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset R - U$ telles que $E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \rightarrow C_i^p(\mathfrak{U}_4) + D_i^p(\mathfrak{U}_4)$. Donc $F\, C_i^p(\mathfrak{U}_4) = -F\, D_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset R - U$. D'autre part $F\, C_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset A$. Donc $F\, C_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset A - U$ d'après la définition de $\mathfrak{U}_4$. En vertu de la définition de $\mathfrak{U}_3$, les $\pi_{42}\, C_i^p(\mathfrak{U}_4)$ $(1 \leqq i \leqq m)$ sont donc des $(p, \mathfrak{U}_2)$-cycles essentiels mod $(A - U)$ dans A. Reste à prouver que les $\pi_{42}\, C_i^p(\mathfrak{U}_4)$ ne sont liés par aucune homologie mod $(A - V)$ dans A, car alors (v. *Homologie*, II, 28) on a $\beta_p(V, U; A) \geqq m$, c. q. f. d. Soit donc $\pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p(\mathfrak{U}_4) \sim 0 \bmod (A - V)$ dans $A (r_i \in \mathfrak{R})$; on doit prouver que $r_1 = \ldots =$

[19] Cette supposition est une conséquence des suppositions précédentes. [Réd.]

$= r_m = 0$. L'homologie qui vient d'être écrite signifie qu'il existe une $(p + 1, \mathfrak{U}_2)$-chaîne $N^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset A$ et une $(p, \mathfrak{U}_2)$-chaîne $T^p(\mathfrak{U}_2) \subset A - V$ telles que $N^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \to \pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p(\mathfrak{U}_4) - T^p(\mathfrak{U}_2)$. Comme $E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \to C_i^p(\mathfrak{U}_4) + D_i^p(\mathfrak{U}_4)$, on a

$$\pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - N^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \to \pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i D_i^p(\mathfrak{U}_4) - T^p(\mathfrak{U}_2) \subset R - V.$$

En vertu de la définition de $\mathfrak{U}_2$, on en déduit que $\pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - \pi_{21} N^{p+1}(\mathfrak{U}_2)$ est un $(p + 1, \mathfrak{U}_4)$-cycle essentiel $\bmod (R - V)$. Or on a $\beta_{p+1}(W, V; R) = 0$. Donc $\pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - \pi_{21} N^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \sim 0 \bmod (R - W)$, d'où $\pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \sim 0 \bmod (A + (R - W))$. Or $\pi_{41} E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \sim E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_1) \bmod (A + (R - V)) \subset A + (R - W)$. Donc $\sum_{i=1}^{m} r_i E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod (A + (R - W))$. D'après la définition de $\mathfrak{U}_1$, il en résulte que $r_1 = \ldots = r_m = 0$, c. q. f. d.

28. *Soit R une $V_0^n(S)$. Soit A un sous-ensemble fermé de R. Soit $a \in A - S$. Soit $\beta_{n-1}(a, R) = 0$. Alors $\alpha_0(a, R - A) \geqq \beta_{n-1}(a, A)$.*

Démonstration. Le théorème est banal si $a \in A - \overline{R - A}$, car alors $\beta_{n-1}(a, A) = \beta_{n-1}(a, R) = 0$. Supposons donc que $a \in \overline{R - A}$. On voit sans peine qu'il suffit de démontrer l'énoncé suivant: soit $m = 1, 2, 3, \ldots$; soit U un entourage de a suffisamment petit; soit $\beta_{n-1}(a, U; A) \geqq m$; alors il existe un entourage $V \subset U$ de a tel que $\alpha_0(a, V; R - A) \geqq m$.

Soit $U \subset R - S$ un entourage de a si petit que (v. 14) R soit orientable $\bmod (R - U)$. Soit G^n un (n, R)-cycle principal $\bmod (R - U)$. Soit $\beta_{n-1}(a, U; A) \geqq m$. Comme $\beta_{n-1}(a, R) = 0$, on a $\beta_{n-1}(a, U; R) = 0$; donc il existe un entourage $V \subset U$ de a tel que $\beta_{n-1}(V, U; R) = 0$. On doit prouver que $\alpha_0(W, V; R - A) \geqq m$ pour chaque entourage $W \subset V$ de a. Comme $a \in \overline{R - A}$, on a $W - A \neq 0$.

Puisque $\beta_{n-1}(a, U; A) \geqq m$, on a $\beta_{n-1}(W, U; A) \geqq m$. Donc il existe des $(n - 1, R)$-cycles C_i^{n-1} $(1 \leqq i \leqq m)$ $\bmod (A - U)$ dans A tels que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{n-1} \sim 0 \bmod (A - W)$ dans A $(r_i \in \mathfrak{R})$ entraîne que $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau tel que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod (A - W)$ dans A entraîne que $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_2$ de $\mathfrak{U}_1$ d'après 4, en y posant $\varphi = A$, $\chi = R - W$. Puisque $W - A \neq 0$, on peut supposer (v. 11) que $G^n(\mathfrak{U}_2)$ n'est pas $\sim 0 \bmod (A + (R - W))$. Soit $\mathfrak{U}_3$ un affinement de $\mathfrak{U}_2$ normal rel. aux cycles $\bmod (A + (R - V))$. Soit $\pi_{21} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{32} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{31} = \pi_{21} . \pi_{32}$. Les C_i^{n-1} étant des $(n - 1, R)$-cycles $\bmod (R - U)$, on a $C_i^{n-1} \sim 0 \bmod (R - V)$, car $\beta_{n-1}(V, U; R) = 0$. Donc il existe des $(n, \mathfrak{U}_3)$-chaînes $E_i^n(\mathfrak{U}_3)$ et des $(n - 1, \mathfrak{U}_3)$-chaînes $D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) \subset R - V$ telles que $E_i^n(\mathfrak{U}_3) \to C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) - D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3)$. D'après la définition de $\mathfrak{U}_3$, il en résulte que les $\pi_{32}\, E_i^n(\mathfrak{U}_3)$ sont des $(n, \mathfrak{U}_2)$-cycles essentiels mod $(A + (R - V))$.

Si l'on a $r\, G^n(\mathfrak{U}_2) + \pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i\, E_i^n(\mathfrak{U}_3) \sim 0 \bmod (A + (R - W))$ $(r \in \mathfrak{R}, r_i \in \mathfrak{R})$, il existe des $\mathfrak{U}_2$-chaînes $M^{n+1}(\mathfrak{U}_2)$, $N_1^n(\mathfrak{U}_2) \subset A$ et $N_2^n(\mathfrak{U}_2) \subset R - W$ telles que

$$M^{n+1}(\mathfrak{U}_2) \to r\, G^n(\mathfrak{U}_2) + \pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i\, E_i^n(\mathfrak{U}_3) - N_1^n(\mathfrak{U}_2) - N_2^n(\mathfrak{U}) \to 0\,.$$

Comme $E_i^n(\mathfrak{U}_3) \to C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) - D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3)$, il en résulte que

$$\pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) = \pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i\, D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) - rF\, G^n(\mathfrak{U}_2) + F\, N_1^n(\mathfrak{U}_2) + F\, N_2^n(\mathfrak{U}_2)\,,$$

d'où on déduit que la chaîne

(1) $F\, N_1^n(\mathfrak{U}_2) - \pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3)$ est située dans $(R - W)$. La chaîne (1) étant aussi située dans A, il résulte de la définition de $\mathfrak{U}_2$ qu'elle est située dans $(A - W)$. Donc $\pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) \sim 0 \bmod (A - W)$ dans A, d'où $\pi_{31} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) \sim 0$ mod $(A - W)$ dans A. Or $\pi_{31}\, C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) \sim C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_1) \bmod (A - U)$ dans A. Comme $U \supset W$, il en résulte que $\sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod (A - W)$ dans A, d'où $r_1 = \ldots =$ $= r_m = 0$, d'après la définition de $\mathfrak{U}_1$. Donc $r\, G^n(\mathfrak{U}_2) \sim 0 \bmod (A + (R - W))$, ce qui entraîne que $r = 0$.

Nous venons de prouver que les

(2) $G^n(\mathfrak{U}_2), \pi_{32}\, E_1^n(\mathfrak{U}_3), \ldots, \pi_{32}\, E_m^n(\mathfrak{U}_3)$ ne sont liés par aucune homologie mod $(A + (R - W))$. Or les (2) sont des $(n, \mathfrak{U}_2)$-cycles essentiels mod $(A + (R - V))$. Soient

(3) $G^n, E_1^n, \ldots, E_m^n$ des (n, R)-cycles mod $(A + (R - V))$ attachés aux (2) selons *Homologie*, II, 28. Evidemment les (3) ne sont liés par aucune homologie mod $(A +$ $+ (R - W))$. D'après 21 (v. aussi 20.1), où on pose $p = n$ et où on remplace S par $A + (R - W)$ (v. 8 et 12), il existe des $(0, R)$-cycles Γ_i^0 $(0 \leqq i \leqq m)$ situés à l'intérieur de $W - A$ et tels que

$$G^n \Gamma_0^0 = 1\,, \quad G^n \Gamma_i^0 = 0 \;(1 \leqq i \leqq m)\,, \quad E_i^n \Gamma_j^0 = \delta_{ij} \;(1 \leqq i \leqq m, 0 \leqq j \leqq m)\,.$$

Comme $G^n \Gamma_i^0 = 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$, on voit sans peine (v. *Variétés*, 19.1, 4° et 57) que $J(\Gamma_i^0) = 0$ pour $1 \leqq i \leqq m$. Soit $\sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^0 \sim 0$ à l'intérieur de $V - A$ $(r_i \in \mathfrak{R})$. Comme E_j^n $(1 \leqq j \leqq m)$ est un (n, R)-cycle mod $(A + (R - V))$, il résulte de *Variétés*, 56, 4° que $E_j^n \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^0 = 0$, d'où $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Donc les Γ_i^0 $(1 \leqq i \leqq m)$ sont des

$(0, R)$-cycles absolus située à l'intérieur de $W - A$, ils ne sont liés par aucune homologie à l'intérieur de $W - A$, et on a $J(\Gamma_i^0) = 0\,(1 \leqq i \leqq m)$. Donc $\alpha_0(W, V; R - A) \geqq$ $\geqq m$, c. q. f. d.

29. *Soit* $0 \leqq p \leqq n - 2$. *Soit* $q = n - p - 1$. *Soit* $t = \min(p + 1, q)$. *Soit R une* $V_t^n(S)$. *Soit A un sous-ensemble fermé de R. Soit* $a \in A - S$. *Soit* $\beta_p(a, R) = 0$.[20] *Alors* $\alpha_q(a, R - A) \geqq \beta_p(a, A)$.

Démonstration. On voit sans peine qu'il suffit de démontrer l'énoncé suivant: Soit $m = 1, 2, 3, \ldots$; soit U un entourage de a suffisamment petit; soit $\beta_p(a, U; A) \geqq$ $\geqq m$; alors il existe un entourage $V \subset U$ de a tel que $\alpha_q(a, V; R - A) \geqq m$.

Soit $U \subset R - S$ un entourage de a si petit que (v. 14) R soit orientable $\operatorname{mod}(R - U)$. Soit $\beta_p(a, U; A) \geqq m$. Comme $\beta_p(a, R) = 0$, on a $\beta_p(a, U; R) = 0$; donc il existe un entourage $V \subset U$ de a tel que $\beta_p(V, U; R) = 0$. On doit prouver que $\alpha_q(W, V; R - A) \geqq m$ pour chaque entourage $W \subset V$ de a.

Puisque $\beta_p(a, U; A) \geqq m$ on a $\beta_p(W, U; A) \geqq m$. Donc il existe des (p, R)-cycles $C_i^p\,(1 \leqq i \leqq m) \operatorname{mod}(A - U)$ dans A tels que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^p \sim 0 \operatorname{mod}(A - W)$ dans A $(r_i \in \mathfrak{R})$ entraîne que $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau tel que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^p(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \operatorname{mod}(A - W)$ dans A entraîne que $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_2$ de $\mathfrak{U}_1$ d'après 4, en y posant $\varphi = A$, $\chi = R - W$. Soit $\mathfrak{U}_3$ un affinement de $\mathfrak{U}_2$ normal rel. aux cycles $\operatorname{mod}(A + (R - V))$. Soit $\pi_{21} =$ $= \operatorname{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{32} = \operatorname{Pr.}(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{31} = \pi_{21} \,.\, \pi_{32}$.

Les C_i^p étant des (p, R)-cycles $\operatorname{mod}(R - U)$, on a $C_i^p \sim 0 \operatorname{mod}(R - V)$, car $\beta_p(V, U; R) = 0$. Donc il existe des $(p + 1, \mathfrak{U}_3)$-chaînes $E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_3)$ et des $(p, \mathfrak{U}_3)$-chaînes $D_i^p(\mathfrak{U}_3) \subset R - V$ telles que $E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \to C_i^p(\mathfrak{U}_3) - D_i^p(\mathfrak{U}_3)$. D'après la définition de $\mathfrak{U}_3$, il en résulte que les $\pi_{32}\, E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_3)$ sont des $(p + 1, \mathfrak{U}_2)$-cycles essentiels $\operatorname{mod}(A + (R - V))$.

Si l'on a $\pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i\, E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \sim 0 \operatorname{mod}(A + (R - W))$ $(r_i \in \mathfrak{R})$, il existe des $\mathfrak{U}_2$-chaînes $M^{p+2}(\mathfrak{U}_2)$, $N_1^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset A$ et $N_2^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset R - W$ telles que

$$M^{p+2}(\mathfrak{U}_2) \to \pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i\, E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_0) - N_1^{p+1}(\mathfrak{U}_2) - N_2^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \to 0\,.$$

Comme $E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \to C_i^p(\mathfrak{U}_3) - D_i^p(\mathfrak{U}_3)$, il en résulte que

$$\pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^p(\mathfrak{U}_3) = \pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i\, D_i^p(\mathfrak{U}_3) + F\, N_1^{p+1}(\mathfrak{U}_2) + F\, N_2^{p+1}(\mathfrak{U}_2)\,,$$

[20] Si $p \leqq n/2 - 1$, cette hypothèse est une conséquence des précédentes en vertu de 19.2.

d'où on déduit que la chaine

(1) $F N_1^{p+1}(\mathfrak{U}_2) - \pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p(\mathfrak{U}_3)$ est située dans $(R - W)$. La chaîne (1) étant aussi située dans A, il résulte de la définition de $\mathfrak{U}_2$ qu'elle est située dans $(A - W)$. Donc $\pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p(\mathfrak{U}_3) \sim 0 \bmod (A - W)$ dans A, d'où $\pi_{31} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p(\mathfrak{U}_3) \sim 0 \bmod (A - W)$ dans A. Or $\pi_{31} C_i^p(\mathfrak{U}_3) \sim C_i^p(\mathfrak{U}_1) \bmod (A - U)$ dans A. Comme $U \supset W$, il en résulte que $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod (A - W)$ dans A, d'où $r_1 = \ldots = r_m = 0$ d'après la définition de $\mathfrak{U}_1$.

Nous venons de prouver que les

(2) $\pi_{32} E_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3), \ldots, \pi_{32} E_m^{p+1}(\mathfrak{U}_3)$ ne sont liés par aucune homologie $\bmod (A + (R - W))$. Or les (2) sont des $(p + 1, \mathfrak{U}_2)$-cycles essentiels $\bmod (A + (R - V))$. Soient

(3) $E_1^{p+1}, \ldots, E_m^{p+1}$ des $(p + 1, R)$-cycles $\bmod (A + (R - V))$ attachés aux (2) selon *Homologie*, II, 28. Evidemment les (3) ne sont liés par aucune homologie $\bmod (A + (R - W))$. D'après 21 (v. aussi 20.1), où on remplace p par $p + 1$ et S par $A + (R - W)$ (v. 12 et 16), il existe des (q, R)-cycles absolus Γ_i^q $(1 \leqq i \leqq m)$ situés à l'intérieur de $(W - A)$ et tels que $E_i^{p+1} \Gamma_j^q = \delta_{ij}$ $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq m)$. Soit $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^q \sim 0$ à l'intérieur de $V - A$ $(r_i \in \mathfrak{R})$. Comme E_j^{p+1} $(1 \leqq j \leqq m)$ est un $(p + 1, R)$-cycle mod $A + (R - V)$, il résulte de *Variétés*, 56, 4° que $E_j^{p+1} \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^q = 0$, d'où $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Donc les Γ_i^q $(1 \leqq i \leqq m)$ sont des (q, R)-cycles absolus situés à l'intérieur de $W - A$ et ne liés par aucune homologie à l'intérieur de $V - A$. Donc $\alpha_q(W, V; R - A) \geqq m$, c. q. f. d.

20

LES THÉORÈMES DE DUALITÉ EN TOPOLOGIE

Comptes Rendus du 2-e Congrès
des Mathématiciens des Pays Slaves.
Praha (1934), 17–25

Avant de passer au sujet indiqué par le titre de cette conférence, il me semble utile de dire quelques mots d'un caractère plus général. Parmi les méthodes actuellement en vogue dans la topologie, celle que je préfère personnellement c'est la méthode fondée sur la théorie générale d'ensembles, la *mengentheoretische Methode* des géomètres allemands. Le développement de cette méthode dans la topologie a été tout-à-fait parallèle à celui de la même méthode dans la théorie des fonctions de variables réelles. Çà et là, on a commencé par une étude patiente et minutieuse des phénomènes qu'on a appelés pathologiques, c'est-à-dire par la construction d'une série étendue d'ingénieux exemples prouvant que beaucoup de lois classiques, valables pour une étroite famille d'objets élémentaires, cessent d'être vraies si on élargit la famille d'objets considérés. On a d'ailleurs d'abord accueilli avec beaucoup de méfiance ce nouveau genre de recherches, en y reprochant surtout le manque de contact avec les applications ainsi que l'isolement des autres branches de mathématiques. Dans la théorie des fonctions de variables réelles, il est maintenant universellement reconnu que les reproches que je viens de mentionner ont été tout-à-fait injustes: il y a déjà longtemps que le chaos d'une foule d'idées peu coordonnées s'est dissipé, et de grandes théories d'une merveilleuse harmonie en sont sorties, embrassant aussi bien les théories classiques que des cas „pathologiques". Grâce à cet examen patient d'objets rebelles au lois classiques, on a enfin triomphé en créant des lois extrêmement générales et en les démontrant d'une manière merveilleusement simple. Tout en continuant à poser et à résoudre des problèmes tout-à-fait nouveaux, on n'a nullement négligé les problèmes classiques, et les méthodes abstraites ont souvent réussi à découvrir des connexions inattendues entre des théories que l'on avait cru très éloignées l'une de l'autre, ou bien à découvrir des voies nouvelles là où on avait pensé d'avoir déjà dit tout. Dans la topologie, on entend encore souvent des reproches que nous ne sommes plus habitués à ouïr dans la théorie des fonctions réelles. L'ancienne méfiance contre les phénomènes pathologiques n'y est pas encore définitivement vaincue, bien que l'on puisse, ici encore, donner beaucoup d'exemples où l'examen d'un tel phénomène ait conduit à la découverte d'une loi générale et importante. P. ex., c'est en examinant l'exemple de Peano d'une courbe remplissant une aire que Hahn, le grand mathématicien de Vienna à qui la mort prématurée a défendu de prendre part à ce Congrès, a été conduit à la notion de connexité locale qui s'est montrée ensuite comme une des notions les plus importantes dans toute la topologie.

Ayant dit plus haut que je préfère la *mengentheoretische Methode* dans la topologie je voudrais insister que je suis infiniment loin d'estimer trop bas les résultats nombreux et importants que l'on a gagné en employant d'autres méthodes. Tout au contraire! Ce qui me plait au plus dans la *mengentheoretische Methode*, c'est qu'elle me semble capable de s'imbiber de tout ce qu'il y a de vraiment essentiel et fécond dans les autres méthodes. Avant dix années, on pouvait très clairement distinguer, dans la topologie, l'école de la théorie générale d'ensembles et l'école combinatoire. Dans ce temps-là, les méthodes combinatoires étaient limitées exclusivement à la recherche des *polyèdres topologiques*, c'est-à-dire des espaces topologiquement équivalents (homéomorphes) aux polyèdres rectilignes situés dans les espaces euclidiens (à un nombre quelconque de dimensions). A présent, la prédilection pour les polyèdres que l'on constate chez quelques topologues d'ailleurs éminents, est peut-être motivée surtout par des tendances finitistes, analogues aux idées bien connues de Kronecker dans l'algèbre. Quioque la tendance finitiste ait conduit sans doute à de très beaux résultats, p. ex. dans la théorie des noeuds, j'attribue une haute signification au fait que l'on a réussi à donner à la partie la plus avancée de la topologie combinatoire, à savoir à la théorie de l'homologie des cycles, une forme basée *exclusivement* sur la théorie générale d'ensembles. A mon avis, on peut même affirmer non seulement que la théorie de l'homologie constitue un chapitre de la *mengentheoretische Topologie*, mais aussi que c'est un des chapitres les plus systématiques et les plus avancés de cette science, déstiné à y jouer un rôle central.

La possibilité d'appliquer les notions combinatoires à chaque espace métrique et compact a été reconnue indépendemment par trois savants, M. M. Alexandroff [1],[1] Vietoris [1] et Lefschetz [1]. V. aussi Čech [1]; je voudrais remarquer ici que j'ai été conduit à l'idée d'étendre la théorie de l'homologie aux espaces non compacts par l'étude attentive du Mémoire de M. Alexandroff [3]. M. Alexandroff a maintes fois insisté sur la haute importance des méthodes combinatoires dans la *mengentheoretische Topologie*.[2] Bien que je sois parfaitement d'accord avec M. Alexandroff sur l'importance des méthodes combinatoires, je ne saurais parfois être d'accord avec lui en ce qui concerne les autres méthodes employées dans la *mengentheoretische Topologie*; p. ex. tout en appréciant très haut les remarquables progrès que MM. Alexandroff et Pontrjagin ont obtenu dans la théorie de la dimension par la méthode combinatoire, je crois que ces progrès ne peuvent diminuer nullement l'importance d'autres résultats de la théorie de la dimension obtenus auparavant par Urysohn

[1] Les chiffres entre crochets se rapportent à la bibliographie placée à la fin.

[2] Comp. aussi la conférence très instructive de M. Wilder, [1].

et par MM. Menger et Hurewicz avec l'emploi d'autres méthodes, et je ne sais pas comment on puisse arriver à ces résultats par la méthode combinatoire.

Or il est nécessaire de quitter ces généralités et d'aborder le sujet principal de cette conférence. Les théorèmes de dualité constituent un des sujets les plus intéressants de la topologie combinatoire. Limités d'abord au terrain étroit de la topologie polyédrale, ces théorèmes ont été ensuite élargis de manière à aboutir finalement au terrain beaucoup plus vaste de la *mengentheoretische Topologie.* Je vais passer rapidement en revue les phases principales du développement historique de ces théorèmes, en m'arrêtant de manière un peu plus détaillée à quelques résultats récents pas encore publiés.

C'est Poincaré [1] (v. aussi [2]) qui a obtenu déjà en 1895 le premier théorème de dualité. Soit V_n une *variété à n dimensions*, c'est-à-dire un polyèdre topologique connexe *localement* homéomorphe à E_n. (Ici, et dans ce qui suit, E_n signifie l'espace euclidien à n dimensions complété par un point à l'infini.) Alors, on a le *théorème de dualité de Poincaré*

$$\mathbf{B}^r(V_n) = \mathbf{B}^{n-r}(V_n) \quad (r = 0, 1, \ldots, n)\,, \tag{1}$$

du moins dans le cas où la variété V_n est *orientable*, c'est-à-dire si la loi (1) est vraie pour le cas particulier de $r = 0$. Le symbole $\mathbf{B}^r$ signifie le nombre de Betti pour la dimension r.

C'est un autre théorème de dualité, découvert en 1922 par M. Alexander [1], qui a une portée bien plus vaste. Soit S un polyèdre topologique immergé dans E_n; alors on a le *théorème de dualité de M. Alexander*

$$\mathbf{B}^r(E_n - S) = \mathbf{B}^{n-r-1}(S) + \delta_r \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{2}$$

avec $\delta_r = 0$ pour $r > 0$ et $\delta_0 = 1$. Particulièrement remarquable est le cas de $r = 0$ qui dit que le nombre des composantes de $E_n - S$ est déterminé par la structure intrinsèque de S, étant égal à $\mathbf{B}^{n-1}(S) + 1$. Ce cas particulier embrasse non seulement le théorème célèbre de Jordan, mais aussi sa généralisation n-dimensionnelle établie pour la première fois en 1912 par M. Brouwer [1].

Supposons plus généralement que S soit un sous-ensemble fermé de E_n complètement arbitraire $(0 \neq S \neq E_n)$. La loi de dualité (2) reste valable; ceci a été prouvé indépendamment par MM. Alexandroff [2], Frankl [1] et Lefschetz [1]. M. Lefschetz a même déduit une loi plus générale. Soit S un sous-ensemble fermé d'une variété V_n (orientable) à n dimensions. Alors on a le *théorème de dualité de M. Lefschetz*

$$\mathbf{B}^r(V_n - S) = \mathbf{B}^{n-r}(V_n, S) \quad (r = 0, 1, \ldots, n)\,, \tag{3}$$

le nombre de Betti à droite se rapportant aux *cycles relatifs* (notion due à M. Lefschetz lui-même) mod S dans V_n. Pour $S = 0$, la loi (3) re réduit à la loi (1) de Poincaré; la loi (2) de M. Alexander est aussi une conséquence immédiate de la loi

(3). Le cas $S \subset V_n$ a été considéré aussi par M. Pontrjagin [1] qui a obtenu un théorème de dualité formellement distinct de celui de M. Lefschetz, l'énoncé de M. Pontrjagin ne contenant que des cycles absolus.

On peut *localiser* le théorème de dualité de M. Alexander de deux manières distinctes. Soit x un point donné d'un sous-ensemble fermé S d'une variété V_n. Soient deux entourages U et $U' \subset U$ de x. Soit $\alpha_r(U', U, V_n - S)$ le nombre maximum des cycles absolus à r dimensions dans U', indépendants rel. aux homologies dans U. Soit $\beta_s(U', U, S)$ le nombre maximum des cycles relatifs à s dimensions mod $S - U$ dans S indépendants rel. aux homologies mod $S - U'$ dans S. Par le double passage à la limite, d'abord $U' \to x$ et ensuite $U \to x$, on obtient de $\alpha_r(U', U, V_n - S)$ et de $\beta_s(U', U, S)$ des limites (finies ou infinies) $\alpha_r(x, V_n - S)$ et $\beta_s(x, S)$. Alors on a le théorème de dualité

$$\alpha_r(x, V_n - S) = \beta_{n-r-1}(x, S) + \delta'_r \quad (r = 0, 1, \ldots, n - 1) \tag{4}$$

où $\delta'_r = 0$ pour $r > 0$, tandis que $\delta'_0 = 0$ ou $\delta'_0 = 1$ suivant que x est ou non un point intérieur de S. Ce théorème de dualité local a été prouvé indépendamment par M. Alexandroff [4], [5] et par Čech [3], [4].

La seconde localisation du théorème de dualité est due à Čech [5]. Je ne l'expliquerai ici que dans le cas $r = 1$, $n = 2$, Soit x un point d'un sous-ensemble fermé S du plan. L'ensemble S est au point x localement connexe (au sens de Hahn-Mazurkiewicz) si et seulement si à chaque entourage U de x on peut attacher un entourage $U' \subset U$ de x tel que, pour chaque courbe simple fermée C telle que $US \,.\, C = 0$, un des deux ensembles $U'S \cdot \text{Int. } C$ et $U'S \cdot \text{Ext. } C$ soit vide.

Malgré la généralité de l'ensemble S, les théorèmes de dualité que j'ai rapporté plus haut n'appartiennent pas encore à la *mengentheoretische Topologie*, car l'espace ambiant V_n y est supposé polyédral. La généralisation nouvelle, grâce à laquelle la loi de dualité (3) arrive définitivement sur le terrain de la topologie générale, a été donnée indépendamment par M. Lefschetz [3] et par Čech [2], où les deux auteurs, employant des méthodes tout-à-fait différentes l'une de l'autre, réussissent à donner une définition axiomatique de variétés, basée presque entièrement sur la notion seule d'homologie, et telle que la loi de dualité (3), et même une loi plus générale, due aussi à M. Lefschetz [2] [p. 142, formule (7)], où des cycles relatifs figurent dans tous les deux membres, reste valable. La méthode employée par Čech est beaucoup plus compliquée que celle de M. Lefschetz. On pourrait être tenté de croire que ce fait désagréable soit dû à l'une ou l'autre des deux manies que l'on remarque dans l'ouvrage cité de Čech, à savoir de n'employer jamais l'espace euclidien et de ne pas supposer que la variété soit métrisable. Or, en réalité, la longueur excessive de cet ouvrage est due, outre autres raisons moins importantes, au fait que la démonstration de la formule (3) y est conduite de telle manière que le nombre des axiomes employés dépend du nombre min $(r, n - r)$ d'où il vient que les résultats démontrés sont nouveaux même dans le cas où V_n est un polyèdre.

Les théorèmes de dualité, dans la forme que je leur ai donné dans ce rapport, n'affirment que l'égalité de deux nombres de Betti. En réalité, il y a entre les deux groupes de Betti qui y figurent une relation plus intime, pas exprimable par la seule égalité de leurs rangs. Cet approfondissement des théorèmes de dualité a été étudié surtout par M. Pontrjagin [1].

Il y a aussi un autre fait très important que je n'ai pas encore mentionné. Pour pouvoir parler, dans un espace donné, des cycles et des homologies, il faut choisir un *domaine de coefficients*. Les domaines habituels sont: l'ensemble des nombres rationnels (Poincaré et Lefschetz), l'ensemble des nombres entiers (Poincaré), l'ensemble des entiers réduits mod 2 (Tietze et Veblen) ou, plus généralement, réduits mod m, le nombre m ($= 2, 3, 4, \ldots$) étant donné (Alexander). Or on peut (Pontrjagin) prendre comme domaine de coefficients un groupe commutatif quelconque. Les démonstrations rapportées plus haut sont valables rel. au domaine des nombres rationnels ou à celui des entiers réduits mod p, p étant un nombre premier, excepté l'ouvrage de M. Pontrjagin [1] qui concerne aussi le cas mod m. Or considérons le cas d'un sous-ensemble fermé S (non polyédral) contenu dans E_n. Les groupes de Betti de $E_n - S$ relatives au domaine de coefficients constitué par tous les nombres entiers (supposés connus pour toutes les dimensions!) déterminent les groupes de Betti de $E_n - S$ rel. à un domaine de coefficients donné arbitrairement. Au contraire, on sait que les groupes de Betti de S rel. au domaine des nombres entiers jouissent de propriétés paradoxales. Le problème qui en sort a été résolu récemment par M. Pontrjagin (v. sa communication au Congrès intern. de Zurich 1932; un exposé détaillé doit paraître aux Annals of Math. en janvier 1935): la loi de dualité (2) (non limitée à l'égalité des nombres de Betti) subsiste en prenant comme domaine de coefficients à gauche les nombres entiers, et à droite le groupe additif des nombres réels réduits mod 1. Ce résultat de M. Pontrjagin est en connexion étroite avec sa belle *Theory of topological commutative groups*, Annals of Math. (2) *35*, 361–388 (1934).

Revenons au sous-ensemble fermé S de E_n. Le cas particulier

$$\mathbf{B}^0(E_n - S) = \mathbf{B}^{n-1}(S) + 1 \tag{2'}$$

du théorème de dualité (2) signifie, comme j'ai déjà remarqué plus haut, que le nombre $\pi = \mathbf{B}^0(E_n - S)$ des composantes de $E_n - S$ est une propriété intrinsèque de S. Un énoncé plus faible, à savoir que l'inégalité $\pi > 1$ a une signification intrinsèque, a été prouvé par M. Borsuk [1] sans emploi des cycles. Or en employant les cycles, on peut arriver à des lois dont (2′) n'est qu'un cas extrêmement particulier. Je vais esquisser ces lois, pas encore publiées excepté quelques cas particuliers énoncés chez Čech [6].

S étant toujours un sous-ensemble fermé donné de E_n, divisons d'une manière quelconque les composantes de $E_n - S$ en deux familles disjointes Φ et Φ'; soient T et T' la somme de toutes les composantes de la famille Φ, resp. Φ'; soient p et p' les nombres des dites composantes. Designons par $\mathbf{M}$ le module de tous les cycles (absolus) à $n-1$ dimensions dans S (à coefficients rationnels), deux cycles de $\mathbf{M}$ étant considérés comme égaux s'ils sont homologues l'un à l'autre dans S. Désignons par $\mathbf{M}(\Phi)$ le module de tous les cycles de $\mathbf{M}$ qui sont homologues à zéro dans $E_n - T$, de manière que $\mathbf{M}(0) = \mathbf{M}$. Désignons par q et q' le rang (nombre de Betti) du module $\mathbf{M} - \mathbf{M}(\Phi)$, resp. de $\mathbf{M}(\Phi)$. Alors on a

$$(5) \qquad p = q + c\,, \quad p' = q' + c'\,,$$

où: $c = 1$ si $q > 0$, tandis que pour $q = 0$ on a soit $c = 1$ soit $c = 0$; $c' = 1$, si l'on a simultanément $p' > 0$ et $p = 0$, tandis que $c' = 0$ si l'on a soit $p' = 0$, soit $p > 0$.

Il résulte de (5) que les nombres p et p' sont, à de petites réserves près, déterminés par la structure intrinsèque de S, pourvu que l'on choisisse la famille Φ de manière à pouvoir caractériser intrinsèquement le module $\mathbf{M}(\Phi)$. Or il y a des cas importants où ceci réussit. Tels sont les cas où l'on définit Φ comme la famille de toutes les composantes P de $E_n - S$ qui jouissent d'une des propriétés suivantes: (1) la frontière de P contient un point donné de S; ou plus généralement, (2) la frontière de P contient un sous-ensemble A donné de S; (3) la frontière de P rencontre un sous-ensemble A donné de S, où il faut supposer seulement que A soit connexe; ou plus généralement, (4) étant donné un sous-ensemble A de S ainsi qu'une famille ψ de sous-ensembles relativement fermés de A, l'ensemble $A \cdot P$ n'appartient pas à la famille ψ; ici, il faut supposer que, si B appartient à ψ, (I) chaque sous-ensemble C de B relativement fermé appartient aussi à ψ, (II) l'ensemble $A - B$ est connexe; (5) un point donné x de S est accessible de P, c'est-à-dire qu'il existe un arc simple contenant x dans $P +$ $+ (x)$; ou, plus généralement, (6) A étant un sous-continu de S tel que $\mathbf{B}^1(A) = 0$, A contient un point accessible de P.

Les théorèmes d'invariance qui résultent des énoncés précédants deviennent encore beaucoup plus riches par le fait que, $\{\Phi_\iota\}$ étant un système quelconque de familles de composantes de $E_n - S$, les modules $\mathbf{M}(\Phi_\iota)$ déterminent le module $\mathbf{M}(\Pi\Phi_\iota)$ et, sous de certaines réserves, aussi le module $\mathbf{M}(\Sigma\Phi_\iota)$. D'autre part, les formules (5) sont des cas particuliers de la formule plus générale

$$(6) \qquad p^* = q^* + c^*$$

dont voici la signification: On suppose données deux familles Φ_1 et $\Phi_2 \subset \Phi_1$ de composantes de $E_n - S$; p^* désigne le nombre de composantes de $E_n - S$ qui appartiennent à Φ_1 sans appartenir à Φ_2; q^* est le rang du module $\mathbf{M}(\Phi_2) - \mathbf{M}(\Phi_1)$. Dans les deux cas particuliers où soit la famille Φ_2 est vide soit la famille Φ_1 contient *toutes* les composantes de $E_n - S$, on retrouve les deux formules (5); ces deux cas étant exclus, on a $c^* = 0$.

D'après (6) on a $p^* = \infty$ si et seulement si $q^* = \infty$. Or, la manière dont se comporte le module $\mathbf{M}(\Phi_2) - \mathbf{M}(\Phi_1)$ donne aussi des conditions nécessaires et suffisantes pour que les diamètres des composantes de la famille $\Phi_1 - \Phi_2$ converge vers zéro. Plus généralement soit donnée une famille χ de sous-ensembles fermés de S telle que

(1) l'ensemble $E_n - A$ soit connexe pour chaque ensemble A de la famille χ, (2) $\{A_\nu\}$ étant une suite convergente (au sens de M. Hausdorff) extraite de la famille χ, l'ensemble $\lim A_\nu$ appartienne aussi à χ. Alors, la manière dont se comporte le module $\mathbf{M}(\Phi_2) - \mathbf{M}(\Phi_1)$ détermine si la famille $\Phi_1 - \Phi_2$ possède ou non la propriété suivante: ε étant un nombre positif arbitrairement donné, la famille $\Phi_1 - \Phi_2$ ne contient qu'on nombre *fini* de composantes P telles que, si on choisit arbitrairement un ensemble A de la famille χ, P contienne toujours un point dont la distance de A soit $> \varepsilon$.

Ce qui précède reste vrai dans le cas beaucoup plus général où on remplace E_n par une *pseudo-variété simple à n dimensions*, c'est-à-dire par un espace métrique et compact W_n à n dimensions tel que (1) $\mathbf{B}^n(W_n) = 1$ tandis que $\mathbf{B}^n(S) = 0$ pour chaque sous-ensemble fermé $S \neq W_n$; (2) $\beta_n(x, W_n) = 0$ pour chaque point x de W_n. Plus précisément, pour que les énoncés précédants soient *textuellement* vrais dans l'espace W_n, il faut supposer encore que $\mathbf{B}^{n-1}(W_n) = 0$ ainsi que $\beta_{n-1}(x, W_n) = 0$ pour chaque point x de W_n, Plus généralement, ce qui précède reste vrai, après quelques modification, en remplaçant E_n par une *pseudo-variété à n dimensions m fois ramifiée* ($m = 1, 2, 3, \ldots$), c'est-à-dire par un espace métrique et compact W_n à n dimensions tel que (1) $\mathbf{B}^n(W_n) = m$ tandis que $\mathbf{B}^n(S) = 0$ pour chaque sous-ensemble fermé $S \neq W_n$; (2) $\beta_n(x, W_n) = m$ pour chaque point x de W_n.

Une pseudo-variété à une dimension est topologiquement équivalente à une circonférence et elle est donc toujours simple. Au contraire, pour $n \geqq 2$ il existe des pseudo-variétés à n dimensions m fois ramifiées pour chaque valeur de m. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble fermé F de E_{n+1} soit une telle pseudo-variété est que l'ensemble $E_{n+1} - F$ possède $m + 1$ composantes, qui soient toutes uniformément localement connexes et dont les frontières soient toutes égales à F. L'existence de telles frontières a été prouvée par M. Wilder [2].

Ouvrages cités

J. W. Alexander

[1] *A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. *23*, 333—349 (1922).

P. Alexandroff

[1] *Simpliziale Approximationen in der allgemeinen Topologie*, Math. Annalen *96*, 489—511 (1927).

[2] *Über die Dualität zwischen den Zusammenhangszahlen einer abgeschlossenen Menge und des zu ihr komplementären Raumes*, Göttinger Nachrichten, année 1927, 323—329.

[3] *Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension*, Annals of Math. (2) *30*, 101—187 (1929).

[4] *Sur les propriétés locales des ensembles fermés*, Comptes Rendus Paris *198*, 227—229 (1934).

[5] *On the local properties of closed sets*, Annals of Math. (à paraître).

K. Borsuk

[1] *Über Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Räume*, Math. Annalen *106*, 239—248 (1932).

L. E. J. Brouwer

[1] *Beweis des Jordanschen Satzes für den n-dimensionalen Raum*, Math. Ann. *71*, 314 —319 (1912).

E. Čech

[1] *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque*, Fund. Math. *19*, 149—183 (1932) (voir [7]).

[2] *Théorie générale des variétés et de leurs théorèmes de dualité*. Annals of Math. (2) *34*, 621—730 (1933) (voir [15]).

[3] *Užití teorie homologie na teorii souvislosti* (*Applications de la théorie de l'homologie à la théorie de la connexité*), Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, année 1933, n° 188, 40 pages (voir [16]).

[4] *Sur les nombres de Betti locaux*, Annals of Math. (2) *35*, 678—701 (1934) (voir [19]).

[5] *Sur la connexité locale d'ordre supérieur*, Compositio Math. 2 (1935), 1—25 (voir [21]).

[6] *Sur la décomposition d'une pseudo-variété par un sous-ensemble fermé*, Comptes Rendus Paris *198*, 1342—1345 (1934) (voir [17]).

F. Frank

[1] *Topologische Beziehungen in sich kompakter Teilmengen euklidischer Räume zu ihren Komplementen sowie Anwendung auf die Primendentheorie*, Wiener Berichte *136*, 689—699 (1927).

S. Lefschetz

[1] *Closed point sets on a manifold*, Annals of Math. (2) *29*, 232—254 (1928).

[2] *Topology*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol XII (1930), IX + 410 pages.

[3] *On generalized manifolds*, Amer. Journal of Math. *55*, 469—504 (1933).

H. Poincaré

[1] *Analysis Situs*, Journal de l'Ecole Polyt. (2) *1*, 1—123 (1895).

[2] *Complément à l'Analysis Situs*, Palermo Rendiconti *13*, 285—343 (1899).

L. Pontrjagin

[1] *Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze*, Math. Ann. *105*, 165—205 (1931).

L. Vietoris

[1] *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Math. Ann. *97*, 454—472 (1927).

R. L. Wilder

[1] *Point sets in three and higher dimensions and their investigation by means of a unified analysis situs*, Bull. of the Amer. Math. Soc. *38*, 649—692 (1932).

[2] *On the properties of domains and their boundaries in E_n*, Math. Ann. *109*, 273—306 (1933).

21

SUR LA CONNEXITÉ LOCALE D'ORDRE SUPÉRIEUR

Compositio Mathematica
2 (1935), 1–25

Ce Mémoire est divisé en deux chapitres. Dans le premier je donne un bref exposé de la théorie de l'homologie dans un espace quelconque, en supposant que les coefficients appartiennent à un *groupe abélien additif complètement arbitraire.*[1] Je me sers beaucoup de mon Mémoire *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque* (Fund. Math. 19 (1932), 149–183, [7]), cité: Homologie. Je voudrais attirer l'attention du lecteur sur le théorème du n° 11 qui exprime en toute généralité le lieu entre homologie et homotopie. On pourrait utiliser ce théorème (et ceux donnés dans Homologie) pour démontrer les propriétés combinatoires de l'espace euclidien *sans faire usage de polyèdres.*

Dans le second chapitre je m'occupe de la connexité locale d'ordre supérieur, définie moyennant l'homologie.[2] La connexité locale d'ordre 0 ne diffère guère (v. n° 15) de la connexité locale au sens classique. Après avoir donné la définition (n° 13), j'expose une série de critères pour la connexité locale d'ordre supérieur. Les corollaires des n^{os} 35 et 37, ne contenant explicitement aucune notion combinatoire, sont intéressants parce qu'ils donnent une *localisation des deux théorèmes classiques de* Janiszewski.[3]

Dans un Mémoire qui fera suite à celui-ci, j'étudierai en particulier les espaces bicompacts partout localement connexes d'ordres 0, 1, ..., *n*. En ce qui concerne les cycles de dimension *n*, ces espaces sont une généralisation naturelle des polyèdres.

[1] Cf. P. Alexandroff, Über die Urysohnschen Konstanten [Fundamenta *20* (1933), 144–150 (141)].

[2] Cette notion n'est pas nouvelle (voir P. Alexandroff [Annals of Math. *30* (1929), note 63 au bas de la page 181]); néanmoins elle ne semble pas avoir été étudiée jusqu'à présent.

[3] Sur les coupures du plan faites par les continus. [Práce Matem.-Fiz. *26* (1913)]. Il existe une autre localisation de ces théorèmes, que je publierai ailleurs.

I.

1. Soit R un espace topologique (Homologie, III, 1). Nous aurons souvent l'occasions de supposer que R satisfasse à l'un des *axiomes de séparation* que voici:

1.1. (*Axiome de M. Hausdorff*): a et b étant deux points de R distincts l'un de l'autre, il existe des ensembles ouverts U et V tels que $a \in U$, $b \in V$, $UV = 0$.

1.2. (*Régularité de* R): U étant un entourage [4] de $a \in R$, il existe un entourage V de a tel que $\bar{V} \subset U$.

1.3. (*Normalité de* R): F et Φ étant deux ensembles fermés tels que $F\Phi = 0$, il existe des ensembles ouverts U et V tels que $F \subset U$, $\Phi \subset V$, $UV = 0$.

1.4. (*Normalité complète de* R): Soit S un sous-ensemble arbitraire de R; soient P et Q deux ensembles ouverts dans S et tels que $PQ = 0$; alors il existe des ensembles U et V ouverts dans R et tels que $P \subset U$, $Q \subset V$, $UV = 0$.

Chacun de ces axiomes est plus fort que les précédents. Chaque espace *métrique* satisfait à l'axiome 1.4. Les axiomes 1.1, 1.2 et 1.4 sont *héréditaires*: chaque sous-ensemble S d'un espace R satisfaisant à ces axiomes les vérifie lui-même. L'espace R satisfait à 1.4 si et seulement si cet espace satisfait *héréditairement* à 1.3.

2. *Soit R un espace complètement normal. Soit S un sous-ensemble arbitraire de R. Soit V_0 un sous ensemble ouvert de S; soit U un sous-ensemble ouvert de R; soit $V_0 \subset U$. Il existe un sous-ensemble V ouvert de R tel que $V \subset U$, $V_0 = SV$, $S\bar{V}_0 = S\bar{V}$.*

Démonstration. Les ensembles V_0 et $S - \bar{V}_0$ sont ouverts dans S et $V_0(S - \bar{V}_0) = 0$. D'après 1.4 il existe des ensembles G et H ouverts dans R et tels que $V_0 \subset G$, $S - \bar{V}_0 \subset H$, $GH = 0$. H étant ouvert, on a $\bar{G}H = 0$. L'ensemble V_0 étant ouvert dans S, il existe un ensemble K ouvert dans R et tel que $V_0 = SK$. Posons $V = UGK$. Alors $SV = SK \,.\, UG = V_0 \,.\, UG = V_0$. Comme $V_0 \subset V$, on a $S\bar{V}_0 \subset S\bar{V}$. Comme $S - \bar{V}_0 \subset H$, $\bar{G}H = 0$, $\bar{V} \subset \bar{G}$, on a $(S - \bar{V}_0)\,\bar{V} = 0$, d'où $S\bar{V} \subset S\bar{V}_0$. Donc $S\bar{V}_0 = S\bar{V}$.

3. L'espace R s'appelle *bicompact* s'il satisfait à 1.1 et si de chaque famille d'ensembles ouverts recouvrant R on peut extraire une famille finie recouvrant R.

Chaque espace bicompact est normal. Un sous-ensemble S d'un espace bicompact R est bicompact si et seulement s'il est fermé dans R. Un espace *métrique* R est bicompact si et seulement s'il est *compact*, c'est-à-dire si chaque suite de points de R contient une suite partielle convergente.

4. Soit R un espace topologique *quelconque*. Soit $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$ Nous

[4] Un *entourage* d'un point ou d'un sous-ensemble est un ensemble *ouvert* contenant le point ou le sous-ensemble considéré.

dirons[5] que $\dim R \leqq n$, si chaque réseau[6] $\mathfrak{U}$ dans R possède un affinement (Homologie, II, 9) $\mathfrak{V}$ d'ordre[7] $\leqq n$.

5. A et B étant deux ensembles quelconques, on désigne par $A \times B$ l'ensemble de tous les couples ordonnés (a, b), où $a \in A$, $b \in B$. Supposons que A et B soient des espaces topologiques. M étant un sous-ensemble arbitraire de $A \times B$, on dit que M est ouvert dans $A \times B$ si, (a, b) étant un point quelconque de M, il existe un entourage U de a dans A et un entourage V de b dans B tels que $U \times V \subset M$. On voit sans peine que $A \times B$ est en vertu de cette définition un espace topologique.

Si $\mathfrak{U}$ est un réseau dans A et si $\mathfrak{V}$ est un réseau dans B, l'ensemble $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ de tous les $U \times V$, où U et V parcourent respectivement tous les sommets de $\mathfrak{U}$ et de $\mathfrak{V}$, est évidemment un réseau dans $A \times B$.

6. *Soient A et B deux espaces bicompacts. Soit $\mathfrak{Z}$ un réseau dans $A \times B$. Il existe un réseau $\mathfrak{U}$ dans A et un réseau $\mathfrak{V}$ dans B tels que $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ soit un affinement de $\mathfrak{Z}$.*

Démonstration. Soit a un point de A. Pour chaque $b \in B$ il existe un sommet $Z(a, b)$ de $\mathfrak{Z}$ tel que $(a, b) \in Z(a, b)$. L'ensemble $Z(a, b)$ étant ouvert dans $A \times B$, il existe un entourage $P(a, b)$ de a dans A et un entourage $Q(a, b)$ de b dans B tels que $P(a, b) \times Q(a, b) \subset Z(a, b)$. Les ensembles $Q(a, b)$ sont ouverts dans B et $\sum_{b \in B} Q(a, b) = B$. L'espace B étant bicompact, il existe des points $b_{a,1}, b_{a,2}, \ldots, b_{a,k(a)}$ de B en nombre fini tels que $\mathfrak{G}(a) = \{Q(a, b_{a,1}), Q(a, b_{a,2}), \ldots, Q(a, b_{a,k(a)})\}$ est un réseau dans B. Posons

$$U(a) = \prod_{j=1}^{k(a)} P(a, b_{a,j}) .$$

Les ensembles $U(a)$ sont ouverts dans A et $\sum_{a \in A} U(a) = A$. L'espace A étant bicompact, il existe des points $a_1, a_2, \ldots, a_h$ de A en nombre fini tels que $\mathfrak{U} = \{U(a_1), U(a_2), \ldots \ldots, U(a_h)\}$ est un réseau dans A. Soit $\mathfrak{V}$ un réseau dans B qui soit un affinement simultané de tous les réseaux $\mathfrak{G}(a_i)$ $(1 \leqq i \leqq h)$. Alors $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ est un réseau dans $A \times B$. Soit $U(a_i) \times V$ un sommet arbitraire de $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$. Il suffit de prouver qu'il existe un point $b \in B$ tel que $U(a_i) \times V \subset Z(a, b)$. Le réseau $\mathfrak{V}$ étant un affinement de $\mathfrak{G}(a_i)$, il existe un indice j $(1 \leqq j \leqq k(a_i))$ tel que $V \subset Q(a_i, b_{a_i,j})$. Or on a $U(a_i) \subset \subset P(a_i, b_{a_i,j})$. Donc

$$U(a_i) \times V \subset P(a_i, b_{a_i,j}) \times Q(a_i, b_{a_i,j}) \subset Z(a_i, b_{a_i,j}) .$$

7. Un espace topologique R est dit *connexe* si une décomposition $R = U + V$, où U et V sont des sous-ensembles ouverts et non vides, ne peut avoir lieu que si $UV \neq 0$.

[5] Cf. Časopis pro pěst. mat. a fys. *62* (1933), 277—291, [11].

[6] Les réseaux considérés dans ce Mémoire sont tous de réseaux *ouverts* (Homologie III, 2).

[7] *L'ordre* du réseau $\mathfrak{V}$ est la dimension maxima d'un $\mathfrak{V}$-simplexe (Homologie II, 2).

Un sous-ensemble *connexe maximé* d'un espace R s'appelle une *composante* de R. Chaque point $a \in R$ appartient à une et à une seule composante de R.

Deux points a et b de l'espace R sont dits *séparés dans* R, s'il existe une décomposition $R = U + V$, où U et V sont des sous-ensembles ouverts de R tels que $a \in U$, $b \in V$, $UV = 0$. Un sous-ensemble Q de R s'appelle une *quasicomposante* de R, s'il est maximé (saturé) relativement à la propriété suivante: deux de ses points ne sont jamais séparés dans R. Chaque point $a \in R$ appartient à une quasicomposante de R et *à* une seule.

Chaque composante de R fait partie d'une quasicomposante de R. Si le nombre total de quasicomposantes de R est fini, ou bien si l'espace R est bicompact, les quasicomposantes sont identiques avec les composantes.

8. Soient A et B deux espaces topologiques. Soit f une fonction (univoque) définie dans A, dont les valeurs soient des points de B. On dit que la fonction f est *continue* si, U étant un sous-ensemble ouvert de $f(A) \subset B$, l'ensemble $f^{-1}(U)$ de tous les $x \in A$ tels que $f(x) \in U$ est ouvert dans A.

Si l'espace A est bicompact, l'espace $f(A)$ l'est aussi pourvu que B satisfasse à l'axiome de M. Hausdorff (1.1).

9. $\mathfrak{E}$ désigne l'ensemble de tous les nombres entiers. $\mathfrak{R}$ désigne l'ensemble de tous les nombres rationnels.

Un groupe abélien additif contenant au moins deux éléments sera appelé un *domaine*. $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{R}$ sont donc des domaines particuliers.

10. Soit R un espace topologique. Soit Z la famille de tous les réseaux ouverts dans R. Dans Homologie II j'ai développé une théorie de l'homologie dans R[8] en supposant que les coefficients dans les cycles et dans les homologies appartiennent au domaine $\mathfrak{R}$. Toute la théorie reste d'ailleurs valable quand on remplace $\mathfrak{R}$ par le domaine des entiers réduits mod m, où $m = 2, 3, \ldots$; v. Homologie V, 1.

Or soit $\mathfrak{D}$ un domaine complètement arbitraire. On voit sans peine que tout le contenu de Homologie II, 1 – 15 se transporte *textuellement* au cas où on remplace $\mathfrak{R}$ par $\mathfrak{D}$. Pour plus de charté, j'introduirai les termes: $(n, \mathfrak{U})$-chaîne *du domaine* $\mathfrak{D}$ (Homologie II, 3) et $(n, \mathfrak{U})$-cycle (absolu ou relatif[9]) *du domaine* $\mathfrak{D}$ (Homologie II, 7) pour indiquer que les coefficients appartiennent à $\mathfrak{D}$.

Ajoutons les deux remarques suivantes:

10.1. $C^n(\mathfrak{U})$ étant une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne du domaine $\mathfrak{E}$ et r étant un élément de $\mathfrak{D}$, on peut former la chaîne $r\,C^n(\mathfrak{U})$ du domaine $\mathfrak{D}$. Si $C^n(\mathfrak{U}) \subset A$ (Homologie II, 5), on a aussi $r\,C^n(\mathfrak{U}) \subset A$. Si $C^n(\mathfrak{U}) \to \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ (Homologie II, 4), on a aussi $r\,C^n(\mathfrak{U}) \to$ $\to r\,\Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ etc.

10.2. $C^0(\mathfrak{U}) = \sum_1^k r_i U_i$ etant une $(0, \mathfrak{U})$-chaîne du domaine $\mathfrak{D}$, je pose $J[C^0(\mathfrak{U})] =$

[8] La famille Z y était beaucoup plus générale; mais nous avons déjà signalé que, dans ce Mémoire, nous nous servirons exclusivement de *réseaux ouverts*.

[9] Tous les cycles considérés dans ce Mémoire sont absolus.

$= \sum_1^k r_i \in \mathfrak{D}$. Si $C^0(\mathfrak{U}) \sim 0$, on a $J[C^0(\mathfrak{U})] = 0$. Soit $\mathfrak{B}$ un affinement de $\mathfrak{U}$; soit $\pi =$ $=$ Pr. $(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$ (Homologie II, 10 et 11); soit $C^0(\mathfrak{B})$ une $(0, \mathfrak{B})$-chaîne du domaine $\mathfrak{D}$; alors $J[\pi\, C^0(\mathfrak{B})] = J\, C^0(\mathfrak{B})$.

Comme dans Homologie II, 20, on définit les (n, R)-cycles (absolus ou relatifs[9]) du domaine $\mathfrak{D}$. Nous convenons d'écrire simplement C^n (p. ex.) au lieu de $\{C^n(\mathfrak{U})\}$: donc C^n est l'ensemble de tous les $C^n(\mathfrak{U})$ attachés aux réseaux $\mathfrak{U}$.

Si Γ^0 est un $(0, R)$-cycle absolu du domaine $\mathfrak{D}$, on voit sans peine que l'élément $r = J[\Gamma^0(\mathfrak{U})]$ de $\mathfrak{D}$ est indépendant du choix du réseau $\mathfrak{U}$; je pose $r = J(\Gamma^0)$.

11. ***Prémisses:*** 1° *R et T sont des espaces bicompacts,*
2° *α et β sont deux points de T non séparés* (v. 7) *l'un de l'autre dans T,*
3° *S est un sous-ensemble fermé de R,*
4° *f est une fonction continue définie dans $S \times T$,*
5° $f(S \times T) = M \subset R$,
6° $f(x, \alpha) = x$ *pour chaque* $x \in S$,
7° $f(S, \beta) = S^*$,
8° *$\mathfrak{U}$ est un réseau dans R.*

Conclusion: *Il existe un affinement $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{U}$ jouissant de la propriété suivante: Soit $k = 0, 1, 2, \dots$ Soit $\pi =$ Pr. $(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Soit $\Gamma^k(\mathfrak{B})$ un $(k, \mathfrak{B})$-cycle dans S d'un domaine $\mathfrak{D}$ quelconque. Il existe un $(k, \mathfrak{U})$-cycle $\Delta^k(\mathfrak{U})$ dans S^* du domaine $\mathfrak{D}$ tel que $\pi\, \Gamma^k(\mathfrak{U}) \sim \Delta^k(\mathfrak{U})$ dans M.*

Démonstration. Considérons la réseau $M\mathfrak{U}$ dans M (Homologie III, 4). U étant un sommet de $\mathfrak{U}$ tel que $MU \neq 0$, l'ensemble $f^{-1}(MU)$ est (v. 8) un sous-ensemble ouvert de $S \times T$; tous les $f^{-1}(MU)$ $(U \in \mathfrak{U}, MU \neq 0)$ constituent un réseau $\mathfrak{Z}$ dans $S \times T$. D'après 6, il existe un réseau $\mathfrak{W}$ dans S et un réseau $\mathfrak{T}$ dans T tels que $\mathfrak{W} \times \mathfrak{T}$ soit un affinement de $\mathfrak{Z}$; soit $\varphi =$ Pr. $(\mathfrak{W} \times \mathfrak{T}, \mathfrak{Z})$. Les points $\alpha, \beta \in T$ n'étant pas séparés dans T, il existe (Homologie III, 13) des sommets T_i $(0 \leqq i \leqq n)$ de $\mathfrak{T}$ tels que $\alpha \in T_0$, $\beta \in T_n$, $T_{i-1}T_i \neq 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$.

Soit W un sommet quelconque de $\mathfrak{W}$, Alors $Z = \varphi(W \times T_0)$ est un sommet de $\mathfrak{Z}$. D'après la définition de $\mathfrak{Z}$, il existe un sommet $U = \psi_1 W$ de $\mathfrak{U}$ tel que $f(W \times T_0) \subset$ $\subset f(Z) = MU$. Comme $\alpha \in T_0$, d'après 11.6 on a $W = f(W \times \alpha) \subset f(W \times T_0) \subset$ $\subset MU$, d'où $W \subset SU$, car $W \subset S$. Il en résulte que le réseau $\mathfrak{W}$ est un affinement de $S\mathfrak{U}$ et qu'il existe une projection $\pi_1 =$ Pr. $(\mathfrak{W}, S\mathfrak{U})$ telle que $\pi_1 W = S.\ \psi_1 W$, $M\psi_1 W =$ $= f(Z)$, où $Z = \varphi(W \times T_0)$.

Chaque $W \in \mathfrak{W}$ étant un ensemble ouvert dans S et contenu dans $\pi_1 W = SU$, où $U = \psi_1 W$, on peut y attacher un ensemble $V = \psi_2 W$ ouvert dans R et tel que $W =$ $= SV$, $V \subset U$. L'ensemble $R - \sum_{W \in \mathfrak{W}} \psi_2 W \subset R - S$ ést fermé dans R et par suite bicompact. Il en résulte qu'on peut le recouvrir par un nombre fini d'ensembles V' ouverts dans R, chaque V' étant contenu dans un ensemble de la forme $U - S$, où $U \in \mathfrak{U}$. En ajoutant ces ensembles V' aux ensembles $V = \psi_2 W$, où $W \in \mathfrak{W}$, on obtient un affinement $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$ tel que $S\mathfrak{V} = \mathfrak{W}$. On voit qu'il existe une projection $\pi = $ $= \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$ telle que $\pi\psi_2 W = \psi_1 W$ pour chaque $W \in \mathfrak{W}$.

Ceci étant, rangeons tous les sommets de $\mathfrak{W}$ dans une suite finie bien déterminée

$$W_0, W_1, \ldots, W_m\,.$$

Soit $(W_{v_0}, W_{v_1}, \ldots, W_{v_k})$ un $(k, \mathfrak{W})$-simplexe; on peut supposer que $v_0 < v_1 < \ldots < v_k$. Pour $1 \leqq i \leqq n$ posons[10]

$$P_i^{k+1}(W_{v_0}, W_{v_1}, \ldots, W_{v_k}) =$$
$$= \sum_{h=0}^{k} (-1)^h \,(W_{v_0} \times T_{i-1}, \ldots, W_{v_h} \times T_{i-1}, W_{v_h} \times T_i, \ldots, W_{v_k} \times T_i)\,,$$

en convenant que chaque symbole dont les sommets ne sont pas tous distincts l'un de l'autre signifie zéro. Donc

$$P_i^{k+1}(W_{v_0}, W_{v_1}, \ldots, W_{v_k})$$

est une $(k, \mathfrak{W} \times \mathfrak{T})$-chaîne. Si

$$C^k(\mathfrak{W}) = \sum b_{v_0 v_1 \ldots v_k}(W_{v_0}, W_{v_1}, \ldots, W_{v_k})$$

est une $(k, \mathfrak{W}_k)$-chaîne du domaine $\mathfrak{D}$, posons

$$P_i^{k+1}[C^k(\mathfrak{W})] = \sum b_{v_0 v_1 \ldots v_k}\, P_i^{k+1}(W_{v_0}, W_{v_1}, \ldots, W_{v_k})\,.$$

Pour $0 \leqq i \leqq n$ posons

$$\Omega_i^k[C^k(\mathfrak{W})] = \sum b_{v_0 v_1 \ldots v_k}(W_{v_0} \times T_i, \ldots, W_{v_k} \times T_i)\,;$$

c'est donc une $(k, \mathfrak{W} \times \mathfrak{T})$-chaîne du domaine $\mathfrak{D}$. On démontre sans peine[11] que pour $1 \leqq i \leqq n$

$$P_i^{k+1}[C^k(\mathfrak{W})] \to \Omega_i^k[C^k(\mathfrak{W})] - \Omega_{i-1}^k[C^k(\mathfrak{W})] - P_i^k[F\,C^k(\mathfrak{W})]\,.\text{[12]} \tag{1}$$

Or soit $\Gamma^k(\mathfrak{V})$ un $(k, \mathfrak{V})$-cycle dans S du domaine $\mathfrak{D}$. Comme $S\mathfrak{V} = \mathfrak{W}$, on a (Homologie III, 7)

$$S\,\Gamma^k(\mathfrak{V}) = \sum a_{v_0 v_1 \ldots v_k}(W_{v_0}, W_{v_1}, \ldots, W_{v_k})\,,$$
$$\Gamma^k(\mathfrak{V}) = \sum a_{v_0 v_1 \ldots v_k}(\psi_2 W_{v_0}, \psi_2 W_{v_1}, \ldots, \psi_2 W_{v_k})\,. \tag{2}$$

D'après (1) on a pour $1 \leqq i \leqq n$

$$P_i^{k+1}[S\,\Gamma^k(\mathfrak{V})] \to \Omega_i^k[S\,\Gamma^k(\mathfrak{V})] - \Omega_{i-1}^k[S\,\Gamma^k(\mathfrak{V})]\,,$$

[10] Cf. Homologie II, 12.
[11] V. S. Lefschetz [Topology, II, 8].
[12] Pour $k = 0$ on doit poser $P_i^0[F\,C^0(\mathfrak{W})] = 0$.

car $\Gamma^k(\mathfrak{B}) \to 0$, d'où $S\,\Gamma^k(\mathfrak{B}) \to 0$. Donc

$$\Omega_i^k[S\,\Gamma^k(\mathfrak{B})] \sim \Omega_{i+1}^k[S\,\Gamma^k(\mathfrak{B})]\,,$$

d'où

$$\varphi\Omega_0^k[S\,\Gamma^k(\mathfrak{B})] \sim \varphi\Omega_n^k[S\,\Gamma^k(\mathfrak{B})]\,. \tag{3}$$

Posons $Z_\nu = \varphi(W_\nu \times T_0)$, $Z'_\nu = \varphi(W_\nu \times T_n)$. Alors (3) s'écrit

$$\sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_k}(Z_{\nu_0}, Z_{\nu_1}, \ldots, Z_{\nu_k}) \sim \sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_k}(Z'_{\nu_0}, Z'_{\nu_1}, \ldots, Z'_{\nu_k})\,.$$

Comme $f(\mathfrak{Z}) = M\mathfrak{U}$, on en déduit sans peine que

$$\sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_k}[f(Z_{\nu_0}), f(Z_{\nu_1},) \ldots, f(Z_{\nu_k})] \quad \text{et} \quad \sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_k}[f(Z'_{\nu_0}, Z'_{\nu_1}, \ldots, Z'_{\nu_k})]$$

sont des $(k, M\mathfrak{U}_k)$-cycles du domaine $\mathfrak{D}$ homologues l'un à l'autre. En posant $f(Z_\nu) = MU_\nu$, $f(Z'_\nu) = MU'_\nu$, $U_\nu \in \mathfrak{U}$, $U'_\nu \in \mathfrak{U}$, on voit que

$$\sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_k}(U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \ldots, U_{\nu_k}) \sim \sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_k}(U'_{\nu_0}, U'_{\nu_1}, \ldots, U'_{\nu_k}) \text{ dans } M\,, \tag{4}$$

les deux membres étant des $(k, \mathfrak{U})$-cycles du domaine $\mathfrak{D}$ dans M. Comme $Z_\nu = \varphi(W_\nu \times T_0)$, on a $f(Z_\nu) = M\psi_1 W_\nu$, d'où $U_\nu = \psi_1 W_\nu = \pi\psi_2 W_\nu$. On en déduit en vertu de (2) que

$$\sum a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_k}(U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \ldots, U_{\nu_k}) = \pi\,\Gamma^k(\mathfrak{B})\,. \tag{5}$$

Comme $\beta \in T_n$, $Z'_\nu \supset W_\nu \times T_n$, on a

$$(S \times \beta)\,.\prod_{h=0}^{k} Z'_{\nu_h} \supset \prod_{h=0}^{k} W_{\nu_h} \times \beta \neq 0\,,$$

d'où $S^*\,.\prod_{h=0}^{k} U'_\nu \neq 0$ d'après 11.7, car $U'_\nu \supset f(Z'_\nu)$. Donc

$$\Delta^k(\mathfrak{U}) = \sum a'_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_k}(U'_{\nu_0}, U'_{\nu_1}, \ldots, U'_{\nu_k}) \tag{6}$$

est situé dans S^*. Or il résulte de (4), (5) et (6) que $\pi\,\Gamma^k(\mathfrak{B}) \sim \Delta^k(\mathfrak{U})$ dans M, c. q. f. d.

12. *Soit R un espace complètement normal. Soient φ et ψ deux sous-ensembles fermés de R. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau donné dans R. Il existe un affinement $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{U}$ jouissant de la propriété suivante: Si une $(k, \mathfrak{B})$-chaine $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ d'un domaine $\mathfrak{D}$ arbitraire est située dans φ et dans ψ, elle aussi située dans $\varphi\psi$.*

Démonstration. Soit (Homologie III, 23) $\mathfrak{W}$ un affinement de $\mathfrak{U}$ régulier par rapport à $\varphi\psi$. Soit $\mathfrak{B}$ le réseau déduit de $\mathfrak{W}$ de la manière suivante: Chaque sommet W de $\mathfrak{W}$ tel que $W\varphi\psi \neq 0$ passe inaltéré du réseau $\mathfrak{W}$ dans le réseau $\mathfrak{B}$; au contraire, au lieu de chaque sommet W de $\mathfrak{W}$ tel que $W\varphi\psi = 0$, $\mathfrak{W}$ possède les *deux* sommets $W - \varphi$ et $W - \psi$.

Ceci étant, soit $C^k(\mathfrak{B}) \subset \varphi$, $C^k(\mathfrak{B}) \subset \psi$ et soit $(V_0, V_1, \ldots, V_k)$ un simplexe de $C^k(\mathfrak{B})$, on a $\varphi \prod_{i=0}^{k} V_i \neq 0 \neq \psi \prod_{i=0}^{k} V_i$, d'où $\varphi V_i \neq 0 \neq \psi V_i$. D'après la définition même de $\mathfrak{B}$, il en résulte que $\varphi\psi V_i \neq 0$ et que $V_i \in \mathfrak{W}$. Le réseau $\mathfrak{W}$ étant régulier par rapport à $\varphi\psi$, on a $\varphi\psi \prod_{i=0}^{k} V_i \neq 0$, c. q. f. d.

II.

13. Soit a un point donné d'un espace R. Soit $k = 0, 1, 2, \ldots$ Soit $\mathfrak{D}$ un domaine donné. Nous dirons que R est *localement connexe d'ordre k relativement à* $\mathfrak{D}$ *au point a*, si chaque entourage P de a contient un entourage Q de a jouissant de la propriété suivante: Chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède un affinement $\mathfrak{B}$ tel que, si $\Gamma^k(\mathfrak{B})$ est un $(k, \mathfrak{B})$-cycle dans $\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ (et si $J[\Gamma^0(\mathfrak{B})] = 0$ dans le cas $k = 0$), on a $\pi\, \Gamma^k(\mathfrak{B}) \sim 0$ dans $\bar{P}$, où $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$.

Le choix de la projection π est indifférent d'après Homologie II, 12. On voit sans peine que, $\mathfrak{W}$ étant un affinement arbitraire de $\mathfrak{B}$ et $\Gamma^k(\mathfrak{W})$ étant un $(k, \mathfrak{W})$-cycle dans $\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\Gamma^0(\mathfrak{W})] = 0$ si $k = 0$), on a $\pi'\, \Gamma^k(\mathfrak{W}) \sim 0$ dans $\bar{P}$, où $\pi' = \text{Pr.}\,(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})$.

14. *Soit R un espace complètement normal. Soit S un sous-ensemble fermé de R. Soit $a \in S$. Soit $k = 0, 1, 2, \ldots$ Soit $\mathfrak{D}$ un domaine quelconque. Pour que S soit localement connexe d'ordre k relativement à $\mathfrak{D}$ au point a, il faut et il suffit que chaque entourage P de a dans R contienne un entourage Q de a dans R jouissant de la propriété suivante: Chaque réseau $\mathfrak{U}$ dans R possède un affinement $\mathfrak{B}$ tel que, si $\Gamma^k(\mathfrak{B})$ est un $(k, \mathfrak{B})$-cycle du domaine $\mathfrak{D}$ dans $S\bar{Q}$ (avec $J[\Gamma^0(\mathfrak{B})] = 0$ si $k = 0$), on a $\pi\, \Gamma^k(\mathfrak{B}) \sim 0$ dans $S\bar{P}$, où $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$.*

Démonstration. I. La condition est nécessaire. Soit P un entourage de a dans R, de manière que $P_0 = SP$ est un entourage de a dans S. S étant localement connexe d'ordre k relativement à $\mathfrak{D}$ au point a, il existe un entourage $Q_0 \subset P_0$ de a dans S jouissant de la propriété indiquée au no. 13. D'après 2 il existe un entourage $Q \subset P$ de a dans R tel que $SQ = Q_0$, $S\bar{Q} = \bar{Q}_0$. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R, de manière que $\mathfrak{U}_0 = S\mathfrak{U}$ (Homologie III, 4) est un réseau dans S. Déterminons un affinement $\mathfrak{B}_0$ de $\mathfrak{U}_0$ d'après 13. On voit sans peine qu'il existe un affinement $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{U}$ tel que $S\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0$. Soit $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. On en déduit d'une manière évidente la projection $\pi_0 = \text{Pr.}\,(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{U}_0)$. Or soit $\Gamma^k(\mathfrak{B})$ un $(k, \mathfrak{B})$-cycle dans $S\bar{Q} = \bar{Q}_0$ du domaine $\mathfrak{D}$. Evidemment $\gamma^k(\mathfrak{B}_0) = S \,.\, \Gamma^k(\mathfrak{B})$ (Homologie III, 7) est un $(k, \mathfrak{B}_0)$-cycle dans $\bar{Q}_0$ du domaine $\mathfrak{D}$ (et $J[\gamma^0(\mathfrak{B}_0)] = 0$ si $k = 0$). D'après la définition de $\mathfrak{B}_0$ il existe une $(k + 1, \mathfrak{U}_0)$-chaîne $c^{k+1}(\mathfrak{B}_0)$ du domaine $\mathfrak{D}$ dans $\bar{P}_0 \subset S\bar{P}$ telle que $c^{k+1}(\mathfrak{U}_0) \to \pi_0\, \gamma^k(\mathfrak{B}_0) = S \,.\, \pi\, \Gamma^k(\mathfrak{B})$. Il existe évidemment une $(k + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $C^{k+1}(\mathfrak{U})$ du domaine $\mathfrak{D}$ dans $S\bar{P}$ telle que $c^{k+1}(\mathfrak{U}_0) = S \,.\, C^{k+1}(\mathfrak{U})$, d'où $C^{k+1}(\mathfrak{U}) \to \pi\, \Gamma^k(\mathfrak{B})$.

II. La condition est suffisante. Supposons la remplie. Soit P_0 un entourage de a dans S. D'après 2, il existe un entourage P de a dans R tel que $SP = P_0, S\bar{P} = \bar{P}_0$. Déterminons l'entourage $Q \subset P$ de a dans R d'après notre condition et posons $Q_0 = SQ$, de manière que Q_0 est un entourage de a dans S contenu dans P_0. Or soit $\mathfrak{U}_0$ un réseau dans S. Il existe un réseau $\mathfrak{U}$ dans R tel que $\mathfrak{U}_0 = S\mathfrak{U}$. Déterminons un affinement $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$ d'après notre condition et posons $\mathfrak{V}_0 = S\mathfrak{V}$. Soit $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, ce qui détermine la projection $\pi_0 = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{U}_0)$. Soit $\gamma^k(\mathfrak{V}_0)$ un $(r, \mathfrak{V}_0)$-cycle dans $\bar{Q}_0 \subset S\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\gamma^0(\mathfrak{V}_0)] = 0$ si $k = 0$). Il existe évidemment un $(k, \mathfrak{V})$-cycle $\Gamma^k(\mathfrak{V})$ dans $S\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ tel que $\gamma^k(\mathfrak{V}_0) = S\,.\,\Gamma^k(\mathfrak{V})$; si $k = 0$ on a $J[\Gamma^0(\mathfrak{V})] = 0$. D'après notre condition, il existe une $(k + 1, \mathfrak{U}')$-chaîne $C^{k+1}(\mathfrak{U}) \subset SP$ du domaine $\mathfrak{D}$ telle que $C^{k+1}(\mathfrak{U}) \to \pi\,\Gamma^k(\mathfrak{V})$. Evidemment $S\,.\,C^{k+1}(\mathfrak{U})$ est une $(k + 1, \mathfrak{U}_0)$-chaîne dans $S\bar{P} = \bar{P}_0$ du domaine $\mathfrak{D}$ et $S\,.\,C^{k+1}(\mathfrak{U}) \to S\,.\,\pi\,\Gamma^k(\mathfrak{V}) = \pi_0\,\gamma^k(\mathfrak{V}_0)$.

15. *La connexité locale d'ordre* 0 *est indépendante du domaine* $\mathfrak{D}$ en vertu du théorème suivant, valable pour chaque comaine $\mathfrak{D}$:

L'espace R est localement connexe d'ordre 0 *relativement à* $\mathfrak{D}$ *au point a si et seulement si chaque entourage P de a contient un entourage Q de a tel que l'ensemble* $\bar{Q}$ *fait partie d'une seule quasicomposante de* $\bar{P}$.

Démonstration. Soient P et Q des entourages de a tels que $Q \subset P$. Il suffit de prouver que, si $\bar{Q}$ fait partie d'une seule quasicomposante de $\bar{P}$ et dans ce cas seulement, chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède un affinement $\mathfrak{V}$ tel que $\pi\,\Gamma^0(\mathfrak{V}) \sim 0$ dans $\bar{P}$, où $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(0, \mathfrak{V})$-cycle $\Gamma^0(\mathfrak{V})$ dans $\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ tel que $J[\Gamma^0(\mathfrak{V})] = 0$.

Supposons en premier lieu que $\bar{Q}$ fasse partie d'une seule quasicomposante de $\bar{P}$. Soit $\Gamma^0(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha} r_i U_i$, où $r_i \in \mathfrak{D}$, $\sum_{i=1}^{\alpha} r_i = 0$, $U_i \in \mathfrak{U}$, $U_i\bar{Q} \neq 0$. Il suffit de prouver que $\Gamma^0(\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $\bar{P}$. Désignons par $\mathfrak{A}$ l'ensemble de tous les sommets U de $\mathfrak{U}$ tels qu'il existe une suite $U'_1, \ldots, U'_h$ de sommets de $\mathfrak{U}$ satisfaisant aux conditions $U'_1 = U_1$, $U'_h = U$, $U'_{i-1}U'_i \neq 0$ $(2 \leqq i \leqq h)$, $U'_i\bar{P} \neq 0$ $(1 \leqq i \leqq h)$. Désignons par $\mathfrak{P}$ l'ensemble de tous les sommets U de $\mathfrak{U}$ pour lesquels $U\bar{P} \neq 0$, mais *non* $U \in \mathfrak{U}$. Soient respectivement A et B la somme de tous les éléments de $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{B}$. Alors $\bar{P} = A\bar{P} + B\bar{P}$, les deux termes de la somme étant sans point commun et ouverts dans $\bar{P}$. Comme $\bar{Q}$ fait partie d'une seule quasicomposante de $\bar{P}$, on a $A\bar{Q} = 0$ ou bien $B\bar{Q} = 0$. Or $0 \neq U_1\bar{Q} \subset A\bar{Q}$; donc $B\bar{Q} = 0$. Cela signifie que $U \in \mathfrak{U}$, $U\bar{Q} \neq 0$ entraîne $U \in \mathfrak{U}$, d'où $\sum_{i=2}^{h} (U'_{i-1}, U'_i) \to \sum_{i=2}^{h} (U'_i - U'_{i-1}) = U'_h - U'_1 = U - U_1$, donc $U \sim U_1$ dans $\bar{P}$ pour $U \in \mathfrak{U}$, $U\bar{Q} \neq 0$. Donc on a pour $1 \leqq i \leqq \alpha : U_i - U_1 \sim 0$ dans $\bar{P}$, d'où $r_i(U_i - U_1) \sim 0$ dans $\bar{P}$ et $\Gamma^0(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha} r_i U_i = \sum_{i=1}^{\alpha} r_i(U_i - U_1) \sim 0$ dans $\bar{P}$, c. q. f. d.

Supposons en second lieu que chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède un affinement $\mathfrak{V}$ tel que

$\pi\, \Gamma^0(\mathfrak{B}) \sim 0$ dans $\bar{P}$, où $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(0, \mathfrak{B})$-cycle $\Gamma^0(\mathfrak{B})$ dans $\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ tel que $J[\Gamma^0(\mathfrak{B})] = 0$. On doit prouver que $\bar{Q}$ fait partie d'une seule quasicomposante de $\bar{P}$. Supposons le contraire. Alors $\bar{P} = A + B$, où A et B sont des ensembles ouverts dans $\bar{P}$ et tels que $A\bar{Q} \neq 0 \neq BQ$, $AB = 0$. Soient U_1 et U_2 des ensembles ouverts dans R et tels que $A = U_1\bar{P}$, $B = U_2\bar{P}$. Les trois ensembles U_1, U_2 et $R - \bar{P}$ constituent un réseau $\mathfrak{U}$ dans R. Soit $\mathfrak{B}$ l'affinement de $\mathfrak{U}$ jouissant de la propriété énoncée plus haut. Comme $A\bar{Q} \neq 0 \neq B\bar{Q}$, il existe deux sommets V_1 et V_2 de $\mathfrak{B}$ tels que $V_1 A\bar{Q} \neq 0 \neq V_2 B\bar{Q}$. Soit $r \in \mathfrak{D}$, $r \neq 0$. Alors $\Gamma^0(\mathfrak{B}) = r\mathfrak{B}_1 - - r\mathfrak{B}_2$ est un $(0, \mathfrak{B})$-cycle dans $\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ et $J[\Gamma^0(\mathfrak{B})] = 0$. Donc $\pi\, \Gamma^0(\mathfrak{B}) \sim 0$ dans $\bar{P}$, où $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Or $V_1 A \neq 0$, $U_2 A = 0 = (R - \bar{P})\, A$. Donc $\pi V_1 = U_1$ et on voit pareillement que $\pi V_2 = U_2$. Donc $\pi\, \Gamma^0(\mathfrak{B}) = rU_1 - rU_2 \neq 0$. D'autre part $\pi\, \Gamma^0(\mathfrak{B}) \sim 0$ dans $\bar{P}$, donc il existe une $(1, \mathfrak{U})$-chaîne $C^1(\mathfrak{U})$ dans $\bar{P}$ du domaine $\mathfrak{D}$ telle que $C^1(\mathfrak{U}) \to \pi\, \Gamma^0(\mathfrak{B})$, d'où $C^1(\mathfrak{U}) \neq 0$. C'est une contradiction, car on voit sans peine qu'il n'existe aucune $(1, \mathfrak{U})$-chaîne $\neq 0$ dans $\bar{P}$.

16. *Si R est localement connexe d'ordre k relativement à $\mathfrak{E}$ au point a, R l'est aussi relativement à $\mathfrak{R}$.*

Démonstration. Soit $\Gamma^k(\mathfrak{B})$ un $(k, \mathfrak{B})$-cycle dans $\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{R}$ (avec $J[\Gamma^0(\mathfrak{B})] = 0$ si $k = 0$). Il existe un nombre $n \in \mathfrak{E}$, $n \neq 0$ tel que $n\, \Gamma^k(\mathfrak{B})$ est un $(k, \mathfrak{B})$-cycle du domaine $\mathfrak{E}$. Donc il existe une $(k + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $C^{k+1}(\mathfrak{U})$ dans $\bar{P}$ du domaine $\mathfrak{E}$ telle que $C^{k+1}(\mathfrak{U}) \to \pi n\, \Gamma^k(\mathfrak{B})$. Alors $(1/n)\, C^{k+1}(\mathfrak{U})$ est une $(k + 1, \mathfrak{U})$-chaîne dans $\bar{P}$ du domaine $\mathfrak{R}$ telle que $(1/n)\, C^{k+1}(\mathfrak{U}) \to \pi\, \Gamma^k(\mathfrak{B})$.

17. *Soit $k = 1, 2, 3, \ldots$ Si R est au point a localement connexe d'ordres k et $k - 1$ relativement à $\mathfrak{E}$, alors R est au point a localement connexe d'ordre k relativement à un domaine $\mathfrak{D}$ arbitraire.*

Démonstration. Soit P_1 un entourage donné de a. Comme R est localement connexe d'ordre k relativement à $\mathfrak{E}$ au point a, il existe un entourage $P_2 \subset P_1$ de a jouissant de la propriété suivante: Chaque réseau $\mathfrak{U}_1$ possède un affinement $\mathfrak{U}_2$ tel que, si $\Gamma^k(\mathfrak{U}_2)$ est un $(k, \mathfrak{U}_2)$-cycle dans $\bar{P}_2$ du domaine $\mathfrak{E}$ on a $\pi_{21}\, \Gamma^k(\mathfrak{U}_2) \sim 0$ dans $\bar{P}_1$, où $\pi_{21} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$. Comme R est localement connexe d'ordre $k - 1$ relativement à $\mathfrak{E}$ au point a, il existe un entourage $P_3 \subset P_2$ de a jouissant de la propriété suivante: Chaque réseau $\mathfrak{U}_2$ possède un affinement $\mathfrak{U}_3$ tel que, si $\Gamma^{k-1}(\mathfrak{U}_3)$ est un $(k - 1, \mathfrak{U}_3)$-cycle dans $\bar{P}_3$ du domaine $\mathfrak{E}$ (avec $J[\Gamma^0(\mathfrak{U}_3)] = 0$ si $k = 1$), on a $\pi_{32}\, \Gamma^{k-1}(\mathfrak{U}_3) \sim 0$ dans $\bar{P}_2$, où $\pi_{32} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$. Il suffit de prouver que, si $\Delta^k(\mathfrak{U}_3)$ est un $(k, \mathfrak{U}_3)$-cycle dans $\bar{P}_3$ du domaine $\mathfrak{D}$, on a $\pi_{21}\pi_{32}\, \Delta^k(\mathfrak{U}_3) \sim 0$ dans $\bar{P}_1$.

Pour $h = k$ et pour $h = k - 1$ soit Ω_h l'ensemble de toutes les $(h, \mathfrak{U}_3)$-chaînes dans $\bar{P}_3$ du domaine $\mathfrak{E}$. Ω_h possède une *base*, c'est-à-dire qu'il existe des éléments $C_1^h(\mathfrak{U}_3), C_2^h(\mathfrak{U}_3), \ldots, C_{\alpha_h}^h(\mathfrak{U}_3)$ de Ω_h en nombre fini tels qu'à chaque élément $C^h(\mathfrak{U}_3)$ de Ω_h on puisse faire correspondre biunivoquement des entiers $a_1, \ldots, a_{\alpha_h}$ tels que $C^h(\mathfrak{U}_3) = \sum_{i=1}^{\alpha_h} a_i\, C_i^h(\mathfrak{U}_3)$.[13] La base $C_i^h(\mathfrak{U}_3)$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ n'est déterminée qu'à une

[13] P. ex. tous les $(h, \mathfrak{U}_3)$-simplexes dont le noyau rencontre $\bar{P}_3$ constituent une telle base.

substitution linéaire unimodulaire[14] près. Il existe des entiers η_{ij} $(1 \leqq i \leqq \alpha_k$, $1 \leqq j \leqq \alpha_{k-1})$ tels que $C_i^k(\mathfrak{U}_3) \to \sum_{j=1}^{\alpha_{k-1}} \eta_{ij}\, C_j^{k-1}(\mathfrak{U}_3)$ pour $1 \leqq i \leqq \alpha_k$. On sait[15] qu'il est possible de choisir les deux bases $C_i^k(\mathfrak{U}_3)$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_k)$ et $C_j^{k-1}(\mathfrak{U}_3)$ $(1 \leqq j \leqq \alpha_{k-1})$ de manière que tous les éléments de la matrice (η_{ij}) soient nuls, excepté les β $[0 \leqq \beta \leqq \min(a_k, \alpha_{k-1})]$ éléments $\eta_{11} = \eta_1, \eta_{22} = \eta_2, \ldots, \eta_{\beta\beta} = \eta_\beta$.[16] On aura donc

$$C_i^k(\mathfrak{U}_3) \to \eta_i\, C_i^{k-1}(\mathfrak{U}_3) \text{ pour } 1 \leqq i \leqq \beta \quad (\eta_i \in \mathfrak{E},\ \eta_i \neq 0)$$

et

$$C_i^k(\mathfrak{U}_3) \to 0 \text{ pour } \beta + 1 \leqq i \leqq \alpha_k\,.$$

On voit sans peine que $C_i^{k-1}(\mathfrak{U}_3) \to 0$ $(1 \leqq i \leqq \beta)$ et, si $k = 1$, aussi $J[C_i^0(\mathfrak{U}_3)] = 0$ $(1 \leqq i \leqq \beta)$.

Or soit $\Delta^k(\mathfrak{U}_3)$ un $(k, \mathfrak{U}_3)$-cycle dans $\bar{P}_3$ du domaine $\mathfrak{D}$. On voit sans peine qu'il existe des éléments r_i de $\mathfrak{D}$ tels que $\Delta^k(\mathfrak{U}_3) = \sum_{i=1}^{\alpha_k} r_i\, C_i^k(\mathfrak{U}_3)$. Comme $\Delta^k(\mathfrak{U}_3) \to 0$, on a $\sum_{i=1}^{\beta} \eta_i r_i\, C_i^{k-1}(\mathfrak{U}_3) = 0$. On en déduit aisément que

$$\eta_i r_i = 0 \text{ pour } 1 \leqq i \leqq \beta\,. \tag{1}$$

Pour $\beta + 1 \leqq i \leqq \alpha_k$, on a $C_i^k(\mathfrak{U}_3) \subset \bar{P}_3$, $C_i^k(\mathfrak{U}_3) \to 0$. Donc il existe des $(k + 1, \mathfrak{U}_1)$-chaînes $H_i^{k+1}(\mathfrak{U}_1)$ dans $\bar{P}_1$ du domaine $\mathfrak{E}$ telles que

$$H_i^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{21}\pi_{32}\, C_i^k(\mathfrak{U}_3) \quad (\beta + 1 \leqq i \leqq \alpha_k)\,. \tag{2}$$

Pour $1 \leqq i \leqq \beta$, on a $C_i^{k-1}(\mathfrak{U}_3) \subset \bar{P}_3$, $C_i^{k-1}(\mathfrak{U}_3) \to 0$; si $k = 1$, on a encore $J[C_i^0(\mathfrak{U}_3)] = 0$. Donc il existe des $(k, \mathfrak{U}_3)$-chaînes $D_i^k(\mathfrak{U}_2)$ dans $\bar{P}_2$ du domaine $\mathfrak{E}$ telles que $D_i^k(\mathfrak{U}_2) \to \pi_{32}\, C_i^{k-1}(\mathfrak{U}_3)$. Donc $\pi_{32}\, C_i^k(\mathfrak{U}_3) - \eta_i\, D_i^k(\mathfrak{U}_2)$ sont des $(k, \mathfrak{U}_2)$-cycles dans $\bar{P}_2$ du domaine $\mathfrak{E}$. Donc il existe des $(k + 1, \mathfrak{U}_1)$-chaînes $H_i^{k+1}(\mathfrak{U}_1)$ dans $\bar{P}_1$ du domaine $\mathfrak{E}$ telles que

$$H_i^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{21}\pi_{32}\, C_i^k(\mathfrak{U}_3) - \eta_i\pi_{21}\, D_i^k(\mathfrak{U}_2) \quad (1 \leqq i \leqq \beta)\,. \tag{3}$$

D'après (1), (2) et (3) on a

$$\sum_{i=1}^{\alpha_k} r_i\, H_i^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{21}\pi_{32} \sum_{i=1}^{\alpha_k} r_i\, C_i^k(\mathfrak{U}_3) = \pi_{21}\pi_{32}\, \Delta^k(\mathfrak{U}_3)\,.$$

Donc $\pi_{21}\pi_{32}\, \Delta^k(\mathfrak{U}_3) \sim 0$ dans $\bar{P}$, c. q. f. d.

[14] C'est-à-dire une substitution linéaire dont les coefficients sont des entiers et dont le déterminant est égal à ± 1.

[15] V. p. ex. S. Lefschetz [Topology, 27 et 37].

[16] On peut supposer que chacun des entiers $\eta_1, \ldots, \eta_\beta$ est un diviseur des précédants, mais cela est ici sans importance.

18. *Soit $k = 0, 1, 2, \ldots$ L'espace R est localement connexe d'ordre k relativement à $\mathfrak{R}$ au point a si et seulement si chaque entourage P de a contient un entourage Q de a tel que, si Γ^k est un* (k, R)-cycle dans $\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{R}$ [*avec* $J(\Gamma^0) = 0$ *dans le cas* $k = 0$], *on a* $\Gamma^k \sim 0$ *dans* $\bar{P}$.

Démonstration. I. La condition est suffisante. Supposons-la vérifiée. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau donné. Soit $\mathfrak{B}$ un affinement de $\mathfrak{U}$ normal relativement aux cycles absolus dans $\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{R}$ (Homologie II, 15 et 16). Soit $\Gamma^k(\mathfrak{B})$ un $(k, \mathfrak{B})$-cycle dans $\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{R}$ (avec $J[\Gamma^0(\mathfrak{B})] = 0$ si $k = 0$). On doit prouver que $\pi\, \Gamma^k(\mathfrak{B}) \sim 0$ dans $\bar{P}$, où $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Or il existe (Homologie II, 28) un (k, R)-cycle absolu C^k dans $\bar{Q}$ tel que $C^k(\mathfrak{U}) = \pi\, \Gamma^k(\mathfrak{B})$. (Dans le cas $k = 0$ on a $J(C^0) = J[\Gamma^0(\mathfrak{B})] = 0$.) D'après notre condition, on a $C^k \sim 0$ dans $\bar{P}$, d'où $\pi\, \Gamma^k(\mathfrak{B}) = C^k(\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $\bar{P}$.

II. La condition est nécessaire. Supposons que R soit localement connexe d'ordre k relativement à $\mathfrak{R}$ au point a. Soit P un entourage de a. Déterminons un entourage $Q \subset P$ de a d'après 13. Soit Γ^k un (k, R)-cycle dans $\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{R}$ (avec $J(\Gamma^0) = 0$ si $k = 0$). Soit $\mathfrak{U}$ un réseau arbitraire. On doit prouver que $\Gamma^k(\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $\bar{P}$. Or il existe un affinement $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{U}$ tel que $\pi\, \Gamma^k(\mathfrak{B}) \sim 0$ dans $\bar{P}$, où $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Comme $\pi\, \Gamma^k(\mathfrak{B}) \sim \Gamma^k(\mathfrak{U})$ dans $\bar{Q} \subset \bar{P}$ (Homologie II, 20) il en résulte que $\Gamma^k(\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $\bar{P}$, c. q. f. d.

19. Soit R un espace topologique. Soit $S \subset M \subset R$. Nous dirons[17] que S est *contractible dans* M, s'il existe: un espace bicompact T, deux points α et β de T non séparés dans T et une fonction continue f définie dans $S \times T$ et telle que

1° $f(S \times T) \subset M$;
2° $f(x, \alpha) = x$ pour chaque $x \in S$;
3° $f(x, \beta) = c$ pour chaque $x \in S$, où c est un point fixe de M.

Soit $a \in R$. Nous dirons[18] que R est *localement contractible au point* a, si chaque entourage P de a contient un entourage Q de a tel que $\bar{Q}$ soit contractible dans $\bar{P}$.

Le cas le plus important est celui où T est un intervalle de nombres réels.

20. Evidemment un *espace euclidien est partout localement contractible*. Plus généralement, soit R un sous-ensemble d'un espace euclidien; soit $a \in R$, $\delta > 0$; supposons que si x est un point de R distant de a de moins de δ, le segment ax fasse partie de R; alors R est évidemment localement connexe au point a. En particulier, un sous-ensemble convexe d'un espace euclidien est partout localement contractible.

21. *Soit R un espace bicompact localement contractible au point a. Soit $k = 0, 1, 2, \ldots$ Soit $\mathfrak{D}$ un domaine quelconque. R est localement connexe d'ordre k relativement à $\mathfrak{D}$ au point a.*

Démonstration. Soit P un entourage donné de a. Soit $Q \subset P$ un entourage de a tel que $\bar{Q}$ soit contractible dans $\bar{P}$. Gardons les notations de 19 (en y posant $S = \bar{Q}$,

[17] Cf. K. Borsuk [Fund. Math. *19* (1932), 235 (no. 23)].
[18] Cf. Borsuk [l. c., 236 (no. 26)].

$M = \bar{P}$). Soit $\mathfrak{U}$ un réseau donné. Déterminons en un affinement $\mathfrak{V}$ d'après 11; soit $x = \text{Pr.}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Soit $\Gamma^k(\mathfrak{V})$ un $(k, \mathfrak{V})$-cycle dans S du domaine $\mathfrak{D}$; si $k = 0$, soit $J[\Gamma^0(\mathfrak{V})] = 0$. D'après 11, il existe un $(k, \mathfrak{U})$-cycle $\Delta^k(\mathfrak{U})$ dans S^* du domaine $\mathfrak{D}$ tel que $\pi\,\Gamma^k(\mathfrak{V}) \sim \Delta^k(\mathfrak{U})$ dans $\bar{P}$ (d'où $J[\Delta^0(\mathfrak{U})] = 0$ si $k = 0$). Or l'ensemble S^* se réduisant au point c, on a $\Delta^k(\mathfrak{U}) \sim 0$ dans S^*, d'où $\pi\,\Gamma^k(\mathfrak{V}) \sim 0$ dans $\bar{P}$.

22. *Soit* $\dim R \leqq n$ $(= 0, 1, 2, \ldots)$. *Soit* $k = n + 1, n + 2, \ldots$ *Alors R est partout localement connexe d'ordre k relativement à un domaine $\mathfrak{D}$ quelconque.*

Démonstration. Soit P un entourage de $a \in R$. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau donné. Comme $\dim R < k$, il existe un affinement $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$ d'ordre $< k$. Soit $\Gamma^k(\mathfrak{V})$ un $(k, \mathfrak{V})$-cycle dans $\bar{P}$ du domaine $\mathfrak{D}$. Il suffit de prouver que $\Gamma^k(\mathfrak{V}) \sim 0$ dans $\bar{P}$. Or on a même $\Gamma^k(\mathfrak{V}) = 0$, car l'ordre $\mathfrak{V}$ est $<k$.

23. ***Prémisses:*** 1° *a est un point de l'espace R,*

2° *Z est un entourage de a,*

3° $\dim R \leqq n$ $(= 0, 1, 2, \ldots)$,

4° *$\mathfrak{D}$ est un domaine donné,*

5° *chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède un affinement $\mathfrak{V}$ tel que, si $\Gamma^n(\mathfrak{V})$ est un $(n, \mathfrak{V})$-cycle dans $\bar{Z}$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\Gamma^n(\mathfrak{V})] = 0$ si $n = 0$), on a $\pi\,\Gamma^n(\mathfrak{V}) \sim 0$, où $\pi =$ $= \text{Pr.}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$.*

Conclusion: *R est localement connexe d'ordre n relativement à $\mathfrak{D}$ au point a.*

Démonstration. Soit P un entourage donné de a. Posons $Q = PZ$. Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau donné. D'après 3° et 4° il existe un affinement $\mathfrak{U}_2$ de $\mathfrak{U}_1$ tel que l'ordre de $\mathfrak{U}_2$ soit $\leqq n$. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_3$ de $\mathfrak{U}_2$ d'après 5°. Soit $\pi_{21} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{32} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$. Soit $\Gamma^n(\mathfrak{U}_3)$ un $(n, \mathfrak{U}_3)$-cycle dans $\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$; si $n = 0$, soit $J[\Gamma^0(\mathfrak{V})] = 0$. Il suffit de prouver que $\pi_{21}\pi_{32}\,\Gamma^n(\mathfrak{U}_3) \sim 0$ dans $\bar{P}$. D'après 5° il existe une $(n + 1, \mathfrak{U}_2)$-chaîne $C^{n+1}(\mathfrak{U}_2)$ du domaine $\mathfrak{D}$ telle que $C^{n+1}(\mathfrak{U}_2) \to \pi_{32}\,\Gamma^n(\mathfrak{U}_3)$. Comme l'ordre de $\mathfrak{U}_2$ est $\leqq n$, on a $C^{n+1}(\mathfrak{U}_2) = 0$. Donc $\pi_{32}\,\Gamma^n(\mathfrak{U}_3) = 0$, d'où $\pi_{21}\pi_{32}\,\Gamma^n(\mathfrak{U}_3) = 0$ et par suite $\pi_{21}\pi_{32}\,\Gamma^n(\mathfrak{U}_3) \sim 0$ dans $\bar{P}$.

24. *Soit* $\dim R \leqq n$ $(= 0, 1, 2, \ldots)$. *Si R est au point a localement connexe d'ordre n relativement à $\mathfrak{R}$ l'est aussi relativement à $\mathfrak{E}$.*

Démonstration. Soit P un entourage de a. Il existe un entourage $Q \subset P$ de a jouissant de la propriété du n° 13, où $k = n$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{R}$. Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau donné. Soit $\mathfrak{U}_2$ un affinement de $\mathfrak{U}_1$ d'ordre $\leqq n$. Déterminons l'affinement $\mathfrak{U}_3$ de $\mathfrak{U}_2$ d'après 13. Soit $\pi_{21} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{32} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$. Soit $\Gamma^n(\mathfrak{U}_3)$ un $(n, \mathfrak{U}_3)$-cycle dans $\bar{P}$ du domaine $\mathfrak{E}$. Comme $\Gamma^n(\mathfrak{U}_3)$ peut aussi être considéré comme un $(n, \mathfrak{U}_3)$-cycle du domaine R, il existe une $(n + 1, \mathfrak{U}_2)$-chaîne $C^{n+1}(\mathfrak{U}_2)$ du domaine $\mathfrak{R}$ telle que $C^{n+1}(\mathfrak{U}_2) \to \pi_{32}\,\Gamma^n(\mathfrak{U}_3)$. Comme l'ordre de $\mathfrak{U}_2$ est $\leqq n$, on a $C^{n+1}(\mathfrak{U}_2) = 0$, d'où $\pi_{32}\,\Gamma^n(\mathfrak{U}_3) = 0$ et par suite $\pi_{21}\pi_{32}\,\Gamma^n(\mathfrak{U}_3) \sim 0$ dans $\bar{P}$.

25. ***Prémisses***: 1° *R est un espace régulier,*

2° $\dim R \leqq n \,(= 0, 1, 2, \ldots)$,
3° *le* $n^{\text{ième}}$ *nombre de Betti*[19] *de R est fini.*

Conclusion: *R est partout localement connexe d'ordre n relativement à* $\mathfrak{C}$.

Démonstration. D'après 3° il existe des (n, R)-cycles $C_i^n\,(1 \leqq i \leqq m;\ m = 0, 1, 2, \ldots)$ du domaine $\mathfrak{R}$ tels que chaque (n, R)-cycle du domaine $\mathfrak{R}$ soit $\sim \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n (r_i \in \mathfrak{R})$, tandis que $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n \sim 0$ $(r_i \in \mathfrak{R})$ entraîne que $r_1 = \ldots = r_m = 0$. On voit sans peine qu'il existe un réseau $\mathfrak{U}_0$ tel que $\sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^n(\mathfrak{U}_0) \sim 0\,(r_i \in \mathfrak{R})$ entraîne que $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Soit $a \in \mathfrak{R}$. D'après 24 il suffit de prouver que R est localement connexe d'ordre n relativement à $\mathfrak{R}$ au point a. Soit U_0 un sommet de $\mathfrak{U}_0$ tel que $a \in U_0$. D'après 1° il existe un entourage Z de a tel que $\bar{Z} \subset U_0$. Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau un arbitrairement donné. Les deux ensembles ouverts U_0 et $R - \bar{Z}$ constituent un réseau $\mathfrak{T}$. Soit $\mathfrak{U}_2$ un affinement simultané des réseaux $\mathfrak{U}_0$, $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{T}$. Soit (Homologie II, 16) $\mathfrak{U}_3$ un affinement de $\mathfrak{U}_2$ normal relativement aux cycles absolus. Sout $\pi_{32} = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{21} = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{20} = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_0)$. Comme $\mathfrak{U}_2$ est un affinement de $\mathfrak{T}$, on voit sans peine que l'on peut choisir π_{20} de manière que $\pi_{20} U_2 = U_0$ pour chaque sommet U_2 de $\mathfrak{U}_2$ tel que $\bar{Z} U_2 \neq 0$. Soit $\Gamma^n(\mathfrak{U}_3)$ un $(n, \mathfrak{U}_3)$-cycle dans $\bar{Z}$ du domaine $\mathfrak{R}$; soit $J[\Gamma^0(\mathfrak{U}_3)] = 0$ si $n = 0$. D'après 23 il suffit de prouver que $\pi_{21}\pi_{32}\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_3) \sim 0$. D'après Homologie II, 28 il existe un (n, R)-cycle C^n tel que $C^n(\mathfrak{U}_2) = \pi_{32}\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_3)$. Il existe des nombres $r_i \in \mathfrak{R}$ tels que $C^n \sim \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n$, d'où $C^n(\mathfrak{U}_0) \sim \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^n(\mathfrak{U}_0)$. Or on a $C^n(\mathfrak{U}_0) \sim \pi_{20}\, C^n(\mathfrak{U}_2) \sim \pi_{20}\pi_{32}\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_3)$. Comme $\Gamma^n(\mathfrak{U}_3) \subset \bar{Z}$, on a $\pi_{32}\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_3) \subset \bar{Z}$. En tenant compte du choix de π_{20}, on voit sans peine que $\pi_{20}\pi_{32}\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_3) = 0$. Donc $C^n(\mathfrak{U}_0) \sim 0$, d'où $\sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^n(\mathfrak{U}_0) \sim 0$. D'après le choix de $\mathfrak{U}_0$, il en résulte que $r_1 = \ldots = r_m = 0$, d'où $C^n \sim 0$ et par suite $C^n(\mathfrak{U}_1) \sim 0$. Or $C^n(\mathfrak{U}_1) \sim \pi_{21}\, C^n(\mathfrak{U}_2) \sim \pi_{21}\pi_{32}\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_3)$, d'où $\pi_{21}\pi_{32}\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_3) \sim 0$, c. q. f. d.

26. *Soit* R_n *l'espace euclidien à n dimensions* $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. *Soit S un sous-ensemble fermé de* R_n. *Soit* $\mathfrak{D}$ *un domaine quelconque. S est partout localement connexe d'ordre n relativement à* $\mathfrak{D}$.

Démonstration. Soit $a \in S$. Soit P une sphère ouverte dans R_n de centre a. Soit $\mathfrak{U}_0$ un réseau dans $S\bar{P}$. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans $\bar{P}$ tel que $S\bar{P} \,.\, \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0$ (Homologie III, 5). D'après 20 et 21, $\bar{P}$ est localement connexe d'ordre n relativement à $\mathfrak{D}$ au point a. Donc il existe un entourage $Q \subset P$ de a dans R et un affinement $\mathfrak{B}$ des $\mathfrak{U}$ tels que $\pi\, \Gamma^n(\mathfrak{B}) \sim 0$ dans $\bar{P}$, où $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(n, \mathfrak{B})$-cycle $\Gamma^n(\mathfrak{B})$ dans $\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$. On peut supposer que l'ordre de $\mathfrak{B}$ soit $\leqq n$. Soit $\mathfrak{B}_0 = S\bar{P} \,.\, \mathfrak{B}$,

[19] Défini dans Homologie II, 20.

de manière que $\mathfrak{B}_0$ est un affinement de $\mathfrak{U}_0$. La projection π définit une projection $\pi_0 = \text{Pr.}\,(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{U}_0)$.

Ceci étant, soit $\gamma^n(\mathfrak{B}_0)$ un $(n, \mathfrak{B}_0)$-cycle dans $S\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$. Il existe (Homologie III, 8) un $(n, \mathfrak{B})$-cycle $\Gamma^n(\mathfrak{B})$ dans $S\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ tel que $S\bar{P} \,.\, \Gamma^n(\mathfrak{B}) = \gamma^n(\mathfrak{B}_0)$. On a $\pi\, \Gamma^n(\mathfrak{B}) \sim 0$ dans $\bar{P}$; l'ordre de $\mathfrak{B}$ étant $\leqq n$, on a donc $\pi\, \Gamma^n(\mathfrak{B}) = 0$, d'où $\pi_0\, \gamma^n(\mathfrak{B}_0) = S \,.\, \pi\, \Gamma^n(\mathfrak{B}) = 0$. Donc $S\bar{P}$, et par suite aussi S, est localement connexe d'ordre n relativement à $\mathfrak{D}$ au point a en vertu de 23.

27. ***Prémisses:*** 1° *R est un espace complètement normal,*
2° *S est un sous-ensemble fermé de R,*
3° *a est un point de S,*
4° $\dim R \leqq n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$,
5° *$\mathfrak{D}$ est un domaine donné,*
6° *R est localement connexe d'ordre n relativement à $\mathfrak{D}$ au point a,*
7° *H est un entourage de a dans R,*
8° *chaque réseau $\mathfrak{U}$ dans R possède un affinement $\mathfrak{B}$ tel que $\pi\, \Gamma^{n+1}(\mathfrak{B}) \sim 0$, où $\pi =$ Pr. $(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(n + 1, \mathfrak{B})$-cycle $\Gamma^{n+1}(\mathfrak{B})$ dans $(S + \bar{H})$ du domaine $\mathfrak{D}$,*
9° *Z_0 est un entourage de a dans S,*
10° *chaque réseau $\mathfrak{U}_0$ dans S possède un affinement $\mathfrak{B}_0$ tel que $\pi_0\, \gamma^n(\mathfrak{B}_0) \sim 0$, où $\pi_0 =$ Pr. $(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{U}_0)$, pour chaque $(n, \mathfrak{B}_0)$-cycle $\gamma^n(\mathfrak{B}_0)$ dans $\bar{Z}_0$ du domaine $\mathfrak{D}$ (tel que $J[\gamma^0(\mathfrak{B}_0)] = 0$ si $n = 0$).*

Conclusion: *S est localement connexe d'ordre n relativement à $\mathfrak{D}$ au point a.*

Démonstration. Soit P un entourage donné de a dans R. D'après 6° et 7° il existe un entourage $Q \subset PH$ de a dans R jouissant de la propriété suivante: chaque réseau $\mathfrak{U}$ dans R possède un affinement $f\mathfrak{U}$ tel que, si $\Gamma^n(f\mathfrak{U})$ est un $(n, f\mathfrak{U})$-cycle dans $\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\Gamma^0(f\mathfrak{U})] = 0$ si $n = 0$), on a $\pi\, \Gamma^n(f\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $\overline{PH}$, où $\pi =$ Pr. $(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$.

Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau arbitraire dans R. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_2$ de $\mathfrak{U}_1$ d'après 12, en y posant $\varphi = S$, $\psi = \bar{P}$. D'après 4° il existe un affinement $\mathfrak{U}_3$ de $\mathfrak{U}_2$ d'ordre $\leqq n + 1$. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_4$ de $\mathfrak{U}_3$ d'après 8°. Posons $\mathfrak{U}_0 = S\mathfrak{U}_4$ (Homologie III, 4). Déterminons un affinement $\mathfrak{B}_0$ de $\mathfrak{U}_0$ d'après 10°. On voit sans peine qu'il existe un affinement $\mathfrak{U}_5$ de $\mathfrak{U}_4$ tel que $S\mathfrak{U}_5 = \mathfrak{B}_0$. Posons $\mathfrak{U}_6 = f\mathfrak{U}_5$. Soit $\pi_{21} =$ Pr. $(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1), \ldots, \pi_{65} =$ Pr. $(\mathfrak{U}_6, \mathfrak{U}_5)$, $\pi_{31} = \pi_{21}\pi_{32}, \ldots$ La projection π_{54} détermine d'une manière évidente une projection $\pi_0 =$ Pr. $(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{U}_0) =$ Pr. $(S\mathfrak{U}_5, S\mathfrak{U}_4)$.

Soit $\Gamma^n(\mathfrak{U}_6)$ un $(n, \mathfrak{U}_6)$-cycle dans $S\overline{QZ}$ du domaine $\mathfrak{D}$ (tel que $J[\Gamma^0(\mathfrak{U}_6)] = 0$ si $n = 0$). D'après 14 il suffit de prouver que $\pi_{61}\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_6) \sim 0$ dans $S\bar{P}$. Comme $\Gamma^n(\mathfrak{U}_6) \subset S\overline{QZ} \subset \bar{Q}$ et comme $\mathfrak{U}_6 = f\mathfrak{U}_5$, on a $\pi_{65}\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_6) \sim 0$ dans $\overline{PH}$. Donc il existe une $(n + 1, \mathfrak{U}_5)$-chaîne $C^{n+1}(\mathfrak{U}_5)$ dans $\overline{PH}$ du domaine $\mathfrak{D}$ telle que $C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) \to \pi_{65}\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_6)$. Comme $\Gamma^n(\mathfrak{U}_6) \subset S\overline{QZ} \subset S\bar{Z} = \bar{Z}_0$ et comme $\mathfrak{B}_0 = S\mathfrak{U}_5$, $\gamma^n(\mathfrak{B}_0) = S \,.\, \pi_{65}\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_6)$ (v. Homologie III, 7) est un $(n, \mathfrak{B}_0)$-cycle dans $\bar{Z}_0$ du domaine $\mathfrak{D}$.

D'après la définition de $\mathfrak{B}_0$, il existe donc une $(n + 1, \mathfrak{U}_0)$-chaîne $d^{n+1}(\mathfrak{U}_0)$ du domaine $\mathfrak{D}$ telle que $d^{n+1}(\mathfrak{U}_0) \to \pi_0\, \gamma^n(\mathfrak{B}_0) = S \,.\, \pi_{64}\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_6)$. Il existe évidemment une $(n + 1, \mathfrak{U}_4)$-chaîne $D^{n+1}(\mathfrak{U}_4)$ dans S du domaine $\mathfrak{D}$ telle que $D^{n+1}(\mathfrak{U}_4) \to \pi_{64}\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_6)$. Or on a aussi $\pi_{54}\, C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) \to \pi_{64}\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_6)$. Donc $\pi_{54}\, C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) - D^{n+1}(\mathfrak{U}_4)$ est un $(n + 1, \mathfrak{U}_4)$-cycle dans $S + \overline{PH} \subset S + \bar{H}$ du domaine $\mathfrak{D}$. D'après la définition de $\mathfrak{U}_4$, on a $\pi_{53}\, C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) - \pi_{43}\, D^{n+1}(\mathfrak{U}_4) \sim 0$. Donc il existe une $(n + 2, \mathfrak{U}_3)$-chaîne $K^{n+2}(\mathfrak{U}_3)$ telle que $K^{n+2}(\mathfrak{U}_3) \to \pi_{53}\, C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) - \pi_{43}\, D^{n+1}(\mathfrak{U}_4)$. Comme l'ordre de $\mathfrak{U}_3$ est $\leqq n + 1$, on a $K^{n+2}(\mathfrak{U}_3) = 0$, d'où $\pi_{53}\, C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) = \pi_{43}\, D^{n+1}(\mathfrak{U}_4)$ et par suite $\pi_{52}\, C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) = \pi_{42}\, D^{n+1}(\mathfrak{U}_4)$. Or $C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) \subset \overline{PH} \subset \bar{P}$, $D^{n+1}(\mathfrak{U}_4) \subset S$, de manière que la $(n + 1, \mathfrak{U}_2)$-chaîne $\pi_{52}\, C^{n+1}(\mathfrak{U}_5)$ est située et dans $\bar{P}$ et dans S. D'après la définition de $\mathfrak{U}_2$, il en résulte que $\pi_{52}\, C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) \subset S\bar{P}$, d'où $\pi_{51}\, C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) \subset S\bar{P}$. Or $C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) \to \pi_{65}\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_6)$, d'où $\pi_{51}\, C^{n+1}(\mathfrak{U}_5) \to \pi_{61}\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_6)$. Donc $\pi_{61}\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_6) \sim 0$ dans $S\bar{P}$, c. q. f. d.

28. ***Prémisses:*** 1° *R est un espace complètement normal,*
2° *S est un sous-ensemble fermé de R,*
3° *a est un point de S,*
4° $\dim R \leqq n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$,
5° *R est localement connexe d'ordre n relativement à $\mathfrak{E}$ au point a,*
6° *H est un entourage de a dans R,*
7° *chaque $(n + 1, R)$-cycle dans $(S + \bar{H})$ du domaine $\mathfrak{R}$ est ~ 0 dans R,*
8° *Z_0 est un entourage de a dans S,*
9° *chaque (n, S)-cycle dans $\bar{Z}_0$ du domaine $\mathfrak{R}$ est ~ 0 dans S.*

Conclusion: *S est localement connexe d'ordre n relativement à $\mathfrak{E}$ au point a.*

Démonstration. $\mathfrak{U}$ étant un réseau arbitraire dans R, soit $\mathfrak{B}$ un affinement de $\mathfrak{U}$ normal relativement aux cycles absolus dans $(S + \bar{H})$, soit $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Si $\Gamma^{n+1}(\mathfrak{B})$ est un $(n + 1, \mathfrak{B})$-cycle dans $(S + \bar{H})$ du domaine $\mathfrak{R}$, d'après Homologie II, 28 il existe un $(n + 1, R)$-cycle C^{n+1} dans $(S + \bar{H})$ du domaine $\mathfrak{R}$ tel que $C^{n+1}(\mathfrak{U}) = \pi\, \Gamma^{n+1}(\mathfrak{B})$; d'après 7° on a $C^{n+1} \sim 0$, d'où $\pi\, \Gamma^{n+1}(\mathfrak{B}) \sim 0$. Il en résulte que la prémisse 8° du théorème 26 est vérifiée pour $\mathfrak{D} = \mathfrak{R}$. Pareillement on voit que la prémisse 10° du même théorème est vérifiée pour $\mathfrak{D} = \mathfrak{R}$. Donc toutes les prémisses du théorème 26 sont vérifiées pour $\mathfrak{D} = \mathfrak{R}$, et la prémisse 6° est vérifiée même pour $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$.

Ceci étant, la démonstration est presque la même que celle du théorème cité. $\Gamma^n(\mathfrak{U}_6)$ et $C^{n+1}(\mathfrak{U}_5)$ sont maintenant des chaînes du domaine $\mathfrak{E}$, tandis que $\mathfrak{D}^{n+1}(\mathfrak{U}_4)$ et $K^{n+2}(\mathfrak{U}_3)$ appartiennent au domaine $\mathfrak{R}$.

29. *Soit R_{n+1} l'espace euclidien à $n + 1$ dimensions $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Soit S un sous-ensemble fermé de R_{n+1}. Soit a un point de S. Une condition nécessaire et suffisante pour que S soit localement connexe d'ordre n relativement à $\mathfrak{E}$ (ou, ce qui est ici la même chose, relativement à $\mathfrak{R}$) au point a est qu'il existe un entourage Z de a dans R_{n+1} tel qu'aucune composante de $R_{n+1} - S$ ne soit contenue dans Z.*

Démonstration. On voit sans peine que l'on peut supposer S borné.

I. Supposons que S soit au point a localement connexe d'ordre n relativement à $\mathfrak{R}$ (v. 16). D'après 18 il existe un entourage Z de a dans R_{n+1} tel que chaque (n, S)-cycle dans $S\bar{Z}$ du domaine $\mathfrak{R}$ soit ~ 0. Supposons par impossible qu'il existe une composante K de $R_{n+1} - S$ telle que $K \subset Z$. Evidemment K est aussi une composante de $R_{n+1} - S\bar{Z}$. Soit $b \in K$, $c \in R_{n+1} - (S + \bar{Z})$. Les points b et c appartenant à deux composantes différentes de $R_{n+1} - S\bar{Z}$, il résulte du théorème de dualité qu'il existe un (n, R)-cycle Γ^n dans $S\bar{Z}$ du domaine $\mathfrak{R}$ *enlacé* (verschlungen) avec le $(0, R)$-cycle $\{b\} - \{c\}$ (Homologie III, 12). Donc, si T est un sous-ensemble fermé et borné de R_{n+1} tel que $\Gamma^n \sim 0$ dans T, on a $b \in T$ ou bien $c \in T$. Il en résulte que Γ^n n'est pas ~ 0 dans S. Donc le (n, S)-cycle $S \,.\, \Gamma^n$ (Homologie III, 10) dans $S\bar{Z}$ du domaine $\mathfrak{R}$ n'est pas ~ 0, ce qui est une contradiction.

II. Supposons qu'il existe un entourage Z de a dans R_{n+1} tel qu'aucune composante de $R_{n+1} - S$ ne soit contenue dans Z. Soient Q, H des sphères ouvertes de centre a telles que $\bar{Q} \subset Z$, $S \subset H$. Posons $Z_0 = SQ$. On voit sans peine que les prémisses du théorème 28, sauf peut-être 9°, sont toutes vérifiées;[20] il reste à prouver que la prémisse 9° l'est aussi. Supposons le contraire. Alors il existe (cf. Homologie III, 11) un (n, R)-cycle Γ^n du domaine $\mathfrak{R}$ dans $S\bar{Q}$, qui n'est pas ~ 0 dans S. Comme Γ^n n'est pas ~ 0 dans S, il résulte du théorème de dualité qu'il existe deux points b_1 et b_2 dans $R_{n+1} - S$ tels que Γ^n soit enlacé avec $\{b_1\} - \{b_2\}$. Soient K_1 et K_2 les composantes de $R_{n+1} - S$ telles que $b_1 \in K_1$, $b_2 \in K_2$. D'après notre supposition, il existe des points $c_1 \in K_1 - Z_1$, $c_2 \in K_2 - Z$. Comme les deux points b_1 et c_1 appartiennent à la même composante K_1 de $R_{n+1} - S$, le cycle $\Gamma^n \subset S$ n'est pas enlacé avec $\{b_1\} - \{c_1\}$. De même on voit que Γ^n n'est pas enlacé avec $\{b_2\} - \{c_2\}$. Donc Γ^n est enlacé avec

$$\{b_1\} - \{b_2\} + \{c_1\} - \{b_1\} + \{b_2\} - \{c_2\} = \{c_1\} - \{c_2\}\,.$$

Donc si $\Gamma^n \sim 0$ dans T, T étant un sous-ensemble fermé et borné de R_{n+1}, on a $c_1 \in T$ ou $c_2 \in T$. Il y a contradiction, car $\Gamma^n \sim 0$ dans $\bar{Q} \subset Z$, tandis que ni c_1 ni c_2 n'appartiennent à Z.

30. *Soit R_n l'espace euclidien à n dimensions $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ complété par le point à l'infini. Soit S un sous-ensemble fermé de R_n. Soit $0 \leqq k \leqq n - 1$, $h = n - k - 1$. Soit $a \in S$. Une condition nécessaire et suffisante pour que S soit localement connexe d'ordre k relativement à $\mathfrak{R}$ au point a est que chaque entourage P de a dans R_n contienne un entourage Q de a dans R_n jouissant de la propriété suivante: si γ^h est un h-cycle polyédral du domaine $\mathfrak{R}$ dans $R_n - S\bar{P}$ (avec $J(\gamma^0) = 0$ si $h = 0$), on a $\gamma^h \sim 0$ dans $R_n - S\bar{Q}$.*[21]

[20] Pour démontrer la prémisse 7^0, on peut se servir de 11 (cf. 20). De la même manière on peut démontrer l'homologie $\Gamma^n \sim 0$ dans $\bar{Q}$, utilisée plus tard.

[21] La $(h + 1)$-chaîne polyédrale $c^{h+1} \to \gamma^h$, $c^{h+1} \subset R_n - S\bar{Q}$ peut passer par le point à l'infini de R_n.

Démonstration. On peut supposer S borné.

I. Supposons que S soit localement connexe d'ordre k relativement à $\mathfrak{R}$ au point a. Soit P un entourage de a dans $\mathfrak{R}_n$. Il existe (v. 18 et Homologie III, 11) un entourage $Q \subset P$ de a dans R_n jouissant de la propriété suivante: Si Γ^k est un (k, R_n)-cycle dans $S\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{R}$ (avec $J(\Gamma^0) = 0$ si $k = 0$), on a $\Gamma^k \sim 0$ dans $S\bar{P}$. Supposons par impossible qu'il existe un h-cycle polyédral γ^h du domaine $\mathfrak{R}$ dans $R_n - S\bar{P}$ (avec $J(\gamma^0) = 0$ si $h = 0$) tel que γ^h ne soit pas ~ 0 dans $R_n - S\bar{Q}$. Comme $\gamma^h \subset$ $\subset R_n - S\bar{Q}$ et γ^h n'est pas ~ 0 dans $R_n - S\bar{Q}$, il résulte du théorème de dualité qu'il existe un (k, R_n)-cycle Γ^k dans $S\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{R}$ (tel que $J(\Gamma^0) = 0$ si $k = 0$) enlacé avec γ^h. C'est une contradiction, car $\Gamma^k \sim 0$ dans $S\bar{P}$, $\gamma^h \subset R_n - S\bar{P}$.

II. Supposons que chaque entourage P de a contienne un entourage Q tel que $\gamma^h \sim 0$ dans $R_n - S\bar{Q}$ pour chaque h-cycle polyédral $\gamma^h \subset R_n - S\bar{P}$ du domaine $\mathfrak{R}$ (avec $J(\gamma^0) = 0$ si $h = 0$). Soit Γ^k un (k, R_n)-cycle dans $S\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{R}$ (avec $J(\Gamma^0) = 0$ si $k = 0$). On doit prouver que $\Gamma^k \sim 0$ dans $S\bar{P}$. Dans le cas contraire, il résulte du théorème de dualité qu'il existe un h-cycle polyédral $\gamma^h \subset R_n - S\bar{P}$ du domaine $\mathfrak{R}$ (tel que $J(\gamma^0) = 0$ si $h = 0$) enlacé avec Γ^k. C'est une contradiction, car $\gamma^h \sim 0$ dans $R_n - S\bar{Q}$, $\Gamma^k \subset S\bar{Q}$.

31. *Soit S un sous-ensemble fermé du plan. Soit $a \in S$. Une condition nécessaire et suffisante pour que S soit localement connexe d'ordre* 0 (*v.* 15) *au point a est que chaque entourage P de a (dans le plan) contienne un entourage Q de a jouissant de la propriété suivante: Si Π est un polygone qui ne rencontre pas $S\bar{P}$, $S\bar{Q}$ est contenu entièrement dans l'intérieur ou entièrement dans l'extérieur de Π.*

C'est un cas particulier de 30.

32. *Soit R un espace complètement normal. Soit $R = A + B$, les ensembles A et B étant fermés dans R. Soit $k = 0, 1, 2, \ldots$ Soit $\mathfrak{D}$ un domaine quelconque. Soit $a \in AB$. Si R et AB sont localement connexes d'ordre k relativement à $\mathfrak{D}$ au point a, A et B le sont aussi.*[22]

Démonstration. Il suffit de prouver que A est localement connexe d'ordre k relativement à $\mathfrak{D}$ au point a. Soit P_1 un entourage donné de a (dans R). Comme AB est localement connexe d'ordre k relativement à $\mathfrak{D}$ au point a, d'après 14 il existe un entourage $P_2 \subset P_1$ de a jouissant de la propriété suivante: Chaque réseau $\mathfrak{U}$ (dans R) possède un affinement $f\mathfrak{U}$ tel que $\pi\, \Gamma^k(f\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $AB\bar{P}_1$, où $\pi = \mathrm{Pr.}\,(f\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(k, f\mathfrak{U})$-cycle $\Gamma^k(f\mathfrak{U})$ dans $AB\bar{P}_2$ (avec $J[\Gamma^0(f\mathfrak{U})] = 0$ si $k = 0$). Comme R est localement connexe d'ordre k relativement à $\mathfrak{D}$ au point a, il existe un entourage $P_3 \subset P_2$ de a jouissant de la propriété suivante: Chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède un affinement $g\mathfrak{U}$ tel que $\pi\, \Gamma^k(g\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $\bar{P}_2$, où $\pi = \mathrm{Pr.}\,(g\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(k, g\mathfrak{U})$-cycle $\Gamma^k(g\mathfrak{U})$ dans $\bar{P}_3$ (avec $J[\Gamma^0(g\mathfrak{U})] = 0$ si $k = 0$).

[22] Un cas particulier de ce théorème a été établi par M^{me} St. Nikodym [Fund. Math. *12* (1928), 240–243].

Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau arbitrairement donné (dans R). Soit $\mathfrak{U}_2 = f\mathfrak{U}_1$. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_3$ de $\mathfrak{U}_2$ d'après 12, en y posant $\varphi = A\bar{P}_2$, $\psi = B\bar{P}_2$. Soit $\mathfrak{U}_4 = g\mathfrak{U}_3$. Soit $\pi_{21} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1), \ldots, \pi_{43} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_3)$, $\pi_{31} = \pi_{21}\pi_{32}, \ldots$.

Ceci étant, soit $\Gamma^k(\mathfrak{U}_4)$ un $(k, \mathfrak{U}_4)$-cycle dans $A\bar{P}_3$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\Gamma^0(\mathfrak{U}_4)] = 0$ si $k = 0$). D'après 14, il suffit de prouver que $\pi_{41}\ \Gamma^k(\mathfrak{U}_4) \sim 0$ dans $A\bar{P}_1$. Comme $\Gamma^k(\mathfrak{U}_4) \subset A\bar{P}_3 \subset \bar{P}_3$ et comme $\mathfrak{U}_4 = g\mathfrak{U}_3$, on a $\pi_{43}\ \Gamma^k(\mathfrak{U}_4) \sim 0$ dans $\bar{P}_2$. Donc il existe une $(k + 1, \mathfrak{U}_3)$-chaîne $C^{k+1}(\mathfrak{U}_3)$ dans $\bar{P}_2$ du domaine $\mathfrak{D}$ telle que $C^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \to \pi_{43}\ \Gamma^k(\mathfrak{U}_4)$. Comme $\bar{P}_2 = A\bar{P}_2 + B\bar{P}_2$, on peut poser $C^{k+1}(\mathfrak{U}_3) = C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_3) - C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_3)$, où $C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \subset A\bar{P}_2$, $C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \subset B\bar{P}_2$. Posons $\Delta^k(\mathfrak{U}_3) = F\ C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_3)$, de manière que $\Delta^k(\mathfrak{U}_3)$ est un $(k, \mathfrak{U}_3)$-cycle dans $B\bar{P}_2$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\Delta^0(\mathfrak{U}_3)] = 0$ si $k = 0$). Comme $\Delta^k(\mathfrak{U}_3) = F\ C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{43}\ \Gamma^k(\mathfrak{U}_4)$, $C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \subset A\bar{P}_2$, $\Gamma^k(\mathfrak{U}_4) \subset A\bar{P}_3 \subset A\bar{P}_2$, on a aussi $\Delta^k(\mathfrak{U}_3) \subset A\bar{P}_2$. D'après la définition de $\mathfrak{U}_3$, il en résulte que $\pi_{32}\ \Delta^k(\mathfrak{U}_3) \subset AB\bar{P}_2$. Comme $\mathfrak{U}_2 = f\mathfrak{U}_1$, on a $\pi_{31}\ \Delta^k(\mathfrak{U}_3) \sim 0$ dans $AB\bar{P}_1$. Donc il existe une $(k + 1, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $\mathfrak{D}^{k+1}(\mathfrak{U}_1)$ dans $AB\bar{P}_1$ du domaine $\mathfrak{D}$ telle que $\mathfrak{D}^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{31}\ \Delta^k(\mathfrak{U}_3) = F\pi_{31}\ C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_3)$. Comme $C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_3) - C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \to \pi_{43} \,.\, \Gamma^k(\mathfrak{U}_4)$, on a $\pi_{31}\ C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_3) - D^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{41}\ \Gamma^k(\mathfrak{U}_4)$. Or $C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \subset A\bar{P}_2 \subset A\bar{P}_1$, $D^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \subset AB\bar{P}_1 \subset A\bar{P}_1$. Donc $\pi_{41}\ \Gamma^k(\mathfrak{U}_4) \sim 0$ dans $A\bar{P}_1$, c. q. f. d.

33. *Soit R_n l'espace euclidien à n dimensions $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Soient A et B deux sous-ensembles fermés de R_n. Soit $a \in AB$. S'il existe un entourage de a ne contenant aucune composante ni de $R_n - (A + B)$ ni de $R_n - AB$, alors il existe un entourage de a ne contenant aucune composante de $R_n - A$ ni de $R_n - B$.*

En vertu de 29, c'est un cas particulier de 32.

34. ***Prémisses:*** 1° *R est un espace complètement normal,*

2° *A et B sont des sous-ensembles fermés de R,*

3° *$R = A + B$,*

4° *a est un point de AB,*

5° *$\mathfrak{D}$ est un domaine donné,*

6° *$k = 0, 1, 2, \ldots$,*

7° *R est localement connexe d'ordre $k + 1$ relativement à $\mathfrak{D}$ au point a,*

8° *A et B sont localement connexes d'ordre k relativement à $\mathfrak{D}$ au point a.*

Conclusion: *AB est localement connexe d'ordre k relativement à $\mathfrak{D}$ au point a.*

Démonstration. Supposons le contraire. D'après 14 il existe un entourage (dans R) P de a jouissant de la propriété suivante: $Q \subset P$ étant un entourage de a, il existe un réseau $\mathfrak{U}(Q)$ (dans R) tel qu'on puisse attacher à chaque affinement $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}(Q)$ un $(k, \mathfrak{V})$-cycle $\Gamma^k(\mathfrak{V})$ (avec $J[\Gamma^0(\mathfrak{V})] = 0$ si $k = 0$) dans $AB\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ tel que $\pi\ \Gamma^k(\mathfrak{V})$, où $\pi = \text{Pr.}[\mathfrak{V}, \mathfrak{U}(Q)]$, ne soit pas ~ 0 dans $AB\bar{P}$. D'après 7° il existe un entourage $G \subset P$ de a jouissant de la propriété suivante: chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède un affinement $f_0\mathfrak{U}$ tel que, si $\Delta^{k+1}(f_0\mathfrak{U})$ est un $(k + 1, f_0\mathfrak{U})$-cycle dans $\bar{G}$ du domaine $\mathfrak{D}$, on a $\pi\ \Delta^{k+1}(f_0\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $\bar{P}$, où $\pi = \text{Pr.}(f_0\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$. D'après 2°, 8° et 14 il existe des entourages Q_1 et Q_2 contenus dans G et jouissant de la propriété suivante: chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède des affinements $f_1\mathfrak{U}$ et $f_2\mathfrak{U}$ tels que $\pi' \Gamma^k(f_1\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $A\bar{G}$, où $\pi' = \text{Pr.}(f_1\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(k, f_1\mathfrak{U})$-cycle $\Gamma^k(f_1\mathfrak{U})$ dans $A\bar{Q}_1$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\Gamma^0(f_1\mathfrak{U})] = 0$ si $k = 0$) et que $\pi'' \Gamma^k(f_2\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $B\bar{G}$, où $\pi'' = \text{Pr.}(f_2\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(k, f_2\mathfrak{U})$-cycle $\Gamma^k(f_2\mathfrak{U})$ dans $B\bar{Q}_2$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\Gamma^0(f_2\mathfrak{U})] = 0$ si $k = 0$).

Posons $Q = Q_1Q_2$, $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}(Q)$. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_1$ de $\mathfrak{U}_0$ d'après 12, en y posant $\varphi = A\bar{P}$, $\psi = B\bar{P}$. Posons $\mathfrak{U}_2 = f_0\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_3 = f_1\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_4 = f_2\mathfrak{U}_2$. Soit $\mathfrak{U}_5$ un affinement simultané des réseaux $\mathfrak{U}_3$ et $\mathfrak{U}_4$. Soit $\pi_{10} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_0)$, $\pi_{21} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{i2} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_i, \mathfrak{U}_2)$ $(i = 3, 4, 5)$, $\pi_{5j} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_5, \mathfrak{U}_j)$ $(j = 3, 4)$.

Comme $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}(Q)$, il existe un $(k, \mathfrak{U}_5)$-cycle $\Gamma^k(\mathfrak{U}_5)$ dans $AB\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\Gamma^0(\mathfrak{U}_5)] = 0$ si $k = 0$) tel que $\pi_{10}\pi_{21}\pi_{52}\, \Gamma^k(\mathfrak{U}_5)$ n'est pas ~ 0 dans $AB\bar{P}$. Comme $AB\bar{Q} \subset A\bar{Q}_1$, $\pi_{53}\, \Gamma^k(\mathfrak{U}_5)$ est un $(k, \mathfrak{U}_3)$-cycle dans $A\bar{Q}_1$ du domaine $\mathfrak{D}$ (avec $J[\pi_{53}\, \Gamma^0(\mathfrak{U}_5)] = 0$ si $k = 0$). Comme $\mathfrak{U}_3 = f_1\mathfrak{U}_2$, on a $\pi_{32}\pi_{53}\, \Gamma^k(\mathfrak{U}_5) \sim 0$ dans $A\bar{G}$. Donc (Homologie II, 12) $\pi_{52}\, \Gamma^k(\mathfrak{U}_5) \sim 0$ dans $A\bar{G}$. Pareillement on voit que $\pi_{52}\, \Gamma^k(\mathfrak{U}_5) \sim 0$ dans $B\bar{G}$. Donc il existe des $(k + 1, \mathfrak{U}_2)$-chaînes $C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_2) \subset A\bar{G}$ et $C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_2) \subset B\bar{G}$ telles que $F\, C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_2) = F\, C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_2) = \pi_{52}\, \Gamma^k(\mathfrak{U}_5)$. Donc $C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_2) - C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_2)$ est un $(k + 1, \mathfrak{U}_2)$-cycle dans $\bar{G}$ du domaine $\mathfrak{D}$. Comme $\mathfrak{U}_2 = f_0\mathfrak{U}_1$, il existe une $(k + 2, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $\mathfrak{D}^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \subset \bar{P}$ telle que

$$(*)\qquad \mathfrak{D}^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{21}\, C_1^{k+2}(\mathfrak{U}_2) - \pi_{21}\, C_2^{k+2}(\mathfrak{U}_2)\,.$$

Comme $R = A + B$, on peut poser $D^{k+2}(\mathfrak{U}_1) = D_1^{k+2}(\mathfrak{U}_1) - D_2^{k+2}(\mathfrak{U}_1)$, où $D_1^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \subset A\bar{P}$, $D_2^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \subset B\bar{P}$. D'après (*) on peut poser $E^{k+1}(\mathfrak{U}_1) = \pi_{21}\, C_1^{k+2}(\mathfrak{U}_1) - F\, D_1^{k+2}(\mathfrak{U}_1) = \pi_{21}\, C_2^{k+2}(\mathfrak{U}_1) - F\, D_2^{k+2}(\mathfrak{U}_1)$. Comme $C_1^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \subset A\bar{G} \subset A\bar{P}$, $D_1^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \subset A\bar{P}$, on a $E^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \subset A\bar{P}$. On voit de même que $E^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \subset B\bar{P}$. D'après 12 on a donc $E^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \subset AB\bar{P}$. Or $F\, E^{k+1}(\mathfrak{U}_1) = \pi_{21}\, F\, C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_2) = \pi_{21}\pi_{52}\, \Gamma^k(\mathfrak{U}_5)$; donc $\pi_{21}\pi_{52}\, \Gamma^k(\mathfrak{U}_5) \sim 0$ dans $AB\bar{P}$, d'où $\pi_{10}\pi_{21}\pi_{52}\, \Gamma^k(\mathfrak{U}_5) \sim 0$ dans $AB\bar{P}$, ce qui est une contradiction.

35. ***Prémisses:*** 1° *R_n est l'espace euclidien à n dimensions* $(n = 1, 2, 3, \ldots)$,
2° *A et B sont des sous-ensembles fermés de R_n,*
3° *a est un point de AB,*
4° *il existe un entourage de a ne contenant aucune composante ni de $R_n - A$ ni de $R_n - B$.*

Conclusion: *Il existe un entourage de a ne contenant aucune composante de $R_n - AB$.*

En vertu de 26 et 29, c'est un cas particulier de 34.

36. ***Prémisses:*** 1° *A et B sont des sous-ensembles fermés du plan R_2,*
2° *a est un point de AB,*
3° *il existe un entourage de a ne contenant aucune composante de $R_2 - (A + B)$,*
4° *les ensembles A et B sont localement connexes d'ordre* 0 (v. 15) *au point a.*

Conclusion: *L'ensemble AB est localement connexe d'ordre* 0 *au point a.*

En vertu de 29, c'est un cas particulier de 34.

37. ***Prémisses:*** 1° *R est un espace complètement normal,*
2° *A et B sont des sous-ensembles fermés de R,*
3° $R = A + B$,
4° *a est un point de AB,*
5° *$\mathfrak{D}$ est un domaine donné,*
6° $k = 0, 1, 2, \ldots$,
7° *A et B sont localement connexes d'ordre $k + 1$ relativement à $\mathfrak{D}$ au point a,*
8° *AB est localement connexe d'ordre k relativement à $\mathfrak{D}$ au point a.*

Conclusion: *R est localement connexe d'ordre $k + 1$ relativement à $\mathfrak{D}$ au point a.*

Démonstration. Supposons le contraire. Alors il existe un entourage P de a jouissant de la propriété suivante: $Q \subset P$ étant un entourage de a, il existe un réseau $\mathfrak{U}(Q)$ tel qu'on puisse attacher à chaque affinement $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{U}(Q)$ un $(k + 1, \mathfrak{B})$-cycle $\Gamma^{k+1}(\mathfrak{B})$ dans $\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ tel que $\pi\, \Gamma^{k+1}(\mathfrak{B})$, où $\pi = \mathrm{Pr.}\,[\mathfrak{B}, \mathfrak{U}(Q)]$, ne soit pas ~ 0 dans $\bar{P}$. D'après 1°, 2°, 7° et 14 il existe des entourages $G_1 \subset P$ et $G_2 \subset P$ de a jouissant de la propriété suivante: chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède des affinements $f_1\mathfrak{U}$ et $f_2\mathfrak{U}$ tels que $\pi'\, \Gamma^{k+1}(f_1\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $A\bar{P}$, où $\pi' = \mathrm{Pr.}\,(f_1\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(k + 1, f_1\mathfrak{U})$-cycle $\Gamma^{k+1}(f_1\mathfrak{U})$ dans $A\bar{G}_1$ du domaine $\mathfrak{D}$, et que $\pi''\, \Gamma^{k+1}(f_2\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $B\bar{P}$, où $\pi'' = \mathrm{Pr.}\,(f_2\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(k + 1, f_2\mathfrak{U})$-cycle $\Gamma^{k+1}(f_2\mathfrak{U})$ dans $B\bar{G}_2$ du domaine $\mathfrak{D}$. Posons $G_0 = G_1 G_2$. D'après 8° et 14 il existe un entourage $Q \subset G_0$ de a jouissant de la propriété suivante: chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède un affinement $f_3\mathfrak{U}$ tel que $\pi\, \Gamma^k(f_3\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $AB\bar{G}_0$, où $\pi = \mathrm{Pr.}\,(f_3\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$, pour chaque $(k, f_3\mathfrak{U})$-cycle $\Gamma^k(f_3\mathfrak{U})$ dans $AB\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ (tel que $J[\Gamma^0(f_3\mathfrak{U})] = 0$ si $k = 0$).

Posons $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}(Q)$, $\mathfrak{U}_1 = f_1\mathfrak{U}_0$, $\mathfrak{U}_2 = f_2\mathfrak{U}_0$. Soit $\mathfrak{U}_3$ un affinement simultané des réseaux $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$. Posons $\mathfrak{U}_4 = f_3\mathfrak{U}_3$. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_5$ de $\mathfrak{U}_4$ d'après 12, où nous posons $\varphi = A\bar{Q}$, $\psi = B\bar{Q}$. Soit $\pi_{5i} = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_5, \mathfrak{U}_i)$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$, $\pi_{3j} = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_j)$ $(j = 0, 1, 2)$.

Comme $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}(Q)$, il existe un $(k + 1, \mathfrak{U}_5)$-cycle $\Gamma^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$ dans $\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ tel que $\pi_{50}\, \Gamma^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$ ne soit pas ~ 0 dans P. D'après 3° on peut poser $\Gamma^{k+1}(\mathfrak{U}_5) = C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_5) - C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$, où $C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \subset A\bar{Q}$, $C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \subset B\bar{Q}$. Comme $\Gamma^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \to 0$, on peut poser

$$F\, C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_5) = F\, C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_5) = \Delta^k(\mathfrak{U}_5)\,.$$

On a $\Delta^k(\mathfrak{U}_5) \subset A\bar{Q}$, $\Delta^k(\mathfrak{U}_5) \subset B\bar{Q}$, d'où $\Delta^k(\mathfrak{U}_5) \subset AB\bar{Q}$ d'après 12. Donc $\pi_{54}\, \Delta^k(\mathfrak{U}_5)$ est un $(k, \mathfrak{U}_4)$-cycle dans $AB\bar{Q}$ du domaine $\mathfrak{D}$ (et $J[\pi_{54}\, \Delta^0(\mathfrak{U}_5)] = 0$ si $k = 0$). Comme $\mathfrak{U}_4 = f_3\mathfrak{U}_3$, il existe une $(k + 1, \mathfrak{U}_3)$-chaîne $D^{k+1}(\mathfrak{U}_3)$ dans $AB\bar{G}_0$ du domaine $\mathfrak{D}$ telle que $D^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \to \pi_{53}\, \Delta^k(\mathfrak{U}_5)$. Alors $\pi_{51}\, C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_5) - \pi_{31}\, D^{k+1}(\mathfrak{U}_3)$ est un $(k + 1, \mathfrak{U}_1)$-cycle dans $A\bar{G}_0 \subset A\bar{G}_1$ du domaine $\mathfrak{D}$ et $\pi_{52}\, C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_5) - \pi_{32}\, D^{k+1}(\mathfrak{U}_3)$ est un $(k + 1, \mathfrak{U}_2)$-cycle dans $B\bar{G}_0 \subset B\bar{G}_1$ du domaine $\mathfrak{D}$. Comme $\mathfrak{U}_1 = f_1\mathfrak{U}_0$ et $\mathfrak{U}_2 = f_2\mathfrak{U}_0$, il existe des $(k + 2, \mathfrak{U}_0)$-chaînes $E_1^{k+2}(\mathfrak{U}_0) \subset A\bar{P}$ et $E_2^{k+2}(\mathfrak{U}_0) \subset B\bar{P}$ du domaine $\mathfrak{D}$ telles que

$$E_1^{k+2}(\mathfrak{U}_0) \to \pi_{50}\, C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_5) - \pi_{30}\, D^{k+1}(\mathfrak{U}_3)\,,$$
$$E_2^{k+2}(\mathfrak{U}_0) \to \pi_{50}\, C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_5) - \pi_{30}\, D^{k+1}(\mathfrak{U}_3)\,,$$

d'où

$$E_1^{k+2}(\mathfrak{U}_0) - E_2^{k+2}(\mathfrak{U}_0) \to \pi_{50}\, C_1^{k+1}(\mathfrak{U}_5) - \pi_{50}\, C_2^{k+1}(\mathfrak{U}_5) = \pi_{50}\, \Gamma^{k+1}(\mathfrak{U}_5)\,.$$

Donc $\pi_{50}\, \Gamma^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \sim 0$ dans $\bar{P}$, ce qui est une contradiction.

38. ***Prémisses:*** 1° *A et B sont des sous-ensembles fermés du plan* R_2,

2° *a est un point de AB,*

3° *il existe en entourage de a ne contenant aucune composante ni de* $R_2 - A$ *ni de* $R_2 - B$,

4° *AB est localement connexe d'ordre* 0 (v. 15) *au point a.*

Conclusion: *Il existe un entourage de a ne contenant aucune composante de* $R_2 - (A + B)$.

En vertu de 29, c'est un cas particulier de 37.

22

LES GROUPES DE BETTI D'UN COMPLEXE INFINI

Fundamenta Mathematicae
25 (1935), 33–44

1. Soit un complexe infini K. Pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, désignons par σ_i^n $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ les n-simplexes de K, ces simplexes étant orientés d'une manière quelconque, mais fixe.

Soit $\mathfrak{G}$ un groupe abélien donné. La loi de composition dans $\mathfrak{G}$ (et dans tous les autres groupes envisagés dans cette Note, qui sont tous abéliens) sera considérée comme *addition*. Appelons $(n, \mathfrak{G})$-*chaîne* chaque forme linéaire

$$C^n = \sum_i g_i \sigma_i^n, \quad g_i \in \mathfrak{G} \tag{1}$$

n'ayant qu'un nombre fini de coefficients g_i différents de zéro.[1]

En posant

$$\sum_i g_i \sigma_i^n + \sum_i g_i' \sigma_i^n = \sum_i (g_i + g_i') \sigma_i^n,$$

les $(n, \mathfrak{G})$-chaînes constituent un groupe abélien qui soit désigné par C^n.

La lettre $\mathfrak{E}$ désigne le groupe abélien additif de tous les nombres entiers rationnels. Posons $C^n(\mathfrak{E}) = C^n$. Si $C^n = \sum_i a_i \sigma_i^n$ est une $(n, \mathfrak{E})$-chaîne et si $g \in \mathfrak{G}$, alors $\sum_i a_i g \,.\, \sigma_i^n$ est une $(n, \mathfrak{G})$-chaîne désignée par gC^n.

La *frontière* $F\, C^0$ d'une $(0, \mathfrak{G})$-chaîne est égale à zéro. Pour $n > 0$, la *frontière* $F\, \sigma_i^n$ du n-simplexe σ_i^n est une $(n - 1, \mathfrak{E})$-chaîne

$$F\, \sigma_i^n = \sum_k \eta_{ik}^n \sigma_k^{n-1}.$$

Il est inutile de rappeler ici la forme précise des entiers η_{ik}^n; seulement, nous ferons usage du fait connu quel'on a pour $n \geqq 2$

$$\sum_k \eta_{ik}^n \eta_{kh}^{n-1} = 0 \qquad (i, h = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

[1] En général, chaque somme considérée dans cette Note n'a qu'un nombre fini de termes différents de zéro.

Pour $n > 0$, la *frontière* FC^n de la $(n, \mathfrak{G})$-chaîne (1) est la $(n-1, \mathfrak{G})$-chaîne

$$F\,C^n = \sum_i g_i \,.\, F\,\sigma_i^n\,.$$

En vertu de (2) on a pour $n \geqq 2$ et pour chaque $(n, \mathfrak{G})$-chaîne C^n

$$F\,F\,C^n = 0\,, \tag{3}$$

ce qui est évident pour $n = 1$.

La $(n, \mathfrak{G})$-chaîne C^n s'appelle un $(n, \mathfrak{G})$-*cycle*, si $F\,C^n = 0$. Les $(n, \mathfrak{G})$-cycles constituent un sous-groupe $\boldsymbol{C}^n$ qui sera désigné par $\boldsymbol{\Gamma}^n(\mathfrak{G})$. Pour chaque $C^{n+1} \in \boldsymbol{C}^{n+1}(\mathfrak{G})$, $F\,C^{n+1}$ est un $(n, \mathfrak{G})$-cycle en vertu de (3). Les $(n, \mathfrak{G})$-cycles ayant la forme $F\,C^{n+1}$ sont dits *homologues à zéro* (~ 0); ils constituent un sous-groupe du groupe $\boldsymbol{\Gamma}^n(\mathfrak{G})$ qui sera désigné par $\boldsymbol{H}^n(\mathfrak{G})$. Le groupe-quotient (Faktor-gruppe)

$$\boldsymbol{\Gamma}^n(\mathfrak{G})/\boldsymbol{H}^n(\mathfrak{G})$$

sera désigné par $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G})$; c'est le $n^{\text{ème}}$ *groupe de Betti relatif au domaine de coefficients* $\mathfrak{G}$. Posons

$$\boldsymbol{\Gamma}^n(\mathfrak{C}) = \boldsymbol{\Gamma}^n\,, \quad \boldsymbol{H}^n(\mathfrak{C}) = \boldsymbol{H}^n\,, \quad \boldsymbol{B}^n(\mathfrak{C}) = \boldsymbol{B}^n\,.$$

$\boldsymbol{B}^n$ est le $n^{\text{ème}}$ *groupe de Betti ordinaire*. Les éléments B^n de $\boldsymbol{B}^n$ dont l'ordre est fini, c'est-à-dire ceux pour lesquels il existe un $c \in \mathfrak{C}$ tel que $c > 0$, $cB^n = 0$, constituent un sous-groupe du groupe $\boldsymbol{B}^n$, appelé le $n^{\text{ème}}$ *groupe de torsion*; il sera désigné par $\boldsymbol{T}^n$. On sait que $\boldsymbol{T}^0 = 0$; posons aussi $\boldsymbol{T}^{-1} = 0$. Si la dimension m du complexe K est finie, on a $\boldsymbol{B}^n = 0$ pour $n > m$ et $\boldsymbol{T}^n = 0$ pour $n \geqq m$.

Si les groupes abéliens $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_2$ sont isomorphes, les groupes $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G}_1)$ et $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G}_2)$ le sont aussi. En particulier, si $\mathfrak{G}$ est un groupe cyclique d'ordre infini, le groupe $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G})$ est isomorphe à $\boldsymbol{B}^n$. Si le groupe abélien $\mathfrak{G}$ est somme directe de deux sous-groupes $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_2$, alors le groupe $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G})$ est isomorphe à la somme directe des deux groupes $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G}_1)$ et $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G}_2)$.

2. M. Alexander a considéré[2] le cas où (1) *le complexe K est fini*, (2) $\mathfrak{G}$ *est un groupe cyclique d'ordre fini*. Il a montré que, dans ces hypothèses, la *structure*[3] *du groupe $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G})$ est complètement déterminée par celles des trois groupes $\mathfrak{G}$, $\boldsymbol{B}^n$ et $\boldsymbol{T}^{n-1}$*. Il est facile d'éliminer l'hypothèse (2) du raisonnement de M. Alexander. Or, l'hypothèse (1) y est appliquée tout-à-fait essentiellement en faisant usage de la réduction d'une matrice à coefficients entiers à une forme canonique. Néanmoins, je vais montrer que le résultat de M. Alexander est complètement général, toutes les deux hypothèses (1) et (2) y étant superflues.

[2] *Combinatorial Analysis Situs*, Trans. Amer. Math. 28, 301—329 (1926). Cf. aussi A. W. Tucker, *Modular homology characters*, Proc. Nat. Acad. Sc. 18, 467—471 (1932).

[3] Deux groupes ont la même structure s'ils sont isomorphes.

Commençons par une définition. Si Γ_i^n sont des $(n, \mathfrak{E})$-cycles (en nombre fini) et si $g_i \in \mathfrak{G}$, alors $\sum_i g_i \Gamma_i^n$ est un $(n, \mathfrak{G})$-cycle. Appelons *pur* chaque $(n, \mathfrak{G})$-cycle de la forme

$$\sum_i g_i \Gamma_i^n, \qquad g_i \in \mathfrak{G}, \quad \Gamma_i^n \in \Gamma^n.$$

Les $(n, \mathfrak{G})$-cycles purs constituent un groupe abélien qui sera désigné par $\Gamma_1^n(\mathfrak{G})$. Evidemment

$$\Gamma^n(\mathfrak{G}) \supset \Gamma_1^n(\mathfrak{G}) \supset H^n(\mathfrak{G}).$$

Le groupe-quotient

$$\Gamma_1^n(\mathfrak{G})/H^n(\mathfrak{G})$$

sera désigné par $B_1^n(\mathfrak{G})$ et appelé le $n^{\text{ème}}$ *groupe de Betti pur, relatif au domaine de coefficients* $\mathfrak{G}$.

Ceci étant, je démontre dans cette Note les trois théorèmes suivants:

Théorème I. *Il existe un sous-groupe $B_2^n(\mathfrak{G})$ du groupe $B^n(\mathfrak{G})$* – appellons-le le $n^{\text{ème}}$ *groupe de Betti complémentaire relatif au domaine de coefficients $\mathfrak{G}$ – tel que le groupe $B^n(\mathfrak{G})$ est la somme directe des deux sous-groupes $B_1^n(\mathfrak{G})$ et $B_2^n(\mathfrak{G})$.* Le groupe $B_2^n(\mathfrak{G})$ n'est pas univoquement déterminé, mais sa structure est déterminée sans ambiguïté, $B_2^n(\mathfrak{G})$ étant isomorphe au groupe quotient

$$B^n(\mathfrak{G})/B_1^n(\mathfrak{G}).$$

Réciproquement la structure de $B^n(\mathfrak{G})$ est complètement déterminée par celle des deux groupes $B_1^n(\mathfrak{G})$ et $B_2^n(\mathfrak{G})$.

Théorème II. *La structure du groupe $B_1^n(\mathfrak{G})$ est complètement déterminée par celle des deux groupes $\mathfrak{G}$ et B^n. Plus précisément: Supposons que le groupe B^n soit donné par les éléments générateurs α_i ($i = 1, 2, 3, \ldots,$ évent. ad inf.) et par les relations définissantes $\sum_i a_{ik}\alpha_i = 0$ ($k = 1, 2, 3, \ldots,$ évent. ad inf.)*[4] *où $a_{ik} \in \mathfrak{E}$ et, pour chaque k, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de i telles que $a_{ik} \neq 0$. On obtient un groupe X isomorphe au groupe $B_1^n(\mathfrak{G})$ de la manière suivante. Attachons à chaque i un symbole x_i. Les éléments de X sont les symboles $\sum_i g_i x_i$ n'ayant qu'un nombre fini de coefficients $g_i \in \mathfrak{G}$ différents de zéro. L'addition dans X est définie par*

$$\sum_i g_i x_i + \sum_i g_i' x_i = \sum_i (g_i + g_i')\, x_i$$

[4] Cela veut dire que les éléments de B^n ont la forme $\sum_i c_i \alpha_i$, où ceux des coefficients $c_i \in \mathfrak{E}$ qui sont $\neq 0$ sont en nombre fini, que $\sum_i c_i \alpha_i + \sum_i c_i' \alpha_i = \sum_i (c_i + c_i')\, \alpha_i$, enfin que $\sum_i c_i \alpha_i = 0$ si et seulement s'il existe des entiers b_k en nombre fini tels que $c_i = \sum_k b_k a_{ik}$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ Dans le cas où il n'y a aucune relation définissante, on dit que les éléments générateurs α_i sont *linéairement indépendants.*

et il y a des relations définissantes

$$\sum_i a_{ik} g \, . \, x_i = 0 \quad pour \quad g \in \mathfrak{G} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) .$$

Théorème III. *La structure du groupe $B_2^n(\mathfrak{G})$ est complètement déterminée par celle des deux groupes $\mathfrak{G}$ et T^{n-1}. Plus précisément. Supposons que le groupe T^{n-1} soit donné par les éléments générateurs β_i $(i = 1, 2, 3, \ldots,$ évent. ad inf.$)$ et par les relations définissantes $\sum_i b_{ik}\beta_i = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots,$ évent. ad inf.$)$, où $b_{ik} \in \mathfrak{C}$ et, pour chaque k, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de i telles que $b_{ik} \neq 0$. On obtient un groupe Y isomorphe au groupe $B_2^n(\mathfrak{G})$ de la manière suivante. Attachons à chaque k un symbole y_k. Les éléments de Y sont les symboles $\sum_k g_k y_k$ n'ayant qu'un nombre fini de coefficients $g_k \in \mathfrak{G}$ différents de zéro, ces coefficients g_k ne sont pas arbitraires, mais liés par les relations*

$$\sum_k b_{ik} g_k = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) .$$

L'addition dans Y est définie par

$$\sum_k g_k y_k + \sum_k g'_k y_k = \sum_k (g_k + g'_k)\, y_k$$

et il y a des relations definissantes

$$\sum_k c_k g \, . \, y_k = 0 \quad pour\ chaque \quad g \in \mathfrak{G} ,$$

où c_k sont entiers (dont ceux qui sont $\neq 0$ sont en nombre fini) tels que

$$\sum_k b_{ik} c_k = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) .$$

3. Les démonstrations sons fondées sur le

Lemme. *Supposons que le groupe abélien $\mathfrak{G}$ possède un nombre fini ou dénombrable de générateurs linéairement indépendants. Soit $\mathfrak{H}$ un sous-groupe de $\mathfrak{G}$. Alors $\mathfrak{H}$ possède un système fini ou dénombrable de générateurs linéairement indépendants.*

Démonstration. Soient g_i $(i = 1, 2, 3, \ldots,$ évent. ad inf.$)$ les générateurs donnés linéairement indépendants du groupe $\mathfrak{G}$. Posons

$$h_1 = \sum_{\nu=1}^{\lambda_1} a_{1\nu} g_\nu \qquad (a_{1\nu} \in \mathfrak{C}) ,$$

en choisissant λ_1 et $a_{1\nu}$ de manière que (1) $h_1 \in \mathfrak{H}$, (2) λ_1 = minimum, (3) $a_{1\nu_1} > 0$, $a_{1\nu_1}$ = minimum. Supposons que l'on ait déjà déterminé les indices $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots <$

$< \lambda_i$, ainsi que les éléments $h_1, h_2, \ldots, h_i$ de $\mathfrak{H}$. Alors posons

$$h_{i+1} = \sum_{\nu=1}^{\lambda_{i+1}} a_{i+1,\nu} g_\nu \qquad (a_{i+1,\nu} \in \mathfrak{E}),$$

en choisissant λ_{i+1} et $a_{i+1,\nu}$ de manière que (1) $h_{i+1} \in \mathfrak{H}$, (2) $\lambda_{i+1} > \lambda_i$, λ_{i+1} = minimum, (3) $a_{i+1,\lambda_{i+1}} > 0$, $a_{i+1,\lambda_{i+1}}$ = minimum. En procédant de cette manière, on obtient une suite finie ou dénombrable $h_1, h_2, h_3, \ldots$. Posons $V(0) = 0$; si $h \in \mathfrak{H}$ et $h \neq 0$, soit $h = \sum b_\nu g_\nu$; le plus haut indice ν tel que $b_\nu > 0$ a la forme $\nu = \lambda_i$; posons $V(h) = i$.

Les h_i sont linéairement indépendants. En effet, si $h = \sum_{\mu=1}^{i} c_\mu h_\mu$, $c_\mu \in \mathfrak{E}$ et $c_i \neq 0$, on a $h = \sum_{\nu=1}^{\lambda_i} b_\nu g_\nu$ et $b_\nu \in \mathfrak{E}$, $b_{\lambda_i} = c_i a_{i\lambda_i} \neq 0$, d'où $h \neq 0$.

Chaque élément h du groupe $\mathfrak{H}$ a la forme $\sum_{\mu=1}^{i} c_\mu h_\mu$, $c_\mu \in \mathfrak{E}$. C'est évident si $V(h) = 0$. Soit $V(h) = i > 0$ et supposons que l'énoncé soit vrai pour chaque $h' \in \mathfrak{H}$ tel que $V(h') < i$. On a $h = \sum_{\nu=1}^{\lambda_i} b_\nu g_\nu$. Déterminons les entiers q et r de manière que $b_{\lambda_i} = qa_{i,\lambda_i} + r$, $0 \leqq r < a_{i,\lambda_i}$. On a $h - qh_i = \sum_{\nu=1}^{\lambda_i} b'_\nu g_\nu$, $b'_\nu \in \mathfrak{E}$, $0 \leqq b'_{\nu_i} = r < a_{i,\lambda_i}$, d'où $b'_{\nu_i} = 0$ d'après le choix de a_{i,λ_i}. Donc $V(h - qh_i) < i$, d'où $h - qh_i = \sum_\mu c_\mu h_\mu$, $h = qh_i + \sum_\mu c_\mu h_\mu$.

4. Démonstration du théorème I. Pour $n = 0$ on a évidemment $\boldsymbol{B}_1^0(\mathfrak{G}) = \boldsymbol{B}^0(\mathfrak{G})$, $\boldsymbol{B}_2^0(\mathfrak{G}) = 0$. Soit $n > 0$. Les $(n-1, \mathfrak{E})$-chaînes $1 \,.\, \sigma_i^{n-1}$ constituant évidemment un système fini ou dénombrable d'éléments générateurs lin. indépendants du groupe $\boldsymbol{C}^{n-1}$, il résulte du lemme que le sous-groupe $\boldsymbol{H}^{n-1}$ du groupe $\boldsymbol{C}^{n-1}$ possède un système fini ou dénombrable d'éléments générateurs h_k $(k = 1, 2, 3, \ldots,$ évent. ad inf.) lin. indépendants. Puisque $h_k \in \boldsymbol{H}^{n-1}$, il existe des $(n, \mathfrak{E})$-chaînes D_k^n telles que $FD_k^n = h_k$. Les chaînes D_k^n constituent un système de générateurs d'un sous-groupe — désignons-le par $\boldsymbol{D}^n$ — du groupe $\boldsymbol{C}^n$.

Soit $C^n \in \boldsymbol{C}^n$; alors $FC^n \in \boldsymbol{H}^{n-1}$. Donc il existe des nombres $a_k \in \mathfrak{E}$ (en nombre fini) tels que $FC^n = \sum_k a_k h_k$, de manière que $\Gamma^n = C^n - \sum_k a_k D_k^n \in \boldsymbol{\Gamma}^n$. D'autre part, soit $\Gamma^n \in \boldsymbol{\Gamma}^n$, $D^n \in \boldsymbol{D}^n$, $\Gamma^n + D^n = 0$. Il en résulte que $FD^n = F(\Gamma^n + D^n) = 0$. Or on a $D^n = \sum_k a_k D_k^n$, d'où $\sum_k a_k h_k = FD^n = 0$, donc $a_k = 0$ et par suite $D^n = 0$ et $\Gamma^n = 0$. Donc le groupe $\boldsymbol{C}^n$ est somme directe de $\boldsymbol{\Gamma}^n$ et de $\boldsymbol{D}^n$. On en déduit sans peine que le groupe $\boldsymbol{\Gamma}^n(\mathfrak{G})$ est somme directe du groupe $\boldsymbol{\Gamma}_1^n(\mathfrak{G})$ et du groupe $\boldsymbol{\Gamma}_2^n(\mathfrak{G})$, ce dernier étant défini comme l'ensemble de tous les $(n, \mathfrak{G})$-cycles de la forme $\sum_k g_k D_k^n$, $g_k \in \mathfrak{G}$. Il en résulte aisément que le groupe $\boldsymbol{B}^n(\mathfrak{G})$ est somme directe du groupe $\boldsymbol{B}_1^n(\mathfrak{G})$ et d'un groupe $\boldsymbol{B}_2^n(\mathfrak{G})$ isomorphe au groupe $\boldsymbol{\Gamma}_2^n(\mathfrak{G})$.

5. Démonstration du théorème II. Supposons que le groupe soit donné par les générateurs α_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$, évent. ad inf.) et par les relations définissantes $\sum_i a_{ik}\alpha_i = 0$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$, évent. ad inf.). Autrement dit: (1) il existe des $(n, \mathfrak{C})$-cycles Γ_i^n tels que pour chaque $(n, \mathfrak{C})$-cycle Γ^n on ait une homologie de la forme $\Gamma^n - \sum_i b_i \Gamma_i^n \sim 0$, (2) on a $\sum_i b_i \Gamma_i^n \sim 0$ si et seulement s'il existe des entiers c_k (en nombre fini) tels que $b_i = \sum_k a_{ik}c_k$. Il en résulte que les éléments du groupe $\Gamma_1^n(\mathfrak{G})$ ont la forme $\sum_i g_i \Gamma_i^n$, $g_i \in \mathfrak{G}$, et que l'on a $\sum_i g_i \Gamma_i^n \sim 0$ si et seulement s'il existe des $g_k' \in \mathfrak{G}$ (en nombre fini) tels que $g_i = \sum_k a_{ik} g_k'$. Or ceci implique la validité du théorème II.

6. Démonstration du théorème III. Pour $n = 0$ on a $\boldsymbol{B}_2^0(\mathfrak{G}) = 0$, $\boldsymbol{T}^{-1} = 0$. Soit $n > 0$. Supposons que le groupe $\boldsymbol{T}^{n-1}$ soit donné par les générateurs β_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$, évent. ad inf.) et par les relations définissantes $\sum_i b_{ik}\beta_i = 0$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$, évent. ad inf.). Le théorème III déduit des générateurs β_i et des relations $\sum_i b_{ik}\beta_i = 0$ un groupe $\boldsymbol{Y}$ et affirme l'isomorphie des deux groupes $\boldsymbol{B}_2^n(\mathfrak{G})$ et $\boldsymbol{Y}$. Nous allons d'abord prouver que le structure du groupe $\boldsymbol{Y}$ est déterminée sans ambiguïté par celle des groupes $\mathfrak{G}$ et $\boldsymbol{T}^{n-1}$.

Supposons d'abord que l'on ait choisi pour les générateurs β_i le système de *tous* les éléments du groupe $\boldsymbol{T}^{n-1}$. Quant aux relations définissantes $\sum_i b_{ik}\beta_i = 0$, supposons les choisies d'une manière quelconque (mais fixe). Si l'on ajoute aux relations $\sum_i b_{ik}\beta_i = 0$ *toutes* les autres relations qui existent entre les β_i, le groupe $\boldsymbol{Y}$ doit être remplacé par un nouveau groupe $\boldsymbol{Y}'$. Les éléments de $\boldsymbol{Y}$ étaient de la forme $\sum_k g_k y_k$, les $g_k \in \mathfrak{G}$ étant tels que $\sum_k b_{ik} g_k = 0$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$; on avait aussi les relations définissantes $\sum_k c_k g \cdot y_k = 0$ ($g \in \mathfrak{G}$), où les c_k étaient des entiers tels que $\sum_k b_{ik}c_k = 0$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$. Les $\sum b_{ik}\beta_i = 0$ constituant un système de relations définissantes pour les générateurs β_i du groupe $\boldsymbol{T}^{n-1}$, les autres relations qui existent entre les β_i ont la forme $\sum_{ik} v_{hk} b_{ik} \beta_i = 0$, $v_{hk} \in \mathfrak{C}$ (pour une valeur donnée de h, les $v_{hk} \neq 0$ sont en nombre fini). Le éléments de $\boldsymbol{Y}'$ ont la forme $\sum_k g_k y_k + \sum_h g_h' y_h' = 0$, les $g_k \in \mathfrak{G}$ et les $g_h' \in \mathfrak{G}$ étant tels que $\sum_k b_{ik}(g_k + \sum_h v_{hk} g_h') = 0$; on a aussi les relations définissantes $\sum c_h g \cdot y_k + \sum c_h' g \cdot y_h' = 0$ ($g \in \mathfrak{G}$), où les entiers c_k et c_h' sont tels que $\sum_k b_{ik}(c_k + \sum_h v_{hk} c_h') = 0$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$. En posant

$$\varphi(\sum_k g_k y_k + \sum_h g_h' y_h') = \sum_k (g_k + \sum_h v_{hk} g_h')\, y_k\,,$$

on reconnait sans peine que φ est une corsespondance biunivoque et isomorphe entre les deux groupes $\boldsymbol{Y}'$ et $\boldsymbol{Y}$.

Supposons maintenant que les générateurs β_i et les relations définissantes $\sum_i b_{ik}\beta_i = 0$ du groupe T^{n-1} soient choisies arbitrairement. Pour achever la démonstration du fait que la structure du groupe Y ne dépend que de celle de $\mathfrak{G}$ et de T^{n-1}, il suffit de prouver que, si l'on ajoute aux générateurs β_i tous les autres éléments $\beta'_j = \sum_i u_{ij}\beta_i$ du groupe T^{n-1}, en ajoutant simultanément aux $\sum_i b_{ik}\beta_i = 0$ les nouvelles relations $\beta'_j - \sum_i u_{ij}\beta_i = 0$, le groupe Y' correspondant est identique à Y. Les éléments du groupe Y' ont la forme $\sum_k g_k y_k + \sum_j g'_j y'_j$, les $g_k \in \mathfrak{G}$ et les $g'_j \in \mathfrak{G}$ étant tels que $\sum_k b_{ik} g_k - \sum_j u_{ij} g'_j = 0$, $g'_j = 0$; on a aussi les relations définissantes $\sum_k c_k g \,.\, y_k + \sum_j c'_j g \,.\, y'_j = 0$ $(g \in \mathfrak{G})$, les entiers c_k et c'_j étant tels que $\sum_k b_{ik} c_k - \sum_j u_{ij} c'_j = 0$, $c'_j = 0$. Donc les éléments de Y' sont simplement $\sum_k g_k y_k$, les $g_k \in \mathfrak{G}$ étant tels que $\sum_k b_{ik} g_k = 0$, et les relations définissantes sont $\sum_k c_k g \,.\, y_k = 0$ $(g \in \mathfrak{G})$, les entiers c_k étant tels que $\sum_k b_{ik} c_k = 0$. Les groupes Y' et Y sont par conséquent identiques l'un à l'autre.

Ceci étant, il suffit de prouver la validité du théorème III en choisissant d'une manière convenable les générateurs et les relations définissantes du groupe T^{n-1}.

Comme les $(n-1, \mathfrak{C})$-chaînes $1 \,.\, \sigma_i^{n-1}$ constituent un système fini ou dénombrable de générateurs lin. indépendants du groupe T^{n-1}, il résulte du lemme qu'il existe une suite finie ou infinie de générateurs C_i^{n-1} lin. indépendants du groupe $L^{n-1} \subset C^{n-1}$, constitué par tous les $(n-1, \mathfrak{C})$-cycles dont un certain multiple est homologue à zéro. L'indice k parcourant les mêmes valeurs que l'indice i (1, 2, 3, ..., évent. ad inf.), il existe pour chaque k des entiers b_{ik} tels que (1) $b_{ik} = 0$ pour $i > k$, (2) $b_{kk} > 0$, (3) $\sum_i b_{ik} C_i^{n-1} \sim 0$. Choisissons les entiers b_{ik} de manière que la valeur de b_{kk} soit minima, et posons $h_k = \sum_i b_{ik} C_i^{n-1}$ de manière que $h_k \in H^{n-1}$. Or les h_k ont été déduits des C_i^{n-1} précisément de la même manière que les h_i des g_i dans la démonstration du lemme; il suffit d'y remplacer les deux groupes $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ respectivement par L^{n-1} et par H^{n-1}.[5] Il en résulte que les h_k constituent un système de générateurs linéairement indépendants du groupe H^{n-1}.

Comme

$$T^{n-1} = L^{n-1}/H^{n-1}\,,$$

aux C_i^{n-1} correspondent des générateurs β_i du groupe T^{n-1}, les relations définissantes étant $\sum_i b_{ik}\beta_i = 0$. Les éléments du groupe Y ont la forme $\sum_k g_k y_k$, les $g_k \in \mathfrak{G}$ étant tels que $\sum_k b_{ik} g_k = 0$ pour chaque i. On n'a $\sum_k g_k y_k = 0$ que si tous les g_k sont $= 0$; en effet, les relations definissantes du groupe Y sont $\sum_k c_k g \,.\, y_k = 0$ $(g \in \mathfrak{G})$, les entiers c_k

[5] Dans le cas présent, on a évidemment $\lambda_i = i$ dans la démonstration citée.

étant tels que (1) $c_k = 0$ à partir d'une certaine valeur de k, (2) $\sum_k b_{ik}c_k = 0$ pour chaque i; puisque $b_{ik} = 0$ pour $i > k$ et $b_{kk} > 0$, les conditions (1) et (2) entraînent que $c_k = 0$ pour chaque k.

D'autre part, d'après la démonstration du théorème 1, le groupe $\boldsymbol{B}_2^n(\mathfrak{G})$ est isomorphe au groupe $\Gamma_2^n(\mathfrak{G})$,, constitué pas tous les $(n, \mathfrak{G})$-cycles de la forme $\sum_k g_k D_k^n$, les $D_k^n \in \boldsymbol{C}^n$ étant choisis de manière que $FD_k^n = h_k$. Les h_k étant lin. indépendants, les D_k^n le sont aussi; il en résulte sans peine que l'on ne peut avoir $\sum_k g_h D_k^n = 0$ que si $g_1 = g_2 = \ldots = 0$. Or, on a $F \sum_k g_k D_k^n = \sum_k g_k h_k = \sum_{ik} b_{ik} g_k C_i^{n-1}$. Les C_i^{n-1} etant lin. indépendants, il en résulte que $\sum_k g_k D_k^n$ est un $(n, \mathfrak{G})$-cycle si et seulement si $\sum_k b_{ik} g_k = 0$ pour chaque i. Donc les deux groupes $\Gamma_2^n(\mathfrak{G})$ et $\boldsymbol{Y}$ sont isomorphes. Les deux groupes $\boldsymbol{B}_2^n(\mathfrak{G})$ et $\Gamma_2^n(\mathfrak{G})$ étant aussi isomorphes, le théorème III est démontré.

7. Remarques. I. Supposons que le groupe $\boldsymbol{B}^n$ possède un système *fini* de générateurs (ce qui a lieu en particulier si le complexe K est fini). Pour $\mu \in \mathfrak{E}$, $\mu > 0$ désignons par $\mathfrak{G}(\mu)$ le sous-groupe de $\mathfrak{G}$ constitué par tous les éléments de la forme μg $(g \in \mathfrak{G})$. On sait que le groupe $\boldsymbol{B}^n$ possède un nombre fini de générateurs $\alpha_i (1 \leqq \leqq i \leqq m)$ tels que les relations définissantes aient la forme $\mu_i \alpha_i = 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$, où $\mu_i \in \mathfrak{E}$, $\mu_i \geqq 0$. On déduit aisément du théorème II que le groupe $\boldsymbol{B}_1^n(\mathfrak{G})$ est somme directe de m groupes $\boldsymbol{X}(1 \leqq i \leqq m)$, où (1) si $\mu_i = 0$, le groupe $\boldsymbol{X}_i$ est isomorphe à $\mathfrak{G}$, (2) si $\mu_i > 0$, le groupe $\boldsymbol{X}_i$ est isomorphe à $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}(\mu_i)$.

II. Supposons que le groupe $\boldsymbol{T}^{n-1}$ possède un nombre *fini* de générateurs (ce qui a lieu en particulier si le complexe K est fini). Pour $\mu \in \mathfrak{E}$, $\mu > 0$ désignons par $\mathfrak{G}[\mu]$ le sous-groupe de $\mathfrak{G}$ constitué par tous les éléments $g \in \mathfrak{G}$ tels que $\mu g = 0$. On sait que le groupe $\boldsymbol{T}^{n-1}$ possède un nombre fini de générateurs β_i $(1 \leqq i \leqq m)$ tels que les relations définissantes aient la forme $\mu_i \beta_i = 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$ où $\mu_i \in \mathfrak{E}$, $\mu_i > 0$. On déduit aisément du théorème III que le groupe $\boldsymbol{B}_2^n(\mathfrak{G})$ est somme directe de m groupes $\boldsymbol{Y}_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$, le groupe $\boldsymbol{Y}_i$ étant isomorphe à $\mathfrak{G}[\mu_i]$.

III. *Supposons que le groupe $\mathfrak{G}$ jouisse de la propriété suivante: $g \in \mathfrak{G}$ et $\mu \in \mathfrak{G}$, $\mu > 0$ étant choisis arbitrairement, il existe toujours un $g' \in \mathfrak{G}$ tel que $g = \mu g'$. Alors la structure de groupe $\boldsymbol{B}_1^n(\mathfrak{G})$ est complètement déterminée par celles des deux groupes $\mathfrak{G}$ et $\boldsymbol{B}^n/\boldsymbol{T}^n$. Plus précisément, le groupe $\mathfrak{G}$ ayant la propriété énoncée, le groupe $\boldsymbol{B}_1^n(\mathfrak{G})$ est isomorphe au groupe $\boldsymbol{X}^*$ qui s'obtient du groupe $\boldsymbol{B}^n/\boldsymbol{T}^n$ de la même manière que le groupe $\boldsymbol{X}$ a été obtenu du groupe $\boldsymbol{B}^n$ au théorème* II.

Le plus important exemple d'un groupe $\mathfrak{G}$ jouissant de la propriété envisagée est le groupe additif de nombres réels réduits mod. 1, jouant un rôle important dans les derniers travaux de M. Pontrjagin.

Démonstration. On voit sans peine que l'on peut choisir un système de générateurs et de relations définissantes du groupe $\boldsymbol{B}^n$ de la manière suivante: (1) les générateurs sont α_i $(i = 1, 2, 3, \ldots,$ évent. ad inf.) et α'_j $(j = 1, 2, 3, \ldots,$ évent. ad inf.), (2) les relations définissantes sont $\sum_i a_{ik}\alpha_i + \sum_j a'_{jk}\alpha'_j = 0$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$, évent. ad inf.) et $\sum_j u_{jh}\alpha'_j = 0$ (l'indice k parcourant les mêmes valeurs que l'indice g), (3) les α'_i constituent un système de générateurs du groupe T^n et les $\sum_j u_{jh}\alpha'_j = 0$ constituent les relations définissantes du groupe T^n, (4) $u_{jh} = 0$ pour $j > h$, $u_{hh} > 0$. Evidemment, il existe un système de générateurs α_i^* du groupe B^n/T^n tel que les relations définissantes sont $\sum_i a_{ik}\alpha_i^* = 0$. Les éléments du groupe X sont $\sum_i g_i x_i + \sum_j g'_j x'_j$ ($g_i \in \mathfrak{G}$, $g'_j \in \mathfrak{G}$) et les relations définissantes sont $\sum_i a_{ik} g \,.\, x_i + \sum_j a'_{jk} g \,.\, x'_j = 0$, $\sum_j u_{jh} g \,.\, x'_j = 0$ ($g \in \mathfrak{G}$). Les éléments du groupe X^* sont $\sum_i g_i x'_i$ ($g_i \in \mathfrak{G}$) et les relations définissantes sont $\sum_i a_{ik} g \,.\, x_i^* = 0$ ($g \in \mathfrak{G}$).

Considérons les éléments X' de X ayant la forme particulière $X' = \sum_j g'_j x'_j$ ($g'_j \in \mathfrak{G}$). Posons $f(X') = 0$ si tous les g'_j sont égaux à zero; dans le cas contraire, soit $f(X')$ égal au plus grand indice j tel que $g'_j \neq 0$. Nous allons prouver que $X' = 0$. C'est évident pour $f(X') = 0$; supposons le vrai pour $f(X') < m$ et considérons un élément $X' = \sum_j g'_j x'_j$ tel que $f(X') = m$. Comme $u_{mm} > 0$, il existe un élément $g \in \mathfrak{G}$ tel que $g'_m = u_{mm} g$. Or on a $\sum_j u_{jm} g \,.\, x'_j = 0$, d'où $X' = X'' = \sum_j g'_j x'_j - \sum_j u_{jm} g \,.\, x'_j$. Puisque $u_{mm} g = g'_m$, $u_{jm} = 0$ pour $j > m$, $f(X') = m$, on a $f(X'') < m$, d'où $X' = X'' = 0$.

Ceci étant, posons

$$\varphi(\sum_i g_i x_i + \sum_j g'_j x'_j) = \sum g_i x_i^* \,.$$

On vérifie sans peine que φ est une correspondance biunivoque et isomorphe entre les deux groupes X et X^*. Or le groupe X est isomorphe au groupe $B_1^n(\mathfrak{G})$ en vertu du théorème II.

IV. *Le groupe abélien $\mathfrak{G}$ étant arbitraire, désignons par $\mathfrak{H}$ le sous-groupe constitué par tous les éléments de $\mathfrak{G}$ dont l'ordre est fini. Alors le groupe $B_2^n(\mathfrak{G})$ est isomorphe au groupe $B_2^n(\mathfrak{H})$.*

En particulier, si tous les éléments de $\mathfrak{G}$ ont l'ordre infini (p. ex. si $\mathfrak{G}$ est un sous-groupe du groupe additif de tous les nombres complexes), on a $B_2^n(\mathfrak{G}) = 0$.

Démonstration. On peut supposer (voir la démonstration du théorème III, p. 40) que le groupe T^{n-1} soit donné par les générateurs β_i($i = 1, 2, 3, \ldots$, évent. ad inf.) tels que les relations définissantes aient la forme $\sum_i b_{ik}\beta_i = 0$ (l'indice k parcourant les mêmes valeurs que l'indice i), où $b_{kk} > 0$, $b_{ik} = 0$ pour $i > k$. Nous avons vu que le groupe $B_2^n(\mathfrak{G})$ est isomorphe au groupe Y constitué par tous les formes linéaires $\sum_k g_k y_k$ dont les coefficients $g_k \in \mathfrak{G}$ sont tels que

$$\sum_k b_{ik} g_{ik} = 0; \tag{4}$$

on n'a $\sum_k g_k y_k = 0$ que si $g_k = 0$ pour chaque k. On doit seulement prouver que $g_k \in \mathfrak{H}$, c'est-à-dire que l'ordre de chaque g_k est fini. Or ceci résulte sans peine par recurrence des équations (4), en tenant compte des conditions $b_{kk} > 0$, $b_{ik} = 0$ pour $i > k$.

V. *Soit* $m \in \mathfrak{C}$, $m > 0$. *Supposons que le groupe* $\mathfrak{G}$ *soit tel que* $mg = 0$ *pour chaque* $g \in \mathfrak{G}$. *Alors la structure du groupe* $B^n(\mathfrak{G})$ *est complètement déterminée par celle des trois groupes* $\mathfrak{G}$, $B^n(\mathfrak{C}_m)$ *et* $B^{n-1}(\mathfrak{C}_m)$, *où* $\mathfrak{C}_m$ *désigne le groupe additif des nombres entiers réduits* mod. m. En effet, si le groupe $\mathfrak{G}$ jouit de la propriété énoncée, on voit sans peine que les théorèmes I, II et III restent vrais (avec la démonstration essentiellement la même) en remplaçant $\mathfrak{C}$ par $\mathfrak{C}_m$.[6]

[6] On doit remplacer $\mathfrak{C}$ par $\mathfrak{C}_m$ aussi dans la définition du groupe $B_1^n(\mathfrak{G})$.

23

ON GENERAL MANIFOLDS

Proceedings of the National Academy
of Sciences of the United States
22 (1936), 110–111

Let G be an abelian group. Let $0 \leqq p \leqq n$. A topological space R will be called an absolute orientable n-manifold of rank p over G, if it satisfies the following axioms:

I. R is a bicompact space.

II. $\dim R = n$.

III. There exists an absolute (n, R)-cycle over G, which is not ~ 0.

IV. If $S \neq R$ is a closed subset of R, then every absolute (n, S)-cycle over G is ~ 0 over G.

V. If U is a given neighborhood of a given point x of R, there exists a neighborhood $V \subset U$ of x having the following property: If C^n is an (n, R)-cycle mod $(R - U)$ over G, then there exists an absolute (n, R)-cycle Ω^n over G such that $C^n \sim \sim \Omega^n \bmod (R - V)$.

VI^q $(n - p \leqq q \leqq n - 1)$. If U is a given neighborhood of a given point x of R, there exists a neighborhood $V \subset U$ of x such that every (q, R)-cycle mod $(R - U)$ over G is $\sim 0 \bmod (R - V)$.

This definition is complete if G is either a bicompact group or a field. In other cases the cycles over G may have paradoxical properties and it is necessary to add a further axiom excluding this; as a matter of fact, it is sufficient to add an axiom excluding paradoxical properties of absolute (n, R)-cycles.

The most important cases arise when G is the group of all real numbers mod 1; if our axioms hold true for this particular group, they automatically hold true for any G whatever. Besides, in this case axiom III is a consequence of the remaining ones.

An absolute n-manifold (orientable or not) of rank p over G is a bicompact space R having the following property: Any point x possesses a neighborhood U such that the space obtained from R by considering the whole set $R - U$ as a single point is an absolute orientable n-manifold of rank p over G.

In my earlier theory of manifolds (*Annals of Mathematics*, 1933, 621–730, [15] and 1934, 685–693, [19]) I was obliged to assume that G is a field. Moreover, I had three more axioms. *Firstly*, I had supposed that R has the property that every closed subset is a G_δ, which was a strong restriction. *Secondly*, I had assumed that the highest Betti number is equal to 1, which can be *proved* in the case $p = 0$ and is an unnecessary restriction in the general case. *Thirdly*, I had the following axiom:

VII^q $(n - p \leqq q \leqq n)$. If U is a given neighborhood of a given point x of R, there exists a neighborhood $V \subset U$ of x such that every absolute (q, R)-cycle situated in $\bar{V}$ is ~ 0 in $\bar{U}$; now I can prove that this follows from other axioms.

The basic duality theorem for an absolute orientable n-manifold of rank p over G is: The pth absolute Betti group over G of R is isomorphic with the $(n - p)$th absolute dual Betti group over H of R, where H designates the nth absolute Betti group over G of R. The dual $(n - p)$th Betti group over H is the character group of the ordinary $(n - p)$th Betti group over the character group of H, but it may be easily defined directly.

24

ON PSEUDOMANIFOLDS

Lecture at the Institute
for Advanced Study.
Princeton, 1935, mimeographed, 17 pp.

Before passing to the proper content of these lectures, I shall give a brief survey of a few fundamental facts of the homology theory, in such form as I shall apply it later.[1]

A *complex* K is a finite set ($\neq 0$) of elements (called *vertices* of the complex), in which some subsets are distinguished (and called *simplices* of the complex); two conditions must be satisfied: (1) each vertex is distinguished, (2) each subset of a distinguished set is distinguished. If there is given a fixed abelian group $\mathfrak{R}$, then we can form in a known manner *K-chains* (with coefficients taken from $\mathfrak{R}$) and their *boundaries*, which leads to the notion of *cycles* and *homologies*. We shall consider also *relative cycles* and *homologies* in the sense of Lefschetz. A *subcomplex* K_1 of a complex K is a complex such that (not only each vertex of K_1 is a vertex of K but also) every K_1-simplex is a K-simplex. Let $K_2 \subset K_1 \subset K$. Let $C^n(K)$ be an (n, K)-chain. We say that $C^n(K)$ is situated in K_1 (and we write $C^n(K) \subset K_1$) if $C^n(K)$ is a K_1-chain. We say that $C^n(K)$ is an *(n, K)-cycle mod K_2 in K_1*, if $C^n(K) \subset K_1$, $F\ C^n(K) \subset K_2$, where the letter F signifies the boundary. We say that $C^n(K)$ is *homologous to zero mod K_2 in K_1* (and we write $C^n(K) \sim 0 \bmod K_2$ in K_1), if there exists an $(n + 1, K)$-chain $D^{n+1}(K) \subset K_1$ such that $F\ D^{n+1}(K) = C^n(K) + E^n(K)$, where $E^n(K) \subset K_2$.

For the later purposes it is essential that the coefficient group $\mathfrak{R}$ be a field. Therefore, we assume it now. If $r \in \mathfrak{R}$ and if $C^n(K)$ is an (n, K)-chain, then we can form the chain $r\ C^n(K)$ in an obvious manner.

Now let R be a topological space, that is to say, an abstract set (whose elements are called *points*) in which certain sets (called *closed sets*) are distinguished in such a manner as to have the following properties: (1) 0 and R are closed, (2) the sum of two closed sets is closed, (3) the intersection of any number of closed sets is closed, (4)

[1] The proofs are contained in my paper *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque*, Fund. Math. 19, 1932, 149–183, [7].

any set consisting of a single point is closed. A set $U \subset R$ is called *open*, if $R - U$ is closed.

A *covering* $\mathfrak{U}$ of the space R is a finite set of open subsets $\neq 0$ of R whose sum is the whole R. A covering is a complex by virtue of the following definition: if $U_0, U_1, \ldots, U_n$ are different vertices (= elements) of $\mathfrak{U}$, then $(U_0, U_1, \ldots, U_n)$ is a $\mathfrak{U}$-simplex if and only if $\prod_0^n U_i \neq 0$.

If $S \subset R$ and if $\mathfrak{U}$ is a covering of R, then $\mathfrak{U}(S)$ will be the subcomplex of $\mathfrak{U}$ defined as follows: a $\mathfrak{U}$-simplex $(U_0, U_1, \ldots, U_n)$ belongs to $\mathfrak{U}(S)$ if and only if $S \prod_0^n U_i \neq 0$. This definition is useful essentially only for closed subsets S of R, because we have always $\mathfrak{U}(S) = \mathfrak{U}(\bar{S})$ (the bar always denotes the closure). If $S = \bar{S} \subset T = \bar{T} \subset R$ and if $C^n(\mathfrak{U})$ is an $(n, \mathfrak{U})$-chain, then we shall write $C^n(\mathfrak{U}) \subset S$ instead of $C^n(\mathfrak{U}) \subset \subset \mathfrak{U}(S)$; we shall say that $C^n(\mathfrak{U})$ is an $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod S in T if $C^n(\mathfrak{U})$ is an $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod $\mathfrak{U}(S)$ in $\mathfrak{U}(T)$ and in a similar way we interpret a homology $C^n(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod S in T. If $S = 0$, we speak of *absolute cycles*; if $T = R$, we leave out the words "in T".

Now let $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{V}$ be two coverings (of the space R; we shall consider only coverings of R). We say that $\mathfrak{V}$ is a *refinement* of $\mathfrak{U}$, if it is possible to attach to each vertex V of the covering $\mathfrak{V}$ a vertex $U = \pi V$ of the covering $\mathfrak{U}$ such that $V \subset U$. The operation π is called *projection* (of $\mathfrak{V}$ into $\mathfrak{U}$); in general, there exist many such projections.

If $(V_0, V_1, \ldots, V_n) = \tau_n$ is an $(n, \mathfrak{U})$-simplex, there are two possibilities; either the $\pi V_0, \pi V_1, \ldots, \pi V_n$ are not all different from each other and we put $\pi\tau_n = 0$; or they are, and then $(\pi V_0, \pi V_1, \ldots, \pi V_n)$ is an $(n, \mathfrak{U})$-simplex σ_n and we write $\pi\tau_n = \sigma_n$. This operation of projecting a simplex is to be understood in such a sense that if τ_n is oriented, then $\pi\tau_n$ also has a definite orientation (obviously describable).

Let π_1 and π_2 be two projections of $\mathfrak{V}$ into $\mathfrak{U}$ and let $C^n(\mathfrak{V})$ be an $(n, \mathfrak{V})$-cycle mod S in T. Then $\pi_1 C^n(\mathfrak{V})$ and $\pi_2 C^n(\mathfrak{V})$ are two $(n, \mathfrak{U})$-cycles mod S in T, homologous to each other mod S in T. Hence, although the projection is not determined without ambiguity, it becomes so if applied to cycles of a definite type (mod S in T) provided that we identify cycles which are homologous to each other (again mod S in T).

We retain the notation $S = \bar{S} \subset T = \bar{T} \subset R$. An (n, R)-cycle mod S in T is a function C^n attaching to each covering $\mathfrak{U}$ of R (as $\mathfrak{U}$-coordinate of C^n) a definite $(n, \mathfrak{U})$-cycle $C^n(\mathfrak{U})$ mod S in T, but supposing that the following condition be verified: If $\mathfrak{V}$ is a refinement of $\mathfrak{U}$, then $\pi\, C^n(\mathfrak{V}) \sim C^n(\mathfrak{U})$ mod S in T (of course π is a projection of $\mathfrak{V}$ into $\mathfrak{U}$). The definition of a sum $C_1^n + C_2^n$ of two (n, R)-cycles and of the product rC^n $(r \in \mathfrak{R})$ is obvious. $C^n \sim 0$ signifies of course $C^n(\mathfrak{U}) \sim 0$ for each covering $\mathfrak{U}$.

Although our fundamental assumptions are extremely general (at the present stage of the game, it is not very essential that R is a topological space), we have an important and by no means trivial theorem. It is convenient to start with a definition: A *linear family* $\Lambda^n(\mathfrak{U})$ of $(n, \mathfrak{U})$-cycles mod S in T is a non empty family of such cycles having the following property: if $C_1^n(\mathfrak{U}) \in \Lambda^n(\mathfrak{U})$, $C_2^n(\mathfrak{U}) \in \Lambda^n(\mathfrak{U})$, $r_1 \in \mathfrak{R}$, $r_2 \in \mathfrak{R}$,

$r_1 + r_2 = 1$, $C^n(\mathfrak{U}) \sim r_1 C_1^n(\mathfrak{U}) + r_2 C_2^n(\mathfrak{U})$ then $C^n(\mathfrak{U}) \in \Lambda^n(\mathfrak{U})$. Now we can state the following *fundamental existence theorem*:

Let there be given, for each covering $\mathfrak{U}$, *a linear family* $\Lambda^n(\mathfrak{U})$ *of* $(n, \mathfrak{U})$*-cycles mod S in T such that, if* $\mathfrak{V}$ *is a refinement of* $\mathfrak{U}$, $\pi \Lambda^n(\mathfrak{V}) \subset \Lambda^n(\mathfrak{U})$. *Then there exists an* (n, R)*-cycle* C^n *mod S in T such that* $C^n(\mathfrak{U}) \in \Lambda^n(\mathfrak{U})$ *for every* $\mathfrak{U}$.

The following three lemmas, which we will find very useful, are immediate corollaries of the fundamental existence theorem. Each lemma will be preceded by a quite obvious remark (independent of the existence theorem).

If C^n is an (n, R)-cycle mod S in T and if we set $\Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}) = F\, C^n(\mathfrak{U})$ for every covering $\mathfrak{U}$, then Γ^{n-1} is an absolute $(n-1, R)$-cycle in S, which we shall denote by $F\, C^n$.[2] Evidently $\Gamma^{n-1} \sim 0$ in T. But conversely:

Lemma I. *If* Γ^{n-1} *is an absolute* $(n-1, R)$*-cycle in S, which is* ~ 0 *in T, then there exists an* (n, R)*-cycle* C^n *mod S in T such that* $F\, C^n \sim \Gamma^{n-1}$ *in S.*

If C^n is an (n, R)-cycle mod S in T and if there exists an absolute (n, R)-cycle Γ^n such that $C^n \sim \Gamma^n$ mod S, then $F\, C^n \sim 0$ in S. But conversely:

Lemma II. *If* C^n *is an* (n, R)*-cycle mod S in T such that* $F\, C^n \sim 0$ *in S, then there exists an absolute* (n, R)*-cycle* Γ^n *in T such that* $C^n \sim \Gamma^n$ *mod S.*

If C^n is an (n, R)-cycle mod S, if D^n is an (n, R)-cycle mod S in T and if $C^n \sim D^n$ mod S, then $C^n \sim 0$ mod T. But conversely:

Lemma III. *If* C^n *is an* (n, R)*-cycle mod S such that* $C^n \sim 0$ *mod T, then there exists an* (n, R)*-cycle* D^n *mod S in T such that* $C^n \sim D^n$ *mod S.*

Naturally, very few theorems on homology may be proved without introducing more particular spaces R. We shall, from this point on, suppose that the space R is *normal*. This signifies: If S_1 and S_2 are two closed sets such that $S_1 S_2 = 0$, then there exists two open sets G_1 and G_2 such that $S_1 \subset G_1$, $S_2 \subset G_2$, $G_1 G_2 = 0$. In a normal space R, the following lemmas IV–VI are true. (The importance of lemma IV is immediately obvious.)

If $S_1 \subset R$, $S_2 \subset R$, then $\mathfrak{U}(S_1 S_2) \subset \mathfrak{U}(S_1) \,.\, \mathfrak{U}(S_2)$ but in general $\mathfrak{U}(S_1 S_2) \neq \mathfrak{U}(S_1) \,.\, \mathfrak{U}(S_2)$. Therefore, $C^n(\mathfrak{U}) \subset S_1$, $C^n(\mathfrak{U}) \subset S_2$ does not imply $C^n(\mathfrak{U}) \subset S_1 S_2$. But still:

Lemma IV. *Given a covering* $\mathfrak{U}$ *and given the closed sets* S_1 *and* S_2 *there exists a refinement* $\mathfrak{V}$ *and a projection* π *such that* $C^n(\mathfrak{V}) \subset S_1$, $C^n(\mathfrak{V}) \subset S_2$ *implies* $\pi\, C^n(\mathfrak{V}) \subset S_1 S_2$.

In close connection with this is the following

Lemma V. *Given* $S = \bar{S}$ *and a covering* $\mathfrak{U}$, *there exist an open set* $G \supset S$ *and a refinement* $\mathfrak{V}$ *such that* $C^n(\mathfrak{V}) \subset \bar{G}$ *implies* $C^n(\mathfrak{V}) \subset S$.

[2] The following remark is quite useful: If D^n is another (n, R)-cycle mod S in T, then $C^n \sim D^n$ mod S implies $FC^n \sim FD^n$ in S.

Lemma VI. *If* $S = \bar{S} \subset T = \bar{T} \subset R$, $T - S = \sum P_k$ *with mutually separated* P_k *(in finite number) and if* C^n *is an* (n, R)*-cycle mod* S *in* T, *then there exist* (n, R)*-cycles* C_k^n *mod* $S\bar{P}_k = \bar{P}_k - P_k$ *in* $\bar{P}_k$ *such that* $C^n \sim \sum C_k^n$ *mod* S *in* T.

Given a closed subset S of R, we shall denote by M the family of all absolute $(n-1, R)$-cycles Γ^{n-1} in S that are ~ 0 in R, each such Γ^{n-1} being regarded as equal to zero if it is ~ 0 in S.[3] M is a modulus; by this we mean that it is an additive abelian group having multipliers (operators) $r \in \mathfrak{R}$ (each of which determines an automorphism of M). Since $\mathfrak{R}$ is a field, M always possesses an independent basis; the number of the elements of a basis (which is the same for all bases) will be called the *rank* of M.

If R is an n-manifold (in the classical sense), the following theorem is well known: *If* $S = \bar{S} \subset R \neq S$, *then the number* p *of components of* $R - S$ *is* $= g + 1$, g *being the rank of the modulus* M. The statement $p = g + 1$ may be decomposed into two halves: $p \leqq g + 1$ and $p \geqq g + 1$. It is remarkable that the first half may be proved in a surprising general case:

Theorem I. *Let there exist absolute* (n, R)*-cycles* Ω_i^n $(1 \leqq i \leqq m)$ *having the following property: If* T_1 *and* T_2 *are two closed sets such that* $T_1 \neq R \neq T_2$ *and if* Δ_1^n *is an absolute* (n, R)*-cycle in* T_1 *and similarly* Δ_2^n *for* T_2, *then the homology* $\sum_1^m r_i \Omega_i^n \sim \Delta_1^n + \Delta_2^n$ *implies* $r_1 = \ldots = r_m = 0$. *Let* $S = \bar{S} \subset R$. *If* $R - S$ *has at least* $p + 1$ *components, then the rank of the modulus* M *is* $\geqq pm$.

Proof. We have $R - S = \sum_0^p P_k$ with separated $P_k \neq 0$. By lemma VI, there exist (n, R)-cycles C_{ik}^n mod $S\bar{P}_k$ in $\bar{P}_k$ $(1 \leqq i \leqq m, 0 \leqq k \leqq p)$ such that $\Omega_i^n \sim \sum_0^p C_{ik}^n$ mod S and, therefore $\Omega_i^n \sim C_{ik}^n$ mod $(R - P_k)$. Let $\Gamma_{ik}^{n-1} = F\, C_{ik}^n$ (here and in what follows k runs over the values $1, 2, \ldots, p$ only, $k = 0$ being left out). Evidently $\Gamma_{ik}^{n-1} \in M$. Let $\sum r_{ik} \Gamma_{ik}^{n-1} \sim 0$ in S. Precisely, we have to prove that all $r_{ik} = 0$. Let us assume that, on the contrary, $r_{11} \neq 0$. Now $\sum r_{ik} C_{ik}^n$ is an (n, R)-cycle mod S in $R - P_0$ and $F \sum r_{ik} C_{ik}^n \sim 0$ in S. By lemma II, it follows that there exists an absolute (n, R)-cycle Δ_0^n in $R - P_0$ such that $\sum r_{ik} C_{ik}^n \sim \Delta_0^n$ mod S. If $k \geqq 2$, then $C_{ik}^n \subset R - P_1$; therefore $\sum r_{ik} C_{ik}^n \sim \sum r_{i1} C_{i1}^n$ mod $(R - P_1)$. Since $S \subset R - P_1$, we have $\sum r_{i1} C_{i1}^n \sim \Delta_0^n$ mod $(R - P_1)$. But $C_{i1}^n \sim \Omega_i^n$ mod $(R - P_1)$. Therefore $\sum r_{i1} \Omega_1^n - \Delta_0^n \sim 0$ mod $(R - P_1)$. By lemma III it follows that there exists an absolute (n, R)-cycle $\Delta_1^n \subset R - P_1$ such that $\sum r_{i1} \Omega_i^n \sim \Delta_0^n + \Delta_1^n$. Since $\Delta_0^n \subset R - P_0 \neq R$, $\Delta_1^n \subset R - P_1 \neq R$, we have $r_{i1} = 0$, in particular $r_{11} = 0$, which is a contradiction.

Corollary. Let R be a compact subset of the euclidean E_{n+1} and let there exist $m + 1$ complementary domains of R (rel. E_{n+1}) having the whole R as their boundary. Let S be a closed subset of R and let g be the $(n-1)^{\text{th}}$ Betti number of S. Then the set $R - S$ has at most $[g/m] + 1$ components.

[3] n is a given integer; later, n will be the dimension of R.

This corollary was given by Wilder, but (in the case $m \geqq 2$) with g instead of $[g/m] + 1$, which is weaker except when $g \leqq 1$ or $g = m = 2$.

Now we shall assume that R has the following two properties:

(1) *R is bicompact*, i.e. if any family Φ of open sets covers R, then a finite subfamily of Φ covers R.

(2) *dim $R = n$*. That signifies: (i) every covering $\mathfrak{U}$ has a refinement $\mathfrak{B}$ such that $\dim \mathfrak{B} \leqq n$ ($\dim \mathfrak{B}$ being the largest dimension of a $\mathfrak{B}$ simplex), (ii) not evevry covering $\mathfrak{U}$ has a refinement $\mathfrak{B}$ such that $\dim \mathfrak{B} < n$.

These assumptions imply the following statement: If C^n is an (n, R)-cycle mod S, then there exists a uniquely determined minimal closed $T \supset S$ such that $C^n \sim 0 \bmod T$. The existence of T is a consequence of (1), the uniqueness follows from (2). We shall call T the *carrier* of the cycle C^n and we shall apply it in the following form: If $C^n \sim$ $\sim 0 \bmod T_0 = \bar{T}_0$, then the set T_0 must contain the carrier T.

The space R will be called an *n-pseudomanifold*,[4] if it has the following properties: (1) *R is a bicompact normal space.* (2) *dim $R = n$ $(= 1, 2, 3, \ldots)$.* (3) *There exists some absolute (n, R)-cycle Ω^n which is not ~ 0.* (4) *If $S = \bar{S} \subset R \neq S$, and if Δ^n is an absolute (n, R)-cycle in S, then $\Delta^n \sim 0$.* (5) *Given a point $a \in R$ and a neighborhood*[5] *U of a, there exists a neighborhood $V \subset U$ of a having the following property: If C^n is any (n, R)-cycle mod $(R - U)$, then there exists an absolute (n, R)-cycle Ω^n such that $C^n \sim \Omega^n \bmod (R - V)$.*

Everywhere in the sequel, R is a given pseudomanifold and S is a given closed subset of R.

Theorem II. *R is a locally connected continuum.*

Proof. That R is a continuum, is quite trivial.[6] U being a given neighborhood of a point $a \in R$, let V be a smaller neighborhood of a as in property (5) in the definition of an n-pseudomanifold. It is sufficient to prove that the whole set V is a part of one quasicomponent of U. Let us assume the contrary. Then we have $U = P + Q$ with separate summands such that $PV \neq 0 \neq QV$. Let Ω^n be an absolute (n, R)-cycle which is not ~ 0. Since Ω^n may be regarded as an (n, R)-cycle mod $(R - U)$, by lemma VI there exist two (n, R)-cycles: C^n mod $(\bar{P} - U)$ in $\bar{P}$ and D^n mod $(\bar{Q} - U)$ in $\bar{Q}$ such that $\Omega^n \sim C^n + D^n \bmod (R - U)$. By property (5) of a pseudomanifold, there exists an absolute (n, R)-cycle Ω_0^n such that $C^n \sim \Omega_0^n \bmod (R - V)$. Since $C^n \subset \bar{P}$, we have $\Omega_0^n \sim 0 \bmod ((R - V) + \bar{P}) \subset R - QV$. By lemma III it follows that there exists an absolute (n, R)-cycle Δ^n in $R - QV$ such that $\Omega_0^n \sim \Delta^n$. Since $R -$ $- QV \neq R$, $\Delta^n \sim 0$ by property (4) of a pseudomanifold. It follows that $\Omega_0^n \sim 0$ and, therefore, $C^n \sim 0 \bmod (R - V)$. Similarly we have $D^n \sim 0 \bmod (R - V)$. Since

[4] A more proper name would be an *orientable pseudomanifold*, but I shall not give here the more general definition.

[5] All my neighborhoods are open.

[6] As a matter of fact, a far more general property of R is a corollary of theorem I.

$\Omega^n \sim C^n + D^n \bmod (R - U) \subset R - V$, we have $\Omega^n \sim 0 \bmod (R - V) \neq R$. By lemma III and by property (4) of a pseudomanifold, this implies that $\Omega^n \sim 0$ which is a contradiction.

Lemma VII. *Let T be the carrier of the (n, R)-cycle C^n mod S. Then the set $T - S$ is open.*

Proof. Let there exist, on the contrary, a point

$$a \in (T - S) \, . \, \overline{R - T} \, .$$

Since $U = R - S$ is a neighborhood of a, we may determine a smaller neighborhood V of a by property (5) of a pseudomanifold. Then there exists an absolute (n, R)-cycle Δ^n such that $C^n \sim \Delta^n \bmod (R - V)$. Since $C^n \sim 0 \bmod T$, we have $\Delta^n \sim 0 \bmod ((R - V) + T)$. But $(R - V) + T$ is closed and $\neq R$, so that $\Delta^n \sim 0$ by lemma II and property (4) of a pseudomanifold. It follows that $C^n \sim 0 \bmod (R - V)$. Since T is the carrier of C^n, we must have $T \subset R - V$, which is evidently wrong.

Now $T - S$ is open, therefore open in $R - S$, and $T - S$ is also closed in $R - S$. Therefore:

Lemma VIII. *The carrier T of an (n, R)-cycle C^n mod S is the sum of S and (some of the) components of $R - S$.*

Lemma IX. *Let P be a component of $R - S$. Let C^n be an (n, R)-cycle mod S. Then there exists an absolute (n, R)-cycle Ω^n such that $C^n \sim \Omega^n \bmod (R - P)$.*

Proof. Choose a point $a \in P$. Since R is locally connected and S is closed, $P = U$ is open and, therefore, it is a neighborhood of a. Let V be a smaller neighborhood determined by property (5) of a pseudomanifold. It follows that there exists an absolute (n, R)-cycle Ω^n such that $C^n \sim \Omega^n \bmod (R - V)$. Therefore the carrier T of $C^n - \Omega^n$ is contained in $R - V$. By lemma VIII, it follows that $T \subset R - P$. But $C^n \sim \Omega^n \bmod T$ by definition of T. Since $T \subset R - P$, we have $C^n \sim \Omega^n \bmod (R - P)$.

Now let us recall that M was the modulus of all absolute $(n - 1, R)$-cycles Γ^{n-1} in S such that $\Gamma^{n-1} \sim 0$ in R, such a cycle Γ^{n-1} being regarded as zero if it is ~ 0 in S.

We shall consider submoduli N of the modulus M (called moduli briefly). If N is such a modulus then $\overline{N}$ (the "closure" of N) is, by definition, the family of all those $\Gamma^{n-1} \in M$ having the following property: Given any covering $\mathfrak{U}$, there exists a $\Delta^{n-1} \in N$ (depending on $\mathfrak{U}$) such that

$$\Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}) \sim \Delta^{n-1}(\mathfrak{U}) \text{ in } S \, .$$

Evidently $\overline{N}$ is a modulus ($N \subset \overline{N} \subset M$).

Everywhere in the sequel, Ψ denotes the family of all components of $R - S$. If $\Phi \subset \Psi$, then $H(\Phi)$ will denote the point set which is the sum of all the sets belonging to the family Φ. E.g. $H(0) = 0$, $H(\Psi) = R - S$ and generally $H(\Phi) + H(\Psi - \Phi) = R - S$, $H(\Phi) \, . \, H(\Psi - \Phi) = 0$.

Everywhere in the sequel, if $\Phi \subset \Psi$, $M(\Phi)$ is the set of all those $\Gamma^{n-1} \in M$, for which $\Gamma^{n-1} \sim 0$ in $R - H(\Phi)$. So $M(0) = M$, $M(\Psi) = 0$. In general, $\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \Psi$ implies $M(\Phi_1) \supset M(\Phi_2)$.

If $\Phi \subset \Psi$, then $M(\Phi)$ is a modulus and

$$\overline{M(\Phi)} = M(\Phi) .$$

From this point on, we shall assume that the n^{th} Betti number of R (= the rank of the modulus of all the (n, R)-cycles) is finite. We shall denote it by m and shall choose, once for all, a fixed Betti basis Ω_i^n $(1 \leqq i \leqq m)$ for the absolute (n, R)-cycles. By property (3) of a pseudomanifold, $m \geqq 0$. We shall see later that in the case $n = 1$ we must have $m = 1$. But for $n > 1$, every value of m is actually possible. Indeed, Wilder gave an example in the euclidean E_{n+1}, of a compact set R such that R is the boundary of all components of $E_{n+1} - R$, the number $m + 1 = 2, 3, \ldots$ or $m = \infty$ of those components being given, and each such component being uniformly locally connected. It is easy to prove (as a corollary of our following theorems) that such an R is an n-pseudomanifold, for which the number m has the signification given above.

Now we have the following general theorem regarding the separation of a pseudomanifold by an arbitrary closed subset:

Theorem III. *Let $\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \Psi$. Let p be the number of the components forming the family $\Phi_2 - \Phi_1$. Let g be the rank of the modulus*

$$M(\Phi_1) \ mod\ M(\Phi_2)$$

(= the max. number of cycles $\Gamma_i^{n-1} \in M(\Phi_1)$ such that $\sum r_i \Gamma_i^{n-1} \in M(\Phi_2)$ implies $r_i = 0$). Let

$$c = 1 \ \text{if both} \quad p > 0 \ \text{and} \ \Phi_1 = 0 ,$$

$$c = 0 \ \text{if either} \ p = 0 \ \text{or} \quad \Phi_1 \neq 0 .$$

Then

$$g = m(p - c) .$$

Proof. I. Let us assume that $g < m(p - c)$, so that g is finite. Let P_k $(0 \leqq k < p)$ be all the components of $R - S$ belonging to the family $\Phi_2 - \Phi_1$. By lemma VI, there exist (n, R)-cycles C_{ik}^n mod $S\overline{P}_k$ in $\overline{P}_k$ such that $C_{ik}^n \sim \Omega_i^n \bmod (R - P_k)$. Let $\Gamma_{ik}^{n-1} = F\, C_{ik}^n$ so that evidently $\Gamma_{ik}^{n-1} \in M(\Phi_1)$. Since $g < m(p - c)$, there must exist numbers r_{ik} which are not all null and such that $\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=c}^{p-1} r_{ik} \Gamma_{ik}^{n-1} \sim 0$ in $R -$ $- H(\Phi_2)$. By lemma I it follows that there exists an (n, R)-cycle D^n mod S in $R -$ $- H(\Phi_2)$ such that

$$F\, D^n \sim \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=c}^{p-1} r_{ik} \Gamma_{ik}^{n-1} \ \text{in} \ S .$$

It follows that $D^n - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=c}^{p-1} r_{ik} C^n_{ik}$ is an (n, R)-cycle mod S in $\sum_{k=c}^{p-1} \bar{P}_k + R - H(\Phi_2)$, whose boundary is ~ 0 in S. By lemma II, it follows that there exists an absolute (n, R)-cycle $\Delta^n \subset \sum_{k=c}^{p-1} \bar{P}_k + R - H(\Phi_2)$ such that $D^n - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=c}^{p-1} r_{ik} C^n_{ik} \sim \Delta^n \bmod S$. Now, if $c = 1$, we have $\sum_{k=c}^{p-1} \bar{P}_k + R - H(\Phi_2) \subset R - P_0 \neq R$, and if $c = 0$, we have $\Phi_1 \neq 0$ and $\sum_{k=c}^{p-1} \bar{P}_k + R - H(\Phi_2) \subset R - H(\Phi_1) \neq R$; by property (4) in the definition of a pseudomanifold, it follows that $\Delta^n \sim 0$ and, therefore, $D^n \sim \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=c}^{p-1} r_{ik} C^n_{ik}$ mod S. Let us choose the value of k $(0 \leqq k < p)$. We have $D^n \subset R - H(\Phi_2) \subset R - P_k$, $C^n_{ik} \sim \Omega^n_i \bmod (R - P_k)$, $S \subset R - P_k$, $D^n \sim \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=c}^{p-1} r_{ik} C^n_{ik} \bmod S$. Therefore $\sum_{i=1}^{m} r_{ik} \Omega^n_i \sim 0 \bmod (R - P_k)$. By lemma III and by property (4) of a pseudomanifold, this implies $\sum_{i=1}^{m} r_{ik} \Omega^n_i \sim 0$ and, therefore, $r_{ik} = 0$, which is a contradiction.

II. Let $g > m(p - c)$, so that p is finite. There exist cycles $\Gamma^{n-1}_\lambda \in M(\Phi_1)$ $(0 \leqq \lambda \leqq m(p - c))$ such that

$$\sum s_\lambda \Gamma^{n-1}_\lambda \in M(\Phi_2) \quad \text{implies} \quad s_\lambda = 0 .$$

Let P_k $(0 \leqq k \leqq p - 1)$ be all components forming the family $\Phi_2 - \Phi_1$. By lemma I, there exist (n, R)-cycles C^n_λ mod S in $R - H(\Phi_1)$ such that $F\, C^n_\lambda \sim \Gamma^{n-1}_\lambda$ in S. By lemma IX, there exist numbers $r_{ik\lambda} \in \mathfrak{R}$ such that

$$C^n_\lambda \sim \sum_{i=1}^{m} r_{ik\lambda} \Omega^n_i \bmod (R - P_k) .$$

Let us consider the system of linear equations

$$\sum_{\lambda=0}^{m(p-c)} r_{ik\lambda} s_\lambda = t_i \qquad (1 \leqq i \leqq m, 0 \leqq k \leqq p - 1)$$

where $t_1 = \ldots = t_m = 0$ in the case $c = 0$. The number of the equations of our system is less than the number of unknowns; $\mathfrak{R}$ being a field, there follows the existence of a solution s_λ, t_i such that not every s_λ is $=0$. Evidently

$$\sum s_\lambda C^n_\lambda \sim \sum t_i \Omega^n_i \bmod (R - P_k) ;$$

therefore the carrier T of $\sum s_\lambda C^n_\lambda - \sum t_i \Omega^n_i$ satisfies the inclusion $T \subset R - P_k$, whence $T \subset R - \sum_{0}^{p-1} P_k = R - H(\Phi_2 - \Phi_1)$. In the case $c = 0$ we have $t_i = 0$, $C^n_\lambda \subset R - H(\Phi_1)$, whence $T \subset R - H(\Phi_1)$. The same thing is true if $c = 1$, because this implies $H(\Phi_1) = 0$. Therefore

$$T \subset R - [H(\Phi_2 - \Phi_1) + H(\Phi_1)] = R - H(\Phi_2),$$

whence

$$\sum s_\lambda C_\lambda^n \sim \sum t_i \Omega_i^n \bmod (R - H(\Phi_2))$$

and, therefore

$$\sum s_\lambda \Gamma_\lambda^{n-1} \sim \sum s_\lambda F\, C_\lambda^n \sim 0 \text{ in } R - H(\Phi_2),$$

which implies the contradiction $s_\lambda = 0$.

Now we shall determine the modulus $M(\Phi)$ in a very general case.

Theorem IV. *Let Ξ be a family of closed subsets of S. Let Φ be the family of all those components P of $R - S$ whose boundary $\bar{P} - P$ does not belong to the family Ξ. Let us suppose that Ξ has the following property: for any set $B \in \Xi$ the set $H(\Phi)$ is a subset of a connected subset of $R - B$. Let N be the submodulus of M generated by all $\Gamma^{n-1} \in M$ such that $\Gamma^{n-1} \subset B$, B being some set of the family Ξ. Then we have $M(\Phi) = \bar{N}$.*

Proof. I. Let $\Gamma^{n-1} \subset B \in \Xi$, $\Gamma^{n-1} \sim 0$ in R. By lemma I, there exists an (n, R)-cycle $C^n \bmod B$ such that $F\, C^n \sim \Gamma^{n-1}$ in B. According to the property assumed of Ξ, there exists a component Q of $R - B$ such that $H(\Phi) \subset Q$. By lemma IX, there exist numbers r_i such that $C^n \sim \sum r_i \Omega_i^n \bmod (R - Q)$, so that, by lemma III, there exists an (n, R)-cycle $D^n \bmod B$ in $R - Q$ such that $C^n - \sum r_i \Omega_i^n \sim D^n \bmod B$, whence $F\, C^n \sim FD^n$ in B and, therefore, $\Gamma^{n-1} \sim FD^n$ in B. But $D^n \subset R - Q$, so that

$$\Gamma^{n-1} \sim 0 \text{ in } R - Q \subset R - H(\Phi),$$

i. e., $\Gamma^{n-1} \in M(\Phi)$. It follows that $N \subset M(\Phi)$. Since $M(\Phi) = \overline{M(\Phi)}$, we must have $\bar{N} \subset M(\Phi)$.

II. It remains to be proved that $M(\Phi) \subset \bar{N}$. Let $\Gamma^{n-1} \in M(\Phi)$ and let $\mathfrak{U}$ be a given covering. We have to prove the existence of a $\Delta^{n-1} \in N$ such that $\Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}) \sim \Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$ in S. By lemma V, there exists a neighborhood G of S and a refinement $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{U}$ such that, for any $(n, \mathfrak{B})$-chain $E^n(\mathfrak{B})$, $E^n(\mathfrak{B}) \subset \bar{G}$ implies $E^n(\mathfrak{B}) \subset S$. Since $\Gamma^{n-1} \in M(\Phi)$, by lemma I there exists an (n, R)-cycle $C^n \bmod S$ in $R - H(\Phi)$ such that $F\, C^n \sim \Gamma^{n-1}$ in S. Since $R - G$ is bicompact and R is locally connected, $R - S$ has only a finite number of components P such that both $P \in \psi - \Phi$ and $P - G \neq 0$. Let P_k $(1 \leqq k \leqq p)$ be all those components and let

$$Q = H(\Psi - \Phi) - \sum P_k \quad \text{whence} \quad Q \subset G.$$

Since $(R - H(\Phi)) - S = \sum P_k + Q$ with separate summands, by lemma VI there exist (n, R)-cycles $D^n \bmod (S \,.\, \sum \bar{P}_k)$ in $\sum \bar{P}_k$ and $E^n \bmod S\bar{Q}$ in $\bar{Q}$ such that $C^n \sim D^n + E^n \bmod S$, whence $C^n \sim D^n \bmod \bar{Q}$, wherefore $FD^n \sim FC^n \sim \Gamma^{n-1}$ in $\bar{Q} \subset \bar{G}$; by definition of G and $\mathfrak{B}$ it follows that $FD^n(\mathfrak{B}) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{B})$ in S, whence

$FD^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ in S, since $\mathfrak{V}$ is a refinement of $\mathfrak{U}$ and both FD^n and Γ^{n-1} are absolute $(n-1, R)$-cycles in S. Since $D^n \subset \sum \bar{P}_k$ and $\sum \bar{P}_k - S = \sum P_k$ with separate summands in the righthand side, lemma VI implies the existence of (n, R)-cycles D_k^n mod $(\bar{P}_k - P_k)$ in $\bar{P}_k$ such that $D^n \sim \sum D_k^n$ mod S, whence $FD^n \sim \sum FD_k^n$ in S. Since $P_k \in \Psi - \Phi$, we have $\bar{P}_k - P_k \in \Xi$. Since D_k^n is a cycle mod $(\bar{P}_k - P_k)$ in $\bar{P}_k$, it follows that $FD_k^n \in N$ and, therefore $\Delta^{n-1} = \sum FD_k^n \in N$. But we had $FD^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ in S and $FD^n \sim \Delta^{n-1}$ in S, which implies that $\Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}) \sim \Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$ in S.

The significance of theorem IV will appear clearly if we consider some special cases of it, which, still, are very general.

Case I. Let A be a given subset of S. (There would be no loss of generality in assuming A closed.) Let the family Ξ consist of all closed subsets B of S such that A is not a subset of B. The family Φ consists of all components P of $R - S$ whose boundary contains A. It is easy to verify that, given $B \in \Xi$, $H(\Phi)$ is a subset of a connected subset of $R - B$. Therefore, $M(\Phi) = \bar{N}$, where the modulus N is generated by all absolute $(n-1, R)$-cycles $\Gamma^{n-1} \sim 0$ in R, such that $\Gamma^{n-1} \subset B \in \Xi$. Let us introduce the following notations:

(1) g is the rank of M mod $M(\Phi)$,
g^* is the rank of $M(\Phi)$;

(2) $\left.\begin{matrix} p \\ p^* \end{matrix}\right\}$ is the number of components P of $R - S$ such that $A \left\{\begin{matrix} \text{is} \\ \text{is not} \end{matrix}\right.$ a subset of the boundary of P.

We may apply theorem III in two manners, putting first $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = \Phi$ and second $\Phi_1 = \Phi$, $\Phi_2 = \Psi$ and we have the following two statements:

(3) If $p = 0$, then $g = 0$; if $p > 0$, then $g = m(p-1)$.

(4) If either $p^* = 0$ or $p > 0$, then $g^* = mp^*$; if both $p^* > 0$ and $p = 0$, then $g^* = m(p^* - 1)$.

Case II. Let there be given a connected subset A of S (not necessarily closed). Ξ is the family of all those closed subsets of S which do not meet A. Φ is the family of all components of $R - S$ whose boundary meets A. As in case I, it is easy to verify that, given a $B \in \Xi$, the set $H(\Phi)$ is a subset of a connected subset of $R - B$. Therefore, $M(\Phi) = \bar{N}$, where the modulus N is generated by all $\Gamma^{n-1} \in M$ such that $\Gamma^{n-1} \subset B \in \Xi$. Let us introduce again the notation (1), and, instead of (2):

(2′) $\left.\begin{matrix} p \\ p^* \end{matrix}\right\}$ is the number of components P of $R - S$ whose boundary $\left\{\begin{matrix} \text{meets} \\ \text{does not meet} \end{matrix}\right.$ the set A.

Then we have again the statements (3) and (4).

The case II may be generalized as follows. Let there be given a subset A of S and a family $\Gamma \neq 0$ of subsets of A such that: (i) if $C \in \Gamma$ and $C^* \subset C$, then $C^* \in \Gamma$, (ii) if $C \in \Gamma$, then $A - C$ is connected. (In particular A must be connected, since $0 \in \Gamma$.) Ξ will be the family of all $B = \bar{B} \subset S$ such that the set AB belongs to Γ. Φ will be the family of all components of $R - S$ whose boundary meets A in a set not belonging to Γ. If we have (1) and

(2″) $\left.\begin{matrix} p \\ p^* \end{matrix}\right\}$ is the number of components of $R - S$ whose boundary meets A in a set $\left\{\begin{matrix}\text{not belonging} \\ \text{belonging}\end{matrix}\right\}$ to the family Γ.

Then we have again (3) and (4).

It is easy to describe the most general 1-pseudomanifold R. If S consists of two points, then the modulus M evidently has rank $g = 1$. But if $R - S$ has p components, it follows from theorem III that $g = m(p - 1)$. Therefore $m = 1$, as was announced above, and $p = 2$. It follows that R has the property that any two points decompose it in precisely two parts. Therefore, as is well known, R is the sum of two simply ordered continua having only the terminal points in common. If R is separable, it is a circle.

I shall finish with a very quick summary of further results.

If $\{\Phi_i\}$ is an arbitrary collection (finite, countable or uncountable) of subfamilies of Ψ, then $M(\prod \Phi_i) = \overline{\sum M(\Phi_i)}$ where $\sum M(\Phi_i)$ is the minimum modulus containing all $M(\Phi_i)$. If the collection $\{\Phi_i\}$ is finite, then $\overline{\sum M(\Phi_i)} = \sum M(\Phi_i)$.

It is more difficult to describe $M(\sum \Phi_i)$. The result is that $M(\sum \Phi_i)$ may be determined by means of the moduli $M(\Phi_i)$ only if we know, for each couple (i, k) whether $\Phi_i \Phi_k$ is or is not vacuous. In particular we have simply $M(\sum \Phi_i) = \prod M(\Phi_i)$ if always $\Phi_i \,.\, \Phi_k \neq 0$.

My further remarks are here stated only for separable (= metrizable) pseudomanifolds. In theorem III we have $p = \infty$ if and only if $g = \infty$. But we can obtain more precise statements. The simplest case is when p is "weakly infinite", i.e. for every $\varepsilon > 0$ there exists only a finite number of components $P \in \Phi_2 - \Phi_1$ having diameter $> \varepsilon$. The necessary and sufficient condition is that the rank of

$$M(\Phi_1) \bmod M(\Phi_2)$$

be, too, "weakly infinite" in the following sense. Given an $\varepsilon > 0$, the rank of

$$M(\Phi_1) \bmod [M(\Phi_2) + N_\varepsilon]$$

is finite, where N_ε is the modulus generated by all $\Gamma^{n-1} \in M(\Phi_1)$ such that $\Gamma^{n-1} \subset B \subset S$, the diameter of B being less than ε.

Let us suppose that the family Ξ in the theorem IV has the following property: If A_n and A are closed subsets of S such that no A_n belongs to Ξ, and if $\lim A_n = A$ (in Hausdorff's sense), then A does not belong to Ξ. Then (in the notations of theorem IV) we have $N = \overline{N}$, if and only if the following statement is true: If $P_k \in \Psi - \Phi$, $A = \lim P_k$, then $A \in \Xi$. The assumed property of Ξ is true in both cases I and II treated above as illustrations of theorem IV, but not necessarily in the above generalization of case II.

25

ÜBER DIE BETTISCHEN GRUPPEN KOMPAKTER RÄUME

Ergebnisse eines mathematischen Kolloguiums.[1]
Wien 7 (1936), 47–50

R sei ein kompakter Raum, $\mathfrak{G}$ eine Abelsche Gruppe. Ein $(n, \mathfrak{G})$-*Grenzzyklus* in R ist eine Folge $\{\gamma_i\}_1^\infty$ von algebraischen n-Zykeln in R, deren Koeffizienten $\mathfrak{G}$ entnommen sind, und für die es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein m gibt, so dass: (1) für $i > m$ γ_i ein (n, ε)-Zyklus[2] ist; (2) für $i > m$ und $j > m$ γ_i und γ_j ε-homolog[3] in R sind. Zwei $(n, \mathfrak{G})$-Grenzzykeln $\{\gamma_i\}$ und $\{\gamma_i'\}$ sind äquivalent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein m gibt, so daß für $i > m$ γ_i und γ_i' ε-homolog in R sind. Äquivalente $(n, \mathfrak{G})$-Grenzzykeln werden immer identifiziert. Die $(n, \mathfrak{G})$-Grenzzykeln in R bilden eine (additive) Abelsche Gruppe $B_n(R, \mathfrak{G})$, die *volle* n^{te} *Bettische Gruppe* des Raumes R bei Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$.

Γ sei die additive Gruppe der ganzen Zahlen, $\mathfrak{P}$ sei die additive Gruppe der modulo Eins reduzierten reellen Zahlen. In $B_n(R, \mathfrak{P})$ kann man nach Pontrjagin[4] einen Stetigkeitsbegriff einführen, wodurch aus $B_n(R, \mathfrak{P})$ eine hier mit $P_n(R)$ bezeichnete *kompakte* Gruppe entsteht.

Ein algebraischer n-Zyklus γ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{G}$ heisse ein *Torsionszyklus*, wenn $\gamma = g_i\tau_i^5$, wo $g_i \in \mathfrak{G}$, und es eine positive Zahl $m \in \Gamma$ gibt, so dass $m\tau_i$ gleich dem Rande einer $(n + 1)$-Kette mit Koeffizienten aus Γ ist. Ein $(n, \mathfrak{G})$-Grenzzyklus $\{\gamma_i\}$ heisse ein $(n, \mathfrak{G})$-*Torsionsgrenzzyklus*, wenn γ_i für fast alle i ein Torsionszyklus ist. Die $(n, \mathfrak{G})$-Torsionsgrenzzykeln bilden eine Untergruppe $T_n(R, \mathfrak{G})$ von $B_n(R, \mathfrak{G})$, die n^{te} *Torsionsgruppe* des Raumes R bei Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$. In $T_n(R, \Gamma)$ kann

[1] Ein sehr wesentlicher Teil der hier mitgeteilten Sätze wurde etwa gleichzeitig und völlig unabhängig auch von N. E. Steenrod gefunden; s. seine demnächst in den Proc. Nat. Acad. erscheinende Note „On universal homology groups", die ich in Manuskriptform zu lesen Gelegenheit hatte.

[2] D. h. die Durchmesser der Simplexe sind sämtlich $< \varepsilon$.

[3] D. h. es gibt in R eine algebraische $(n + 1, 2)$-Kette (vgl. Anm.[2]) mit Koeffizienten aus $\mathfrak{G}$, deren Rand gleich $\gamma_i - \gamma_j$ ist.

[4] Annals of Math., *35* (1934), S. 909.

[5] Über doppelt vorkommende Indizes wird immer summiert.

man wieder einen Stetigkeitsbegrieff einführen, wodurch aus $T_n(R, \Gamma)$ eine hier mit $Q_n(R)$ bezeichnete *kompakte* Gruppe entsteht.

Die Faktorgruppe in

$$B_n(R, \mathfrak{G})/T_n(R, \mathfrak{G}) = B_n'(R, \mathfrak{G})$$

heisse die *reduzierte n^{te} Bettische Gruppe des Raumes R* bei Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$. Es gelten die Sätze.

I. Die volle n^{te} Bettische Gruppe $B_n(R, \mathfrak{G})$ ist direkte Summe der n^{ten} Torsionsgruppe $T_n(R, \mathfrak{G})$ und einer anderen — natürlich mit der reduzierten n^{ten} Bettischen Gruppe $B_n'(R, \mathfrak{G})$ isomorphen — Untergruppe.

II. Die n^{te} Torsionsgruppe $T_n(R, \mathfrak{G})$ ist durch $\mathfrak{G}$ und $Q_n(R)$ eindeutig bestimmt wie folgt. Nach Pontrjagin[6] kann man die kompakte Gruppe $Q_n(R)$ festlegen durch eine Folge $\{Q_n^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ von Abelschen Gruppen mit je endlich vielen Erzeugenden (gegebenenfalls sogar endlichen Gruppen), wobei für jedes i eine homomorphe Abbildung π_i von $Q_n^{(i+1)}$ auf $Q_n^{(i)}$ vorliegt. Für jedes i sei die Gruppe $Q_n^{(i)}$ durch Erzeugende α_{ih} und definierende Relationen $a_{ihk}\alpha_{ih} = 0$ $(a_{ihk} \in \Gamma)$ festgelegt;sei $\pi_i(\alpha_{i+1,\lambda}) = c_{\lambda h}^{(i)}\alpha_{ih}(c_{\lambda h}^{(i)} \in \Gamma)$. Man bilde die (additive) Gruppe $\mathfrak{Q}_n^{(i)}(\mathfrak{G})$ der Vektoren $g_h X_{ih}$ $(g_h \in \mathfrak{G})$ mit definierenden Relationen $a_{ihk} g X_{ih} = 0$ $(g \in \mathfrak{Q})$. Durch $\pi_i^*(g_\lambda X_{i+1,\lambda}) = c_{h\lambda}^{(i)} X_{ih}$[7] wird $\mathfrak{Q}_n^{(i+1)}(\mathfrak{G})$ auf eine Untergruppe von $\mathfrak{Q}_n^{(i)}(\mathfrak{G})$ homomorph bezogen. Die Folgen $\{v_i\}_1^\infty$ mit $v_i \in \mathfrak{Q}_n^{(i)}(\mathfrak{G})$, $\pi_i^* v_{i+1} = v_i$ bilden eine mit $T_n(R, \mathfrak{G})$ isomorphe Gruppe.

III. Die reduzierte n^{te} Bettische Gruppe $B_n'(R, \mathfrak{G})$ ist durch $\mathfrak{G}$ und $P_n(R)$ eindeutig bestimmt wie folgt. Sei $M_n(R)$ die nach Pontrjagin[6] definierte abzählbare Gruppe der Charaktere der kompakten Gruppe $P_n(R)$. Dei Gruppe $M_n(R)$ sei gegeben durch eine aufsteigende Folge $\{M_n^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ von Untergruppen mit je endlich vielen Erzeugenden. Für jedes i sei die Gruppe $M_n^{(i)}$ durch Erzeugende β_{ih} und definierende Relationen $b_{ihk}\beta_{ih} = 0$ $(b_{ihk} \in \Gamma)$ festgelegt. Da $M_n^{(i)}$ Untergruppe von $M_n^{(i+1)}$ ist, hat man noch Relationen der Form $\beta_{ih} = e_{h\lambda}^{(i)}\beta_{i+1,\lambda}(e_{h\lambda}^{(i)} \in \Gamma)$. Man bilde die (additive) Gruppe $\mathfrak{M}_n^{(i)}(\mathfrak{G})$ der Vektoren $g_h Y_{ih}$, wobei g_h den Relationen $b_{ihk} g_h = 0$ unterworfene Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$ sind. Durch $\varrho_i(g_\lambda Y_{i+1,\lambda}) = e_{h\lambda}^{(i)} g_\lambda Y_{ih}$[7] wird $\mathfrak{M}_n^{(i+1)}(\mathfrak{G})$ auf eine Untergruppe von $\mathfrak{M}_n^{(i)}(\mathfrak{G})$ homomorph bezogen.

Die Folgen $\{w_i\}_1^\infty$ mit $w_i \in \mathfrak{M}_n^{(i)}(\mathfrak{G})$, $\varrho_i(w_{i+1}) = w_i$ bilden eine mit $B_n'(R, \mathfrak{G})$ isomorphe Gruppe.

Ein algebraischer n-Zyklus γ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{G}$ heisse *rein*, wenn $\gamma = g_i \vartheta_i$, wo $g_i \in \mathfrak{G}$ und die ϑ_i algebraische n-Zykeln mit Koeffizienten aus Γ sind. Ein $(n, \mathfrak{G})$-Grenzzyklus $\{\gamma_i\}$ heisse *rein*, wenn die algebraischen n-Zykeln γ_i für fast alle i rein sind. Die reinen $(n, \mathfrak{G})$-Grenzzykeln bilden eine Untergruppe $C_n(R, \mathfrak{G})$ von $B_n(R, \mathfrak{G})$ die *reine n^{te} Bettische Gruppe* von R bei Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$. Die Torsionsgruppe

[6] Annals of Math., *35*, 361—388 (1934).

[7] Über i wird hier nicht summiert.

$T_n(R, \mathfrak{G})$ ist eine Untergruppe von $C_n(R, \mathfrak{G})$. Die Faktorgruppe

$$C_n(R, \mathfrak{G})/T_n(R, \mathfrak{G}) = C'_n(R, \mathfrak{G})$$

heiße die *reduzierte reine* n^{te} *Bettische Gruppe* von R bei Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$.

Als Untergruppe der *kompakten* Gruppe $B_n(R, \mathfrak{P}) = P_n(R)$ ist $C_n(R, \mathfrak{P})$ in $P_n(R)$ abgeschlossen und folglich kompakt. In diesem Sinne (als kompakte Gruppe) wollen wir $C_n(R, \mathfrak{P})$ mit $Z_n(R)$ bezeichnen. Auch Faktorgruppe $P_n(R)/Z_n(R)$ ist kompakt.

IV. Die Gruppe $Z_n(R)$ besteht aus denjenigen Elementen x der Gruppe $P_n(R)$, für die $\chi(x) = 0$ bei jedem Charakter *endlicher Ordnung* der kompakten Gruppe $P_n(R)$.

V. Die Gruppe $Q_n(R)$ ist mit der Faktorgruppe $P_{n+1}(R)/Z_{n+1}(R)$ stetig isomorph.

VI. Die reine n^{te} Bettische Gruppe $C_n(R, \mathfrak{G})$ ist direkte Summe der n^{ten} Torsionsgruppe $T_n(R, \mathfrak{G})$ und einer anderen – natürlich mit der reduzierten reinen n^{ten} Bettischen Gruppe $C'_n(R, \mathfrak{G})$ isomorphen – Untergruppe.

VII. Die reduzierte reine n^{te} Bettische Gruppe $C'_n(R, \mathfrak{G})$ ist durch $\mathfrak{G}$ und $Z_n(R)$ eindeutig bestimmt. Man braucht nur in der im Satz III beschriebenen Konstruktion die Gruppe $P_n(R)$ durch $Z_n(R)$ zu ersetzen.

VIII. Die Faktorgruppe

$$B_n(R, \mathfrak{G})/C_n(R, \mathfrak{G}) = B'_n(R, \mathfrak{G})/C'_n(R, \mathfrak{G})$$

ist durch $\mathfrak{G}$ und $Q_{n-1}(R)$ eindeutig bestimmt. Man braucht wieder nur in der im Satz III beschriebenen Konstruktion die Gruppe $P_n(R)$ durch $Q_{n-1}(R)$ zu ersetzen.

Der kompakte Raum R heisse *n-normal*, wenn es zu jedem $\eta > 0$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass, wenn γ ein algebraischer (n, ε)-Zyklus[2] in R mit beliebigem Koeffizientenbereiche $\mathfrak{G}$ ist, ein $(n, \mathfrak{G})$-Grenzzyklus $\{\gamma_i\}$ in R existiert, so dass γ_i η-homolog γ für fast alle i ist. Ähnlich werden *n-seminormale* und *n-quasinormale* kompakte Räume eingeführt; man erhält die Definition, indem man γ und $\{\gamma_i\}$ auf *reine* Zykeln bzw. auf Torsionszykeln einschränkt. Ist der Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$ vorgegeben, so spreche man von $(n, \mathfrak{G})$-*Normalität* usw.

IX. Jeder kompakte Raum ist n-quasinormal.

X. Ein (n, Γ)-seminormaler kompakter Raum ist n-seminormal.

XI. Damit der kompakte Raum R n-seminormal sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Charaktergruppe der kompakten Gruppe $Z_n(R)$ direkte Summe von höchstens abzählbar vielen zyklischen Gruppen sei.

Ist p eine Primzahl, so sei Δ_p die direkte Summe von abzählbar vielen zyklischen Gruppen φ_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, wobei φ_i die endliche zyklische Gruppe der Ordnung p^i ist. Δ_p ist also eine abzählbare Abelsche Gruppe.

XII. Wenn ein kompakter R gleichzeitig (n, Γ)-seminormal[8] und (n, Δ_p)-normal für jede Primzahl p ist, so ist R n-normal.

XIII. Damit der kompakte Raum R n-normal sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Charaktergruppe der kompakten Gruppe $P_n(R)$ direkte Summe von höchstens abzählbar vielen zyklischen Gruppen sei.

Wir nennen eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ einer Abelschen Gruppe *speziell*, wenn: (1) $\tau(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{H}$ bei jeder homomorphen Abbildung τ der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, (2) $\mathfrak{H}$ immer abgeschlossen in $\mathfrak{G}$ ist, wenn man irgend einen Stetigkeitsbegriff in $\mathfrak{G}$ einführt, der $\mathfrak{G}$ zu einer kompakten Gruppe macht.

XIV. Jeder kompakte Raum R ist $(n, \mathfrak{G})$-normal, wenn die Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ dem folgenden Teilerkettensatz genügt: jede absteigende Folge von speziellen Untergruppen bricht im Endlichen ab. Dem Teilerkettensatz genügen z. B. alle endlichen Abelschen Gruppen, dann die additive Gruppe der rationalen Zahlen und die Gruppe $\mathfrak{P}$, dagegen nicht z. B. die Gruppe Γ und die Gruppen Δ_p.

[8] Oder (n, Γ)-normal; die beiden Begriffe sind ja äquivalent.

26

MULTIPLICATION ON A COMPLEX

Annals of Mathematics
37 (1936), 681–697

In their communications at the First International Topological Conference (Moscow, September 1935), J. W. Alexander and A. Kolmogoroff introduced the notion of a dual cycle[1] and defined a product of a dual p-cycle and a dual q-cycle, this product being a dual $(p + q)$-cycle. A different multiplication of the same sort is considered in this paper. It may be shown that the Alexander-Kolmogoroff product, augmented by the dual boundary of a suitable $(p + q - 1)$-chain, is equal to the $\binom{p+q}{p}^{\text{th}}$ multiple of the product here introduced.[2] Moreover, I consider also a product of an ordinary n-cycle and a dual p-cycle $(n \geqq p)$, this product being an ordinary $(n - p)$-cycle. There is a simple algebraic relationship between the two kinds of multiplication, which I shall explain elsewhere. As an application of the general theory, I give a new approach to the duality and intersection theory of a combinatorial manifold, given in a simplicial subdivision. The theory works exclusively in the given subdivision.

This is a preliminary paper of a purely combinatorial nature. In a later paper, I shall apply the same methods to general topological spaces, and in particular to the very general "manifolds" defined in my recent note in the *Proceedings of the National Academy of Sciences* (U.S.A.), [23].

Many of the results of this paper were found independently by H. Whitney, but his methods of proof seem not much related to mine.

1. Let there be given a complex K. We shall designate by σ_i^p $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ the (oriented) p-simplices of K and by η_{ij}^p $(= 0, 1, -1)$ the incidence coefficient of σ_i^{p+1} and σ_j^p.

[1] As a matter of fact the *Topology* of S. Lefschetz (1930), contains an essentially equivalent notion (pp. 282–286).

[2] In his paper "On the Connectivity Ring of an Abstract Space" in this number of the *Annals of Mathematics*, pp. 698–708, J. W. Alexander has modified his definition, and it is now in agreement with the one here presented.

The word *group* will always designate an additively written abelian group. If $\mathfrak{A}$ is a group, then a $(p, \mathfrak{A})$-chain is a symbol of the form $a_i\sigma_i^p$, $a_i \in \mathfrak{A}$, where, as always in this paper, one has to sum over every subscript appearing twice.

The *boundary* FA^p of a $(p, \mathfrak{A})$-chain $A^p = a_i\sigma_i^p$ is zero if $p = 0$, and it is the $(p-1, \mathfrak{A})$-chain

$$FA^p = \eta_{ij}^{p-1}a_i\sigma_j^{p-1}$$

if $p > 0$. If $FA^p = 0$, we say that A^p is an *ordinary* $(p, \mathfrak{A})$-*cycle*. The $(p, \mathfrak{A})$-chain FA^{p+1} is an ordinary $(p, \mathfrak{A})$-cycle for every $(p+1, \mathfrak{A})$-chain A^{p+1}. Two ordinary $(p, \mathfrak{A})$-cycles A_1^p and A_2^p are said to be of the same homology class, or to be homologous to each other (in symbols $A_1^p \sim A_2^p$) if there exists a $(p+1, \mathfrak{A})$-chain A_0^{p+1} such that

$$A_1^p - A_2^p = FA_0^{p+1}.$$

The *dual boundary* F^*A^p of a $(p, \mathfrak{A})$-chain $A^p = a_i\sigma_i^p$ is the $(p+1, \mathfrak{A})$-chain

$$F^*A^p = \eta_{ji}^p a_i\sigma_j^{p+1}.$$

If $F^*A^p = 0$, we say that A^p is a *dual* $(p, \mathfrak{A})$-*cycle*. The $(p+1, \mathfrak{A})$-chain F^*A^p is a dual $(p+1, \mathfrak{A})$-cycle for every $(p, \mathfrak{A})$-chain A^p. Two dual $(p, \mathfrak{A})$-cycles A_1^p and A_2^p are said to be of the same homology class, or to be homologous to each other (in symbols $A_1^p \sim A_2^p$) (1) in the case $p = 0$ only if they are identical, (2) in the case $p > 0$ if there exists a $(p-1, \mathfrak{A})$-chain A_0^{p-1} such that

$$A_1^p - A_2^p = F^*A_0^{p-1}.$$

2. Let $\mathfrak{B}$ be a given group. Let B^q be a given dual $(q, \mathfrak{B})$-cycle. By an *auxiliary construction* we mean an operation attaching to every simplex σ_i^p $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ a $(p+q, \mathfrak{B})$-chain $B^{p+q}(\sigma_i^p)$ such that the following three conditions are satisfied. *First*, if the coefficient of a $(p+q)$-simplex τ^{p+q} in $B^{p+q}(\sigma_i^p)$ is different from zero, then σ_i^p must be a face of τ^{p+q}. *Second*, we must have

$$B^q = \sum_i B^q(\sigma_i^0). \tag{2.1}$$

Third, we must have for every simplex σ_i^p $(p = 0, 1, 2, \ldots)$

$$F^* B^{p+q}(\sigma_i^p) = \sum_j \eta_{ji}^p B^{p+q+1}(\sigma_j^{p+1}). \tag{2.2}$$

3. We shall prove that *the auxiliary construction is always possible.* Let there be given a fixed ordering of the vertices of K. Let σ^p be a given p-simplex, written as

$$\sigma^p = (v_0, v_1, \ldots, v_p)$$

corresponding to the given ordering of vertices (i.e. v_0 precedes v_1 etc.). We shall define the $(p+q, \mathfrak{B})$-chain $B^{p+q}(\sigma^p)$ as follows. The only $(p+q)$-simplices appearing in $B^{p+q}(\sigma^p)$ will have, corresponding to the given ordering of vertices, the form

$$(v_0, v_1, \dots, v_p, \dots, v_{p+q}), \tag{3.1}$$

i.e. the first $p + 1$ vertices will be those of σ^p. The coefficient of any such simplex (3.1) in $B^{p+q}(\sigma^p)$ will be equal to the coefficient of the q-simplex $(v_p, \dots, v_{p+q})$ in B^q.

The first two properties of the auxiliary construction being evident, we have only to prove (2.2) for

$$\sigma_i^p = \sigma^p = (v_0, v_1, \dots, v_p).$$

The only $(p + q + 1)$-simplices τ^{p+q+1} appearing on either side of (2.2) must all have σ^p as their common face and, moreover, corresponding to the given ordering of vertices, the vertex v_p must be either the $(p + 1)^{\text{th}}$ or the $(p + 2)^{\text{th}}$ vertex of τ^{p+q+1}. We have to prove that the any such τ^{p+q+1} has equal coefficients on both sides of (2.2). This being quite evident in the case where v_p is the $(p + 2)^{\text{th}}$ vertex of τ^{p+q+1}, we only have to examine the case when, in the given order of vertices, we have

$$\tau^{p+q+1} = (v_0, v_1, \dots, v_p, \dots, v_{p+q+1}).$$

Let b_{p+i} $(0 \leqq i \leqq q + 1)$ be the coefficient, in the $(q, \mathfrak{B})$-chain B^q, of the oriented q-simplex obtained from $(v_p, \dots, v_{p+q+1})$ by omitting the vertex v_{p+i}. The coefficients of τ^{p+q+1} in both sides of (2.2) are respectively equal to

$$(-1)^{p+1}\, b_{p+i} \quad \text{and to} \quad (-1)^{p+1}\, b_p.$$

But since B^q is a dual $(q + 1, \mathfrak{B})$-cycle, the coefficient of the $(q + 1)$-simplex $(v_p, \dots, v_{p+q+1})$ in $F^* B^q$ must vanish, i.e.

$$(-1)^i\, b_{p+i} = 0 \quad \text{or} \quad (-1)^{p+i}\, b_{p+i} = (-1)^{p+1}\, b_p.$$

4. Let us suppose that the dual $(q, \mathfrak{B})$-cycle B^q is identically zero. $B^{p+q}(\sigma_i^p)$ being the elements of an auxiliary construction chosen in any manner corresponding to $B^q = 0$, we shall prove that we may attach to every p-simplex σ_i^p $(p = 1, 2, 3, \dots)$ a $(p + q - 1, \mathfrak{B})$-chain $C^{p+q-1}(\sigma_i^p)$ such that the following three conditions are satisfied. *First*, if the coefficient of a $(p + q - 1)$-simplex τ^{p+q-1} in $C^{p+q-1}(\sigma_i^p)$ is different from zero, then σ_i^p must be a face of τ^{p+q-1}. *Second*, we have for every 0-simplex σ_i^0

$$B^q(\sigma_i^0) = \eta_{ji}^0\, C^q(\sigma_j^1). \tag{4.1}$$

Third, we have for every p-simplex σ_i^p, where $p = 1, 2, 3, \dots$,

$$B^{p+q}(\sigma_i^p) = \eta_{ji}^p\, C^{p+q}(\sigma_j^{p+1}) + F^*\, C^{p+q-1}(\sigma_i^p). \tag{4.2}$$

We begin by the construction of $C^q(\sigma_j^1)$. Let τ^q be any q-simplex and let $b_i(\tau^q)$ be its coefficient in $B^q(\sigma_i^0)$. If σ_i^0 is not a vertex of τ^q, we have $b_i(\tau^q) = 0$. Moreover, since $B^q = 0$, it follows from (2.1) that $\sum_i b_i(\tau^q) = 0$. Therefore, $b_i(\tau^q)\,\sigma_i^0$ is an ordinary $(0, \mathfrak{B})$-cycle of the q-simplex τ^q having zero as the sum of its coefficients. It is well known that such a $(0, \mathfrak{B})$-cycle is equal to the boundary of a $(1, \mathfrak{B})$-chain of the q-simplex τ^q. Therefore there exists, for every 1-simplex σ_j^1, an element $c_j(\tau^q)$ of the group $\mathfrak{B}$ such that (1) $c_j(\tau^q) = 0$ if σ_j^1 is not a face of τ^q, (2) $b_i(\tau^q) = \eta_{ji}^0\, c_j(\tau^q)$ for every σ_i^0. Let us put

$$C^q(\sigma_j^1) = \sum c_j(\tau^q)\,\tau^q\,,$$

the summation running over all q-simplices τ^q. Then σ_j^1 is a face of every q-simplex appearing in $C^q(\sigma_j^1)$ and the relations (4.1) hold true.

If we put $C^{q-1}(\sigma_i^0) = 0$, the relation (4.2) corresponding to $p = 0$ reduces to (4.1). Therefore, we may suppose our construction carried through up to the relations (4.2), where p is given, and we have to construct $(p + q + 1)$-chains $C^{p+q+1}(\sigma_k^{p+2})$ satisfying the analogous relations

$$B^{p+q+1}(\sigma_j^{p+1}) = \eta_{kj}^{p+1}\, C^{p+q+1}(\sigma_k^{p+2}) + F^*\, C^{p+q}(\sigma_j^{p+1})\,. \tag{4.3}$$

Since $F^*\, C^{p+q-1}(\sigma_i^p)$ is a dual $(p + q, \mathfrak{B})$-cycle, it follows from (4.2) that

$$F^*\, B^{p+q}(\sigma_i^p) = \eta_{ji}^p F^*\, C^{p+q}(\sigma_j^{p+1})\,.$$

Comparing with (2.2) we get

$$\eta_{ji}^p\, B^{p+q+1}(\sigma_j^{p+1}) - F^*\, C^{p+q}(\sigma_j^{p+1}) = 0\,. \tag{4.4}$$

Now let τ^{p+q+1} be any $(p + q + 1)$-simplex and let $b_j(\tau^{p+q+1})$ be its coefficient in the $(p + q + 1, \mathfrak{B})$-chain

$$B^{p+q+1}(\sigma_j^{p+1}) - F^*\, C^{p+q}(\sigma_j^{p+1})\,.$$

If σ_j^{p+1} is not a face of τ^{p+q+1}, we have $b_j(\tau^{p+q+1}) = 0$. Moreover, it follows from (4.4) that $\eta_{ji}^p\, b_j(\tau^{p+q+1}) = 0$. Therefore, $b_j(\tau^{p+q+1})\,\sigma_j^{p+1}$ is an ordinary $(p + 1, \mathfrak{B})$-cycle of the $(p + q + 1)$-simplex τ^{p+q+1}. It is well known that such a $(p + 1, \mathfrak{B})$-cycle is equal to the boundary of a $(p + 2, \mathfrak{B})$-chain of the simplex τ^{p+q+1}. Therefore there exists, for every $(p + 2)$-simplex σ_k^{p+2}, an element $c_k(\tau^{p+q+1})$ of the group $\mathfrak{B}$ such that (1) $c_k(\tau^{p+q+1}) = 0$ if σ_k^{p+2} is not a face of τ^{p+q+1}, (2) $b_j(\tau^{p+q+1}) = \eta_{kj}^{p+1}\, c_k(\tau^{p+q+1})$ for every σ_j^{p+1}. Let us put

$$C^{p+q+1}(\sigma_k^{p+2}) = \sum c_k(\tau^{p+q+1})\,\tau^{p+q+1}$$

the summation running over all $(p + q + 1)$-simplices τ^{p+q+1}. Then σ_k^{p+2} is a face of every $(p + q + 1)$-simplex appearing in $C^{p+q+1}(\sigma_k^{p+2})$ and the relations (4.3) hold true.

5. Let there be given three groups $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{C}$. Let there be given a law attaching to every couple a, b, where $a \in \mathfrak{A}$ and $b \in \mathfrak{B}$, an element $c \in \mathfrak{C}$, called the *product*

of a and b and designated by ab or $a \,.\, b$. Furthermore, let us suppose the validity of the distributive laws

$$(a_1 + a_2)\, b = a_1 b + a_2 b\,, \quad a(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2\,.$$

In such circumstances, we put $\mathfrak{C} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ and say that there is given an $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-*multiplication*.

Any $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-multiplication defines an "*inverse*" $(\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$-multiplication (with the same group $\mathfrak{C}$), if we define the new product ba to be equal to the original product ab.

6. Let there be given an $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-multiplication. Let

$$A^p = a_i \sigma_i^p$$

be a dual $(p, \mathfrak{A})$-cycle. Let B^q be a dual $(q, \mathfrak{B})$-cycle. We shall define their product $A^p B^q$ as a dual $[p + q, (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})]$-cycle which, however, will be affected with a slight indetermination. To this end, we start with B^q and choose an auxiliary construction (sect. 2), which is always possible by sect. 3. Then we put

$$A^p B^q = a_i\, B^{p+q}(\sigma_i^p)\,.$$

From (2.2) we have

$$F^* a_i\, B^{p+q}(\sigma_i^p) = a_i F^*\, B^{p+q}(\sigma_i^p) = \eta_{ji}^p a_i\, B^{p+q+1}(\sigma_j^{p+1})$$

which is equal to zero, since $\eta_{ji}^p a_i = 0$, A^p being a dual p-cycle. Therefore, $F^*(A^p B^q) = 0$, i.e., the product $A^p B^q$ is indeed a dual $(p + q)$-cycle.

It can easily be seen that the product $A^p B^q$ is *not* uniquely determined, depending really on the choice of the auxiliary construction. But the *homology class* of the product $A^p B^q$ *is* determined without ambiguity, i.e. any two values $(A^p B^q)_1$ and $(A^p B^q)_2$ are connected by the homology

$$(A^p B^q)_1 \sim (A^p B^q)_2\,.$$

This fact is an easy consequence of the following statement: If $B^q = 0$, then $A^p B^q \sim 0$ for any choice of the auxiliary construction. We proceed to the proof of that statement. If $B^q = 0$, we saw in sect. 4 that there exist chains $C^{p+q-1}(\sigma_i^p)$ such that (4.1) and (4.2) hold true. If $p = 0$, it follows from (4.1) that

$$A^0 B^q = a_i\, B^q(\sigma_i^0) = \eta_{ji}^0 a_i\, C^q(\sigma_i^0) = 0\,,$$

because $\eta_{ji}^0 a_i = 0$. If $p > 0$, it follows from (4.2) that

$$\begin{aligned} F^* a_i\, C^{p+q-1}(\sigma_i^p) &= a_i F^*\, C^{p+q-1}(\sigma_i^p) = a_i\, B^{p+q}(\sigma_i^p) - \eta_{ji}^p a_i\, C^{p+q}(\sigma_j^{p+1}) \\ &= a_i\, B^{p+q}(\sigma_i^p) = A^p B^q \end{aligned}$$

because $\eta_{ji}^p a_i = 0$. Therefore $A^p B^q = F^* a_i\, C^{p+q-1}(\sigma_i^p) \sim 0$.

The homology class of the product A^pB^q is uniquely determined by the homology classes of A^p and B^q. This is an easy consequence of the following statement: If either $A^p \sim 0$ or $B^q \sim 0$, then $A^pB^q \sim 0$. Let us first suppose that $A^p \sim 0$. If $p = 0$, then $A^p = 0$, which implies $A^pB^q = 0$. If $p > 0$, then there exists a $(p-1, \mathfrak{A})$-chain $\alpha_j\sigma_j^{p-1}$ such that $A^p = a_i\sigma_i^p = F^*(\alpha_j\sigma_j^{p-1})$, i.e. $a_i = \eta_{ij}^{p-1}\alpha_j$. According to (2.2), we have

$$F^*\alpha_j\, B^{p+q-1}(\sigma_j^{p-1}) = \alpha_j F^* B^{p+q-1}(\sigma_j^{p-1}) = \eta_{ij}^{p-1}\alpha_j\, B^{p+q}(\sigma_i^p) =$$
$$= a_i\, B^{p+q}(\sigma_i^p) = A^pB^q$$

so that $A^pB^q = 0$. Now we suppose that $B^q \sim 0$. If $q = 0$, then $B^q = 0$, which we know to imply $A^pB^q \sim 0$. If $q > 0$, then there exists a $(q-1, \mathfrak{B})$-chain H^{q-1} such that $B^q = F^*H^{q-1}$. One finds easily $(q-1, \mathfrak{B})$-chains $H^{q-1}(\sigma_i^0)$ such that (1) σ_i^0 is a vertex of every $(q-1)$-simplex appearing in $H^{q-1}(\sigma_i^0)$, (2) $H^{q-1} = \sum_i H^{q-1}(\sigma_i^0)$. If we put $B^q(\sigma_i^0) = F^*H^{q-1}(\sigma_i^0)$ and $B^{p+q}(\sigma_i^0) = 0$ for $p > 0$, we evidently have an auxiliary construction in the sense of sect 2. With this choice of auxiliary construction, we have $A^pB^q = 0$ if $p > 0$, and

$$A^0B^q = F^*a_i\, H^{q-1}(\sigma_i^0) \sim 0 \text{ if } p = 0\,.$$

7. Let there be given an ordering of the vertices of the complex K. Then we can use the particular auxiliary construction described in sect. 3, which leads to the following simple definition of the product A^pB^q. Given a $(p+q)$-simplex σ^{p+q}, we write it as

$$\sigma^{p+q} = (v_0, v_1, \ldots, v_p, \ldots, v_{p+q})$$

according to the given ordering of the vertices. Let a be the coefficient of the p-simplex $(v_0, v_1, \ldots, v_p)$ in the $(p, \mathfrak{A})$-chain A^p; let b be the coefficient of the q-simplex $(v_p, \ldots, v_{p+q})$ in the $(q, \mathfrak{B})$-chain B^q. Then ab is the coefficient of σ^{p+q} in the product A^pB^q.

This definition leads to a simple proof of the *commutative law*:

$$B^qA^p \sim (-1)^{pq}\, A^pB^q\,. \tag{7.1}$$

Here we suppose that, $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ being two groups, A^p is a dual $(p, \mathfrak{A})$-cycle and B^q is a dual $(q, \mathfrak{B})$-cycle. Furthermore, an $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-multiplication is given, and hence an inverse $(\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$-multiplication also (sect. 5). The products A^pB^q and B^qA^p are formed according to the first and second of these multiplications, respectively. To prove (7.1), we fix the value of A^pB^q according to a given ordering of the vertices, and fix B^qA^p according to the *inverse* ordering of the vertices. Let a $(p+q)$-simplex

$$(v_0, v_1, \ldots, v_p, \ldots, v_{p+q})$$

be written in the original ordering of the vertices. Since

$$\begin{aligned}
(v_p, \ldots, v_0) &= (-1)^{\frac{1}{2}p(p+1)} (v_0, \ldots, v_p)\,, \\
(v_{p+q}, \ldots, v_p) &= (-1)^{\frac{1}{2}q(q+1)} (v_p, \ldots, v_{p+q})\,, \\
(v_{p+q}, \ldots, v_p, \ldots, v_0) &= (-1)^{\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)} (v_0, \ldots, v_p, \ldots, v_{p+q})\,, \\
\tfrac{1}{2}(p+q)(p+q+1) &= \tfrac{1}{2}p(p+1) + \tfrac{1}{2}q(q+1) + pq\,,
\end{aligned}$$

it is readily seen that, with our particular choice of the auxiliary construction, we have $B^qA^p = (-1)^{pq} A^pB^q$. It seems difficult to prove the commutative law (7.1) directly from the general definition given in sect. 6.

The *distributive laws*

$$(A_1^p + A_2^p)\,B^q \sim A_1^pB^q + A_2^pB^q\,, \tag{7.2}$$

$$A^p(B_1^q + B_2^q) \sim A^pB_1^q + A^pB_2^q \tag{7.3}$$

are immediate consequences of either of the two definitions of the product.

Now suppose that three groups $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ and $\mathfrak{A}_3$ are given. Let there be given an $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$-multiplication and an $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$-multiplication. Further, putting

$$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{A}_{12}\,, \quad (\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3) = \mathfrak{A}_{23}\,,$$

let us suppose that there is given an $(\mathfrak{A}_{12}, \mathfrak{A}_3)$-multiplication and an $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_{23})$-multiplication. Suppose, finally, that the associative law

$$a_1a_2 \,.\, a_3 = a_1 \,.\, a_2a_3$$

holds true for $a_1 \in \mathfrak{A}_1$, $a_2 \in \mathfrak{A}_2$, $a_3 \in \mathfrak{A}_3$. Then we have, if $A_i^{p_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ is a dual $(p_i, \mathfrak{A}_i)$-cycle, the *associative law*

$$A_1^{p_1}A_2^{p_2} \,.\, A_3^{p_3} \sim A_1^{p_1} \,.\, A_2^{p_2}A_3^{p_3}\,. \tag{7.4}$$

The proof based on a given ordering of the vertices is quite trivial. A proof based directly on our general definition of the product is not difficult, however.

It would be interesting to prove, using only definitions based on the ordering of the vertices, that the homology class of the product A^pB^q is independent of the choice of the ordering.[3]

8. Let there be given an $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-multiplication. If $A^p = a_i\sigma_i^p$ is a $(p, \mathfrak{A})$-chain and if $B^p = b_i\sigma_i^p$ is a $(p, \mathfrak{B})$-chain, let us put

$$\varphi(A^p, B^p) = a_ib_i \in (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\,.$$

If A^{p+1} is a $(p + 1, \mathfrak{A})$-chain and if B^p is a $(p, \mathfrak{B})$-chain, it is readily seen that

$$\varphi(FA^{p+1}, B^p) = \varphi(A^{p+1}, F^*B^p)\,; \tag{8.1}$$

[3] Such a proof has now been given by J. W. Alexander; see his paper cited above.

similarly we have

$$\varphi(A^p, FB^{p+1}) = \varphi(F^*A^p, B^{p+1}) \tag{8.2}$$

for any $(p, \mathfrak{A})$-chain A^p and any $(p+1, \mathfrak{B})$-chain B^{p+1}.

9. Let there be given an $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-multiplication. Let A^{p+q} be an *ordinary* $(p+q, \mathfrak{A})$-cycle. Let B^q be a *dual* $(q, \mathfrak{B})$-cycle. We shall define a product $A^{p+q}B^q$ (not quite uniquely determined), which will be an *ordinary* $[p, (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})]$-cycle. We choose an auxiliary construction $B^{p+q}(\sigma_i^p)$ associated with B^q (sect. 2), and we put

$$A^{p+q}B^q = c_i\sigma_i^p,$$

where (see sect. 8)

$$c_i = (-1)^{pq}\,\varphi[A^{p+q}, B^{p+q}(\sigma_i^p)].$$

That $A^{p+q}B^q$ is an ordinary $[p, (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})]$-cycle, is trivial if $p = 0$. If $p > 0$, it follows from (2.2) and (8.1) that, for any $(p-1)$-simplex σ_j^{p-1},

$$\begin{aligned}(-1)^{pq}\,\eta_{ij}^{p-1}c_i &= \eta_{ij}^{p-1}\,\varphi[A^{p+q}, B^{p+q}(\sigma_i^p)] = \varphi[A^{p+q}, \eta_{ij}^{p-1}\,B^{p+q}(\sigma_i^p)] = \\ &= \varphi[A^{p+q}, F^*\,B^{p+q-1}(\sigma_j^{p-1})] = \varphi[FA^{p+q}, B^{p+q-1}(\sigma_j^{p-1})] = \varphi[0, B^{p+q-1}(\sigma_j^{p-1})] = 0\end{aligned}$$

i.e. $F(A^{p+q}B^q) = 0$.

Suppose that $B^q = 0$. If $p = 0$, it follows from (4.1) that

$$\varphi[A^q, B^q(\sigma_i^0)] = \eta_{ji}^0\,\varphi[A^q, C^q(\sigma_j^1)],$$

so that

$$A^qB^q = F(\gamma_j\sigma_j^1), \quad \gamma_j = \varphi[A^q, C^q(\sigma_j^1)],$$

i.e. $A^qB^q \sim 0$. If $p > 0$, it follows from (4.2) that

$$\varphi[A^{p+q}, B^{p+q}(\sigma_i^p)] = \eta_{ji}^p\,\varphi[A^{p+q}, C^{p+q-1}(\sigma_j^{p+1})] + \varphi[A^{p+q}, F^*\,C^{p+q-1}(\sigma_i^p)].$$

But the last summand is zero, from (8.1), since $FA^{p+q} = 0$. Therefore

$$A^{p+q}B^q = F(\gamma_j\sigma_j^{p+1}), \quad \gamma_j = (-1)^{pq}\,\varphi[A^{p+q}, C^{p+q-1}(\sigma_j^{p+1})],$$

i.e. again $A^{p+q}B^q \sim O$.

It follows readily from the preceding proof that, in any case, the homology class of the $[p, (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})]$-cycle $A^{p+q}B^q$ is independent of the choice of the auxiliary construction. As a matter of fact, this homology class is uniquely determined by the homology classes of the ordinary $(p+q, \mathfrak{A})$-cycle A^{p+q} and the dual $(q, \mathfrak{B})$-cycle B^q. It is sufficient to prove that $A^{p+q}B^q \sim 0$, if either $A^{p+q} \sim 0$ or $B^q \sim 0$. If $A^{p+q} \sim 0$, there exists a $(p+q+1, \mathfrak{A})$-chain H^{p+q+1} such that $A^{p+q} = FH^{p+q+1}$. It follows easily from (2.2) and (8.1) that

$$A^{p+q}B^q = F(\gamma_j\sigma_j^{p+1}) \sim 0, \gamma_j = (-1)^{pq}\,\varphi[H^{p+q+1}, B^{p+q+1}(\sigma_j^{p+1})].$$

If $B^q \sim 0$ and $q = 0$, we have $B^q = 0$, which we know to imply $A^{p+q}B^q \sim 0$. If $B^q \sim 0$ and $q > 0$, we choose the auxiliary construction as at the end of sect. 6: $B^q(\sigma_i^0) = F^* H^{q-1}(\sigma_i^0)$ and $B^{p+q}(\sigma_i^p) = 0$ for $p > 0$. If $p > 0$, we have then $A^{p+q}B^q =$ $= 0$. If $p = 0$, we have again $A^qB^q = 0$ from (8.1), since $FA^q = 0$.

If A^p is a *dual* $(p, \mathfrak{A})$-cycle and if B^{p+q} is an *ordinary* $[(p + q), \mathfrak{B}]$-cycle, we put

$$A^pB^{p+q} = c_i\sigma_i^q ,$$

where

$$c_i = \varphi[A^{p+q}(\sigma_i^p), B^{p+q}] ,$$

the $(p + q, \mathfrak{A})$-chains $A^{p+q}(\sigma_i^q)$ $(q = 0, 1, 2, \ldots)$ being the elements of an auxiliary construction associated with A^p. Again the product is an ordinary $[q, (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})]$-cycle and only its homology class is uniquely determined, this class being indeed given by the mere knowledge of the homology classes of the factors. If A^{p+q} is an ordinary $(p + q, \mathfrak{A})$-cycle and if B^q is a dual $(q, \mathfrak{B})$-cycle, we have evidently

$$A^{p+q}B^q \sim (-1)^{pq}\, B^qA^{p+q} , \tag{9.1}$$

where the left-hand member is defined according to the given $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-multiplication and the right-hand member according to the inverse $(\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$-multiplication.

10. Let there be given an ordering of the vertices of the complex K. Thc particular auxiliary construction described in sect. 3 leads to following simple definition of the product A^pB^{p+q} of a dual $(p, \mathfrak{A})$-cycle A^p and an ordinary $(p + q, \mathfrak{B})$-cycle B^{p+q}. Given a q-simplex σ^q, we write it as

$$\sigma^q = (v_0, v_1, \ldots, v_q)$$

according to the given ordering of the vertices, and consider all the $(p + q)$-simplices

$$\sigma_k^{p+q} = (v_0, v_1, \ldots, v_q, \ldots, v_{p+q})$$

having σ^q as their common face and such that, in the given ordering, v_q precedes any vertex of σ_k^{p+q} which is not a vertex of σ^q. For every such σ_k^{p+q} put

$$\sigma_k^p = (v_q, \ldots, v_{p+q}) .$$

Let a_k be the coefficient of σ_k^p in A^p; let b_k be the coefficient of σ_k^{p+q} in B^{p+q}. Then the coefficient of σ^q in A^pB^{p+q} is equal to

$$\sum_k a_kb_k .$$

Now let us consider the product $A^{p+q}B^q$ of an ordinary $(p + q, \mathfrak{A})$-cycle A^{p+q} and a dual $(q, \mathfrak{B})$-cycle B^q. This time we use the auxiliary construction based on the *inverse* ordering of the vertices, but we describe the result in terms of the original ordering. Given a p-simplex σ^p, we write it as

$$\sigma^p = (v_q, \ldots, v_{p+q})$$

according to the given ordering of the vertices, and consider all the $(p + q)$-simplices

$$\sigma_k^{p+q} = (v_0, v_1, \ldots, v_q, \ldots, v_{p+q})$$

having σ^p as their common face and such that, in the given ordering, v_q follows any vertex of σ_k^{p+q} which is not a vertex of σ^p. For every such σ_k^{p+q}, put

$$\sigma_k^q = (v_0, \ldots, v_q)\,.$$

Let a_k be the coefficient of σ_k^{p+q} in A^{p+q}; let b_k be the coefficient of σ_k^q in B^q. Then the coefficient of σ^p in $A^{p+q}B^q$ is equal to

$$\sum_k a_k b_k\,.$$

These definitions, in connection with that given at the beginning of sect. 7 (for the product of two dual cycles) lead to a simple proof of the *associative laws*:

$$A_1^{p_1+p_2+p_3}B_2^{p_2}\,.\,B_3^{p_3} \sim A_1^{p_1+p_2+p_3}\,.\,B_2^{p_2}B_3^{p_3}\,, \tag{10.1}$$

$$B_1^{p_1}A_2^{p_1+p_2+p_3}\,.\,B_3^{p_3} \sim B_1^{p_1}\,.\,A_2^{p_1+p_2+p_3}B_3^{p_3}\,, \tag{10.2}$$

$$B_1^{p_1}B_2^{p_2}\,.\,A_3^{p_1+p_2+p_3} \sim B_1^{p_1}\,.\,B_2^{p_2}A_3^{p_1+p_2+p_3}\,. \tag{10.3}$$

Here we suppose given three groups $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, an $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$-multiplication, an $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$-multiplication, an $(\mathfrak{A}_{12}, \mathfrak{A}_3)$-multiplication with $\mathfrak{A}_{12} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ and an $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_{23})$-multiplication with $\mathfrak{A}_{23} = (\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$. It is supposed that $a_1a_2\,.\,a_3 = a_1\,.\,a_2a_3$ for $a_i \in \mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. $A_i^{p_1+p_2+p_3}$ $(i = 1, 2, 3)$ is an ordinary $(p_1 + p_2 + p_3, \mathfrak{A}_i)$-cycle and $B_i^{p_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ is a dual $(p_i, \mathfrak{A}_i)$-cycle. Of course, any of the three formulas (10.1), (10.2) and (10.3) implies the others using (7.1) and (9.1). We omit writing explicitly the trivial *distributive laws.*

11. In the remaining part of this paper the coefficients of all chains are taken from the additive group of all integer numbers. Moreover, we suppose that $K = M_n$ is an orientable simple n-circuit, i.e. that the following four conditions are satisfied. *First*, each simplex of M_n is either an n-simplex or a face of an n-simplex. *Second*, each $(n - 1)$-simplex of M_n is a common face of precisely two n-simplices of M_n. *Third*, any two n-simplices of M_n may be connected by a sequence of n-simplices of M_n such that any two consecutive n-simplices of the sequence have a common $(n - 1)$-face. *Fourth*, the n-simplices σ_i^n of M_n can be given such orientations that their sum $\Gamma^n = \sum_i \sigma_i^n$ is an ordinary n-cycle. (We always suppose the orientation of the n-simplices chosen in this manner.)

If σ_i^p is any p-simplex of M_n, we denote by Lk. $[\sigma_i^p]$ its *link*, i.e. the subcomplex of M_n composed of all the simplices τ of M_n having no common vertex with σ_i^p but having the property that there exists a simplex of M_n having both τ and σ_i^p among its faces.

If $0 \leqq p \leqq n$, we say that M_n is *p-regular* if the following two conditions are satisfied. *First* (requiring nothing if $p = n$ or $p = n - 1$), the link Lk. $[\sigma_i^p]$ on any

p-simplex of M_n is an orientable simple $(n-p-1)$-circuit. Second (requiring nothing if $p=0$), for each k such that $0 \leqq k \leqq p-1$, any dual $(n-p-1)$-cycle of any Lk. $[\sigma_i^k]$ is homologous to zero in Lk. $[\sigma_i^k]$. It is easily seen that the orientable combinatorial n-manifolds are identical with orientable simple n-circuits, which are p-regular for any $0 \leqq p \leqq n$.

12. For $0 \leqq p \leqq n$, we denote by $\mathfrak{B}_p$ the group of all the homology classes of ordinary p-cycles of M_n and by $\overline{\mathfrak{B}}_p$ the group of all the homology classes of dual p-cycles of M_n.

Given any dual $(n-p)$-cycle B^{n-p} of M_n $(0 \leqq p \leqq n)$, we put

$$\psi_p(B^{n-p}) = \Gamma^n \,.\, B^{n-p}\,,$$

where $\Gamma^n = \sum_i \sigma_i^n$. Evidently, ψ_p is a homomorphic mapping of the group $\overline{\mathfrak{B}}_{n-p}$ on a subgroup $\psi_p(\overline{\mathfrak{B}}_{n-p})$ of the group $\mathfrak{B}_p$.

13. *If M_n is p-regular, then the mapping ψ_p is $1-1$, so that the group $\overline{\mathfrak{B}}_{n-p}$ is isomorphic with a subgroup [i.e. $\psi_p(\overline{\mathfrak{B}}_{n-p})$] of the group $\mathfrak{B}_p$.*

It is sufficient to prove that $\Gamma^n B^{n-p} \sim 0$ implies $B^{n-p} \sim 0$.

Let $B^{n-p+k}(\sigma_i^k)$ be the elements of a given auxiliary construction associated with the dual $(n-p)$-cycle B^{n-p}. Since $\Gamma^n \,.\, B^{n-p} \sim 0$, there exists a $(p+1)$-chain $c_j\sigma_j^{p+1}$ such that $\Gamma^n \,.\, B^{n-p} = (-1)^{p(n-p)} F(c_j\sigma_j^{p+1})$, i.e.

$$\varphi[\Gamma^n, B^n(\sigma_i^p)] = \eta_{ji}^p c_j\,.$$

For any σ_j^{p+1}, let us choose an n-simplex τ^n such that σ_j^{p+1} is a face of τ^n, and put $H^n(\sigma_j^{p+1}) = c_j\tau^n$. Since $\Gamma^n = \sum_i \sigma_i^n$, we have $\varphi[\Gamma_j^n H^n(\sigma_j^{p+1})] = c_j$ and, therefore,

$$\varphi[\Gamma^n, B_0^n(\sigma_i^p)] = 0\,, \tag{13.1}$$

where

$$B_0^n(\sigma_i^p) = B^n(\sigma_i^p) - \eta_{ji}^p\, H^n(\sigma_j^{p+1})\,. \tag{13.2}$$

Evidently σ_i^p is a face of each n-simplex appearing in the n-chain $B_0^n(\sigma_i^p)$. Therefore there exists in the link Lk. $[\sigma_i^p]$ an $(n-p-1)$-chain $C^{n-p-1}(\sigma_i^p)$ such that the n-chain $B_0^n(\sigma_i^p)$ can be obtained from the $(n-p-1)$-chain C^{n-p-1} by replacing each $(n-p-1)$-simplex

$$(v_{p+1}, \ldots, v_n)$$

by the n-simplex

$$(v_0, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n)$$

where

$$(v_0, \ldots, v_p) = \sigma_i^p\,. \tag{13.3}$$

Since the complex Lk. $[\sigma_i^p]$ contains no $(n-p)$-simplex, the $(n-p-1)$-chain $C^{n-p-1}(\sigma_i^p)$ of the complex Lk. $[\sigma_i^p]$ must be a dual $(n-p-1)$-cycle. Moreover, the equation (13.1) signifies that the sum of the coefficients of $C^{n-p-1}(\sigma_i^p)$ is equal to zero. Since M_n is p-regular, Lk. $[\sigma_i^p]$ is an orientable simple $(n-p-1)$-circuit, which implies readily the existence of an $(n-p-2)$-chain $D^{n-p-2}(\sigma_i^p)$ in the complex Lk. $[\sigma_i^p]$ such that

(13.4) $$F^* D^{n-p-2}(\sigma_i^p) = (-1)^{p+1} C^{n-p-1}(\sigma_i^p) .$$

Let $H^{n-1}(\sigma_i^p)$ signify the $(n-1)$-chain which arises from the $(n-p-2)$-chain $D^{n-p-2}(\sigma_i^p)$ by replacing each $(n-p-2)$-simplex

$$(v_{p+1}, \ldots, v_{n-1})$$

by the $(n-1)$-simplex

$$(v_0, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{n-1}) ,$$

supposing the validity of (13.3). Then (13.4) implies that

(13.5) $$F^* H^{n-1}(\sigma_i^p) = B_0^n(\sigma_i^p) .$$

Moreover, σ_i^p is a face of every $(n-1)$-simplex appearing in the $(n-1)$-chain $H^{n-1}(\sigma_i^p)$.

Now, let us put

$$B_{p-1}^n(\sigma_i^p) = 0 ,$$
$$B_{p-1}^{n-1}(\sigma_j^{p-1}) = B^{n-1}(\sigma_j^{p-1}) - \eta_{ij}^{p-1} H^{n-1}(\sigma_i^p)$$

and

$$B_{p-1}^{n-p+k}(\sigma_i^k) = B^{n-p+k}(\sigma_i^k) \quad \text{for} \quad p-1 \neq k \neq p .$$

From (13.2) and (13.5) it is easily seen that the chains $B_{p-1}^{n-p+k}(\sigma_i^k)$ form an auxiliary construction associated with B^{n-p}.

Now let us suppose that (as we have found to be possible in the case $r = p-1$) we have found chains $B_r^{n-p+k}(\sigma_i^k)$ $(1 \leqq r \leqq p-1)$ forming an auxiliary construction associated with B^{n-p} and such that $B_r^{n-p+r+1}(\sigma_i^{r+1}) = 0$. By the definition of an auxiliary construction, we have

(13.6) $$F^* B_r^{n-p+r}(\sigma_i^r) = 0$$

for each σ_i^r. Since σ_i^r is a face of each $(n-p+r)$-simplex appearing in $B_r^{n-p+r}(\sigma_i^r)$, there exists in the link Lk. $[\sigma_i^r]$ an $(n-p-1)$-chain $C^{n-p-1}(\sigma_i^r)$ such that the $(n-p+r)$-chain $B_r^{n-p+r}(\sigma_i^r)$ can be obtained from the $(n-p-1)$-chain $C^{n-p-1}(\sigma_i^r)$ by replacing each $(n-p-1)$-simplex

$$(v_{r+1}, \ldots, v_{n-p+r})$$

by the $(n-p+r)$-simplex

$$(v_0, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_{n-p+r}),$$

where

$$(13.7) \qquad (v_0, \ldots, v_r) = \sigma_i^r .$$

Now the equation (13.6) signifies that $C^{n-p-1}(\sigma_i^r)$ is a dual $(n-p-1)$-cycle of the complex Lk. $[\sigma_i^r]$. Since M_n is p-regular it follows that there exists an $(n-p-2)$-chain $D^{n-p-2}(\sigma_i^r)$ of the complex Lk. $[\sigma_i^r]$ such that

$$(13.8) \qquad F^* D^{n-p-2}(\sigma_i^r) = (-1)^{r+1} C^{n-p-1}(\sigma_i^r) .$$

Let $H^{n-p+r-1}(\sigma_i^r)$ denote the $(n-p+r-1)$-chain which arises from the $(n-p-2)$-chain $D^{n-p-2}(\sigma_i^r)$ by replacing each $(n-p-2)$-simplex

$$(v_{r+1}, \ldots, v_{n-p+r-1})$$

by the $(n-p+r-1)$-simplex

$$(v_0, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_{n-p+r-1}),$$

supposing the validity of (13.7). Then (13.8) implies that

$$(13.9) \qquad F^* H^{n-p+r-1}(\sigma_i^r) = B_r^{n-p+r}(\sigma_i^r) .$$

Now, let us put

$$(13.10) \qquad B_{r-1}^{n-p+r}(\sigma_i^r) = 0 ,$$
$$B_{r-1}^{n-p+r-1}(\sigma_j^{r-1}) = B_r^{n-p+r-1}(\sigma_j^{r-1}) - \eta_{ij}^{r-1} H^{n-p+r-1}(\sigma_i^r)$$

and

$$B_{r-1}^{n-p+k}(\sigma_i^k) = B_r^{n-p+k}(\sigma_i^k) \quad \text{for} \quad r-1 \neq k \neq r .$$

It follows readily from (13.9) that the chains $B_{r-1}^{n-p+k}(\sigma_i^k)$ form an auxiliary construction associated with B^{n-p} and such that (13.10) holds true.

Applying the preceding argument successively for $r = p-1, p-2, \ldots, 2, 1$, we obtain an auxiliary construction $B_0^{n-p+k}(\sigma_i^k)$ associated with B^{n-p} and such that $B_0^{n-p+1}(\sigma_i^1) = 0$. Applying the same argument again in the case $r = 0$, we have (13.9), written now as

$$F^* H^{n-p-1}(\sigma_i^0) = B_0^{n-p}(\sigma_i^0) ,$$

But since $B_0^{n-p}(\sigma_i^0)$ are elements of an auxiliary construction associated with B^{n-p}, we have $B^{n-p} = \sum_i B_0^{n-p}(\sigma_i^0) = F^* \sum_i H^{n-p-1}(\sigma_i^0)$, whence $B^{n-p} \sim 0$.

14. *If M_n is $(p-1)$-regular,*[4] *then the group $\psi_p(\overline{\mathfrak{B}}_{n-p})$ is the whole group $\mathfrak{B}_p$*, so that the group $\mathfrak{B}_p$ is a homomorphic image of the group $\overline{\mathfrak{B}}_{n-p}$. Comparing this with the result of the preceding section we see that, *if M_n is both $(p-1)$-regular and p-regular, the groups $\mathfrak{B}_p$ and $\overline{\mathfrak{B}}_{n-p}$ are isomorphic.*

Let $C^p = c_i \sigma_i^p$ be an ordinary p-cycle of M_n, so that $\eta_{ij}^{p-1} c_i = 0$. We shall find a dual $(n-p)$-cycle B^{n-p} and an auxiliary construction $B^{n-p+k}(\sigma_i^k)$ associated with it such that $\Gamma^n . B^{n-p} = C^p$, i.e.

$$\varphi[\Gamma^n, B^n(\sigma_i^p)] = c_i \,. \tag{14.1}$$

The construction of n-chains $B^n(\sigma_i^p)$ satisfying (14.1) is quite evident; it is sufficient to choose for each σ_i^p an n-simplex τ^n having σ_i^p among its faces and to put $B^n(\sigma_i^p) = c_i \tau^n$. Since $\eta_{ij}^{p-1} c_i = 0$, we have for each σ_j^{p-1}

$$\varphi[\Gamma^n, \eta_{ij}^{p-1} B^n(\sigma_i^p)] = 0 \,. \tag{14.2}$$

Since σ_j^{p-1} is a face of every n-simplex appearing in $\eta_{ij}^{p-1} B^n(\sigma_i^p)$ and since the $(p-1)$-regularity of M_n implies that the link Lk. $[\sigma_j^{p-1}]$ is an orientable simple $(n-p)$-circuit, we can start with (14.2) and repeat the same argument which, in the preceding section and starting with (13.1), led us to (13.5). We thus obtain, for every σ_j^{p-1}, an $(n-1)$-chain $B^{n-1}(\sigma_j^{p-1})$ such that σ_j^{p-1} is a face of each simplex appearing in $B^{n-1}(\sigma_j^{p-1})$ and such that

$$F^* B^{n-1}(\sigma_j^{p-1}) = \eta_{ij}^{p-1} B^n(\sigma_i^p) \,.$$

More generally, let us suppose that, for a given r $(1 \leqq r \leqq p-1)$, we have succeeded in attaching to every σ_i^k $(r \leqq k \leqq p)$ an $(n-p+k)$-chain $B^{n-p+k}(\sigma_i^k)$ having the two following properties. *First*, σ_i^k is a face of each $(n-p+k)$-simplex appearing in $B^{n-p+k}(\sigma_i^k)$. *Second*, we have for $r \leqq k \leqq p-1$

$$F^* B^{n-p+k}(\sigma_i^k) = \eta_{ji}^k B^{n-p+k+1}(\sigma_j^{k+1}) \,. \tag{14.3}$$

It follows that

$$F^* \eta_{ij}^{r-1} B^{n-p+r}(\sigma_i^r) = 0 \,. \tag{14.4}$$

Since σ_j^{r-1} is a face of every $(n-p+r)$-simplex appearing in $\eta_{ij}^{r-1} B^{n-p+r}(\sigma_i^r)$ and since the $(p-1)$-regularity of M_n implies that every dual $(n-p-1)$-cycle of the complex Lk. $[\sigma_j^{r-1}]$ is homologous to zero in Lk. $[\sigma_j^{r-1}]$, we can start with (14.4) and repeat the same argument which, in the preceding section and starting with (13.6), led us to (13.9). We obtain thus, for every σ_j^{r-1}, an $(n-p+r-1)$-chain $B^{n-p+r-1}(\sigma_j^{r-1})$ such that σ_j^{r-1} is a face of each simplex appearing in $B^{n-p+r-1}(\sigma_j^{r-1})$ and such that (14.3) holds true for $k = r-1$.

[4] Any M_n is supposed to be (-1)-regular.

Starting with the chains $B^n(\sigma_i^p)$ and $B^{n-1}(\sigma_i^{p-1})$ already found, and applying the preceding argument successively for $r = p-1, p-2, \ldots, 2, 1$, we find chains $B^{n-p+k}(\sigma_i^k)$ $(0 \leqq k \leqq p)$ such that σ_i^k is a face of each simplex appearing in $B^{n-p+k}(\sigma_i^k)$ and such that (14.3) holds true for $0 \leqq k \leqq p-1$. In particular, for $k = 0$, (14.3) says that

$$F^* B^{n-p}(\sigma_i^0) = \eta_{ji}^0 B^{n-p+1}(\sigma_j^1).$$

Since $\sum_i \eta_{ji}^0 = 0$ for every σ_j^1, we have $F^* \sum_i B^{n-p}(\sigma_i^0) = 0$, i.e.

$$B^{n-p} = \sum_i B^{n-p}(\sigma_i^0)$$

is a dual $(n-p)$-cycle. Of course our chains $B^{n-p+k}(\sigma_i^k)$ form an auxiliary construction associated with B^{n-p} and we have $\Gamma^n . B^{n-p} = C^p$.

15. Let $0 \leqq p \leqq n$, $0 \leqq q \leqq n$. Suppose that M_n is r-regular both for $r = p$ and for $r = q$. Let C^p be an ordinary p-cycle belonging to the family $\psi_p(\overline{\mathfrak{B}}_{n-p})$; let D^q be an ordinary q-cycle belonging to the family $\psi_q(\overline{\mathfrak{B}}_{n-q})$; if M_n is r-regular also for $r = p-1$ and $r = q-1$, we know (sect. 14) that the cycles C^p and D^q are unrestricted.

We shall define the *intersection* of C^p and D^q and we shall designate it by $C^p \times D^q$. It the case $p + q < n$ we simply put

$$C^p \times D^q = 0.$$

In the case $p + q \geqq n$, we shall define $C^p \times D^q$ as an ordinary $(p+q-n)$-cycle, but only its homology class will be uniquely determined.

Since C^p belongs to $\psi_p(\overline{\mathfrak{B}}_{n-p})$, there exists a dual $(n-p)$-cycle A^{n-p} such that

$$\Gamma^n A^{n-p} \sim C^p. \tag{15.1}$$

Since D^q belongs to $\psi_q(\overline{\mathfrak{B}}_{n-q})$, there exists a dual $(n-q)$-cycle B^{n-q} such that

$$\Gamma^n B^{n-q} \sim D^q. \tag{15.2}$$

We know (see sect. 13) that the homology classes of A^{n-p} and B^{n-q} are uniquely defined.

This being done, we put

$$C^p \times D^q \sim \Gamma^n . A^{n-p} B^{n-q}. \tag{15.3}$$

It follows from (10.1) and (15.1) that

$$C^p \times D^q \sim C^p B^{n-q}. \tag{15.4}$$

The *distributive laws*

$$\begin{aligned} (C_1^p + C_2^p) \times D^q &\sim (C_1^p \times D^q) + (C_2^p \times D^q), \\ C^p \times (D_1^q + D_2^q) &\sim (C^p \times D_1^q) + (C^p \times D_2^q) \end{aligned} \tag{15.5}$$

are evident. The *commutative law*

$$D^q \times C^p \sim (-1)^{(n-p)(n-q)} C^p \times D^q \tag{15.6}$$

follows from (7.1) and (15.3). If M_n is also s-regular and if E^s is an ordinary s-cycle belonging to the family $\psi_s(\mathfrak{B}_{n-s})$, we see from (7.4), (10.1) and (15.3) the validity of the *associative law*

$$(C^p \times D^q) \times E^s \sim C^p \times (D^q \times E^s)\,. \tag{15.7}$$

16. Let M_n be an orientable combinatorial n-manifold and let M'_n be its barycentrical subdivision. It is well known that M'_n is also an orientable combinatorial n-manifold. We shall show that, on the manifold M'_n, our definition of intersection of ordinaty cycles is equivalent to the classical definition.

Let σ_i^p $(0 \leqq p \leqq n)$ denote the simplices of M_n. We choose the orientation of the n-simplices σ_i^n in such manner that $\gamma^n = \sum_i \sigma_i^n$ is an ordinary n-cycle on M_n; we choose arbitrarily the orientation of the p-simplices σ_i^p $(1 \leqq p \leqq n-1)$ and, as usual, we denote by η_{ij}^p the incidence coefficient of σ_i^{p+1} and σ_j^p $(0 \leqq p \leqq n-1)$.

Now let us recall the definition of the complex M'_n. The vertices of M'_n are identical with the simplices σ_i^p $(0 \leqq p \leqq n)$ of M_n. The vertices $\sigma_{i_0}^{p_0}, \sigma_{i_1}^{p_1}, \ldots, \sigma_{i_r}^{p_r}$ of M'_n, where $p_0 \leqq p_1 \leqq \ldots \leqq p_r$, form an r-simplex of M'_n if and only if (1) $p_0 < p_1 < \ldots < p_r$, (2) $\sigma_{i_s}^{p_s}$ is a face of $\sigma_{i_{s+1}}^{p_{s+1}}$ for $0 \leqq s \leqq r-1$.

Put

$$\Gamma^n = \sum \eta_{i_1 i_0}^0 \eta_{i_2 i_1}^1 \ldots \eta_{i_n i_{n-1}}^{n-1} (\sigma_{i_0}^0, \sigma_{i_1}^1, \ldots, \sigma_{i_n}^n)$$

the summation running over all the n-simplices of M'_n. It is well known that Γ^n is an ordinary n-cycle of M'_n (usually called the barycentrical subdivision of γ^n).

The classical intersection of two ordinary cycles on M'_n is obtained by choosing each factor in a particular way in its homology class, which we must describe in detail.

Let $H^p = a_i \sigma_i^p$ be an ordinary p-cycle of M_n. Put

$$C^p = \sum \eta_{i_1 i_0}^0 \eta_{i_2 i_1}^1 \ldots \eta_{i_p i_{p-1}}^{p-1} a_{i_p} (\sigma_{i_0}^0, \sigma_{i_1}^1, \ldots, \sigma_{i_p}^p)\,,$$

the summation running over all the p-simplices of M'_n having the indicated form $(\sigma_{i_0}^0, \sigma_{i_1}^1, \ldots, \sigma_{i_p}^p)$. Let $K^{n-q} = b_i \sigma_i^{n-q}$ be a dual $(n-q)$-cycle of M_n. Put

$$D^q = \sum \eta_{i_{n-q+1} i_{n-q}}^{n-q} \ldots \eta_{i_n i_{n-1}}^{n-1} b_{i_{n-q}} (\sigma_{i_{n-q}}^{n-q}, \sigma_{i_{n-q+1}}^{n-q+1}, \ldots, \sigma_{i_n}^n)\,,$$

the summation running over all the q-simplices of M'_n having the indicated form $(\sigma_{i_{n-q}}^{n-q}, \sigma_{i_{n-q+1}}^{n-q+1}, \ldots, \sigma_{i_n}^n)$.

In the classical theory of combinatorial manifolds it is shown that C^p is an ordinary p-cycle on M'_n, that D^q is an ordinary q-cycle on M'_n, and that we may choose the ordinary p-cycle H^p on M_n and the dual $(n-q)$-cycle K^{n-q} on M_n in such a manner that C^p and D^q are homologous to arbitrarily given ordinary p-cycle and q-cycle on M'_n. The classical intersection of C^p and D^q is zero if $p + q < n$; in the case $p + q \geqq n$, it is equal to

$$C^p \times D^q = \sum \eta^{n-q}_{i_{n-q+1} i_{n-q}} \dots \eta^{p-1}_{i_p i_{p-1}} a_{i_p} b_{i_{n-q}} (\sigma^{n-q}_{i_{n-q}}, \dots, \sigma^p_{i_p}) , \tag{16.1}$$

the summation running over all the $(p + q - n)$-simplices of M'_n having the indicated form $(\sigma^{n-q}_{i_{n-q}}, \dots, \sigma^p_{i_p})$.

The case $p + q < n$ being trivial, we have to show that, if $p + q \geqq n$, (16.1) holds true according to our definition of intersection.

We now choose an ordering ω of the vertices of M_n and define an $(n - q)$-chain B^{n-q} on M'_n as follows. Let

$$\tau^{n-q} = (\sigma^{h_0}_{i_0}, \sigma^{h_1}_{i_1}, \dots, \sigma^{h_{n-q}}_{i_{n-q}})$$

be an $(n - q)$-simplex of M'_n. Let v_λ be the first vertex of the h_λ-simplex $\sigma^{h_\lambda}_{i_\lambda}$.

$(0 \leqq \lambda \leqq n - q)$, relatively to the ordering ω. If the v_λ's $(0 \leqq \lambda \leqq n - q)$ are not all different from each other, then the coefficient of τ^{n-q} in B^{n-q} will be zero. In the other case,

$$(v_0, v_1, \dots, v_{n-q}) \tag{16.2}$$

is an $(n - q)$-simplex of M_n and the coefficient of τ^{n-q} in B^{n-q} will be equal to the coefficient of (16.2) in K^{n-q}. It is not difficult to verify that B^{n-q} is a dual cycle on M'_n.

Now we order the set of all the vertices of M'_n in such a manner that σ^h_i precedes σ^k_j, whenever $h < k$; this can be done in many ways. We form the product $\Gamma^n B^{n-q}$ in the manner explained in sect. 10, using our ordering of the vertices of M'_n. We easily verify that

$$\Gamma^n B^{n-q} = D^q ,$$

so that

$$C^p \times D^q \sim C^p B^{n-q}$$

from (15.2) and (15.3). Now if we form the product $C^p B^{n-q}$ again in the manner explained in sect. 10, using the same ordering of the vertices of M'_n, we easily verify that (16.1) holds true.

27

ACCESSIBILITY AND HOMOLOGY

Математический сборник
(Matematičeskij sbornik)
1 (43) (1936), 661

The letters F and p denote everywhere a given closed subset of the Euclidean n-space E_n and a given point of it.

We say that F is *totally accessible* in p if every neighbourhood U of p contains a neighbourhood V of p, such that $D + (p)$ is a semicontinuum for every component D of $U - F$, such that

$$DV \neq 0 .$$

We say that F is *semitotally accessible* in p if, given any two neighbourhoods U and Z of p, there exists a neighbourhood V of p, such that $D + (p)$ is a semicontinuum for every component D of $U - F$, such that

$$DV \neq 0 \neq D - Z .$$

We write $\alpha(p, F) = 0$ if every neighbourhood U of p contains a neighbourhood V of p, such that $U - F$ has a finite number of components D, such that $DV \neq 0$.

We write $\alpha'(p, F) = 0$ if, given any two neighbourhoods U and Z of p, there exists a neighbourhood V of p, such that $U - F$ has a finite number of components D, such that $DV \neq 0 \neq D - Z$.

If $\alpha(p, F) = 0$, then F is totally accessible in p; if $\alpha'(p, F) = 0$, then F is semitotally accessible in p. The converse statements are false.

It follows from the local duality theorem (Alexandroff and Čech) that the equation $\alpha(p, F) = 0$ expresses a topological property of the space F in the point p. The same thing is true for $\alpha'(p, F) = 0$.

Alexandroff proved that the accessibility of F in p is a topological property of F in p. The same thing is true for the semitotal accessibility.

Borsuk proved that $\alpha(p, F) = 0$ if F is locally contractile in every point. It is possible to prove a more general theorem. Let m designate either $n - 1$ or $n - 2$. Suppose that, given any $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that, if C^k is a k-cycle $(0 \leqq k \leqq m)$ situated in a compact subset S of $E_n - F$, such that $d(S) < \delta$, where d

is the diameter, then there exists a compact subset T of $E_n - F$ such that $d(T) < \varepsilon$ and $C^k \sim 0$ in T. Then F is totally accessible if $m = n - 1$ and semitotally accessible if $m = n - 2$.

Let $\mu(p, F)$ denote the number of those complementary domains D of F for which $D + (p)$ is a semicontinuum. Then the number

$$\max [1, \mu(p, F)]$$

is a topological property of F in p.

28

TOPOLOGICAL SPACES

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky
66 (1937), D 225–D 264
(Translated from Czech:
Topologické prostory.)

Contents:

1.1. Definition of a topology. 1.2. Comparison of various topologies. 1.3. Closed sets. 1.4. Open sets. 1.5. Subspaces.
2.1. Neighborhoods of a point and neighborhoods of a set.
3.1. G_δ and F_σ sets. 3.2. G_d and F_s sets. 3.3. The star of a set.
4.1. Complete systems of neighborhoods of a point. 4.2. Characters. 4.3. Pseudocharacters and internal characters.
5.1. Lower and upper bases. 5.2. L-spaces and further types of spaces.
6.1. F-spaces and F-modification. 6.2. Subspaces of an F-space. 6.3. Weak and strong F-points. 6.4. Open bases. 6.5. Construction of F-modification by transfinite induction.
7.1. A-spaces. 7.2. A-points and A-sets. 7.3. A-modification.
8.1. Separated sets. 8.2. K-spaces and K-reduction. 8.3. B-spaces and B-points. 8.4. H-spaces and H-points. 8.5. R-spaces and R-points. 8.6. N-spaces and hereditary N-spaces.
9.1. Derivatives. 9.2. Accumulation points.
10.1. Continuity. 10.2. Strict continuity. 10.3. Closed and semi-closed mappings.
11.1. Examples. 11.2. Historical remarks. 11.3. Problems.

1.1. Let P be a given set. It is said that *there is given a topology for P*, or that P is a *topological space* (abbreviated to: a space P), if there is an operator which assigns to each subset M of P a certain subset of P which is called the *closure* of M, usually denoted by $\overline{M}$, and if the following three axioms are satisfied:

$$(\mathrm{I^u}) \qquad \overline{\emptyset} = \emptyset\,,$$

$$(\mathrm{II^u}) \qquad M \subset P \Rightarrow M \subset \overline{M}\,,$$

$$(\mathrm{III^u}) \qquad M_1 \subset M_2 \subset P \Rightarrow \overline{M}_1 \subset \overline{M}_2\,.$$

The elements of the space are called points, and sets $M \subset P$ are called *point sets*.

1.2. The notation $\overline{M}$ used here for the closure of a set $M \subset P$ is suitable only if one topology for P is being considered; this is usually the case. If there are given several topologies, we choose for each of them one of signs u, v, w etc., and then we speak e.g. about the u-topology or about the space (P, u). The closure of a set $M \subset P$ relative to the topology u is then denoted by uM.

If u and v are two topologies for P and if $M \subset P \Rightarrow uM \subset vM$, then it is said that u is *finer* than v or that v is *coarser* than u.

If $\mathfrak{U}$ is any non-void system of topologies for P, then its supremum is a topology v_1 and its infimum is a topology v_2 such that, for all $M \subset P$,

$$v_1 M = \sum_{u \in \mathfrak{U}} uM , \quad v_2 M = \prod_{u \in \mathfrak{U}} uM .$$

It is easy to see that v_1 is the finest among all topologies coarser than any topology $u \in \mathfrak{U}$. v_1 belongs to $\mathfrak{U}$ if and only if there exists the coarsest topology of all topologies $u \in \mathfrak{U}$; v_1 is then this coarsest topology.

Analogously for v_2. In particular there always exists a *coarsest topology* for P, which then satisfies

$$(1) \qquad \bar{\emptyset} = \emptyset , \quad \emptyset \neq M \subset P \Rightarrow \overline{M} = P ,$$

and a *finest topology* for P, for which

$$(2) \qquad M \subset P \Rightarrow \overline{M} = M .$$

1.3. A set $M \subset P$ is called *closed* if $\overline{M} = M$. Because of ($\mathrm{II^u}$) it is sufficient to require $\overline{M} \subset M$. As $\overline{M} \subset P$ for all $M \subset P$, the following theorem is true:

1.3.1. *P is a closed set.*

From the axiom ($\mathrm{I^u}$) we have that

1.3.2. *$\emptyset$ is a closed set.*

From axiom ($\mathrm{III^u}$) there follows

1.3.3. *The intersection of an arbitrary non-void family of closed sets is a closed set.*

1.4. A set $M \subset P$ is called *open* if $P - M$ is closed. From the theorems 1.3.1 to 1.3.3 there follow the theorems

1.4.1. *$\emptyset$ is an open set.*

1.4.2. *P is an open set.*

1.4.3. *The union of an arbitrary non-void family of open sets is an open set.*

1.5. Let a topology u for P be given, and let $Q \subset P$ be a set. We also introduce a topology v for Q connected with the given topology u for P in the manner to be described below. The space (Q, v) is then said to be *embedded* in the space (P, u). If $M \subset Q$ then there are two closures of M, uM in the space (P, u) and vM in the space (Q, v). The set uM is then called simply the closure, and vM the *relative closure* of M.

The relative closure is defined by the formula

$$vM = Q \, . \, uM .$$

A set $M \subset Q$ is closed (i.e. closed in P) if $uM = M$; M is *relatively closed* (i.e. closed in Q) if $vM = M$. Similarly we speak about *relatively open* sets.

1.5.1. *If $M \subset P$ is closed, then QM is relatively closed.*

Proof. We have $v(QM) = Q \,.\, u(QM) \subset Q \,.\, uM = QM$.

1.5.2. *If $M \subset P$ is open, then QM is relatively open.*

Proof. $P - M$ is closed, so that $Q - QM = Q(P - M)$ is relatively closed.

2.1. Let P be a space and let $a \in P$, $O \subset P$. O is said to be a *neighborhood* of the point a (in the space P), if a is not a point of $\overline{P - O}$. From axiom (I^{u}) there follows

2.1.1. *P is a neighborhood of each point $a \in P$.*

From axiom (II^{u}) there follows

2.1.2. *If O is a neighborhood of a point a, then $a \in O$.*

If O is a neighborhood of a point a then it is also said that a is an *internal point* of the set O. The set of all internal points of the set O is called the *interior* of the set O. From ($\mathrm{III}^{\mathrm{u}}$) there follows

2.1.3. *If O is a neighborhood of a point a and if $O \subset O_1 \subset P$, then O_1 is also a neighborhood of a.*

2.1.4. *If $a \in P$, $M \subset P$, then $a \in \overline{M}$ if and only if $OM \neq \emptyset$ for every neighborhood O of a.*

Proof. I. Let $a \notin \overline{M}$. Then $O = P - M$ is a neighborhood of a and $OM = \emptyset$.

II. Let O be a neighborhood of a such that $OM = \emptyset$. Then $M \subset P - O$ and $\overline{M} \subset \overline{P - O}$. From the definition of neighborhoods it follows that $a \notin \overline{P - O}$, and then $a \notin \overline{M}$.

The following theorem is evident.

2.1.5. *A set $G \subset P$ is open if G is a neighborhood of each point $a \in G$.*

$O \subset P$ is a *neighborhood of a set $M \subset P$* (in the space P) if O is a neighborhood of each point $a \in M$, i.e. if M is a subset of the interior of O. From theorems 2.1.1 to 2.1.3 there follow the theorems

2.1.6. *P is a neighborhood of every set $M \subset P$.*

2.1.7. *If O is a neighborhood of a set M, then $M \subset O$.*

2.1.8. *If O is a neighborhood of a set M and $O \subset O_1 \subset P$, then O_1 is also a neighborhood of M.*

2.1.9. *Let u and v be two topologies for P, u finer than v. Let O be a neighborhood of a set $M \subset P$ in the space (P, v). Then O is a neighborhood of M in (P, u).*

Proof. If $a \in M$, we have $a \in P - v(P - O)$, $u(P - O) \subset v(P - O)$, and then $a \in P - u(P - O)$.

2.1.10. *Let u and v be two topologies for P. If every neighborhood O of an arbitrary point $a \in P$ in (P, v) is a neighborhood of a* in *(P, u), then u is finer than v.*

The proof follows easily from 2.1.4.

2.1.11. *Let Q be embedded in P, $M \subset Q$. A set $\Omega \subset Q$ is a neighborhood of M in Q if and only if there exists a neighborhood O of M in P such that $\Omega = QO$.*

Proof. I. Let O be a neighborhood of M in P. This means that $M . \overline{P - O} = \emptyset$ and hence $M . (Q . \overline{Q - QO}) = \emptyset$, i.e. QO is a neighborhood of M in Q.

II. Let Ω be a neighborhood of M in Q; then we have $M . (Q . \overline{Q - \Omega}) = M . . \overline{Q - \Omega} = \emptyset$. Let $O = P - (Q - \Omega)$. Then $\Omega = QO$ and $M . \overline{P - O} = \emptyset$, i.e. O is a neighborhood of M in the space P.

3.1. A subset M of a topological space P is called a G_δ (or a $G_\delta(P)$) if it is the intersection of a countable family $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ of open sets.

The following theorems are evident.

3.1.1. *Each open set is a G_δ.*

3.1.2. *The intersection of a countable family $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ of G_δ sets is itself a G_δ.*
A subset M of a topological space P is called an F_σ (or an $F_\sigma(P)$), if it is the union of a countable family $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ of closed sets.

The following theorems are evident.

3.1.3. *A set $M \subset P$ is an F_σ if and only if the set $P - M$ is a G_δ.*

3.1.4. *Each closed set is an F_σ.*

3.1.5. *The union of a countable family $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ of F_σ sets is itself an F_σ.*

Let Q be a space embedded in P. A subset M of Q is called a G_δ if it is a $G_\delta(P)$, and is called a *relative* G_δ if it is a $G_\delta(Q)$. Analogously we can speak about *relative* F_σ sets. From theorems 1.5.1 and 1.5.2 there follow

3.1.6. *If $M \subset P$ is an F_σ, then QM is a relative F_σ.*

3.1.7. *If $M \subset P$ is a G_δ, then QM is a relative G_δ.*

3.2. A subset M of a topological space P is called a G_d (or a $G_d(P)$) if it is the intersection of some family $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ of open sets.

Then:

3.2.1. *Each G_δ set is a G_d.*

3.2.2. *The intersection of a family $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ of G_d sets is a G_d.*

3.2.3. *The union of a family $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ of G_d sets is a G_d.*

Proof.[1] Let M be any set from the family $\mathfrak{S}$. There exists a system $\mathfrak{T}(M) \neq \emptyset$ of open sets such that

$$\prod_{G \in \mathfrak{T}(M)} G = M. \tag{1}$$

Denote by Φ the system of all operators φ, which assign to each $M \in \mathfrak{S}$ an open set $\varphi(M) \in \mathfrak{T}(M)$. If $\varphi \in \Phi$ then the set

$$\Gamma(\varphi) = \sum_{M \in \mathfrak{S}} \varphi(M) \tag{2}$$

[1] A shorter proof is given in 6.3.

is open by 1.4.3. It is sufficient to prove

(3) $$\sum_{M \in \mathfrak{S}} M = \prod_{\varphi \in \Phi} \Gamma(\varphi).$$

First let a be a point of $\sum_{M \in \mathfrak{S}} M$. Then there exists a set $M_0 \in \mathfrak{S}$ such that $a \in M_0$. Consider any element $\varphi \in \Phi$. We have to show that $a \in \Gamma(\varphi)$. Because $\varphi \in \Phi$, it follows that $\varphi(M_0) \in \mathfrak{T}(M_0)$; by (1) we have $a \in \varphi(M_0)$ and in view of (2), $a \in \Gamma(\varphi)$. On the other hand let $a \notin \sum_{M \in \mathfrak{S}} M$. According to (1) one can assign to each set $M \in \mathfrak{S}$ a set $\varphi_0(M) \in \mathfrak{T}(M)$ such that $a \notin \varphi_0(M)$. Then $\varphi_0 \in \Phi$, and by (2) a does not belong to $\Gamma(\varphi_0)$. Thus $a \notin \prod_{\varphi \in \Phi} \Gamma(\varphi)$.

A subset M of a topological space P is called an F_s (or an $F_s(P)$) if it is the union of some family $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ of closed sets.

The following theorems are evident.

3.2.4. *A set $M \subset P$ is an F_s if and only if $P - M$ is a G_d.*

3.2.5. *Each F_σ set is an F_s.*

3.2.6. *The union of a family $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ of F_s sets is an F_s.*

From theorems 3.2.3 and 3.2.4 there follows

3.2.7. *The intersection of a family $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ of F_s sets is an F_s.*

Let Q be a space embedded in P. A subset M of Q is called a G_d if it is a $G_d(P)$, and it is called a *relative* G_d if it is a $G_d(Q)$. Analogously we can speak about *relative* F_s sets. From theorems 1.5.1 and 1.5.2 there follow

3.2.8. *If $M \subset P$ is an F_s, then QM is a relative F_s.*

3.2.9. *If $M \subset P$ is a G_d, then QM is a relative G_d.*

3.3. The *star* of a set $M \subset P$ is the intersection of all neighborhoods of M. Let us denote it by M^s. In particular, $a^s (a \in P)$ is the star of a point a, i.e. the star of the one-point set (a).

3.3.1. *Let $a \in P$, $M \subset P$. Then $a \in M^s$ if and only if $M \,.\, \bar{a} \neq \emptyset$.* [Note: The closure of a point a, i.e. of the set (a) is denoted by $\bar{a}$.]

Proof. I. Let $M \,.\, \bar{a} = \emptyset$. Then $P - (a)$ is a neighborhood of M which does not contain a, so that $a \notin M^s$.

II. Let $M \,.\, \bar{a} \neq \emptyset$ and let O be a neighborhood of M. We are to prove that $a \in O$. There exists a point $b \in M \,.\, \bar{a}$. Because $b \in M$, O is a neighborhood of b. Because $b \in \bar{a}$, theorem 2.1.4 shows that $O \,.\, (a) \neq \emptyset$, i.e. that $a \in O$.

The following theorems are evident.

3.3.2. $\emptyset^s = \emptyset$.

3.3.3. $M \subset P \Rightarrow M \subset M^s$.

From 3.3.1. there follows the theorem

3.3.4. *Let $\mathfrak{S}$ be a non-void family of point sets. Then*

(1) $$\sum_{M \in \mathfrak{S}} M^s = \Big(\sum_{M \in \mathfrak{S}} M\Big)^s .$$

It is easy to prove

3.3.5. *If $M \subset P$ is a G_d, then $M = M^s$.*

From 2.1.11 there follows

3.3.6. *Let Q be a space embedded in a space P and let $M \subset Q$. Then the star of M in Q is the intersection of Q with the star of M in P.*

4.1. A *complete system of neighborhoods of a point* $a \in P$ (or a *complete system at* a) is a system $\mathfrak{O}(a)$ of neighborhoods of a such that to *every* neighborhood Ω of a there is a set O with $O \subset \Omega$ and $O \in \mathfrak{O}(a)$.

If $\mathfrak{O}(a)$ is a complete system of neighborhoods of a point a, then from 2.1.1 and 2.1.2 there follow

(I°) $$\mathfrak{O}(a) \neq \emptyset ,$$

(II°) $$O \in \mathfrak{O}(a) \Rightarrow a \in O .$$

Conversely, let $\mathfrak{O}(a)$ be a family of subsets of a given set P assigned to each point $a \in P$ in such a manner that the axioms (I°) and (II°) hold. Then there exists just one topology u for P such that $\mathfrak{O}(a)$ is a complete system of neighborhoods of the point a in (P, u). In view of the definition of a complete system we have namely by 2.1.4 the following assertion

4.1.1. *The closure of a set $M \subset P$ is the set of all points $a \in P$ such that*

$$O \in \mathfrak{O}(a) \Rightarrow OM \neq \emptyset .$$

Ift he closure is defined by means of 4.1.1, one can see that the axioms (I^{u}) to ($\mathrm{III}^{\mathrm{u}}$) are fulfilled and that $\mathfrak{O}(a)$ is a complete system of neighborhoods of any point a of P.

If a topology for P is constructed using the systems $\mathfrak{O}(a)$ which satisfy (I°) and (II°), then $\mathfrak{O}(a)$ is called a *defining system of neighborhoods* of the point a. This method of construction of topologies is very popular in practise. One must bear in mind that distinct defining systems can define the same topology. Two different systems $\mathfrak{O}_1$ and $\mathfrak{O}_2$ define *the same topology* if and only if $\mathfrak{O}_1(a)$ and $\mathfrak{O}_2(a)$ are *equivalent* systems for each $a \in P$ in the following sense: Two systems $\mathfrak{O}_1(a)$ and $\mathfrak{O}_2(a)$ are equivalent if and only if for each $O_1 \in \mathfrak{O}_1(a)$ there is an $O_2 \in \mathfrak{O}_2(a)$ such that $O_2 \subset O_1$ and if for each $O_2 \in \mathfrak{O}_2(a)$ there is an $O_1 \in \mathfrak{O}_1(a)$ such that $O_1 \subset O_2$. It may happen more generally, that only the former condition is satisfied. Then it is easy to see that this occurs if and only if the *first topology is coarser than the second.*

Let a space Q be embedded in the space P. Let $\mathfrak{O}(a)$ be a complete system of neighborhoods of a point a in P. Then 2.1.11 shows that the system of all sets $Q \,.\, O$, where $O \in \mathfrak{O}(a)$, is a complete system of neighborhoods of a in Q.

4.2. *A complete system of neighborhoods of a set* $M \subset P$ (or *a complete system of* M) is a system $\mathfrak{O}(M)$ of neighborhoods of a set M such that to every neighborhood Ω of M there exists a set O with $O \subset \Omega$ and $O \in \mathfrak{O}(M)$. The following theorem is evident.

4.2.1. *If* $\mathfrak{O}(M)$ *is a complete system of neighborhoods of a set* $M \subset P$, *then*

$$\prod_{O \in \mathfrak{O}(M)} O = M^s .$$

Let $M \subset P$, then there exists at least one complete system of neighborhoods of M, namely the system of all neighborhoods of M. Each complete system has a definite cardinality. Because every non-void family of cardinal numbers has a least member, there exist complete systems with *minimal* cardinality. This minimal cardinality $\chi(M)$ [or $\chi_P(M)$ or, if u is the given topology then $\chi_u(M)$] is called the *character*[2] of M (in P). In particular, every *point* $a \in P$ has a character. A point a is called a *point of countability* if

$$\chi(a) \leqq \aleph_0 .$$

If every point $a \in P$ is a point of countability we say that P satisfies the *first axiom of countability.*[3]

From 2.11 there follows

4.2.2. *If* $M \subset Q \subset P$, *then* $\chi_Q(M) \leqq \chi_P(M)$.
In particular, if P satisfies the first axiom of countability then so does Q.

4.2.3.[4] *Let* $\mathfrak{O}(M)$ *be a complete system of neighborhoods of a set* $M \subset P$. *Then one can choose from* $\mathfrak{O}(M)$ *a complete system of neighborhoods of* M *with cardinality* $\chi(M)$.

Note. In particular, if there is given a topology for P constructed by defining systems $\mathfrak{O}(a)$ of neighborhoods of points $a \in P$, then each point $a \in P$ has a complete system of neighborhoods included in $\mathfrak{O}(a)$ and with cardinality $\chi(a)$.

Proof. There exists a complete system $\mathfrak{O}_0(M)$ of neighborhoods of a set M whose cardinality is $\chi(M)$. Because $\mathfrak{O}(M)$ is a complete system, one can assign to each set $\Omega \in \mathfrak{O}_0(M)$ a set $\varphi(\Omega) \in \mathfrak{O}(M)$ such that $\varphi(\Omega) \subset \Omega$. The system of all such $\varphi(\Omega)$, where $\Omega \in \mathfrak{O}_0(M)$, is a complete system of neighborhoods of the set M and is a subsystem of the complete system of M. Its cardinality is at most $\chi(M)$, and hence equal to $\chi(M)$.

4.3. A *pseudocomplete system of neighborhoods* of a set $M \subset P$ is a non-void family $\mathfrak{O}(M)$ of neighborhoods of M which has the property

$$\prod_{O \in \mathfrak{O}(M)} O = M^s .$$

[2] P. Alexandroff and P. Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts (Verhandlingen Akad. Amsterdam 1929), page 2.

[3] F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig, Veit & Comp., 1914), page 263.

[4] Loc. cit. sub[2], page 62.

Analogously as for complete systems, there is a pseudocomplete system of a set M with *minimal* cardinality. Let us denote this cardinality by $\psi(M)$ [or $\psi_P(M)$ or, if u is the given topology then $\psi_u(M)$]. The cardinal $\psi(M)$ is called the *pseudocharacter*[5] of M (in the space P). In particular, every point $a \in P$ has a pseudocharacter $\psi(a)$. In view of 2.1.11 we have the theorem

4.3.1. *If* $M \subset Q \subset P$, *then*

$$\psi_Q(M) \leqq \psi_P(M).$$

In addition to $\chi(M)$ and $\psi(M)$ we shall introduce a further cardinal $\omega(M)$ [or $\omega_P(M)$ or, if u is the given topology then $\omega_u(M)$]. The cardinal $\omega(M)$ will be called the *internal character* and defined as follows. If M^s is a neighborhood of M, set $\omega(M) = 1$. If M^s is not a neighborhood of M and if there exists at least one non-void family $\mathfrak{O}(M)$ of neighborhoods of M [e.g. the family of all neighborhoods] such that

$$(*) \qquad \prod_{O \in \mathfrak{O}(M)} O \text{ is not a neighborhood of a set } M;$$

then there exists a family $\mathfrak{O}(M)$ satisfying $(*)$ and leaving *minimal* cardinality. This cardinal ($\geqq 2$) is denoted by $\omega(M)$. In particular, every point $a \in P$ has an internal character. It is easy to prove the following theorem.

4.3.2. *For every* $M \subset P$

$$\chi(M) = 1 \Leftrightarrow \psi(M) = 1 \Leftrightarrow \omega(M) = 1 .$$

4.3.3. *For every* $M \subset P$

$$\omega(M) \leqq \psi(M) \leqq \chi(M).$$

Proof. In view of 4.3.2 we can suppose that $\omega(M) > 1$, and thus M^s is not a neighborhood of M. Then every pseudocomplete system has property $(*)$, so that $\psi(M) \geqq \omega(M)$. Assertion 4.2.1 shows that every complete system is a pseudocomplete system, so that $\chi(M) \geqq \psi(M)$.

5.1. Let P be a given set, $\mathfrak{S}$ a given family of subsets of P. To each set $S \in \mathfrak{S}$ let there be assigned a set $vS \subset P$, in such a manner that the following three axioms are satisfied.

(I)^s If $\emptyset \in \mathfrak{S}$, then $v\emptyset = \emptyset$,

(II)^s $S \in \mathfrak{S} \Rightarrow S \subset vS$,

(III)^s $S_1 \in \mathfrak{S},\ S_2 \in \mathfrak{S},\ S_1 \subset S_2 \Rightarrow vS_1 \subset vS_2$.

In the special case that $\mathfrak{S}$ is the family of all subsets of P, these axioms are fulfilled if and only if v is a topology for P. In general, there always exists in P at least one topology u such that $uS = vS$ for each $S \in \mathfrak{S}$. There even exists a *finest* topology u_1 and a *coarsest* topology u_2 in the system $\mathfrak{A}$ of all such topologies. The closures u_1M

[5] Loc. cit. sub[2], page 60.

and u_2M are defined as follows. If there does not exist any $S \subset M$ in $\mathfrak{S}$ then $u_1M = M$. If there exists at least one $S \subset M$ in $\mathfrak{S}$ then $u_1M = M + T$, where T is the union of all vS with $S \in \mathfrak{S}$, $S \subset M$. We have $u_2\emptyset = \emptyset$. If $M \neq \emptyset$ and if in $\mathfrak{S}$ there is no $S \supset M$, then $u_2M = P$. If $M \neq \emptyset$ and if there exists in $\mathfrak{S}$ at least one $S \supset M$ then u_2M is the intersection of all vS with $S \in \mathfrak{S}$, $S \supset M$. It is easy to verify the above assertions.

Now suppose that there is given a topology u for P and choose an arbitrary family $\mathfrak{S}$ of point sets. For each $S \in \mathfrak{S}$ set $vS = uS$, and define u_1 and u_2 as above. If $u = u_1$ then $\mathfrak{S}$ is called a *lower base* of the topology u [or of the space (P, u)]. If $u = u_2$ then $\mathfrak{S}$ is called an *upper base* of the topology u [or of the space (P, u)].

5.2. We may modify these considerations to a more special – and possibly more useful – case. Let u be a given topology for P.

First, take a cardinal $\mathfrak{a}$ and let $\mathfrak{S}$ be the family of all $S \subset P$ with cardinality $<\mathfrak{a}$. Then one can construct the topology $u_1 = u_1(\mathfrak{a})$ which is finer than u and which is unambigously determined by u and by the cardinal number $\mathfrak{a}$. There exists a least cardinal $\tau(u)$ such that $u_1[\tau(u)] = u$. The number $\tau(u)$ is an important "invariant" of the topology u.

Next, let $\mathfrak{S}$ be the system of all $S \subset P$ such that $\bar{S} - S$ in a one-point set. If $\mathfrak{S}$ is a lower base then we have an important type of topology, with the following property: If $M \subset P$, $a \in \overline{M} - M$, then there exists an $S \subset M$ such that $\bar{S} = S + (a)$. If we take instead of $\mathfrak{S}$ the system $\mathfrak{S}(\mathfrak{a})$ of all $S \in \mathfrak{S}$ with cardinality $<\mathfrak{a}$, then we again obtain an interesting case.

Third, let $\mathfrak{S}$ be the family of all $S \subset M$ which have the following properties. The set S is infinite and countable; there exists a point $a \in P$ (depending on S) such that for every infinite subset T of S there is $\overline{T} = T + (a)$. If $\mathfrak{S}$ is a lower base we shall say that u is an *L-topology* [or that (P, u) is an *L-space*]. The notion of L-spaces can also be introduced in the following way. Let P be a given set; let some point sequences (i.e. sequences such that $a_n \in P$) be called convergent sequences; to each convergent sequence $\{a_n\}$ let there be assigned a point $\lim a_n$ in such a manner that the following axioms are satisfied:

$(\mathrm{I})^L$ If $\{a_n\}$ is a convergent sequence, $\lim a_n = a$ and if $\{b_n\}$ is a subsequence of $\{a_n\}$, then $\{b_n\}$ is also convergent and $\lim b_n = a$.

$(\mathrm{II})^L$ If $a_n = a$ for each n, then $\{a_n\}$ is a convergent sequence and $\lim a_n = a$.

In this situation we can define a topology for P such that the closure $\overline{M}$ of a set $M \subset P$ is defined as the set of all the points $\lim a_n$, where $\{a_n\}$ is an arbitrary convergent sequence with $a_n \in M$ for each n. It is easy to see that the topology thus defined is an L-topology. On the other hand, every L-space P can be constructed in the above way if one defines suitably the convergent sequences and their limits. Such a definition can be described, for example, as follows. Let $\{a_n\}$ be a sequence of points and let S be the set of all a_n. If S is finite we shall say that $\{a_n\}$ is a convergent sequence if and only if $S = (a)$ and then we shall define $\lim a_n = a$. If S is infinite then we shall say that $\{a_n\}$ is convergent if and only if (1) $a_m \neq a_n$ for $m \neq n$, (2) if $S \in \mathfrak{S}$ then there exists exactly one point $a \in P$ with $\overline{T} = T + (a)$ for each infinite set $T \subset S$. Then we shall define $\lim a_n = a$.

6.1. A space P is called an *F-space*, or a given topology for P is called an *F-topology*, if the axioms ($\mathrm{I^u}$), ($\mathrm{II^u}$), ($\mathrm{III^u}$) are satisfied and also

$$(\mathrm{IV^u})_F \qquad M \subset P \Rightarrow \overline{\overline{M}} = \overline{M}\,.$$

Because of ($\mathrm{II^u}$) it is sufficient to demand formally less, namely

$$M \subset P \Rightarrow \overline{\overline{M}} \subset \overline{M}\,.$$

In view of the definition of closed sets (1.3), axiom $(\mathrm{IV^u})_F$ can be formulated in the following way: *The set $\overline{M}$ is closed for each $M \subset P$.* Furthermore,

6.1.1. *If P is an F-space, then for each $M \subset P$, $\overline{M}$ is the least closed set containing M.*

Proof. $\overline{M}$ is closed and [axiom ($\mathrm{II^u}$)] $\overline{M} \supset M$. If F is closed and $F \supset M$, then by ($\mathrm{III^u}$) $\overline{F} \supset \overline{M}$. But $\overline{F} = F$, and thus $F \supset \overline{M}$.

6.1.2. *A space P is an F-space if and only if the family $\mathfrak{F}$ of all closed sets is its upper base.*

Proof. I. If P is an F-space then by 6.1.1 $\mathfrak{F}$ is an upper base.

II. Let $\mathfrak{F}$ be an upper base and let $M \subset P$. In view of 1.3.1 there exists at least one $F \in \mathfrak{F}$, $F \supset M$. Because $\mathfrak{F}$ is an upper base, $\overline{M}$ is the intersection of all $F \in \mathfrak{F}$, $F \supset M$. Thus, $\overline{M} \in \mathfrak{F}$ by 1.3.3, i.e. $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

Let $\mathfrak{F}$ be the family of subsets of a given set P. In order that there exist a topology for P such that $\mathfrak{F}$ is precisely the family of all closed sets of P in this topology, the following axioms must be fulfilled (by the 1.3.1 – 1.3.3)

($\mathrm{I^f}$) $\quad P \in \mathfrak{F}$,

($\mathrm{II^f}$) $\quad \emptyset \in \mathfrak{F}$,

($\mathrm{III^f}$) the intersection of an arbitrary non-void system of sets of $\mathfrak{F}$ belongs to $\mathfrak{F}$.

6.1.3. *If $\mathfrak{F}$ is a system of subsets of P satisfying the axioms ($\mathrm{I^f}$) to ($\mathrm{III^f}$), then there exists in P exactly one F-topology u such that $\mathfrak{F}$ is the system of all closed sets. If v is another topology for P such that each $F \in \mathfrak{F}$ is closed relatively to v, then v is finer than u.*

The proof follows from 5.1, because every topology for P relative to which each $F \in \mathfrak{F}$ is closed, is such that in 5.1 there is $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}$ and $vF = \mathfrak{F}$ for each $F \in \mathfrak{F}$. It is then sufficient to apply theorem 6.1.2.

6.1.4. *Let there be given two F-topologies u and v for P. The topology u is finer than v if and only if every $M \subset P$ closed relative to v is also closed relative to u.*

Proof. I. Let u be finer than v. If $M \subset P$ is closed relative to v, then

$$M \subset uM \subset vM = M ,$$

and thus $M = uM$.

II. Now let

$$M = vM \Rightarrow M = uM.$$

From 6.1.1 it follows easily that u is finer than v.

Considering *only F-topologies*, by 6.1.3, the topology can be derived from the notion of closed sets satisfying $(\mathrm{I}^{\mathrm{f}})$ to $(\mathrm{III}^{\mathrm{f}})$. The closure of a point set is then *defined* by theorem 6.1.1. However, in the general case, the system of closed sets does not determine uniquely the given topology. Indeed, assume given a topology v for P; if $\mathfrak{F}$ is the family of all closed sets relative to v, then, in view of 6.1.3, there exists in P exactly one F-topology u such that $\mathfrak{F}$ is the family of closed sets relative to this F-topology u. If v is not an F-topology then, of course, $u \neq v$. The topology u is called the *F-modification* of v.

6.1.5. *Let (P, v) be an arbitrary space. Let u be the F-modification of v. Then u is the finest of all F-topologies coarser than v.*

Proof. I. Let $M \subset P$. Let $F \subset P$ be a set closed relative to v and let $F \supset M$; then $F = vF \supset vM$. But uM is the intersection of all such F; hence, $uM \supset vM$. Therefore v is finer than u.

II. Let an F-topology w be coarser than v. If $F \subset P$ is closed relative to w, then

$$F \subset vF \subset wF = F ;$$

also $vF = F$, i.e. F is closed relative to v and then also relative to u. In view of 6.1.4, w is coarser than u.

6.2. Let a space Q be embedded in the space P. The following theorem is evident.

6.2.1. *If P is an F-space then Q is also an F-space.*

6.2.2. (Converse to theorem 1.5.1.) *If P is an F-space and if $M \subset Q$ is relatively closed, then there exists a closed set F such that $M = QF$.*

Proof. Take $F = \overline{M}$.

6.2.3. (Converse to theorem 1.5.2.) *Let P be an F-space and let $M \subset Q$ be relatively open; then there exists an open set G such that $M = QG$.*

Proof. The set $Q - M$ is relatively open. Then by 6.2.2 there exists a closed set F such that $M = QF$. Put $G = P - F$.

6.2.4. *If P is not an F-space, then one can choose a $Q \subset P$ such that the theorems 6.2.2 and 6.2.3 are not true.*

Proof. There exists an $M \subset P$ such that $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}} \neq \overline{M}$. Take $a \in \overline{\overline{M}} - \overline{M}$ and $Q = M + (a) \neq M$. Then $Q\overline{M} = M$, so that M is relatively closed. If F is closed and

$M \subset F$ [as is the case for $M = QF$], then $\overline{M} \subset \overline{F} = F$ and $\overline{\overline{M}} \subset \overline{F} = F$. Thus $a \in F$ and $Q \subset F$, and hence $QF \neq M$. Since M is relatively closed, the one-element set $(a) = Q - M$ is relative open. If there were $(a) = QG$ with open G, then $M = QF$ with closed $F = P - Q$.

6.3. A point $a \in P$ is called a *weak F-point* if $M \subset P$, $a \in \overline{\overline{M}} \Rightarrow a \in \overline{M}$.

If a neighborhood of a point $a \in P$ or of a set $M \subset P$ is open, then it is called an *open neighborhood* of a point $a \in P$ or a set $M \subset P$.

A point $a \in P$ is called a *strong F-point* if the open neighborhoods of a point a form a base for the neighborhood system of a.

6.3.1. *If a is a strong F-point, then a is a weak F-point.*

Proof. In the opposite case there exists a set M such that $a \in \overline{\overline{M}} - \overline{M}$. As $a \in P - - \overline{M}$, the set $P - M$ is a neighborhood of a. Because a is a strong F-point, there exists an open set G such that $a \in G \subset P - M$. Then $M \subset P - G$ and $\overline{M} \subset \overline{P - G} = = P - G$. We have $\overline{\overline{M}} \subset \overline{P - G} = P - G$, and thus $a \in P - G$; this is a contradiction.

Let P_1 be a set consisting of all the positive integers and of the symbol ∞. Let the closure of ∞ be the point ∞. Let the closure of an element $n \neq \infty$ be the two-point set $(n, n + 1)$, and let the closure of a finite set be the sum of the closures of these sets. Let the closure of any infinite set M be P_1. Then P_1 is an A-space[6] and ∞ is a weak F-point but not a strong F-point.

The following theorem is evident.

6.3.2. *If each $a \in P$ is a weak F-point, then P is an F-space.*

6.3.3. *If P is an F-space, then each point $a \in P$ is a strong F-point.*

Proof. Let P be an F-space and let O be a neighborhood of a point $a \in P$. Then $a \in P - \overline{P - O}$, and the set $\overline{P - O}$ is closed. Then $P - \overline{P - O}$ is an open neighborhood of a contained in O. Thus a is a strong F-point.

The following theorem is evident.

6.3.4. *Let Q be a space embedded in P and let $a \in Q$. If a is a weak F-point of P, then a is a weak F-point of Q; if a is a strong F-point of P, then a is a strong F-point of Q.*

6.3.5. *Let P be an F-space and let $M \subset P$. The system $\mathfrak{G}$ of all the open neighborhoods of the set M is a complete system.*

Proof. Let O be a neighborhood of a set M. Then O is a neighborhood of every point $a \in M$, so that in view of 6.3.3 one may assign to each point $a \in M$ an open set $G(a)$ such that $a \in G(a) \subset O$. Let $G = \sum_{a \in M} G(a)$. Then $M \subset G \subset O$, and $G \in \mathfrak{G}$ by 1.4.3.

6.3.6. (Converse to theorem 3.3.5.) *Let P be an F-space and let $M = M^s$. Then M is a G_d.*

[6] 7.1.

Proof. Theorem 6.3.5 shows that the open neighborhoods of a set M form a complete system. Then, in view of 4.2.1, M^s is a G_d.

New proof of theorem 3.2.3. Let each $M \in \mathfrak{S}$ be a G_d. We shall prove that $S = \sum_{M \in \mathfrak{S}} M$ is a G_d. By 6.1.3, there exists an F-topology for P with the same closed sets as those of the given topology. Then the G_d sets are common for both topologies. Therefore it is sufficient to prove the theorem only for P an F-space. In view of 3.3.5, $M \in \mathfrak{S}$ implies $M = M^s$, and by 3.3.4 $S^s = \sum_{M \in \mathfrak{S}} M^s$; thus $S^s = S$ and S is G_d by 6.3.6.

If a complete system $\mathfrak{O}(a)$ at a point a consists of open neighborhoods [this is possible if and only if a is a strong F-point], then axioms (I°), (II°) are fulfilled and also

(III°)$_F$ If $O \in \mathfrak{O}(a)$, $b \in O$, then there exists a set $\Omega \in \mathfrak{O}(b)$ such that $\Omega \subset O$, where $\mathfrak{O}(b)$ is any complete system of neighborhoods at b.

Conversely, let P be a given set and Q its subset. To each point $a \in P$ let there be assigned a system $\mathfrak{O}(a)$ of subsets of P such that for each $a \in P$ the axioms (I°) and (II°) hold, and for each $a \in Q$ also (III°)$_F$ holds. Then one can define a topology for P with $\mathfrak{O}(a)$ as a defining system of neighborhoods. It is easy to see that each $a \in Q$ is a strong F-point and that $\mathfrak{O}(a)$ consists of open neighborhoods for each $a \in Q$. In particular, if $Q = P$ then P is an F-space and all defining neighborhoods are open.

6.4. Let P be an F-space. A family $\mathfrak{B}$ of subsets of P is called an *open base* if each $B \in \mathfrak{B}$ is open and if each open $G \neq \emptyset$ is the union of some sets from $\mathfrak{B}$.

6.4.1.[7] *A family $\mathfrak{B}$ of open sets of an F-space P is its open base if and only if for each $a \in P$ the system $\mathfrak{B}(a)$ of those $B \in \mathfrak{B}$ which contain a is a complete system of neighborhoods of the point a.*

Proof. I. Let $\mathfrak{B}$ be an open base. Let O be a neighborhood of a point $a \in P$. By 6.3.3, there exists an open set G such that $a \in G \subset O$. Since $\mathfrak{B}$ is an open base, G is the union of some sets from $\mathfrak{B}$. Because $a \in G$, there exists a $B \in \mathfrak{B}(a)$ such that $B \subset G$ and then $B \subset O$. Because each set from $\mathfrak{B}$ is open, B is a neighborhood of a. $\mathfrak{B}(a)$ is then a complete system of neighborhoods at a.

II. For each $a \in P$ let $\mathfrak{B}(a)$ be a complete system of a. Let $G \neq \emptyset$ be an open set. Then G is a neighborhood of each $a \in G$, so that one may assign to each $a \in G$ a set $B(a) \in \mathfrak{B}(a) \subset \mathfrak{B}$ with $B(a) \subset G$. Obviously

$$G = \sum_{a \in G} B(a)\,.$$

Then $\mathfrak{B}$ is an open base.

If $\mathfrak{B}$ is an open base of an F-space P, then

(I^b) For each $a \in P$ there exists a $B \in \mathfrak{B}$ such that $a \in B$.

Conversely, let P be a given set and $\mathfrak{B}$ a system of its subsets such that the axiom (I^b) holds. Then there exists precisely one F-topology for P with $\mathfrak{B}$ as open base.

[7] Loc. cit. sub[2], page 3.

Indeed, if there exists such a topology, then by 6.4.1 for each $a \in P$ the family $\mathfrak{O}(a)$ of all $B \in \mathfrak{B}$ with $a \in B$ is a complete system at a. But the $\mathfrak{O}(a)$ in fact define a topology u for P, because for the systems $\mathfrak{O}(a)$ the axioms (I°) and (II°) are satisfied. They also satisfy axiom $(\mathrm{III}^\circ)_F$, and thus u is an F-topology and the sets $B \in \mathfrak{B}$ are open. $\mathfrak{B}$ is then an open base by 6.4.1.

If $\mathfrak{B}$ is an open base of an F-space P and if Q is embedded in P [in view of 6.3.2 and 6.3.4, Q is an F-space], then the system $\mathfrak{B}_0$ of all QB with $B \in \mathfrak{B}$ is (cf. 6.4.1) an open base of Q.

Every F-space P has at least one open base, namely the system of all open sets. Each open base has a certain cardinality. Because each non-void set of cardinal numbers has a least element, there exists an open base with minimal cardinality. Let us denote this cardinality $\chi^t(P)$ [or $\chi^t_u(P)$, u being the given topology]. This cardinal $\chi^t(P)$ is called the *total character* of P. We say that an F-space P satisfies the *second axiom of countability*[8] if $\chi^t(P) \leqq \aleph_0$. The following theorems are evident.

6.4.2. *If Q is embedded in an F-space P, then* $\chi^t(Q) \leqq \chi^t(P)$.

6.4.3. *If P is an F-space, then $\chi(a) \leqq \chi^t(P)$ for each $a \in P$.*

6.4.4.[9] *Let $\mathfrak{B}$ be an open base of an F-space P. Then one can choose in B an open base with cardinality $\chi^t(P)$.*

Proof. I. Let $\chi^t(P)$ be finite. Then there exists a finite open base, so that in P there is only a finite number of open sets. Denote by $\mathfrak{M}$ a system of open sets G with the following property: there exists a point $a \in G$ such that $H = G$ whenever H is an open neighborhood of a and $H \subset G$. Because P has only a finite number of open sets it is easy to see that $\mathfrak{M}$ is an open base and that $\mathfrak{M}$ is a part of each open base. Then $\mathfrak{M}$ has cardinality $\chi^t(P)$ and $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}$.

II. Let $\chi^t(P) = \mathfrak{a}$ be infinite, so that $\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Choose an open base $\mathfrak{U}$ with cardinality $\mathfrak{a}$. Denote by $\mathfrak{C}$ the system of those pairs $A_1 \in \mathfrak{U}$, $A_2 \in \mathfrak{U}$ for which there exists at least one set $B \in \mathfrak{B}$ with $A_1 \subset B \subset A_2$. For each pair $(A_1, A_2) \in \mathfrak{C}$ choose a set $\varphi(A_1, A_2) \in \mathfrak{B}$ such that $A_1 \subset \varphi(A_1, A_2) \subset A_2$. Denote by $\mathfrak{B}_0$ the system of all sets $\varphi(A_1, A_2)$ for $(A_1, A_2) \in \mathfrak{C}$. Then $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_0$ is a family of open sets, and $\mathfrak{B}_0$ has cardinality $\leqq \mathfrak{a}$.

It remains to prove that $\mathfrak{B}_0$ is an open base. Let O be a neighborhood of a point $a \in P$. In view of 6.4.1 we need only prove that there exists a pair $(A_1, A_2) \in \mathfrak{C}$ such that $a \in \varphi(A_1, A_2) \subset O$. Because $\mathfrak{U}$ is an open base, by 6.4.1 there exists an $A_2 \in \mathfrak{U}$ such that $a \in A_2 \subset O$. As $\mathfrak{B}$ is an open base, there exists a $B \in \mathfrak{B}$ such that $a \in B \subset A_2$. Because $\mathfrak{U}$ is an open base, there exists an $A_1 \in \mathfrak{U}$ such that $a \in A_1 \subset B$. Thus $A_1 \in \mathfrak{U}$, $A_2 \in \mathfrak{U}$, $B \in \mathfrak{B}$, $A_1 \subset B \subset A_2$, and then $(A_1, A_2) \in \mathfrak{C}$ and $A_1 \subset \varphi(A_1, A_2) \subset A_2$. Because $a \in A_1$, $A_2 \subset O$, one has $a \in \varphi(A_1, A_2) \subset O$.

[8] Loc. cit. sub[3], page 263 and 268.

[9] Loc. cit. sub[2], page 4.

The *least cardinality* of a family of open sets of P such that one may choose for each $a \in P$ a subfamily $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ such that

$$\prod_{G \in \mathfrak{S}} G = a^s$$

is called the *total pseudocharacter* of an F-space P and denoted by $\psi^t(P)$.

The *internal total character* of an F-space P, denoted by $\omega^t(P)$, is the *least cardinality* of a family of open sets with the property that, for each point $a \in P$ with $\omega(a) \geqq 2$, one may choose a subfamily $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ such that each $G \in \mathfrak{S}$ is, and the intersection of all $G \in \mathfrak{S}$ is not, a neighborhood of a.

The following statements are evident:

6.4.5. *If P is an F-space, then*

$$\omega^t(P) \leqq \psi^t(P) \leqq \chi^t(P).$$

6.4.6. *If P is an F-space, then $\psi(a) \leqq \psi^t(P)$ for each $a \in P$.*

6.4.7. *Let P be an F-space. Then $\omega^t(P) = 0$ if and only if $\omega(a) = 1$ for each $a \in P$. If $\omega^t(P) > 0$, then $\omega(a) \leqq \omega^t(P)$ for each $a \in P$.*

6.5. Let (P, u) be an arbitrary space. We shall assign[10] to each ordinal $\xi > 0$ a topology u^ξ for P, defining for each $M \subset P$ by transfinite induction: (1) $u^1 M = uM$, (2) $u^{\xi+1}M = u(u^\xi M)$, (3) if α is a limit ordinal, then $u^\alpha M = \sum_{\xi<\alpha} u^\xi M$. One may prove by transfinite induction that, for each ordinal $\xi > 0$, u^ξ is indeed a topology.

For each $M \subset P$

$$\xi < \eta \Rightarrow u^\xi M \subset u^\eta M \subset P.$$

It follows that one may assign to each $M \subset P$ an ordinal $\varphi(M)$, namely the *least* ordinal α such that $u^{\alpha+1}M = u^\alpha M$. Furthermore, one may assign to the space an ordinal $\vartheta(P)$, the *least* ordinal β such that $\varphi(M) \leqq \beta$ for each $M \subset P$ or, equivalently, such that $u^{\beta+1}M = u^\beta M$ for each $M \subset P$.

Evidently $\vartheta(P) = 1$ if and only if u is an F-topology. In the general case $u^{\vartheta(P)}$ is an F-topology. It is easy to prove that the topologies u and $u^{\vartheta(P)}$ have the same closed sets, so that $u^{\vartheta(P)}$ is the F-modification (6.1.3) of the topology u.

7.1. We shall say that P is an *A-space* or that the given topology for P is an *A-topology* if axioms ($\mathrm{I^u}$), ($\mathrm{II^u}$) are satisfied and also

$$(\mathrm{III^u})_A \qquad M_1 \subset P\,, \quad M_2 \subset P \Rightarrow \overline{M_1 + M_2} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2\,.$$

The axiom ($\mathrm{III^u}$) need not be required separately as it is a consequence of $(\mathrm{III^u})_A$. On the other hand, if we do require ($\mathrm{III^u}$), then $(\mathrm{III^u})_A$ may be replaced by the weaker

[10] F. Hausdorff, Fund. Math. XXV (1935), p. 490.

requirement

$$M_1 \subset P\,, \quad M_2 \subset P \Rightarrow \overline{M_1 + M_2} \subset \overline{M}_1 + \overline{M}_2\,.$$

Let P be an arbitrary space and $a \in P$. We shall say that a is an *A-point* if

$$M_1 \subset P\,, \quad M_2 \subset P\,, \quad a \in \overline{M_1 + M_2} \Rightarrow a \in \overline{M}_1 + \overline{M}_2\,.$$

The following statements are evident:

7.1.1. *A space P is an A-space if and only if each $a \in P$ is an A-point.*

7.1.2. *Each space embedded in an A-space is an A-space.*

7.1.3. *Let Q be embedded in P and let $a \in Q$ be an A-point of the space P. Then a is an A-point of Q.*

7.1.4. *If P is an A-space, then any union of a finite number of closed sets is a closed set.*

It is sufficient to prove this for two closed sets F_1 and F_2. We have $\overline{F}_1 = F_1$ and $\overline{F}_2 = F_2$, hence $\overline{F_1 + F_2} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 = F_1 + F_2$.

Theorem 7.1.4 may hold in P without P being an A-space. As an example take the space P_2 consisting of three points a, b, c. In P_2 let $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\bar{a} = \bar{b} = (a) + (b)$, $\bar{c} = (c)$, and let the closure of sets containing more than one point be P_2. Then 7.1.4 is satisfied in P_2 although it is not an A-space.

7.1.5. *Let P be an F-space and let all unions of finite number of closed sets be closed. Then P is an A-space.*

Proof. Let $M_1 \subset P, M_2 \subset P$. Then $M_1 + M_2 \subset \overline{M}_1 + \overline{M}_2$, so that $\overline{M_1 + M_2} \subset \subset \overline{\overline{M}_1 + \overline{M}_2}$. As P is an F-space, the sets $\overline{M}_1$ and $\overline{M}_2$ are closed, so that $\overline{M}_1 + \overline{M}_2$ is also closed, i.e. $\overline{\overline{M}_1 + \overline{M}_2} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2$, and then $\overline{M_1 + M_2} \subset \overline{M}_1 + \overline{M}_2$.

From the preceding theorem 7.1.5 it follows that the theory of AF-spaces (i.e. spaces which are A-spaces and F-spaces simultaneously) can be based on the notion of closed sets satisfying the axioms (I^{f}) to ($\mathrm{III}^{\mathrm{f}}$) from 6.1 and also the axiom

$$(\mathrm{IV}^{\mathrm{f}})_A \qquad F_1 \in \mathfrak{F}\,, \quad F_2 \in \mathfrak{F} \Rightarrow F_1 + F_2 \in \mathfrak{F}\,.$$

From 7.1.4 there follows

7.1.6. *If P is an A-space, then the intersection of a finite number of open sets is an opet set.*

7.1.7. *Let $M \subset P$, $N \subset P$. Let each $a \in M$ be an A-point. Let O be a neighborhood of M. Then*

$$M \,.\, \overline{N} = M \,.\, \overline{NO}\,.$$

Proof. As $\overline{NO} \subset \overline{N}$, it is sufficient to prove that the assumption $a \in M \,.\, \overline{N} - \overline{NO}$ leads to a contradiction. Because $a \in M$, a is an A-point. As $a \in \overline{N}$, $N = NO + (N - O)$, one has $a \in \overline{NO} + \overline{N - O}$ and then $a \in \overline{NO} + \overline{P - O}$. Because $a \in P -$

$- \overline{NO}$, $a \in \overline{P - O}$. This is a contradiction, because $a \in M$ and thus O is a neighborhood of a.

The following assertion is a special case of 7.1.7 (putting G, M, G instead of M, N, O).

7.1.8. *Let P be an A-space, $M \subset P$. Let $G \subset P$ be an open set. Then*

$$G \,.\, \overline{M} = G \,.\, \overline{MG}\,.$$

Here one may not omit the assumption that P is an A-space. Indeed, let P consist of three points a, b, c. For any $M \subset P$ let $\overline{M} = M$ if M contains at most one point, $\overline{M} = P$ if M contains more than one point. Let $M = (a) + (b)$, $G = (a) + (c)$. Then G is an open set and $G\overline{M} = (a) + (c)$, $G \,.\, \overline{MG} = (a) \neq G\overline{M}$. Evidently,

7.1.9. *Each L-space is an A-space.*

7.2. Evidently,

7.2.1. *A point $a \in P$ is an A-point if and only if, for each pair O_1, O_2 of neighborhoods of a, the set $O_1 O_2$ is a neighborhood of a.*

Let $\mathfrak{O}(a)$ be a complete system at a. By 7.2.1 it is easy to see that a is an A-point if and only if there are satisfied the axioms (I°), (II°) from 4.1, and also

(III°)$_A$ If $O_1 \in \mathfrak{O}(a)$, $O_2 \in \mathfrak{B}(a)$ then there exists a set $O \in \mathfrak{O}(a)$ such that $O \subset O_1 O_2$.

A set $M \subset P$ is said to be an *A-set* if the intersection of any pair of its neighborhoods is again a neighborhood. From 7.2.1 there follows

7.2.2. *A one point set (a) is an A-set if and only if a is an A-point.*

The following statements are evident.

7.2.3. *Let Q be embedded in P. If $M \subset Q$ is an A-set in the space P, then M is an A-set in the space Q.*

7.2.4. *Let $M \subset P$. Let each $a \in M$ be an A-point. Then M is an A-set.*

7.2.5. *Let $M \subset P$ be an A-set. Let $\mathfrak{O}(M)$ be a complete system of neighborhoods of M. Let Ω be a given neighborhood of M. Let $\mathfrak{O}_0(M)$ be the family of those $O \in \mathfrak{O}(M)$ for which $O \subset \Omega$. Then $\mathfrak{O}_0(M)$ is a base for the neighborhood system of M.*

Proof. Let H be a neighborhood of M. Because M is an A-set, $H\Omega$ is also a neighborhood of M. As $\mathfrak{O}(M)$ is a complete system, there exists an $O \in \mathfrak{O}(M)$ such that $O \subset H\Omega$. Then $O \in \mathfrak{O}_0(M)$, $O \subset H$.

7.2.6. *The preceding theorem does not hold for non-A-sets M.*

Proof. Because M is not an A-set, there exist neighborhoods O_0, Ω of M such that $O_0\Omega$ is not a neighborhood of M. Let $\mathfrak{O}(M)$ be a complete system of M and let $\mathfrak{O}_0(M)$ consist of the sets $O \in \mathfrak{O}(M)$, $O \subset \Omega$. If $\mathfrak{O}_0(M)$ were a complete system, there would exist a set $O \in \mathfrak{O}_0(M)$ such that $O \subset O_0$. Then $O \subset Q_0\Omega$, and by 2.1.8 $O_0\Omega$ would also be a neighborhood of M.

7.2.7. *Let the character of a set $M \subset P$ be finite. Then M is an A-set if and only if $\chi(M) = 1$.*

Proof. I. Let M be an A-set. There exists a finite complete system $\mathfrak{O}(M)$ of M. The intersection O of all sets of this system $\mathfrak{O}(M)$ is a neighborhood of M. The set O itself is then a complete system of neighborhoods of the set M.

II. Let $\chi(M) = 1$. Then there exists a set O which is itself a complete system of neighborhoods of M. If O_1 and O_2 are two neighborhoods of M then $O \subset O_1$, $O \subset O_2$, and then by 2.1.8 $O_1 O_2$ is also a neighborhood of M.

7.3. Let (P, v) be a given space and $Q \subset P$. Choose a complete system at each $a \in P$. For $a \in Q$ let $\mathfrak{O}_1(a)$ be the family of finite intersections of sets from $\mathfrak{O}(a)$. For $a \in P - Q$ let $\mathfrak{O}_1(a) = \mathfrak{O}(a)$. It is easy to see that for the systems $\mathfrak{O}_1(a)$ the axioms (I°) and (II°) (4.1) are satisfied; and if $a \in Q$ then also axiom $(\text{III}^\circ)_A$ (7.2) holds. The systems $\mathfrak{O}_1(a)$ define a topology u for P in which each point $a \in Q$ is an A-point. The topology u is called an *A-modification of the topology v with respect to Q*. In the important case that $Q = P$ (u is an A-topology for P by 7.1.1) the topology u is called briefly an *A-modification of the topology v*. The topology u depends on the choice of the complete system $\mathfrak{O}(a)$ only seemingly; indeed, it is characterized by

7.3.1. *Let (P, v) be a space and $Q \subset P$. Let u be an A-modification of the topology v with respect to Q. Then* (1) *each $a \in Q$ is an A-point in the topology u,* (2) *u is finer than v,* (3) *u is the coarsest topology with properties* (1) *and* (2).

Proof. We have already seen that u has the property (1). In view of 4.1.1, u has property (2) because $\mathfrak{O}(a) \subset \mathfrak{O}_1(a)$. Let w be a topology finer than v and such that each $a \in Q$ is an A-point relatively to w. Let $M \subset P$. We have to prove that $wM \subset uM$. Take $a \in wM$. If $O \in \mathfrak{O}(a)$, then by 2.1.9 O is a neighborhood of a relative to w. As each $a \in Q$ is an A-point relative to w, each $O \in \mathfrak{O}_1(a)$ is a neighborhood of a in w. Because $a \in wM$, from 4.1.1 it follows that for each $O \in \mathfrak{O}_1(a)$ there is $OM \neq \emptyset$, and then by 4.1.1 $a \in uM$.

7.3.2. *Let (P, v) be a space and $Q \subset P$. Let u be the A-modification of the topology v with respect to Q. Then*

$$a \in Q \Rightarrow \chi_u(a) \leqq \chi_v(a),$$
$$a \in P - Q \Rightarrow \chi_u(a) = \chi_v(a).$$

Proof. We may choose a complete system of neighborhoods $\mathfrak{O}(a)$ of a so that it contains only $\chi_v(a)$ sets.

I. Let $a \in Q$. We distinguish two cases. First, let there be a finite number $\chi_v(a)$ of sets in $\mathfrak{O}(a)$. Then the intersection O of all sets of $\mathfrak{O}(a)$ belongs to $\mathfrak{O}_1(a)$, and is the least set of $\mathfrak{O}_1(a)$. Since $\mathfrak{O}_1(a)$ is a complete system at a in the topology u, obviously O itself is a complete system at a relative to u, so that $\chi_u(a) = 1 \leqq \chi_v(a)$. Secondly, let there be an infinite number $\chi_v(a)$ of sets in $\mathfrak{O}(a)$. Then $\mathfrak{O}_1(a)$ contains $\chi_v(a)$ sets. Since $\mathfrak{O}_1(a)$ is a complete system at a in the topology u, one has $\chi_u(a) \leqq \chi_v(a)$.

II. Let $a \in P - Q$. Since $\mathfrak{O}(a)$ is a complete system of neighborhoods of a in u

and also in v, evidently the system of all neighborhoods is the same relative to both topologies, and thus $\chi_u(a) = \chi_v(a)$.

8.1. Let P be an arbitrary space. Let $M_1 \subset P$, $M_2 \subset P$. The sets M_1 and M_2 are said to be *separated* (in the space P) if

$$M_1\overline{M}_2 = \overline{M}_1 M_2 = \emptyset .$$

The sets M_1 and M_2 are (1) *O-separated*, (2) *$\overline{O}$-separated*, (3) *$\overline{\overline{O}}$-separated*, if there exist neighborhoods O_1 of M_1 and O_2 of M_2 such that

$$\begin{array}{ll} O_1 O_2 = \emptyset & \text{in the first case,} \\ \overline{O}_1 O_2 = O_1 \overline{O}_2 = \emptyset & \text{in the second case,} \\ \overline{O}_1 \overline{O}_2 = \emptyset & \text{in the third case.} \end{array}$$

Evidently,

8.1.1. *Let Q be embedded in $P, M_1 \subset Q$, $M_2 \subset Q$. The sets M_1 and M_2 are separated in Q if and only if they are separated in P.*

8.1.2. *Let Q be embedded in P. Let $M_1 \subset Q$, $M_2 \subset Q$. If M_1 and M_2 are either O-separated or $\overline{O}$-separated or $\overline{\overline{O}}$-separated in P, then the same is true in Q.*

8.1.3. *Let $M_1 \subset P$ and $M_2 \subset P$ be O-separated. Then M_1 and M_2 are separated.*

Proof. Let $a \in M_1$. As O_1 is a neighborhood of M_1, $a \notin \overline{P - O_1}$. However, $M_2 \subset O_2 \subset P - O_1$. Thus $a \notin \overline{M}_2$. Therefore $M_1\overline{M}_2 = \emptyset$, and analogously $\overline{M}_1 M_2 = \emptyset$.

8.1.4. *Let $M_1 \subset P$ and $M_2 \subset P$ be $\overline{O}$-separated. Then M_1 and M_2 are O-separated.*

8.1.5. *Let $M_1 \subset P$ and $M_2 \subset P$ be $\overline{\overline{O}}$-separated. Then M_1 and M_2 are $\overline{O}$-separated.*

8.1.6. *Let $M_1 \subset P$ and $M_2 \subset P$ be separated in P. Then M_1 and M_2 are $\overline{\overline{O}}$-separated in the space $Q = M_1 + M_2$ embedded in P.*

Proof. Let $uM = Q\overline{M}$ be the relative closure of the set $M \subset Q$. Because $M_1\overline{M}_2 = \overline{M}_1 M_2 = \emptyset$, one has $M_1 M_2 = \emptyset$ and hence $Q - M_1 = M_2$, $Q - M_2 = M_1$. Moreover, $M_1 \,.\, uM_2 = M_2 \,.\, uM_1 = \emptyset$, so that $uM_1 = M_1$, $uM_2 = M_2$. Thus M_1 and M_2 are both open and closed in the space Q, and M_1 is a neighborhood of M_1 in Q and the same is true for M_2. The relative closures of these two neighborhoods are disjoint. Hence the sets M_1 and M_2 are $\overline{\overline{O}}$-separared in the space Q.

The following theorem is obvious.

8.1.7. *Let $N_1 \subset M_1 \subset P$, $N_2 \subset M_2 \subset P$. If M_1 and M_2 are either separated or O-separated or $\overline{O}$-separated or $\overline{\overline{O}}$-separated, then the same is true for the sets N_1 and N_2.*

8.1.8. *Let $M_1 \subset P$, $M_2 \subset P$, $M_3 \subset P$. Let M_1 be an A-set. Let M_1 and M_2 be separated, M_1 and M_3 be separated. Then M_1 and $M_2 + M_3$ are separated.*

Proof. There is $M_1\overline{M}_2 = \overline{M}_1 M_2 = M_1\overline{M}_3 = \overline{M}_1 M_3 = \emptyset$. Obviously $\overline{M}_1 . (M_2 + M_3) = \emptyset$, and we have to prove that $M_1 . \overline{M_2 + M_3} = \emptyset$. As $M_1\overline{M}_2 = \emptyset$, the set $P - M_2$ is a neighborhood of M_1. Analogously $P - M_3$ is a neighborhood of M_1. As M_1 is an A-set, also $(P - M_2)(P - M_3) = P - (M_2 + M_3)$ is a neighborhood of M_1. Therefore $M_1 . \overline{M_2 + M_3} = \emptyset$.

8.1.9. *Let $M_1 \subset P$, $M_2 \subset P$, $M_3 \subset P$. Let M_1 be an A-set. Let M_1 and M_2 be O-separated, M_1 and M_3 be O-separated. Then M_1 and $M_2 + M_3$ are O-separated.*

Proof. There exist neighborhoods O_1 and Ω_1 of the set M_1, a neighborhood O_2 of M_2 and a neighborhood Ω_3 of M_3 such that $O_1O_2 = \Omega_1\Omega_3 = \emptyset$. Then $O_1\Omega_1(O_2 + \Omega_3) = \emptyset$. Obviously $O_2 + \Omega_3$ is a neighborhood of $M_2 + M_3$. Because M_1 is an A-set, $O_1\Omega_1$ is its neighborhood.

8.1.10. *Let P be an A-space. Let $M_1 \subset P$, $M_2 \subset P$, $M_3 \subset P$. Let M_1 and M_2 be $\overline{O}$-separated, M_1 and M_3 be $\overline{O}$-separated. Then M_1 and $M_2 + M_3$ are $\overline{O}$-separated.*

Proof. There exist neighborhoods O_1 and Ω_1 of the set M_1, a neighborhood O_2 of the set M_2 and a neighborhood Ω_3 of the set M_3 such that $\overline{O}_1 O_2 = O_1\overline{O}_2 = \overline{\Omega}_1\Omega_3 = \Omega_1\overline{\Omega}_3 = \emptyset$. The set $O_2 + \Omega_3$ is a neighborhood of $M_2 + M_3$. The set $O_1\Omega_1$ is a neighborhood of M_1. Moreover, $\overline{O_1\Omega_1} \subset \overline{O}_1\overline{\Omega}_1$, $\overline{O_2 + \Omega_3} = \overline{O}_2 + \overline{\Omega}_3$, and thus $\overline{O_1\Omega_1}(O_2 + \Omega_3) = O_1\Omega_1 . \overline{O_2 + \Omega_3} = \emptyset$.

8.1.11. *Theorem* 8.1.10 *remains valid for $\overline{\overline{O}}$-separated sets instead of $\overline{O}$-separated sets.*

Proof. Now $\overline{O}_1\overline{O}_2 = \overline{\Omega}_1\overline{\Omega}_3 = \emptyset$, and thus $\overline{O_1\Omega_1} . \overline{O_2 + \Omega_3} = \emptyset$.

8.1.12. *Let $M_1 \subset P$ and $M_2 \subset P$ be O-separated. Let each $a \in M_1 + M_2$ be a weak F-point. Then M_1 and M_2 are $\overline{O}$-separated.*

Proof. Let O_1 be a neighborhood of M_1, O_2 be a neighborhood of M_2 and let $O_1O_2 = \emptyset$. Put $\Omega_1 = P - \overline{P - O_1}$, $\Omega_2 = P - \overline{P - O_2}$. Evidently $\Omega_1 \subset O_1$, $\Omega_2 \subset O_2$. As $O_2 \subset P - O_1$, we have $\overline{O}_2 \subset \overline{P - O_1}$ and then $\Omega_1\overline{O}_2 = \emptyset$. Obviously $\Omega_2 \subset O_2$, $\Omega_1\overline{\Omega}_2 = \emptyset$. Analogously, one can prove that $\overline{\Omega}_1\Omega_2 = \emptyset$. If $a \in M_1$ then O_1 is a neighborhood of a, so that $a \notin \overline{P - O_1}$. As a is a weak F-point, $a \notin \overline{\overline{P - O_1}}$; but this means that Ω_1 is a neighborhood of a. Then Ω_1 is a neighborhood of M_1 and analogously Ω_2 is a neighborhood of M_2.

8.1.13. *The sets $M_1 \subset P$, $M_2 \subset P$ are O-separated if and only if there exists a neighborhood O_1 of M_1 such that $M_2 . \overline{O}_1 = \emptyset$.*

Proof. I. If $O_1O_2 = \emptyset$, then by 2.1.4 $M_2\overline{O}_1 = \emptyset$.

II. If $M_2\overline{O}_1 = \emptyset$ then $O_2 = P - O_1$ is a neighborhood of M_2 and $O_1O_2 = \emptyset$.

Let P_4 be the set consisting of three points: a, b, c. Let the sets $\emptyset, (a), (b), (a) + (b)$ be closed. If $M \subset P_4$ is a set distinct from these, let $\overline{M} = P_4$. Then P_4 is an AF-space. The one-point sets (a), (b) are separated but not O-separated.

Let P_5 be a set consisting of four points: a, b, c, d. Let $\bar{a} = (a) + (c) + (d)$, $\bar{b} = (b) + (c) + (d)$, $\bar{c} = (a) + (c)$, $\bar{d} = (a) + (d)$. Let the closure of a set $M \subset P_5$

be the union of the closures of its points. Then P_5 is an A-space. The points a, b are O-separated but not $\bar{O}$-separated.

Let P_6 be a set consisting of three points: a, b, c. Let $\bar{a} = (a) + (c)$, $\bar{b} = (b) + (c)$, $\bar{c} = (c)$. Let the closure of a set $M \subset P_6$ be a union of the closures of its points. Then P_6 is an AF-space. The points a, b are $\bar{O}$-separated but not $\bar{\bar{O}}$-separated.

Let P_7 consist of three points: a, b, c. Let $\overline{(b) + (c)} = P_7$. Let $\bar{M} = M$ if $M \subset P$, $M \neq (b) + (c)$. Then P_7 is an F-space. The points a, b are $\bar{\bar{O}}$-separated. The points a, c are $\bar{\bar{O}}$-separated. The sets (a), $(b) + (c)$ are not separated.

8.2. We shall say that P is a *K-space*[11] or that the given topology is a *K-topology*, if for each $a \in P$

$$\bar{a} \,.\, a^s = (a)\,, \tag{1}$$

i.e. if there is not simultaneously $b \in \bar{a}$ and $a \in \bar{b}$ for all $b \neq a$; in other words, if for $a \neq b$ either $P - (a)$ is a neighborhood of b or $P - (b)$ is a neighborhood of a.

The following theorem is evident.

8.2.1. *Every space embedded in a K-space is a K-space.*

If for each $a \in P$ there is given a complete system $\mathfrak{O}(a)$ at a, then P is a K-space if and only if the following axioms are satisfied: (I°), (II°) (4.1) and

$(\mathrm{III}^\circ)_K$ If $a \neq b$ then there exists either a set $O \in \mathfrak{O}(a)$ with $b \notin O$ or a set $\Omega \in \mathfrak{O}(b)$ with $a \in \Omega$.

The following theorem is evident.

8.2.2. *In a K-space distinct points have distinct closures.*

Let P_8 be the set consisting of three points: a, b, c. Let $\bar{a} = P_8$, $\bar{b} = (a) + (b)$, $\bar{c} = (a) + (c)$. Let the closure of a set $M \subset P_8$ be the union of the closures of its points. Then P_8 is an A-space. Distinct points have distinct closures but condition (1) is not fulfilled for any point; thus P_8 is not a K-space.

8.2.3. *Let the closure of any point $a \in P$ be a closed set and let distinct points have distinct closures. Then P is a K-space.*

Proof. If $b \in \bar{a}$, then $\bar{b} \subset \bar{\bar{a}} = \bar{a}$. If also $b \in \bar{a}$ and $a \in \bar{b}$, then $\bar{a} = \bar{b}$ and $a = b$.

Let now P be an F-space. Points $a \in P$, $b \in P$ are called *K-equivalent* if $\bar{a} = \bar{b}$. Let $M \subset P$. Let $k(M)$ be the set of all points of P K-equivalent with some point of M. Then

$$M \subset k(M) = k[k(M)]\,.$$

A set $M \subset P$ is called *K-complete* if $k(M) = M$; thus $k(M)$ is K-complete for each $M \subset P$. *For each $M \subset P$ the closure $\bar{M}$ is a K-complete set*, since if $a \in \bar{M}$, $\bar{a} = \bar{b}$ then $b \in \bar{b} = \bar{a} \in \bar{M}$ and thus $b \in \bar{M}$. Moreover, for each $M \subset P$

$$\bar{M} = \overline{k(M)}\,, \tag{2}$$

because $M \subset k(M) \subset \bar{M}$, and thus $\bar{M} \subset \overline{k(M)} \subset \bar{\bar{M}} = \bar{M}$.

[11] P. Alexandroff and P. Urysohn, Topologie I (Berlin, Springer, 1935), page 58.

Let P still be an F-space. For each $a \in P$ let $\tau(a)$ be a symbol such that $\tau(a) = \tau(b)$ if and only if a and b are K-equivalent. Let $P_1 = \tau(P)$ consist of all $\tau(a)$ for $a \in P$. It is natural to derive a topology u for P_1 from the notion of closure. Let the closure of a set $M_1 \subset P_1$ be the set $\tau(\overline{M})$, where $M = \tau_{-1}(M_1)$ is the set of those points $a \in P$ for which $\tau(a) \in M_1$. Then M is K-complete. We shall say that the space (P_1, u) is the *K-reduction* of the F-space P.

8.2.4. *Let P_1 be the K-reduction of an F-space P. Then P_1 is a KF-space* (i.e. P_1 is a K-space and also an F-space).

Proof. I. Let $a_1 \in P_1$, $b_1 \in P_1$, $a_1 \neq b_1$. There exist points $a \in P$, $b \in P$ such that $a_1 = \tau(a)$, $b_1 = \tau(b)$. As $b_1 \neq a_1$, $\bar{a} \neq \bar{b}$. Because $\bar{a}$ and $\bar{b}$ are K-complete sets and $\bar{a} \neq \bar{b}$, one has $\tau(\bar{a}) \neq \tau(\bar{b})$. The closure $u(a_1)$ of the point a_1 in P_1 is, by definition, $\tau[\overline{k(a)}]$. In view of (2), $\bar{a} = \overline{k(a)}$, and thus $u(a_1) = \tau(\bar{a})$. Similarly $u(b_1) = \tau(\bar{b})$, therefore $u(a_1) \neq u(b_1)$. Thus distinct points have distinct closures in P_1. Hence in view of 8.2.3 it is sufficient to prove that P_1 is an F-space.

II. Let $M_1 \subset P_1$, $M = \tau_{-1}(M_1)$. Then $uM_1 = \tau(\overline{M})$. As $\overline{M}$ is K-complete, there is $\tau_{-1}(uM_1) = \overline{M}$, and thus $uuM_1 = \tau(\overline{\overline{M}})$. But $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$, so that $uuM_1 = uM_1$, so that P_1 is indeed an F-space.

There is no difficulty in showing that all the topological properties of an F-space P are expressed in P_1; this is so because the closure of any set $M \subset P$ is a K-complete set which is also the closure of the K-complete set $k(M)$. Moreover, on identifying all K-equivalent points of the space P one obtain precisely the topological space P_1. It is then evident that the theory of F-spaces can be reduced to the theory of KF-spaces without any loss of generality.

8.3. We shall say that P is a *B-space*, or that the given topology is a *B-topology*, if each one-point set is closed.

It is easy to see that

8.3.1. *Each B-space is a K-space.*

8.3.2. *Every space embedded in a B-space is a B-space.*

Let P be an arbitrary space and $a \in P$. A point a is called a *B-point* if $a^s = (a)$. Then we have the theorem

8.3.3. *Let a space Q be embedded in the space P and let $a \in Q$. If a is a B-point of P then a is a B-point of Q.*

8.3.4. *A space P is a B-space if and only if each $a \in P$ is a B-point.*

Proof. If P is a B-space,

$$a \in \bar{b} \Rightarrow a = b\,.$$

From 3.3.1 it follows that this condition is satisfied if $a \in P$ is a B-point.

The following theorem is evident.

8.3.5. *A space P is a B-space if and only if every pair of one-point sets is separated.*

Let $\mathfrak{D}(a)$ be a complete system at a. The point a is a B-point if and only if the following axioms are satisfied: (I°), (II°) (4.1) and

$(\mathrm{III}^\circ)_B$ If $b \neq a$ then there exists a set $O \in \mathfrak{D}(a)$ such that $b \notin O$.

8.3.6. *Let P be a B-space. Then each $M \subset P$ is a G_d.*

Proof. The set $P - M$ is the union of all its points; each of these is a closed set. Then $P - M$ is F_s and thus M is G_d.

8.3.7. *Let each one-point set in P be a G_d. Then P is a B-space.*

Proof. If the one-point set (a) is a G_d, then the product of all open neighborhoods of a contains only the point a. Thus the intersection a^s of all neighborhoods of a is the point a. Hence a is a B-point, and by 8.3.4, P is a B-space.

8.3.8. *Let P be a K-space and let the closure of each $a \in P$ be a G_d. Then P is a B-space.*

Proof. Let $b \in a^s$. According to 8.3.4 it is sufficient to prove that $b = a$. Assume $b \neq a$. As P is a K-space, $b \in P - \bar{a}$. But $\bar{a}$ is a G_d, so that $P - \bar{a}$ is F_s, and there exists a closed set $F \subset P - \bar{a}$ such that $b \in F$. Because F is closed, $\bar{b} \subset F$. As $b \in a^s$, there is $a \in \bar{b}$, and thus $a \in F \subset P - \bar{a}$. This is a contradiction.

The following theorem is evident.

8.3.9. *Each L-space is a B-space.*

8.4. We shall say that P is an *H-space*[12], or that the given topology is an *H-topology*, if any two distinct points are always O-separated.

We shall say that $a \in P$ is an *H-point* if for each $b \in P - (a)$ the points a and b are O-separated. Evidently,

8.4.1. *A space P is an H-space if and only if each $a \in P$ is an H-point.*

8.4.2. *Every space embedded in an H-space is an H-space.*

8.4.3. *Let Q be embedded in P and let $a \in Q$ be an H-point of P. Then a is an H-point of Q.*

8.4.4. *Each H-point is a B-point.*

From 8.1.13 there follows the theorem

8.4.5. *Let $a \in P$. Then a is an H-point if and only if (a) is the intersection of sets $\bar{O}$ for all neighborhoods O of a.*

Suppose now that to each $a \in P$ there is assigned a complete system at a. Obviously a is an H-point if and only if there are satisfied the axioms (I°), (II°) (4.1) and also

$(\mathrm{III}^\circ)_H$ If $b \neq a$ then there exist sets $O \in \mathfrak{D}(a)$, $\Omega \in \mathfrak{D}(b)$ such that $O \,.\, \Omega = \emptyset$.

We shall say that a is a *$\bar{H}$-point* if for each $b \in P - (a)$ the points a and b are $\bar{O}$-separated. A space P is called an *$\bar{H}$-space* if each $a \in P$ is an $\bar{H}$-point.

The following theorems are evident.

8.4.6. *Every space embedded in an $\bar{H}$-space is an $\bar{H}$-space.*

[12] F. Hausdorff, loc. cit. sub[3], page 213 (axiom D).

8.4.7. *Let Q be embedded in P and let $a \in Q$ be an $\bar{H}$-point of P. Then a is an $\bar{H}$-point of Q.*

8.4.8. *Each $\bar{H}$-point is an H-point.*

From 8.1.12 there follows

8.4.9. *Every HF-space is an $\bar{H}$-space.*

8.4.10. *Let an AH-space P satisfy the first axiom of countability. Then P is an L-space.*

Proof. Let $M \subset P$, $a \in \bar{M}$. Let the members of the sequence $\{O_n\}_1^\infty$ form a complete system at a. Put $\Omega_n = \prod_{i=1}^{n} O_i$. Because P is an A-space, the sets Ω_n are neighborhoods of a. By 2.1.4 there is $\Omega_n M \neq \emptyset$; take $a_n \in \Omega_n M$. Let S be the set of all the members of the sequence $\{a_n\}_1^\infty$. Then S is a countable set. Let T be any infinite subset of S. It is sufficient to prove that $\bar{T} = T + (a)$. From 2.1.4 it follows easily that $a \in \bar{T}$. Let $b \in P - T$, $b \neq a$, $b \in \bar{T}$. We shall show that this leads to a contradiction. As $a \neq b$, P is an H-space, and $\{O_n\}_1^\infty$ is a complete system at a, there exists an index p such that $b \in P - \bar{O}_p$. As P is an A-space, there is $\bar{T} \subset \overline{T - O_p} + \bar{O}_p$, so that $b \in \overline{T - O_p}$. But the set $T - O_p$ is finite and by 8.4.4 P is an AB-space. Thus $\overline{T - O_p} = T - O_p \subset T$ and therefore $b \in T$. This is a contradiction.

8.5. A point $a \in P$ is called an *R-point*[13] if to each neighborhood O of the point a there exists a neighborhood Ω of a such that $\bar{\Omega} \subset O$. We shall say that P is an *R-space*[14] or that the given topology is an *R-topology* if every point $a \in P$ is an R-point.

Let $\mathfrak{O}(a)$ be a complete system at a. Evidently a is an R-point if and only if the following axioms are satisfied: (I°), (II°) and

$(\mathrm{III}°)_R$ To each $O \in \mathfrak{O}(a)$ there is a set $\Omega \subset \mathfrak{O}(a)$ such that $\bar{\Omega} \subset O$.

The following statements are evident.

8.5.1. *Every space embedded in an R-space is an R-space.*

8.5.2. *Let Q be embedded in P and let $a \in Q$ be an R-point of P. Then a is an R-point of Q.*

8.5.3. *Let a be an R-point and let $b \in P - a^s$. Then the points a and b are O-separated.*

Proof. As $b \notin a^s$, there exists a neighborhood O of a such that $b \in P - O$. Because a is an R-point, there exists a neighborhood Ω of a such that $\bar{\Omega} \subset O$. Then a and b are O-separated by 8.1.13.

In view of 8.5.3 and 8.1.3 we have the theorem

8.5.4. *Let a be an R-point. Then $\bar{a} \subset a^s$.*

From 8.5.3 there follows

[13] Regular in the terminology of P. Urysohn, Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, Math. Ann. 94, 1925, p. 264.

[14] L. Vietoris, Stetige Mengen, Monatshefte 31, 1921, p. 173 (axiom E).

8.5.5. *Let a be a BR-point. Then a is an H-point.*

According to 8.5.4, a KR-space is a B-space, so that from 8.5.5 we have the theorem

8.5.6. *Let P be a KR-space. Then P is an H-space.*

8.5.7. *Let a be an R-point. Let $F \subset P$ be a closed set and $a \in P - F$. Then the sets (a) and F are O-separated.*

Proof. The set $P - F$ is a neighborhood of a, so that there exists a neighborhood O of a with $\bar{O} \subset P - F$. Then the sets (a) and F are O-separated as shown by the theorem 8.1.13.

8.5.8. *Let a be a strong F-point. For each closed set $F \subset P$ such that $a \in P - F$ let the sets (a) and F be O-separated. Then a is an R-point.*

Proof. Let O_1 be a neighborhood of a. As a is a strong F-point, there exists an open neighborhood O_2 of a such that $O_2 \subset O_1$. The set $F = P - O_2$ is closed and $a \in P - F$. Thus the sets (a) and F are O-separated, so that by 8.1.13 there exists a neighborhood O_3 of a such that $\bar{O}_3 F = \emptyset$, i.e. $\bar{O}_3 \subset O_2$, and then $\bar{O}_3 \subset O_1$.

The example (for $a = \infty$) of the space P_1 (following 6.3.1) shows that in 8.5.8 the term "strong" cannot be replaced by "weak".

8.6. We shall say that P is an *N-space*,[15] or that the given topology is an *N-topology*, if (1) P is an AF-space, (2) if the sets F_1 and F_2 are closed and $F_1 F_2 = \emptyset$, then F_1 and F_2 are O-separated.

Evidently,

8.6.1. *Let Q be a closed subset of an N-space P. Then Q, as a space embedded in P, is an N-space.*

In view of 8.5.8 we have the theorem

8.6.2. *Every BN-space is an R-space.*

8.6.3.[16] *Let P be an N-space. Let $M_1 \subset P$ and $M_2 \subset P$ be F_σ and separated. Then M_1 and M_2 are O-separated.*

Proof. I. We have $M_1 = \sum_{n=1}^{\infty} F_1^n$, $M_2 = \sum_{n=1}^{\infty} F_2^n$, where F_1^n and F_2^n are closed sets.

II. Denote by $\mathbf{H}_p$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ the following assumption: for $1 \leqq n \leqq p$ there exist open sets O_1^n and O_2^n such that (1) $F_1^n \subset O_1^n$, $F_2^n \subset O_2^n$ for $1 \leqq n \leqq p$, (2) $\bar{O}_1^n \,.\, \bar{M}_2 = \bar{O}_2^n \,.\, \bar{M}_1 = \emptyset$ for $1 \leqq n \leqq p$, (3) $\bar{O}_1^i \,.\, \bar{O}_2^k = \emptyset$ for $1 \leqq i \leqq p$, $1 \leqq k \leqq p$. Let $\mathbf{H}_p$ hold for some p. As P is an AF-space, the set $\sum_{n=1}^{p} \bar{O}_2^n + \bar{M}_2$ is closed. Moreover,

$$F_1^{p+1} \,.\, \Big(\sum_{n=1}^{p} \bar{O}_2^n + \bar{M}_2\Big) = \emptyset\,,$$

[15] This notion was introduced by H. Tietze (Math. Annalen 88, 1923, p. 301). Urysohn (loc. cit. sub[13], p. 265) called such spaces normal.

[16] Loc. cit. sub[13], p. 285.

and then according to property (2) of N-spaces, the sets F_1^{p+1} and $\sum_{n=1}^{p} \bar{O}_2^n + \bar{M}_2$ are O-separated. Hence, in view of 8.1.13 and 6.3.5, there exists an open neighborhood O_1^{p+1} of the set F_1^{p+1} such that

$$\bar{O}_1^{p+1} . (\sum_{n=1}^{p} \bar{O}_2^n + \bar{M}_2) = \emptyset .$$

The set $\sum_{n=1}^{p+1} \bar{O}_1^n + \bar{M}_1$ is closed. Moreover,

$$F_2^{p+1} . (\sum_{n=1}^{p+1} \bar{O}_1^n + \bar{M}_1) = \emptyset ,$$

so that the sets F_2^{p+1} and $\sum_{n=1}^{p+1} \bar{O}_1^n + \bar{M}_1$ are O-separated. Thus there exists an open neighborhood O_2^{p+1} of the set F_2^{p+1} such that

$$\bar{O}_2^{p+1} . (\sum_{n=1}^{p+1} \bar{O}_1^n + \bar{M}_1) = \emptyset .$$

We have thus constructed sets O_1^{p+1} and O_2^{p+2} in such a manner that the assumption $\mathbf{H}_{p+1}$ is satisfied.

III. The assumption $\mathbf{H}_0$ is of course fulfilled since it requires nothing. Then by II one may construct successively for $n = 1, 2, 3, \dots$ open sets O_1^n and O_2^n with $F_1^n \subset O_1^n$, $F_2^n \subset O_2^n$, $\bar{O}_1^n . \bar{M}_2 = \bar{O}_2^n . \bar{M}_1 = \emptyset$, $\bar{O}_1^i . \bar{O}_2^k = \emptyset$. Put $O_1 = \sum_{n=1}^{\infty} O_1^n$, $O_2 = \sum_{n=1}^{\infty} O_2^n$. The sets O_1 and O_2 are open and $M_1 \subset O_1$, $M_2 \subset O_2$, $O_1 O_2 = \emptyset$. Thus M_1 and M_2 are O-separated.

8.6.4. *Let P be an ARF-space. Let $M_1 \subset P$ and $M_2 \subset P$ be countable and separated. Then M_1 and M_2 are O-separated.*

Proof. We have $M_1 = \sum_{n=1}^{\infty} F_1^n$, $M_2 = \sum_{n=1}^{\infty} F_2^n$ where F_1^n and F_2^n are one-point sets. The proof is then similar to that of 8.6.3, only theorem 8.5.7 is used instead of property (2) of N-spaces.

From 8.6.4 there follows the theorem

8.6.5. *A countable ARF-space is an N-space.*

8.6.6. *Let P be an N-space and let a set $Q \subset P$ be F_σ. Then Q (as a space embedded in P) is an N-space.*

Proof. In view of theorems 6.2.1 and 7.1.2, Q is an AF-space. Let the sets $M_1 \subset Q$ and $M_2 \subset Q$ be relatively closed and $M_1 M_2 = \emptyset$. It is to be proved that M_1 and M_2 are O-separated in Q. The sets M_1 and M_2 are separated in Q, and then (cf. 8.1.1) they are separated in P. Also $Q = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$ with closed F_n. According 6.2.2 there exist closed sets Φ_1 and Φ_2 such that $M_1 = Q\Phi_1$, $M_2 = Q\Phi_2$. Then $M_1 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \Phi_1$, so that M_1 is an F_σ, and analogously M_2 is also F_σ. Then by 8.6.3 the sets M_1 and M_2 are O-separated in P, and thus (cf. 8.1.2) they are O-separated in Q.

We shall say that a space P is a *hereditary N-space*[17] if each space embedded in P is an N-space.

From 8.6.5 there follows, using 6.2.1, 7.1.2 and 8.5.1

8.6.7. *Every countable ARF-space is a hereditary N-space.*

8.6.8. *Let P have the following property: Each open set $Q \subset P$ (as a space embedded in P) is an N-space. Then P is a hereditary N-space.*

8.6.9.[18] *A space P is a hereditary M-space if and only if* (1) *P is an AF-space,* (2) *if $M_1 \subset P$ and $M_2 \subset P$ are separated, then they are O-separated.*

Proofs of 8.6.8 and 8.6.9. Obviously it is sufficient to prove two assertions: First that the property assumed in 8.6.8 implies the property of the statement 8.6.9, and second, that from the properties (1) and (2) in 8.6.9 it follows that P is a hereditary N-space.

I. Let P have the property assumed in 8.6.8. Then P is an N-space, and thus P is an AF-space. Let $M_1 \subset P$ and $M_2 \subset P$ be separated. Put $G = P - \overline{M}_1\overline{M}_2$; then G is an open set and $M_1 \subset G\overline{M}_1$, $M_2 \subset G\overline{M}_2$. Also $G\overline{M}_1 . G\overline{M}_2 = \emptyset$, and the sets $G\overline{M}_1$ and $G\overline{M}_2$ are (cf. 1.5.1) closed in the space G. As G is open in P, G is an N-space, so that $G\overline{M}_1$ and $G\overline{M}_2$ are O-separated in G. Thus there exist sets O_1 and O_2 open in G and such that $M_1 \subset G\overline{M}_1 \subset O_1$, $M_2 \subset G\overline{M}_2 \subset O_2$, $O_1O_2 = \emptyset$. By 6.2.3 there exist open sets Ω_1 and Ω_2 such that $O_1 = \Omega_1 G$, $O_2 = \Omega_2 G$. Then O_1 and O_2 are open, so that M_1 and M_2 are O-separated.

II. Let P have the properties (1) and (2) from 8.6.9. Let a space Q be embedded in P. The space Q is an AF-space. Let $M_1 \subset Q$ and $M_2 \subset Q$ be relatively closed and let $M_1M_2 = \emptyset$. It is to be proved that M_1 and M_2 are O-separated in Q. The sets M_1 and M_2 are obviously separated in Q, thus by 8.1.1 they are separated in P; therefore, by property (2), M_1 and M_2 are O-separated in P, and then (cf. 8.1.2) the are O-separated in Q.

9.1. Let P be a space. We may assign to each set M a new set M', called the *derivative* of M, defined as follows:

$$a \in M' \Leftrightarrow a \in \overline{M - (a)}\,. \tag{1}$$

From the axioms ($\mathrm{I^u}$) and ($\mathrm{III^u}$) there follows

$$\emptyset' = \emptyset\,, \tag{$\mathrm{I^d}$}$$

$$a \in M' \Rightarrow a \in [M - (a)]'\,, \tag{$\mathrm{II^d}$}$$

$$M_1 \subset M_2 \Rightarrow M_1' \subset M_2'\,. \tag{$\mathrm{III^d}$}$$

[17] This notion was introduced by H. Tietze (loc. cit. sub[13], p. 301).
Urysohn (loc. cit. sub[15], p. 265) introduced the term completely normal space for such spaces.
[18] Loc. cit. sub[13], p. 284.

Moreover, it is easy to see that for each $M \subset P$,

$$\overline{M} = M + M' . \tag{2}$$

Conversely, assume given an operator which assigns to each subset M of P a subset M' so that the axioms (I^d) to (III^d) are satisfied. Then define $\overline{M}$ by (2). It is easy to see that the axioms (I^u) to (III^u) are fulfilled and that (1) holds. Hence it follows that the topology could have been obtained from the notion of derivative instead of closure. Following through this method, a *closed* set would be defined by the relation $M' \subset M$.

If a space Q is embedded in a space P and $M \subset Q$, then the set M has two derivatives: one in P, which will be denoted by M', and also a *relative derivative*, i.e. the derivative in Q. It is easy to see that the relative derivative is QM'.

If the topology was derived from a notion of the complete systems $\mathfrak{O}(a)$ at $a \in P$ [so that the axioms (I°) and (II°) from 4.1 are satisfied] then in view of 4.1.1 and (1), the derivative of a set M is determined as follows:

9.1.1. *$a \in M'$ if and only if each $O \in \mathfrak{O}(a)$ contains at least one point of the set M distinct from a.*

9.1.2. *Let P be an ABF-space and let $M \subset P$. Then M' is a closed set.*

Proof. It must be shown that $M'' \subset M'$. Assume the contrary, that $a \in M'' - M'$. As $a \in P - M'$, there exists a neighborhood O of a such that $OM \subset (a)$. As P is an F-space, there exists an open neighborhood Ω of a with $\Omega \subset O$. As $a \in M''$, there exists a point b such that $b \neq a$, $b \in \Omega M'$. Then Ω is a neighborhood of b. Because P is a B-space, $P - (a)$ is also a neighborhood of b. As P is an A-space, also $\Omega - (a) = \Omega . [P - (a)]$ is a neighborhood of b. As $b \in M'$, one has $[\Omega - (a)] . M \neq \emptyset$. This is a contradiction, because $\Omega M \subset OM \subset (a)$.

Let P_q be a set of all positive integers. Let $\overline{M} = M$ for any finite set $M \subset P_q$ with $1 \in P_q - M$; otherwise let $\overline{M} = P_q$. Then P_q is an AF-space and the derivative of the one-point set (1) is not closed.

9.2. A point $a \in P$ is called an *accumulation point* of a set $M \subset P$ if for each neighborhood O of a the set OM is infinite. Let M^h be the set of all accumulation points of M.

Theorem 9.1.1. shows that

9.2.1. *For each $M \subset P$ there is $M^h \subset M'$.*

The following statements are evident.

9.2.2. *If a set $K \subset P$ is finite, then $K^h = \emptyset$.*

9.2.3. *If $M \subset P$, $K \subset P$ and if K is finite, then*

$$(M + K)^h = (M - K)^h = M^h .$$

9.2.4. *If $M_1 \subset M_2 \subset P$, then $M_1^h \subset M_2^h$.*

9.2.5. *Let P be an A-space and let $M_1 \subset P$, $M_2 \subset P$. Then* $(M_1 + M_2)^h = M_1^h + M_2^h$.

9.2.6. *Let P be an F-space and let $M \subset P$. Then the set M^h is closed.*

Proof. It must be shown that $(M^h)' \subset M^h$. Assume the contrary, that there is an $a \in (M^h)' - M^h$. As $a \in P - M^h$, there exists a neighborhood O of a such that OM is a finite set. As P is an F-space, there exists an open neighborhood $\Omega \subset O$ of a. Because $a \in (M^h)'$, there exists a $b \in \Omega \,.\, M^h$. Then Ω is a neighborhood of b. As $b \in M^h$, the set ΩM is infinite. This is a contradiction, because $\Omega M \subset OM$.

9.2.7. *In a space P let $\overline{M + K} = \overline{M} + K$ for each $M \subset P$ and each finite $K \subset P$.* [This is the case e.g. if P is an AB-space.] *Then $M^h = M'$ for each $M \subset P$.*

Proof. Let $M^h \neq M'$. In view of 9.2.1 there exists an $a \in M' - M^h$. As $a \in P - M^h$, there exists a neighborhood O of a such that OM is finite. As O is a neighborhood of a, $a \notin \overline{P - O}$. As $OM - (a)$ is a finite set,

$$\text{(1)} \qquad \overline{P - O + [OM - (a)]} = \overline{P - O} + OM - (a)\,.$$

The set (1) does not contain the point a. Thus $\Omega = P - \{P - O + [OM - (a)]\} = (a) + O - M$ is a neighborhood of a. But $\Omega M \subset (a)$, and then by 9.1.1 there is $a \notin M'$. This is a contradiction.

9.2.8. *Let $M^h = M'$ for each $M \subset P$. Then for each $M \subset P$ and for each finite set $K \subset P$, $\overline{M + K} = \overline{M} + K$.*

Proof.

$$\overline{M} = M + M' = M + M^h\,,$$
$$\overline{M + K} = M + K + (M + K)' = M + K + (K + K)^h\,.$$

By 9.2.3 there is

$$M^h = (M + K)^h\,.$$

To the given topology for P let us assign a new topology u such that the derivative of a set $M \subset P$ relative to the topology u is the set M^h. From theorems 9.2.2 to 9.2.4 it is easy to see that the axioms (I^d) to (III^d) are then satisfied. This topology will be termed the *B-modification* of the originally given topology in P.

From 9.2.2 there follows

9.2.9. *The B-modification of any topology is a B-topology.*

From 9.2.5 there follows

9.2.10. *The B-modification of an A-topology is an A-topology.*

9.2.11. *The B-modification of an F-topology is an F-topology.*

Proof. It is sufficient to prove that $(M + M^h)^h \subset M^h$. Assume the contrary, that $a \in (M + M^h)^h - M^h$. As $a \in P - M^h$ and P is an F-space, there exists an open neighborhood O of a such that the set OM is finite. As $a \in (M + M^h)^h$, the set $O(M + M^h)$ is infinite. Then there exists a $b \in OM^h$. Thus O is a neighborhood of b and $b \in M^h$, so that OM is infinite; this is a contradiction.

9.2.12. *Let v be an A-topology for P. Let u be the B-modification of v. Then* (1) *u is an AB-topology,* (2) *u is finer than v,* (3) *u is the coarsest topology with properties* (1) *and* (2).

Proof. We already know that u is an AB-topology. Theorem 9.2.1 shows that u is finer than v. Let w be any AB-topology finer than v. Let $M \subset P$, $a \in wM$. It must be shown that $a \in uM$. Let $a \notin uM$. Then $a \notin M$, and there exists a set O which is a neighborhood of a relative to the topology v and such that the set $K = OM$ is finite. By 2.1.9, O is a neighborhood of a in the topology w. But w is an AB-topology and $K \subset P - (a)$ is a finite set. Hence it follows that $\Omega = O - K$ is a neighborhood of a in the topology w. As $a \in wM$, there is $\Omega M \neq \emptyset$ and this is a contradiction.

Let $\mathfrak{a}$ be any cardinal number. Let $M^{\mathfrak{a}}$ be the set of the points $a \in P$ such that the set $OM - (a)$ has cardinality $\geqq \mathfrak{a}$ for each neighborhood O of a. Then the set $M^{\mathfrak{a}}$ has properties analogous to those of the sets M' and M^h. Obviously $M^{\mathfrak{a}} = M'$ if $\mathfrak{a} = 1$ and $M^{\mathfrak{a}} = M^h$ if $\mathfrak{a} = \aleph_0$.

10.1. Let (P, u) and (P_1, v) be two spaces and let f be a mapping of P into P_1. Let $a \in P$. The point a is called a *point of continuity* of the mapping f if $a \in uM \Rightarrow \Rightarrow f(a) \in v[f(M)]$ for each $M \subset P$.

10.1.1. *A point $a \in P$ is a point of continuity of a mapping f if and only if for each neighborhood Ω of $f(a)$ in (P_1, v) the set $f_{-1}(\Omega)$ is a neighborhood of a in the space (P, u).*

Proof. I. Let a be a point of continuity. Let Ω be a neighborhood of $f(a)$ in (P_1, v). Put $O = f_{-1}(\Omega)$, and suppose that O is not a neighborhood of a in (P, u). Then $a \in u(P - O)$, and thus $f(a) \in v[f(P - O)] = v[f(P) - \Omega] \subset v(P_1 - \Omega)$, so that Ω is not a neighborhood of $f(a)$ in (P_1, v).

II. Let $f_{-1}(\Omega)$ be a neighborhood of a point a whenever Ω is a neighborhood of the point $f(a)$. Let $M \subset P$, $a \in uM$, and suppose that $f(a) \notin v[f(M)]$. Then $\Omega = P_1 - - f(M)$ is a neighborhood of $f(a)$ in (P, v), so that $f_{-1}(\Omega)$ is a neighborhood of a in (P, u). Obviously $f_{-1}(\Omega) \subset P - M$, so that also $P - M$ is a neighborhood of a in (P, u); this is a contradiction.

Let a topology u be determined by complete systems $\mathfrak{O}(a)$ of neighborhoods at points $a \in P$, and similarly let a topology v be determined by complete systems $\mathfrak{O}_1(b)$ of neighborhoods at points $b \in P_1$. Then theorem 10.1.1 shows that a point $a \in P$ is a point of continuity of a mapping f if and only if for each set $\Omega \in \mathfrak{O}_1[f(a)]$ there exists a set $O \in \mathfrak{O}(a)$ with $f(O) \subset \Omega$.

A mapping f is *continuous* if *each* $a \in P$ is a point of continuity. Then

$$f(uM) \subset v[f(M)]$$

for each $M \subset P$.

Let $f(P) \subset Q_1 \subset P_1$. A topology v for P_1 determines (cf. 1.5) a topology w for Q_1. The mapping f is then also a mapping of the space (P, u) into the space (Q_1, w). It is easy to prove that the set of points of continuity of f is the same if one takes the space (Q_1, w) instead of (P_1, v). Thus when considering continuity it is sufficient, as a rule, to study mappings of P onto P_1.

Let f be a mapping of (P, u) onto (P_1, v). The mapping f is said to be a *homeomorphic* mapping, or a homeomorphism, if (1) f is one-to-one, (2) f is continuous, (3) the inverse mapping f_{-1} is continuous. A mapping f is a homeomorphism if and only if (1) f is one-to-one, (2) $f(uM) = v[f(M)]$ for each $M \subset P$.

The following statement is evident.

10.1.2. *Let u and v be two topologies for P. Let f be the identity mapping* [i.e. $f(a) = a$ for each $a \in P$] *of the space (P, u) onto (P, v). Then f is continuous if and only if the topology u is finer than v, and f is a homeomorphism if and only if $u = v$.*

10.2. Let (P, u), (P_0, w) and (P_1, v) be three spaces. Let φ be a mapping of P into P_0, ψ a mapping of P_0 into P_1. Then we have a mapping f of P into P_1 if we define $f(a) = \psi[\varphi(a)]$ for each $a \in P$. The mapping f is called the mapping *composed* of φ and ψ (in this order). The following theorem is evident.

10.2.1. *If a is a point of continuity of φ and $f(a)$ is a point of continuity of ψ, then a is a point of continuity of the composed map f.*

From 10.2.1 there follows the theorem

10.2.2. *Every mapping composed of two continuous maps is continuous.*

Let f be a mapping of (P, u) onto (P_1, v); then f is called *strictly continuous* if

$$(1) \qquad vM_1 = f(uM) \quad \text{with} \quad M = f_{-1}(M_1)$$

for each $M_1 \subset P_1$.

10.2.3. *Every strictly continuous mapping is continuous.*

Proof. Let $M_0 \subset P$, $M_1 = f(M_0)$, $M = f_{-1}(M_1)$. Then $M_0 \subset M$ and thus $uM_0 \subset uM$, $f(uM_0) \subset f(uM)$. If f is strictly continuous, condition (1) is satisfied and thus $f(uM_0) \subset vM_1 = v[f(M_0)]$.

The following two theorems are evident.

10.2.4. *A one-to-one mapping is strictly continuous if and only if it is a homeomorphism.*

10.2.5. *Let f be a mapping of a set P onto a set P_1. Let u be a topology for P. Then there exists precisely one topology v for P_1 such that f is a strictly continuous mapping of (P, u) onto (P_1, v).*

10.2.6. *Let f be a continuous mapping of (P, u) onto (P_1, v). Then there exists a space (P_0, w), a strictly continuous mapping φ of (P, u) onto (P_0, w) and a continuous mapping ψ of (P_0, w) onto (P_1, v) such that f is composed of φ and ψ.*

Proof. Put $P_0 = P_1$. Set $\varphi(a) = f(a)$ for $a \in P$, and $\psi(b) = b$ for $b \in P_0$. Then f is composed of φ and ψ. By 10.2.5 there exists a topology w for P_0 such that φ is strictly continuous. Because ψ is one-to-one, it is sufficient to prove that ψ is a continuous map. Let $M \subset P_0$. We shall prove that $wM \subset vM$. As f is a continuous map, there is $f\{u[f_{-1}(M)]\} \subset vM$. As φ is strictly continuous, $wM = f\{u[\varphi_{-1}(M)]\}$. But $f_{-1}(M) = \varphi_{-1}(M)$, and thus $wM \subset vM$.

It is easy to prove the theorem

10.2.7. *If there exists a strictly continuous mapping of an A-space P onto a space P_1, then P_1 is an A-space.*

From 10.2.6 and 10.2.7 follows

10.2.8. *In* 10.2.6, *the term space may be replaced by A-space throughout.*

10.2.9. *If there exists a one-to-one continuous map of a space P onto a B-space P_1, then P is a B-space.*

10.2.10. *In* 10.2.6, *the term space may be replaced by B-space throughout.*

10.2.11. *In* 10.2.6, *the term space may be replaced by AB-space throughout.*

Let the space P contain exactly four points: a, b', b'', c. Let $\bar{a} = (a) + (b')$, $\bar{b}' = (b')$, $\bar{b}'' = (b'') + (c)$, $\bar{c} = (c)$. Let the closure of a set $M \subset P$ be the union of the closures of its points. Let P_1 contain exactly three points: α, β, γ. Let $u\alpha = (\alpha) + (\beta)$, $v\alpha = (\alpha) + (\beta) + (\gamma)$, $u\beta = v\beta = (\beta) + (\gamma)$, $u\gamma = v\gamma = (\gamma)$. For $M_1 \subset P_1$ let uM_1 be the union of all $u\xi$ for $\xi \in M_1$, and similarly for vM_1. Let $f(a) = \alpha$, $f(b') = f(b'') = \beta$, $f(c) = \gamma$. Then f is a strictly continuous mapping of the AF-space P onto (P_1, u). However, (P_1, u) is not an F-space. Moreover, f is a continuous mapping of the AF-space P onto the AF-space (P_1, v). But there does not exist any F-space P_0 such that f is composed of φ and ψ, where φ is a strictly continuous mapping of P onto P_0 and ψ is a one-to-one mapping of P_0 onto (P_1, v).

10.3. 10.3.1. *Let f be a continuous map of a space P onto a space P_1. If $M_1 \subset P_1$ is closed in P_1, then $M = f_{-1}(M_1)$ is closed in P. If M_1 is open in P_1, then M is open in P.*

Proof. I. Let M_1 be closed. Then $M_1 = \overline{M}_1$. As f is a continuous map, $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)} = \overline{M}_1 = M_1$ and thus $\overline{M} \subset f_{-1}(M_1) = M$. Therefore M is closed.

II. Let M_1 be open. Then $P_1 - M_1$ is closed and thus $f_{-1}(P_1 - M_1) = P - f_{-1}(M_1)$ is closed. Therefore $f_{-1}(M_1)$ is open.

10.3.2. *Let f be a mapping of a space P onto an F-space P_1. For each closed set $M_1 \subset P_1$ in P_1 let $f_{-1}(M_1)$ be closed in P. Then the mapping f is continuous.*

Proof. Let $M \subset P$. We are to prove that $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$. As P_1 is an F-space, $M_1 = \overline{f(M)}$ is closed in P_1, so that $f_{-1}(M_1)$ is closed in P. But $M \subset f_{-1}(M_1)$, and thus $\overline{M} \subset \overline{f_{-1}(M_1)} = f_{-1}(M_1)$, i.e. $f(\overline{M}) \subset M_1 = \overline{f(M)}$.

10.3.3. *Let f be a mapping of a space (P, v) onto an F-space P_1. Let u be the F-modification of the topology v. Then f is a continuous mapping of (P, u) onto P_1 if and only if f is a continuous mapping of (P, v) onto P_1.*

The proof follows easily from 10.3.2 since the closed sets are identical in both topologies.

Let f be a mapping of a space P onto a space P_1. The mapping f is called (1) *closed* if for each closed set $M \subset P$ in P, $f(M)$ is closed in P_1; (2) *semi-closed* if for each $M_1 \subset P_1$ such that $M = f_{-1}(M_1)$ is closed in P, the set $f(M) = M_1$ is closed in P_1.

10.3.4. *Let f be a strictly continuous mapping of a space P onto a space P_1. Then f is a semi-closed mapping.*

Proof. Let $M_1 \subset P_1$, $M = f_{-1}(M_1)$, $M = \overline{M}$. We are to prove that $M_1 = \overline{M}_1$. But $\overline{M}_1 = f(\overline{M}) = f(M) = M_1$.

The mapping f in the example at the end of section 10.2 is a semi-closed mapping of the AF-space P onto the AF-space (P_1, v). But f is not a strictly continuous mapping.

10.3.5. *Let f be a closed continuous map of an F-space P onto a space P_1. Then P_1 is an F-space and f is strictly continuous.*

Proof. Let $M_1 \subset P_1$; put $M = f_{-1}(M_1)$. As P is an F-space, the set $\overline{M}$ is closed in P. Because f is a closed mapping, $f(\overline{M})$ is closed in P_1, i.e. $\overline{f(\overline{M})} = f(\overline{M})$, and then $\overline{f(M)} \subset f(\overline{M})$, i.e. $\overline{M}_1 \subset f(\overline{M})$. As f is continuous, $\overline{M}_1 = \overline{f(M)} \supset f(\overline{M})$. Thus $\overline{M}_1 = f(\overline{M})$, i.e. f is strictly continuous. Moreover, $\overline{f(\overline{M})} = f(\overline{M})$, and thus $\overline{\overline{M}}_1 = \overline{M}_1$, i.e. P_1 is an F-space.

Let (P, v) be a non-F-space and let u be the F-modification of the topology v. Then the identical mapping is a continuous closed mapping of (P, v) onto (P, u) which is not strictly continuous.

10.3.6. *Let f be a map of a set P onto a set P_1. Let there be given a topology u for P. Then there exists exactly one F-topology v for P_1 such that f is a continuous semi-closed mapping of (P, u) onto (P_1, v).*

Proof. Let $M_1 \subset P_1$. If $f_{-1}(M_1)$ is closed in (P, u), then M_1 must be closed in (P_1, v), since otherwise f would not be semi-closed. If $f_{-1}(M_1)$ is not closed in P, then M_1 cannot be closed in (P_1, v), since otherwise f would not be continuous (theorem 10.3.1). Therefore $M_1 \subset P_1$ is closed in the topology v if and only if $f_{-1}(M_1)$ is closed in the topology u. The axioms $(\mathrm{I}^{\mathrm{f}})$ to $(\mathrm{III}^{\mathrm{f}})$ from 6.1 are then satisfied and v is an F-topology for P_1 (cf. 6.1.3). In the topologies u and v the mapping f is semi-closed, and by 10.3.2 it is also continuous.

10.3.7. *Let f be a continuous mapping of an F-space (P, u) onto an F-space (P_1, v). One may then determine an F-space (P_0, w), a continuous semi-closed mapping φ of (P, u) onto (P_0, w) and a one-to-one continuous mapping ψ of (P_0, w) onto (P_1, v) such that f is composed of φ and ψ.*

Proof. Put $P_0 = P_1$. Let $\varphi(a) = f(a)$ for $a \in P$, $\psi(b) = b$ for $b \in P_0$. Then f is composed of φ and ψ. According to 10.3.6 there exists an F-topology w for P_0 such that φ is a continuous semi-closed mapping. The mapping ψ is one-to-one, and thus it is sufficient to prove that ψ is a continuous mapping. Let $M_1 \subset P_1$ be closed relative to the topology v. By 10.3.2 it is sufficient to prove that $\psi_{-1}(M_1) = M_1$ is a closed set in the topology w. The set $M = f_{-1}(M_1)$ is closed in P (cf. 10.3.1). As φ is semi-closed and $M = \varphi_{-1}(M_1)$, the set M_1 is closed in w.

10.3.8. *Let there exist a continuous semi-closed mapping of an A-space P onto an F-space P_1. Then P_1 is an A-space.*

Proof. As in the proof of theorem 10.3.6, a set $M_1 \subset P_1$ is closed in P_1 if and only if $f_{-1}(M_1)$ is closed in P. Hence axiom $(\mathrm{IV}^{\mathrm{f}})_A$ is fulfilled in P_1 (cf. 7.1). Thus P_1 is an AF-space.

From 10.3.7 and 10.3.8 there follows

10.3.9. *In* 10.3.7 *the term F-space may be replaced by AF-space throughout.*

From 10.3.7 and 10.2.9 there follows

10.3.10. *In* 10.3.7 *the term F-space may be replaced by BF-space throughout.*

From 10.3.7, 10.2.9 and 10.3.8 there follows

10.3.11. *In* 10.3.7 *the term F-space may be replaced by ABF-space throughout.*

11.1.[19] The most important topological spaces are the *metrizable* spaces.

In a set P let there be given a metric ϱ. Then we define the closure $\overline{M}$ of a set $M \subset P$ thus: $a \in \overline{M}$ if and only if for each $\varepsilon > 0$ there exists a point $b \in M$ such that $\varrho(a, b) < \varepsilon$. The axioms $(\mathrm{I}^{\mathrm{u}})$ to $(\mathrm{III}^{\mathrm{u}})$ are then satisfied, so that one has a topology for P. If a given topology for P can be introduced in this manner for some metric ϱ, then the space P is said to be metrizable. The topology of a metrizable topological space P can be derived from various metrics. Metrics ϱ_1 and ϱ_2 determine the same topology if and only if they are *equivalent.* Note the difference between a metric and a metrizable space. In a *metric* space there is given a metric, which then determines a topology; in a *metrizable* space there is given only a topology, and there exist metrics which determine this given topology.

A metrizable space P is an A-space, an F-space and a B-space. A metrizable space P is a hereditary N-space and hence an R-space.

Note that every space embedded into a metric space is a metric space.

Another important category of topological spaces are the *ordered* spaces. Let P be an ordered set. If $a < b$ then it is customary to say that a is less than b. Now define a topology for P by taking as a determining system $\mathfrak{O}(a)$ of neighborhoods of points $a \in P$ the following systems. Elements of $\mathfrak{O}(a)$ have the form

$$\underset{x}{E}[u < x < v], \tag{1}$$

with $u \in P$ and $v \in P$ such that $u < a < v$. If a is the first element of P then one takes, instead of (1), the sets

$$\underset{x}{E}[x < v],$$

[19] In section 11.1 references to the book "Bodové množiny", JČMF, Praha, 1936, by E. Čech were given. As these are mostly to terms and properties known in general, these were omitted in the translation.

where $v \in P$, $a < v$; and analogously if a is the last element of P. The axioms (I°) and (II°) are satisfied, so that P is a topological space. The space P is said to be an *ordered space with the natural topology*. It is easily shown that P is an $ABRF$-space. E. Chittenden proved in 1936 at my suggestion that P is a hereditary N-space.

Some further interesting examples of topological spaces will be exhibited.

Let P be the interval of reals

$$\underset{t}{E}[0 \leqq t \leqq 1].$$

In accordance with 6.1.3, define an F-topology for P by taking as the closed sets: the empty set, each one-point set, and each interval of the form

$$\underset{t}{E}[a \leqq t \leqq b] \quad (0 \leqq a < b \leqq 1).$$

It is easy to prove that the usual topology for P is the A-modification (7.3) of this topology.

Let $P = \mathbf{E}_2$ and, first, let v be the topology for P defined thus: If $M \subset P$ then $a \in vM$ means that either $a \in M$ or that a is a point of a segment whose end points are in M. Evidently the topology is neither an A-topology nor an F-topology. Second, define a topology u for P thus: If $M \subset P$, then uM is the least convex set $K \subset \mathbf{E}_2$ such that $M \subset K$. The topology u is then the F-modification (6.1) of the topology v.

Let P be a given topological space and let $\mathfrak{P}$ be a given family of its subsets. Define a topology u for $\mathfrak{P}$ in the following way: For any $A \in \mathfrak{P}$ let $\mathfrak{O}(A)$ consist of all sets of the form

$$\underset{X}{E}[X \in \mathfrak{P}, F \subset X \subset G],$$

where $F \subset P$ and $G \subset P$ are so chosen that (1) F is closed in P, (2) G is open in P, (3) $F \subset A \subset G$.

11.2. From small beginnings, topology has developed in the present century into one of the major branches of mathematics. In many cases, application of topological methods has led to significant advances in other branches of mathematics. Naturally, most applications are to metric spaces; and the topology of metric spaces is in a stage of development much more advanced than general topology. And for this reason, in general topology there remains a series of simple and natural unsolved problems; their solution, of course, requires competence in abstract reasoning but usually not an extensive knowledge of the literature.

General topology was founded by M. Fréchet (Thesis 1906). The results of his numerous papers on the subject, and also related results of other authors, may be found in his book *Les espaces abstraits* (1928); this book gives a clear picture of the historical background and present state of the subject, but the proofs of almost all results are omitted. Fréchet's work in general topology is incentive and rich in new ideas, but it is mainly programmatical, and a complete and thorough study is seldom given.

A second book which had considerable effect on the development of general topology was F. Hausdorff's *Grundzüge der Mengenlehre* (1914), where AHF-spaces are studied. It is to be regretted that the *Mengenlehre* (1927 and 1936), essentially a re-edition of the Grundzüge, was, as a result of publishers' requirements, reduced to the study of metric spaces only.

A satisfactory and modern treatment of AF-spaces may be found in the first chapter of *Topologie* I (1933) by C. Kuratowski.

11.3. The present paper arose from notes of my lectures in the topological seminar held at Brno from May 1936. Their aim was to provide a basis for independent work on topology of members of the seminar. A typical aspect of this seminar was that the study of any question was not time-limited in advance; this is reflected in the present paper in that it is devoted to the detailed study of some fundamental concepts.

A number of new problems was included in the lectures, and most of these were solved by members of the seminar; these will be published separately. Several further problems are given below.

Problem I. What is the cardinality of all topologies (all F-topologies, etc.) on a given finite set P?

Problem II. The preceding problem for an infinite countable set P.[20]

Problem III. From a given topology in P further topologies may be obtained by the operations of F-modification (6.1), A-modification (7.2), B-modification (9.2). Under what conditions do these operations commute?

Problem IV. In 7.2 there was introduced a notion more general than A-modification, namely A-modification reduced to Q. Can the F-modification or B-modification be generalized similarly?[21]

Problem V. Let v be a topology in P. We shall say that v has property α if the system of those $M \subset P$ which have $vM - M$ consisting of a single point forms a lower base. We shall say that v has the property β if there is no topology except v which is weaker than v and has the same F-modification. Obviously property α implies property β. Does β imply α?[22]

Problem VI. Which sets A of ordinals have the property that there is a countable space P such that A is the set of all $\varphi(M)$ for $M \subset P$, where φ is as described in 6.5?[23]

[20] Problem II was solved by B. Pospíšil, Časopis Pěst. Mat. Fys. *67* (1938), 100–102.

[21] This problem was solved by K. Koutský, Rozpravy II. Třídy České Akad. *48* (1938), 22p.

[22] If P is an infinite discrete space, then the space τP introduced by M. Katětov (Časopis Pěst. Mat. Fys. *69* (1940), 36–49) possesses property β, but does not possess property α.

[23] Problem VI was solved by V. Jarník, Rozpravy II. Třídy České Akad. *48* (1938).

Problem VII. Let P be a countable space, let $\vartheta(P)$ be as in 6.5. Obviously $\vartheta(P) \leqq \leqq \omega_1$, ω_1 being the least uncountable ordinal. Is $\vartheta(P) = \omega_1$ possible?[24]

Problem VIII. Determine the F-spaces with the property that every strictly continuous image is an F-space.[25]

[24] A positive answer follows from Jarník's solution of problem VI.

[25] A topological space (P, u) has the required property if and only if there is a subset A of P such that, for each $X \subset P$, either $uX = X$ or $uX = X \cup A$.

29

ON BICOMPACT SPACES

Annals of Mathematics
38 (1937), 823–844

The theory of bicompact spaces was extensively studied by P. Alexandroff and P. Urysohn in their paper *Mémoire sur les espaces topologiques compact*, Verhandligen der Kon. Akademia Amsterdam, Deel XIV, No. 1, 1929; I shall refer to this paper with the letters AU. An important result was added by A. Tychonoff in his paper *Über die topologische Erweiterung von Räumen*, Math. Annalen 102, 1930, who proved that complete regularity is the necessary and sufficient condition for a topological space to be a subset of some bicompact Hausdorff space. As a matter of fact, Tychonoff proves more, viz. that given a completely regular space S, there exists a bicompact Hausdorff space $\beta(S)$ such that (i) S is dense in $\beta(S)$, (ii) any bounded continuous real function defined in the domain S admits of a continuous extension to the domain $\beta(S)$. It is easily seen that $\beta(S)$ is uniquely defined by the two properties (i) and (ii). The aim of the present paper is chiefly the study of $\beta(S)$.

The paper is divided into four chapters. In chapter I, I briefly resume some well known definitions adding a few simple remarks. In particular I show that an *arbitrary* topological space S determines a completely regular space $\varrho(S)$ such that a good deal of topology of S reduces to the topology of $\varrho(S)$, this being true in particular for the theory of real valued continuous and Baire functions. Chapter II contains the theory of the bicompact space $\beta(S)$ mentioned above. Here I shall recall only a few results of chapter II. First, if the space S is *normal*, then $\beta(S)$ may be defined without any reference to continuous real function since property (ii) may be replaced by the following: if two closed subsets of S have no common point, then their closures in $\beta(S)$ have no common point either. Second, if the space S satisfies the first countability axiom, then S is completely determined by $\beta(S)$, S being simply the set of all points of $\beta(S)$ where the first countability axiom holds true. This implies that in this case (embracing the case of metrizable spaces) the whole topology of S may be reduced to the topology of the bicompact space $\beta(S)$. Hence it is evident that it is highly desirable to carry further the study of bicompact spaces and in particular of $\beta(S)$. Of course it must be emphasized that $\beta(S)$ may be defined only formally (not constructively) since it exists only in virtue of Zermelo's theorem. If I denotes the space of integer numbers, then I think it is impossible to determine effectively (in the sense of Sierpiński) a point of $\beta(I) - I$. I was even unable to determine the cardinal number of $\beta(I)$. (The paper contains several other unsolved problems.) The space $\beta(I) - I$ furnished incidentally a positive solution of a problem proposed by Alexandroff and Urysohn (AU, p. 54: Existe-t-il un espace bicompact ne contenant aucun point $(\varkappa)$? The authors write in this connection: La résolution affirmative de ce problème nous donnerait un exemple des espace bicompact d'une nature toute différente de celle des espaces connus jusqu'à présent). In chapter III, I call a completely regular space S *topologically complete* if S is a G_δ in $\beta(S)$. The reason for this designation lies in the fact that, if S is metrizable, it has this property if and only if it is homeomorphic with a metric complete space. The proof is an easy adaptation of Hausdorff's well known proof of the theorem that a G_δ in a metric complete space, is a homeomorph of a metric complete space. In chapter IV, I consider *locally normal* spaces and I prove that a locally normal space S is always an open subset of some normal space. This was of course to be expected but I think it would be difficult to prove without the theory of $\beta(S)$.

I.

A set S is called a topological space (and its elements are called *points*) if there is given a class $\mathfrak{F}$ of subsets of S (called *closed* subsets of S) such that (1) the whole space S and the vacuous set 0 are closed, (2) the intersection of any family of closed sets is closed, (3) the sum of two closed sets is closed. A set $G \subset S$ is called *open*, if the complementary set $S - G$ is closed. A *neighborhood* of a set $A \subset S$ (A may consist of a single point) is an open set containing A.

The intersection of all closed sets containing a given set A is called the *closure* of A and is denoted by $\bar{A}$. The closure operation has the following properties: (1) $\bar{0} = 0$, (2) $A \subset \bar{A}$, (3) $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$, (4) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$. Conversely, it is possible to define the general notion of a topological space starting with an operation $\bar{A}$ subject only to conditions (1)–(4) and defining closed sets by the condition $\bar{A} = A$.

An *open base* of a topological space S is a class $\mathfrak{B}$ of open sets such that any open set is a sum of some of the elements of $\mathfrak{B}$. The class $\mathfrak{H}$ of *all* open sets is a particular open base. Any open base $\mathfrak{B}$ has the following properties: (1) given a point $x \in S$, there exists a $U \in \mathfrak{B}$ such that $x \in U$, (2) given a point $x \in S$ and two sets U and V such that $U \in \mathfrak{B}$, $V \in \mathfrak{B}$, $x \in UV$, there exists a set W such that $W \in \mathfrak{B}$, $x \in W$, $W \subset UV$. Conversely it is possible (and the possibility is utilized very frequently in practice) to define a topological space starting with a class $\mathfrak{B}$ subject only to condition (1) and (2), the closure $\bar{A}$ of a set $A \subset S$ consists then of all the points x such that

$$U \in \mathfrak{B}, \quad x \in U \quad \text{implies} \quad UA \neq 0.$$

A fixed subset T of a topological space S is always considered as a topological space, defining a set $A \subset T$ to be *relatively closed* (i.e. closed in the space T) whenever A is the intersection of T with some closed subset of S. A set $A \subset T$ is *relatively open* whenever A is the intersection of T with some open subset of S. The *relative closure* of a set $A \subset T$ is the intersection $T\bar{A}$ of T with the closure of A in the space S. Any open base $\mathfrak{B}$ of S determines an open base $\mathfrak{B}_0$ of T; the elements of $\mathfrak{B}_0$ are the intersections of T with the elements of $\mathfrak{B}$. A *mapping* f of a topological space S_1 into a topological space S_2 is an operation attaching to each point $x \in S_1$ a definite point $f(x) \in S_2$; we always suppose that, given any point $y \in S_2$, there exists at least one point $x \in S_1$ such that $f(x) = y$. The space S_1 is the *domain* of f, S_2 is its *range*. The *image* $f(A)$ of a set $A \subset S_1$ is the set of all points $f(x)$, x running over A. The *inverse image* $f^{-1}(B)$ of a set $B \subset S_2$ is the set of all points $x \in S_1$ such that $f(x) \in B$. The mapping f is *one-to-one* if

$$x_1 \in S_1\,, \quad x_2 \in S_1\,, \quad x_1 \neq x_2 \quad \text{implies} \quad f(x_1) \neq f(x_2)\,.$$

If f is one-to-one, then the inverse operation f^{-1} is a one-to-one mapping of S_2 into S_1. The mapping f will be called a *function* if its range consists of real numbers. The function f is *bounded* if its range is a bounded set.

The mapping f is called *continuous at a point* $x \in S_1$ if, given any neighborhood V of $f(x)$, there exists a neighborhood U of x such that $f(U) \subset V$. f is called *continuous* (simply) if it is continuous at any point $x \in S_1$. f is called *homeomorphic* if it is one-to-one and if both f and f^{-1} are continuous. f is continuous, if and only if the inverse image of any closed subset of S_2 is a closed subset of S_1.

A set $A \subset S$ is called a G_δ-set if there exists a countable sequence $\{G_n\}$ of open sets such that $A = \prod_1^\infty G_n$; A is called an F_σ-set if there exists a countable sequence $\{F_n\}$ of closed sets such that $A = \sum_1^\infty F_n$. The complement of a G_δ-set is an F_σ-set and vice-versa.

S is called a *Kolmogoroff space*[1] if the closures of any two distinct points are distinct. S is called a *Riesz space*[2] if any single point is closed. S is a Riesz space if and only if the intersection of all the neighborhoods of any point x consists of x only. S is called a *Hausdorff space* if the intersection of the closures of all the neighborhoods of any point x consists of x only. Any Riesz space is a Kolmogoroff space. Any Hausdorff space is a Riesz space. Any subset of a Kolmogoroff space is a Kolmogoroff space. Any subset of a Riesz space is a Riesz space. Any subset of a Hausdorff space is a Hausdorff space. Let $\mathfrak{B}$ be any open base of S. S is a Kolmogoroff space if and only if, given two distict points x and y, there exists a set $U \in \mathfrak{B}$ containing precisely one of the points x and y. S is a Riesz space if and only if, given two distinct

[1] See P. Alexandroff and H. Hopf, Topologie I, p. 58.

[2] See G. Birkhoff, On the combination of topologies, Fund. Math. 26, p. 162.

points x and y, there exists a set $U \in \mathfrak{B}$ containing x and not containing y. S is a Hausdorff space if and only if, given two distinct points x and y, there exists sets U and V such that $U \in \mathfrak{B}$, $V \in \mathfrak{B}$, $x \in U$, $y \in V$, $UV = 0$.

Now we proceed to prove that *the theory of general topological spaces* (in the sense precised above) *can be completely reduced to the theory of Kolmogoroff spaces*. Let S be a topological space. Two points $x \in S$ and $y \in S$ will be called equivalent (for the time being) if $\bar{x} = \bar{y}$. Let F be any closed subset of S and let x and y be two equivalent points; if $x \in F$, then $\bar{x} \subset F$, since F is closed, but $y \in \bar{y}$ and $\bar{y} = \bar{x}$, so that $y \in F$. It follows that any closed subset of S consists of complete classes of mutually equivalent points. Now let us attach to each point $x \in S$ a new symbol $\tau(x)$ chosen in such manner that $\tau(x) = \tau(y)$ if and only if x and y are equivalent; let us call S_0 the set of the symbols $\tau(x)$, so that τ is a mapping of S into S_0. A set $A_0 \subset S_0$ will be considered as closed if and only if its inverse image $\tau^{-1}(A_0)$ is a closed subset of S. It is evident that S_0 is a topological space and that τ is a continuous mapping. Further it is evident that for any set $A \subset S$ we have $\tau(\bar{A}) = \overline{\tau(A)}$; in particular $\tau(\bar{x}) = \overline{\tau(x)}$ for any $x \in S$. If $\tau(x) \neq \tau(y)$, we have $\bar{x} \neq \bar{y}$; since the sets $\bar{x}$ and $\bar{y}$ are closed, it easily follows that $\tau(\bar{x}) \neq \tau(\bar{y})$, or $\overline{\tau(x)} \neq \overline{\tau(y)}$, so that S_0 is a Kolmogoroff space. Conversely, let S_0 be a Kolmogorofff space. Let τ be a mapping of a set S into S_0. Let us call closed in S the inverse image of any closed subset of S_0. Then S is the most general topological space and τ has the previous meaning. Evidently the topology of S is quite completely described by that of S_0.

S is called a *regular space* if it is a Kolmogoroff space having the following property: given a neighborhood U of a point x, there exists a neighborhood V of x such that $\bar{V} \subset U$ [3]. We shall prove that any regular space S is a Hausdorff space[4]. Let x and y be two distinct points of S. If we had both $x \in \bar{y}$ and $y \in \bar{x}$, it would follow, since $\bar{x}$ and $\bar{y}$ are closed, that $\bar{x} \subset \bar{y}$ and $\bar{y} \subset \bar{x}$, i.e. $\bar{x} = \bar{y}$, which is impossible. The argument being symmetrical, we may suppose that x does not belong to $\bar{y}$, so that $S - \bar{y}$ is a neighborhood of x. Hence there exists a neighborhood U of x such that $\bar{U} \subset S - \bar{y}$. Putting $V = S - \bar{U}$, we have two open sets U and V such that $x \in U$, $y \in V$, $UV = 0$, so that S is a Hausdorff space.

Any subset of a regular space is a regular space.

S is called a *completely regular space* if it is a Kolmogoroff space having the following property: given a closed set F and a point $a \in S - F$, there exists a continuous function f (in the domain S) such that $f(a) = 0$ and $f(x) = 1$ for any $x \in F$.[5] It is easy to see that a completely regular space is regular and that any subset of a completely regular space is a completely regular space.

[3] The neighborhoods may here be restricted to a given open base of S.

[4] This is usually done assuming a priori that S is a Riesz space; for this point I am indebted to Dr. K. Koutský.

[5] We may assume that $0 \leqq f(x) \leqq 1$ for every $x \in S$, since we could replace f with φ by defining $\varphi(x) = f(x)$ if $0 \leqq f(x) \leqq 1$, $\varphi(x) = 0$ if $f(x) < 0$, and $\varphi(x) = 1$ if $f(x) > 1$.

Now we shall start with an arbitrary topological space S and we shall attach to it a uniquely defined completely regular space $\varrho(S)$ in such manner that a great deal of topology of S may be reduced to that of $\varrho(S)$. Two points x and y of S will be called equivalent (for the time being) if $f(x) = f(y)$ for every continuous function f (in the domain S). To each point $x \in S$ let us attach a new symbol $\varrho(x)$ chosen in such a manner that $\varrho(x) = \varrho(y)$ if and only if x and y are equivalent;[6] let us call S_1 the set of all the symbols $\varrho(x)$, so that ϱ is a mapping of S into $S_1 = \varrho(S)$. We shall introduce a topology in S_1 by defining an open base $\mathfrak{B}$ for S_1. An element $[f, I]$ of $\mathfrak{B}$ will be defined by a continuous function f in the domain S and open interval I, $[f, I]$ consisting of the points $\varrho(x)$ of S_1 such that $f(x) \in I$. To prove that S_1 is a topological space we have to verify two things. First, for any $a \in S$, there evidently exists an $[f, I]$ containing $\varrho(a)$. Second, let $\varrho(a)$ belong both to $[f_1, I_1]$ and to $[f_2, I_2]$; we have to prove that there exists an $[f, I]$ such that $\varrho(a) \in [f, I]$ and $[f, I] \subset [f_1, I_1] \,.\, [f_2, I_2]$. There exists a number $\varepsilon > 0$ such that, for $i = 1$ and for $i = 2$, the interval $f_i(a) - \varepsilon < t < f_i(a) + \varepsilon$ is a subset of I_i. It is easy to see that we may put $f(x) = |f_1(x) - f_1(a)| + |f_2(x) - f_2(a)|$, choosing I to be the interval $-2\varepsilon < t < 2\varepsilon$. Hence S_1 is a topological space.

Since the topology of S_1 was defined by means of *continuous* functions in the domain S, it is easy to see that ϱ is a continuous mapping of S into S_1 so that, if φ is any continuous function in the domain S_1, $f(x) = \varphi[\varrho(x)]$ is a continuous function in the domain S. Moreover, in our case the converse is also true: *any continuous function in the domain S has the form $f(x) = \varphi[\varrho(x)]$, φ being a continuous function in the domain S_1.*

If $\varrho(a)$ and $\varrho(b)$ are two distinct points of S_1, then there exists a continuous function f in the domain S such that $f(a) \neq f(b)$. There exists two disjoined open intervals I_1 and I_2 such that $f(a) \in I_1$ and $f(b) \in I_2$. Then $[f, I_1]$ and $[f, I_2]$ are two disjoint open subsets of S_1 and $\varrho(a) \in [f, I_1]$, $\varrho(b) \in [f, I_2]$. It follows that S_1 is a Hausdorff space. As a matter of fact, S_1 is a completely regular space. Let Φ be a closed subset of S_1 not containing the point $\varrho(a)$. There exists an $[f, I]$ such that $\varrho(a) \in [f, I] \subset S_1 - \Phi$; we may suppose that I consists of all numbers t such that $|t - f(a)| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. If $|f(x) - f(a)| \geqq \varepsilon$, put $g(x) = 1$; if $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, put $g(x) = \varepsilon^{-1} \,.\, |f(x) - f(a)|$. Then g is a continuous function in the domain S, so that there exists a continuous function φ in the domain S_1 such that $g(x) = \varphi[\varrho(x)]$. It is easy to see that $\varphi[\varrho(a)] = 0$ and $\varphi(x) = 1$ for each $x \in \Phi$.

Let F be a closed subset of S. We shall prove that a *necessary and sufficient condition for the set $\varrho(F)$ to be closed in S_1 is that for any point*

$$a \in S - \varrho^{-1}[\varrho(F)]$$

there exists a continuous function f in the domain S such that $f(a) = 0$ and $f(x) = 1$

[6] It is evident that $\tau(x) = \tau(y)$ implies $\varrho(x) = \varrho(y)$, but of course we may restrict ourselves to Kolmogoroff spaces.

for each $x \in F$. First suppose the condition satisfied. If $\varrho(F)$ were not closed in S_1, we could choose a point a such that

$$\varrho(a) \in \overline{\varrho(F)} - \varrho(F).$$

Since $\varrho(a) \in S_1 - \varrho(F)$, there would exist a continuous function f in the domain S such that $f(a) = 0$ and $f(x) = 1$ for each $x \in F$. There would exist a continuous function φ in the domain S_1 such that $f(x) = \varphi[\varrho(x)]$. For $x \in \varrho(F)$ we would have $\varphi(x) = 1$; since φ is continuous, it easily follows that $\varphi(x) = 1$ for $x \in \overline{\varrho(F)}$, in particular $\varphi[\varrho(a)] = 1$, i.e. $f(a) = 1$, which is a contradiction. Secondly, suppose $\varrho(F)$ closed in S_1. Let $a \in S - \varrho^{-1}[\varrho(F)]$. Then $\varrho(a) \in S_1 - \varrho(F)$. Since S_1 is completely regular, there exists a continuous function φ in the domain S_1 such that $\varphi[\varrho(a)] = 0$ and $\varphi(x) = 1$ for each $x \in \varrho(F)$. Putting $f(x) = \varphi[\varrho(x)]$, we have a continuous function f in the domain S such that $f(a) = 0$ and $f(x) = 1$ for each $x \in F$.

As a corollary, we obtain that, if the space S itself is completely regular, the mapping ϱ is homeomorphic.

The following property is characteristic for completely regular spaces S: *Let σ be a continuous mapping of S into a topological space R such that each continuous function f in the domain S has the form $f(x) = \varphi[\sigma(x)]$, φ being a continuous function in the domain R. Then the mapping σ is homeomorphic.* The property cannot be true if S is not completely regular, as is seen by putting $\sigma = \varrho$. Hence suppose that S is completely regular. If $a \in S$, $b \in S$, $a \neq b$, there exists a continuous function f in the domain S such that $f(a) \neq f(b)$; since $f(x) = \varphi[\sigma(x)]$, we have $\sigma(a) \neq \sigma(b)$, i.e. the mapping σ is one-to-one. It remains to show that if F is a closed subset of S the set $\sigma(F)$ is closed in R. If $\sigma(F)$ is not closed, there exists a point $a \in S$ such that

$$\sigma(a) \in \overline{\sigma(F)} - \sigma(F).$$

There exists a continuous function f in the domain S such that $f(a) = 0$ and $f(x) = 1$ for each $x \in F$. We may put $f(x) = \varphi[\sigma(x)]$ and we have $\varphi[\sigma(a)] = 0$ and $\varphi(x) = 1$ for each $x \in \sigma(F)$. Since φ is continuous, we must have $\varphi(x) = 1$ for each $x \in \overline{\sigma(F)}$, hence for $x = \sigma(a)$, which is a contradiction.

Consider the following three properties of a topological space S: (1) If F_1 and F_2 are two closed sets such that $F_1F_2 = 0$, there exist two open sets G_1 and G_1 such that $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$, $G_1G_2 = 0$. (2) If F_1 and F_2 are two closed sets such that $F_1F_2 = 0$, there exists a continuous function f in the domain S such that $f(x) = 0$ for each $x \in F_1$ and $f(x) = 1$ for each $x \in F_2$.[5] (3) If F is a closed set and if φ is a bounded[7] continuous function in the domain F, there exists a continuous function f in the domain S such that $f(x) = \varphi(x)$ for each $x \in F$. It is easily seen that (2) is formally

[7] It is easy to prove that the word bounded may be omitted.

stronger than (1) and that (3) is formally stronger than (2). But Urysohn proved[8] that all three properties are equivalent to one another. A space having these properties is called normal. Property (2) shows that a normal Riesz space is a completely regular space, therefore a Hausdorff space.

If the space S is normal, then $\varrho(S)$ is normal as well. Let Φ_1 and Φ_2 be two closed subsets of $\varrho(S)$ such that $\Phi_1\Phi_2 = 0$. Then $F_1 = \varrho^{-1}(\Phi_1)$ and $F_2 = \varrho^{-1}(\Phi_2)$ are two closed subsets of S such that $F_1F_2 = 0$. Since S is normal, there exists a continuous function f in the domain S such that $f(x) = 0$ for each $x \in F_1$ and $f(x) = 1$ for each $x \in F_2$. There exists a continuous function φ in the domain $\varrho(S)$ such that $f(x) = \varphi[\varrho(x)]$. Evidently $\varphi(x) = 0$ for each $x \in \Phi_1$ and $\varphi(x) = 1$ for each $x \in \Phi_2$.

If the space S is normal, then for $a \in S$, $b \in S$ we have $\varrho(a) = \varrho(b)$ if and only if $\bar{a} \,.\, \bar{b} \neq 0$. Suppose first that $c \in \bar{a} \,.\, \bar{b}$. If f is a continuous function in the domain S, it is easy to see that $f(a) = f(c) = f(b)$, whence $\varrho(a) = \varrho(b)$. Secondly, suppose that $\bar{a} \,.\, \bar{b} = 0$. Since S is normal, there exists a continuous function f in the domain S such that $f(x) = 0$ for each $x \in \bar{a}$ and $f(x) = 1$ for each $x \in \bar{b}$, whence $f(a) = 0$, $f(b) = 1$.

If the space S is normal and if F is a closed subset of S, then $\varrho(F)$ is closed subset of $\varrho(S)$. Let $a \in S - \varrho^{-1}[\varrho(F)]$. For $x \in F$ we have $\varrho(a) \neq \varrho(x)$, whence $\bar{a} \,.\, \bar{x} = 0$; therefore $\bar{a} \,.\, F = 0$. Hence there exists a continuous function f in the domain S such that $f(x) = 1$ for each $x \in F$ and $f(x) = 0$ for each $x \in \bar{a}$, in particular $f(a) = 0$. We know that this implies that $\varrho(F)$ is closed in $\varrho(S)$.

The last two theorems show that, if S is normal, the space $\varrho(S)$ and its topology may be completely described without any explicit reference to continuous functions: The space $\varrho(S)$ consists of symbols $\varrho(x)$ attached to single points $x \in S$, $\varrho(x)$ and $\varrho(y)$ being identical if and only if $\bar{x} \,.\, \bar{y} \neq 0$; and a set $\Phi \subset \varrho(S)$ is closed in $\varrho(S)$ if and only if the set $\varrho^{-1}(\Phi)$ is closed in S. It is an interesting problem to give a similar description of $\varrho(S)$ in the general case.

If the space S is normal, then a necessary and sufficient condition for a set $A \subset S$ to be both closed and a G_δ is the existence of a continuous function f in the domain S such that $f(x) = 0$ if and only if $x \in A$. Suppose first that such a function f exists. Then $A = \{f(x) = 0\}$ is a closed set and $G_n = \{|f(x)| < 1/n\}$ are open sets and $A = \prod G_n$. Conversely let $A = \bar{A} = \prod G_n$, G_n being open. Since S is normal, there exist continuous functions f_n in the domain S such that $f_n(x) = 0$ for $x \in A$, $f_n(x) = 1$ for $x \in S - G_n$, $0 \leqq f_n(x) \leqq 1$ for $x \in S$. It is sufficient to put $f(x) = \sum 2^{-n} \,.\, f_n(x)$.

A point x of a topological space S is called a *complete limit point* of a set $A \subset S$ if, for any neighborhood U of x, the cardinal number of the set AU is equal to the cardinal number of the set A. A family $\mathfrak{C}$ of subsets of S is called *monotonic* if for any two sets $A \in \mathfrak{C}$, $B \in \mathfrak{C}$ we have either $A \subset B$ or $B \subset A$. A family $\mathfrak{C}$ of subsets of S is called a *covering* of S if each point of S belongs to some set of $\mathfrak{C}$.

Consider the following three properties of a topological space S: (1) Every infinite

[8] P. Urysohn, Über die Mächtigkeit zusammenhangender Mengen, Math. Annalen 94, 1925.

subset possesses at least one complete limit point. (2) A monotonic family of non-vacuous closed subsets has a non-vacuous intersection. (3) Any covering of S consisting of open sets contains a finite covering of S. It is known that all three properties are equivalent to one another.[9] A space having these properties is called *bicompact*. It is known that a *bicompact Hausdorff space is normal*[10] (hence completely regular).

A closed subset of a bicompact space is a bicompact space. Conversely, *a bicompact subset of a Hausdorff space is closed.*[11] It easily follows that *a one-to-one continuous mapping of a bicompact Hausdorff space is homeomorphic.*

Let $\{S_\iota\}$ be a family of sets; the subscript ι runs over an arbitrary given set I. The cartesian product $\mathfrak{P}_\iota S_\iota$ of the family $\{S_\iota\}$ is the set of all families $x = \{x_\iota\}$, each x_ι belonging to S_ι. The x_ι's are called the coordinates of x. If every S_ι is a topological space, we introduce a topology into $S = \mathfrak{P}_\iota S_\iota$ by means of the following open base $\mathfrak{B}$: The elements of $\mathfrak{B}$ are sets of the form $\mathfrak{P}_\iota G_\iota$ where (1) each G_ι is an open subset of S_ι, (2) $G_\iota = S_\iota$ except for a finite number of subscripts ι. It is easy to see that S is a Kolmogoroff space, a Riesz space, a Hausdorff space, a regular space, a completely regular space, if and only if *every* factor space S_ι belongs to the corresponding category of spaces. If S is normal, every S_ι is normal as well; but the converse is false.

The cartesian product $S = \mathfrak{P}_\iota S_\iota$ of any family of bicompact spaces is a bicompact space. Using Zermelo's theorem, we may suppose that the set I consists of all ordinal numbers less than a given ordinal number. Let there be given an infinite subset A of S. We have to construct a complete limit point $z = \{z_\iota\}$ of S. According to the way the topology of S was introduced, it is sufficient to construct the coordinates z_ι by transfinite induction, choosing each $z_\iota \in S_\iota$ in such a way that it have the following property π_ι: If there is given a finite number of subscripts $\iota_n \leqq \iota$ and, for each ι_n, a neighborhood G_n of z_{ι_n} (in the space S_{ι_n}), the cardinal number of the intersection of A with the set of those points $x = \{x_\iota\}$ for which $x_{\iota_n} \in G_n$ (for each of the given subscripts ι_n) is equal to the cardinal number of A. We need only prove that the definition of the z_ι's by transfinite induction may be carried through. Hence suppose that, for a definite value $\lambda \in I$, the points z_ι (with property π_ι) having already been constructed for $\iota < \lambda$, it is impossible to choose $z_\lambda \in S_\lambda$ with property π_λ. Then, for every point $y_\lambda \in S_\lambda$, there exist: a neighborhood $T(y_\lambda)$ of the point y_λ (in the space S_λ), a finite (perhaps vacuous) set $M(y_\lambda)$ of subscripts $\iota < \lambda$ and, for each $\iota \in M(y_\lambda)$, a neighborhood $G(z_\iota, y_\lambda)$ of the point z_ι (in the space S_ι) such that the cardinal number of the set $A \,.\, H(y_\lambda) \,.\, K(y_\lambda)$ is less than the cardinal number of A, where $H(y_\lambda)$ is the set of all points $x = \{x_\iota\}$ for which $x_\lambda \in T(y_\lambda)$ and $K(y_\lambda)$ is the set of all points $x = \{x_\iota\}$ for which $x_\iota \in G(z_\iota, y_\lambda)$ for every $\iota \in M(y_\lambda)$. Since the space S_λ is bicompact, there exists a finite set of points $y_\lambda^{(i)} \in S_\lambda$ $(1 \leqq i \leqq m < \infty)$ such that

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{m} T(y_\lambda^{(i)}) = S_\lambda .$$

[9] AU, p. 8.
[10] AU, p. 26.
[11] AU, p. 47.

The cardinal number of the set

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{m} A \,.\, H(y_\lambda^{(i)}) \,.\, K(y_\lambda^{(i)})$$

is less than the cardinal number of A. On the other hand, it follows from (1) that

$$\sum_{i=1}^{m} H(y_\lambda^{(i)}) = S$$

so that the set (2) contains the set

$$(3) \qquad A \,.\, \prod_{i=1}^{m} K(y_\lambda^{(i)}) \,.$$

It follows that the cardinal number of the set (3) is less than the cardinal number of A. But it is easy to see this is in contradiction with property π_μ, choosing $\mu < \lambda$ and $\mu \geqq \iota$ for every $\iota \in \sum_i M(y_\lambda^{(i)})$.

II.

Since a bicompact Hausdorff space is completely regular, every subset of a bicompact Hausdorff space is also completely regular. Following Tychonoff, we shall prove conversely that *every completely regular space is a subset of some bicompact Hausdorff space.*

Let S be given completely regular space. Let T denote the interval $0 \leqq t \leqq 1$. Let Φ denote the set of all continuous functions f in the domain S such that $f(S) \subset T$. Choose a set I having the same potency as the set Φ, so that there exists a one-to-one mapping of I into Φ; let f_ι be the function corresponding to $\iota \in I$. For $\iota \in I$, put $T_\iota = T$ and let R be the cartesian product $\mathfrak{P}_\iota T_\iota$. Since every T_ι is a bicompact Hausdorff space, R is also a bicompact Hausdorff space. For any $x \in S$, put $g(x) = \xi = \{\xi_\iota\} \in R$, where $\xi_\iota = f_\iota(x)$. Then g is a mapping of the space S into the space $S^* = g(S) \subset R$. It is easy to see that the mapping g is homeomorphic. For $\iota \in I$ and $\xi \in R$, put $\varphi_\iota(\xi) = \xi_\iota$. Then φ_ι is a continuous function in the domain R such that $\varphi_\iota(R) = T$. Moreover, we see that $\varphi_\iota[g(x)] = f_\iota(x)$ for $x \in S$.

If S is a completely regular space, let $\beta(S)$ designate any topological space having the following four properties: (1) *$\beta(S)$ is a bicompact Hausdorff space,* (2) $S \subset \beta(S)$, (3) S is dense in $\beta(S)$ (i.e. the closure of S in the space $\beta(S)$ is the whole space $\beta(S)$), (4) *every bounded continuous function f in the domain S may be extended*[12] *to the domain $\beta(S)$* (i.e. there exists a continuous function φ in the domain $\beta(S)$ such that $\varphi(x) = f(x)$ for every $x \in S$).

[12] It follows easily from property (3) that the extended function is uniquely defined by f.

The space $\beta(S)$ *exists for every completely regular* S. Using the above notation, we easily see that the closure of S^* in the space R has the properties (1)–(4) relatively to S^*, so that $\beta(S^*)$ exists. Since S and S^* are homeomorphic, $\beta(S)$ exists as well.

Given a completely regular space S, *the space* $\beta(S)$ *is essentially unique.* More precisely: If B_1 and B_2 both have properties (1)–(4) of $\beta(S)$, then there exists a homeomorphic mapping h of B_1 into B_2 such that $h(x) = x$ for each $x \in S$. This is but a particular case of the following theorem: *Let* S *be a completely regular space. Let* B *be a space having properties* (1)–(3) of $\beta(S)$ (but not necessarily property (4)). *Then there exists a continuous mapping* h of $\beta(S)$ *into* B *such that*: (i) $h(x) = x$ *for each* $x \in S$, (ii) $h[\beta(S) - S] = B - S$. *The mapping* h *is one-to-one* (*and consequently homeomorphic*) *if and only if* B *also possesses property* (4). Let I, T, R, g and S^* have the above meaning. Divide the set I into two disjoined subsets I_1 and I_2, putting $\iota \in I_1$ if and only if the continuous function f_ι may be extended to the domain B. Let R_1 denote the cartesian product $\mathfrak{P}_\iota T_\iota$ where ι runs over I_1 and $T_\iota = T$ for each ι. For any $x \in B$, put $g_1(x) = \xi = \{\xi_\iota\}_{\iota \in I_1} \in R_1$, where $\xi_\iota = \varphi_\iota(x)$, φ_ι being the extension of f to the domain B. Then g_1 is a homeomorphic mapping of the space B into the space $B^* = g_1(B) \subset R_1$, just as g was a homeomorphic mapping of S into the space S^*. For any point $\xi = \{\xi_\iota\}_{\iota \in I} \in R$, put $k(\xi) = \{\xi_\iota\}_{\iota \in I_1} \in R_1$. Evidently k is a continuous mapping of R into R_1. For $x \in S$, it is easy to see that $k[g(x)] = g_1(x)$ so that $k(S^*) \subset B^*$. Since k is continuous, it follows that $k(\overline{S^*}) \subset \subset \overline{B^*}$, where $\overline{S^*}$ is the closure of S^* in the space R and $\overline{B^*}$ is the closure of B^* in the space R_1. Since B^* is a homeomorph of B, B^* is a bicompact Hausdorff space, whence $\overline{B^*} = B^*$. Therefore $k(\overline{S^*}) \subset B^*$, i.e. k defines a continuous mapping k_0 of $\overline{S^*}$ into a subset of B^*. Since $\overline{S^*}$ was homeomorphic with $\beta(S)$, and B^* was homeomorphic with B, k_0 defines a continuous mapping h of $\beta(S)$ into a subspace $h[\beta(S)]$ of B; evidently $h(x) = x$ for every $x \in S$. The space $h[\beta(S)]$, as a continuous image of the bicompact space $\beta(S)$, must be bicompact. It follows that $h[\beta(S)]$ is closed in B. On the other hand, $h[\beta(S)] \supset S$ must be dense in B. Therefore, $h[\beta(S)] = B$, i.e., h is a continuous mapping of $\beta(S)$ into B. If B possesses property (4) of $\beta(S)$, we have $I_1 = I$, whence $R_1 = R$ and k is the identity. This readily implies that the mapping h is homeomorphic.

Returning to the general case, we still have to prove that $h[\beta(S) - S] = B - S$. Of course $h[\beta(S) - S] \supset B - S$. It remains to arrive at a contradiction in supposing the existence of a point $b \in \beta(S) - S$ such that $a = h(b) \in S$. Since $\beta(S)$ is a bicompact Hausdorff space, it is completely regular. Hence there exists a continuous function φ in the domain $\beta(S)$ such that $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$. Let Q be the set of all points $x \in S$ such that $\varphi(x) \geqq \frac{1}{2}$. Then Q is a closed subset of S, so that there exists a closed subset P of the space B such that $Q = SP$. Since B is a bicompact Hausdorff space, it is completely regular. Hence there exists a continuous function ψ in the domain B such that $\psi(a) = 0$, $\psi(x) = 1$ for each $x \in P$ and $0 \leqq \psi(x) \leqq 1$ for each $x \in B$. From property (4) of $\beta(S)$ it follows that there exists a continuous function χ in the domain $\beta(S)$ such that $\chi(x) = \psi(x)$ for each $x \in S$, whence $\chi(a) = 0$. Since

h is a continuous mapping of $\beta(S)$ into B, $\psi[h(x)]$ is a continuous function in the domain $\beta(S)$. The set C of all points $x \in \beta(S)$ such that $\psi[h(x)] = \chi(x)$, is closed in $\beta(S)$ and contains the set S which is dense in $\beta(S)$; therefore $C = \beta(S)$, whence $\chi(b) = \psi[h(b)] = \psi(a) = 0$. The set D of all points $x \in \beta(S)$ such that both $\varphi(x) > \frac{1}{2}$ and $\chi(x) < \frac{1}{2}$ is open in $\beta(S)$ and is not vacuous, since $b \in D$. Since S is dense in $\beta(S)$, there exists a point $c \in S \,.\, D$. Since $c \in D$, we have $\chi(c) < \frac{1}{2}$; since $c \in S$, we have $\chi(c) = \psi(c)$. Therefore $\psi(c) < \frac{1}{2}$ so that $c \in S \,.\, (B - P) = S - Q$. From the definition of Q it follows that $\varphi(c) < \frac{1}{2}$; since $c \in D$, this is a contradiction.

Two subsets A_1 and A_2 of a topological space S will be called *completely separated* if there exists a continuous function f in the domain S such that $f(x) = 0$ for each $x \in A_1$ and $f(x) = 1$ for each $x \in A_2$ [5]. It is easy to see that A_1 and A_2 are completely separated if and only if the closed sets $\bar{A}_1$ and $\bar{A}_2$ are completely separated. We know that S is completely regular if and only if any single point x and any closed set not containing x are always completely separated. We know that S is normal if and only if two closed sets without common points are always completely separated.

Let S be a completely regular space. We characterized the space $\beta(S)$ by the properties (1)–(4) given above. We will now show that may be also characterized by the properties (1), (2), (3) and (4)′, where (4′) means the following: If A_1 *and* A_2 *are two completely separated subsets of* S, *then the closures of* A_1 *and* A_2 *in the space* $\beta(S)$ *are disjoint*. Suppose first that A_1 and A_2 are two completely separated subsets of S. Then there exists a continuous function f in the domain S such that $f(x) = 0$ for each $x \in A_1$ and $f(x) = 1$ for each $x \in A_2$. We may suppose that $0 \leqq f(x) \leqq 1$ for each $x \in S$, so that there exists a continuous extension φ of f to the domain $\beta(S)$. Letting the bar denote closures in the space $\beta(S)$, we have $\varphi(x) = 0$ for each $x \in \bar{A}_1$ and $\varphi(x) = 1$ for each $x \in \bar{A}_2$, so that indeed $\bar{A}_1\bar{A}_2 = 0$. Conversely, let the space B have properties (1), (2), (3), (4′). There exists a continuous mapping h of the space $\beta(S)$ into the space B such that $h(x) = x$ for each $x = S$. It is sufficient to prove that the mapping h is one-to-one. Suppose the contrary. Then there exist two points $a \in \beta(S)$, $b \in \beta(S)$ such that $a \neq b$, $h(a) = h(b)$. There exists a continuous function f in the domain $\beta(S)$ such that $f(a) = 0, f(b) = 1$. Let A_1 denote the set of all points $x \in S$ such that $f(x) \leqq \frac{1}{3}$; let A_2 denote the set of all points $x \in S$ such that $f(x) \geqq \frac{2}{3}$. It is easy to see that A_1 and A_2 are two completely separated subsets of S so that $\bar{A}_1\bar{A}_2 = 0$ where the bar designates closures in the space B. Since $h(a) = h(b)$, we shall have a contradiction if we shall prove that $h(a) \in \bar{A}_1$, $h(b) \in \bar{A}_2$. Let U be any neighborhood of $h(a)$ in the space B. Then $h^{-1}(U)$ is a neighborhood of a in the space $\beta(S)$. Since $f(a) = 0$ and since S is dense in $\beta(S)$, it is easy to see that $h^{-1}(U) \,.\, A_1 \neq 0$, whence $U \,.\, A_1 \neq 0$. Since U was an arbitrary neighborhood of $h(a)$ in the space B, we have indeed $h(a) \in \bar{A}_1$ and similarly we prove that $h(b) \in \bar{A}_2$.

In the particular case when S *is a normal Riesz space*, it follows from the result just proved that $\beta(S)$ may be characterized by the properties (1), (2), (3), and (5) where (5) means the following : *If* F_1 *and* F_2 *are two closed subsets of* S *without common points, then the closures of* F_1 *and* F_2 *in the space* $\beta(S)$ *have no common points.*

Conversely, *if there exists a space B having properties* (1), (2), (3) *and* (5), *then S is normal and* $B = \beta(S)$. Indeed, it is easy to see that property (5) is stronger than property (4′) so that $B = \beta(S)$. If F_1 and F_2 are two closed subsets of S and $F_1 F_2 = 0$, then $\bar{F}_1 \bar{F}_2 = 0$, the bar indicating closures in B. Since B is a bicompact Hausdorff space, it is normal, so that there exists a continuous function φ in the domain $\beta(S)$ such that $\varphi(x) = 0$ for each $x \in \bar{F}_1$ and $\varphi(x) = 1$ for each $x \in \bar{F}_2$. Hence it follows that S is normal.

Let S be a completely regular space. Let T be a closed subset of S; let $\bar{T}$ denote the closure of T in the space $\beta(S)$. *Then we have* $\bar{T} = \beta(T)$ (i.e. $\bar{T}$ possesses the properties (1)–(4) of $\beta(T)$) *if and only if every bounded continuous function in the domain T admits of a continuous extension to the domain S.* Suppose first that $\bar{T} = \beta(T)$ and let f be a continuous function in the domain T such that e.g. $0 \leqq f(x) \leqq 1$ for each $x \in T$. Since $\bar{T} = \beta(T)$, there exists a continuous extension g of f to the domain $\bar{T}$; of course $0 \leqq g(x) \leqq 1$ for each $x \in \bar{T}$. Since $\beta(S)$ is a bicompact Hausdorff space, it is normal; since $\bar{T}$ is closed in $\beta(S)$, there exists a continuous extension φ of g to the domain $\beta(S)$. Hence f may be continuously extended to the domain $\beta(S)$ and therefore also to the domain $S \subset \beta(S)$. Conversely, suppose that every bounded continuous function in the domain T may be continuously extended to the domain S. Of course $\bar{T}$ has always properties (1)–(3) (relatively to T); therefore to prove that $\bar{T} = \beta(T)$ it is sufficient to prove that $\bar{T}$ has property (4′) (again relatively to T). Hence suppose that $A_1 \subset T$ and $A_2 \subset T$ are completely separated in the space T. Then there exists a continuous function f in the domain T such that $f(x) = 0$ for each $x \in A_1$, $f(x) = 1$ for each $x \in A_2$ and $0 \leqq f(x) \leqq 1$ for each $x \in T$. There exists a continuous extension φ of f to the domain S, whence it readily follows that A_1 and A_2 are completely separated in the space S. Since $\beta(S)$ has property (4′) (relatively to S), we have $\bar{A}_1 \bar{A}_2 = 0$, the bar indicating closures in the space $\beta(S)$. But of course $\bar{A}_1$ and $\bar{A}_2$ are closures of A_1 and A_2 in the space $\bar{T}$, so that $\bar{T}$ has indeed property (4′) relatively to T.

The theorem just proved has the following consequence: *If S is a normal Riesz space, then* $\bar{T} = \beta(T)$ (the bar indicating closure in $\beta(S)$, *for every closed subset T of S. If the completely regular space S is not normal, then there exists a closed subset T of S such that* $\bar{T} \neq \beta(T)$.

If Φ is a family of neighborhoods of a point x of a topological space S, then we say that Φ is *complete* if, given an arbitrary neighborhood G of x, there exists a neighborhood U of x such that both $U \in \Phi$ and $U \subset G$. The least cardinal number of a complete family of neighborhoods of x is called the *character*[13] of x (in the space S) and is denoted by $\chi(x) = \chi_S(x)$. If $T \subset S$ and $x \in T$, it is easy to see that

$$\chi_T(x) \leqq \chi_S(x) .$$

Let S be a completely regular space. Then for every point $a \in S$ *we have*

$$\chi_S(a) = \chi_{\beta(S)}(a) .$$

[13] AU, p. 2.

Let Φ be a complete family of neighborhood of a in the space S whose cardinal number is equal to $\chi_S(a)$. It is sufficient to construct a complete family Ψ of neighborhoods of a in the space $\beta(S)$ such that the cardinal number of Ψ does not exceed $\chi_S(a)$. The family Ψ will be constructed as a transform of the family Φ, each $U \in \Phi$ determining $\tau(U) \in \Psi$, in the following way,

$$\tau(U) = \beta(S) - \overline{S - U}$$

(the bar indicating closures in the space $\beta(S)$). Of course Ψ is a family of neighborhoods of a in the space $\beta(S)$ and the cardinal number of Ψ does not exceed $\chi_S(a)$. Hence we have only to prove that, given a neighborhood G of a in the space $\beta(S)$, there exists a $U \in \Phi$ such that $\tau(U) \subset G$. There exists a continuous function f in the domain $\beta(S)$ such that $f(a) = 0$ and $f(x) = 1$ for each $x \in \beta(S) - G$. Let H denote the set of all points $x \in S$ such that $f(x) < \frac{1}{2}$. Then H is a neighborhood of a in the space S, so that there exists a $U \in \Phi$ such that $U \subset H$. It remains to prove that $\tau(U) \subset G$. Supposing the contrary, there exists a point $b \in \tau(U) - G$. Since $b \in \beta(S) - G$, we have $f(b) = 1$. Let V be an arbitrary neighborhood of b in the space $\beta(S)$. Since $f(b) = 1$ and since S is dense in $\beta(S)$, there exists a point $c \in SV$ such that $f(c) > \frac{1}{2}$. Since $U \subset H$, we cannot have $c \in U$. Therefore $c \in S - U$ so that $(S - U)\, V \neq 0$. Since V was an arbitrary neighborhood of b in the space $\beta(S)$, we have $b \in \overline{S - U} = \beta(S) - \tau(U)$, which is a contradiction.

Let S be a completely regular space. Let $A \subset \beta(S) - S$ $(A \neq 0)$ be both closed and G_δ in $\beta(S)$. Then the cardinal number of A is $\geqq 2^{\aleph_0}$. Since A is both closed and G_δ in the normal space $\beta(S)$, there exists a continuous function f in the domain $\beta(S)$ such that $f(x) = 0$ for each $x \in A$ and $f(x) > 0$ for each $x \in \beta(S) - A$. The set of all points $x \in \beta(S)$ such that $f(x) < n^{-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ is open and not vacuous. Since S is dense in $\beta(S)$, there exists a point $a_n \in S$ such that $f(a_n) < n^{-1}$. Since $AS = 0$, we have $f(a_n) > 0$. It is evident that the points a_n may be chosen is such a manner that $f(a_{n+1}) < f(a_n)$. Let us arrange the rational numbers of the interval $0 < t < 1$ in a simple sequence $\{r_n\}$. There exists a continuous function φ in the domain $0 < t < \infty$ such that $0 < \varphi(t) < 1$ and $\varphi[f(a_n)] = r_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Since $f(x) > 0$ for each $x \in S$, we obtain a bounded continuous function g in the domain S such that $g(x) = \varphi[f(x)]$ for each $x \in S$. There exists a continuous extension h of g to the domain $\beta(S)$. Choose a real number α, $0 \leqq \alpha \leqq 1$. There exists a sequence $i_1 < i_2 < i_3 \ldots$ such that $r_{i_n} \to \alpha$ for $n \to \infty$. Let M_n designate the set of points $a_{i_n}, a_{i_{n+1}}, a_{i_{n+2}}, \ldots$ so that $M_n \subset S$, $M_n \supset M_{n+1}$, $M_n \neq 0$. Since the space $\beta(S)$ is bicompact, there exist a point $b \in \prod \overline{M}_n$. Since the functions f and h are continuous, we have $f(\overline{M}_n) \subset \overline{f(M_n)}$, $h(\overline{M}_n) \subset \overline{h(M_n)} = \overline{g(M_n)}$, whence $f(b) \in \prod \overline{f(M_n)}$, $h(b) \in \prod \overline{g(M_n)}$. Since $f(a_{i_n}) \to 0$, $g(a_{i_n}) \to \alpha$ for $n \to \infty$, we easily see that $f(b) = 0$, $h(b) = \alpha$. Since $f(b) = 0$, we have $b \in A$. Therefore, for each α such that $0 \leqq \alpha \leqq 1$, the set A contains a point b such that $h(b) = \alpha$. Hence the cardinal number of A is at least $2^{\aleph_0}$.

Let S_1 and S_2 be two completely regular spaces satisfying the first countability *axiom. Let the spaces $\beta(S_1)$ and $\beta(S_2)$ be homeomorphic. Then the spaces S_1 and S_2 are homeomorphic.* We may assume that $\beta(S_1) = \beta(S_2)$. According to the preceding theorem no point $x \in \beta(S_1) - S_1$ is a G_δ in $\beta(S_1)$. Therefore $S_2 \subset S_1$ and similarly $S_1 \subset S_2$, so that $S_1 = S_2$.

Let I denote an infinite countable isolated space (e.g. the space of all natural numbers). It is an important problem to determine the cardinal number $\mathfrak{m}$ of $\beta(I)$. All I know about it is that

$$2^{\aleph_0} \leqq \mathfrak{m} \leqq 2^{2^{\aleph_0}}.$$

It is easily seen that each point of I is an isolated point of $\beta(I)$ so that set I is open in $\beta(I)$. Since I is countable, it is an F_σ in $\beta(I)$. Hence $\beta(I) - I$ is both closed and a G_δ in $\beta(I)$ so that the cardinal number of $\beta(I) - I$ is $\geqq 2^{\aleph_0}$. On the other hand, since the set I is dense in the Hausdorff space $\beta(I)$, it is easy to see that a point $x \in \beta(I)$ is uniquely determined knowing the family of all sets $A \subset I$ such that $x \in \bar{A}$, so that the cardinal number of $\beta(I)$ is at most equal to the cardinal number $2^{2^{\aleph_0}}$ of all families of subsets of I.

A topological space S is called *compact* if, given any infinite subset A of S, there exists a point $x \in S$ such that $x \in \overline{A - x}$.

Let the normal Riesz space S be not compact. Then the cardinal number of $\beta(S) - S$ is at least equal to the cardinal number of $\beta(I)$ (hence at least equal to $2^{\aleph_0}$). Since S is not compact, it is well known that S contains a closed subset F homeomorphic with I. Since S is normal, we have $\beta(I) = \bar{I} \subset \beta(S)$, so that $\beta(I) - I \subset \subset \beta(S) - S$. But the sets $\beta(I) - I$ and $\beta(I)$ have the same cardinal number.

I do not know whether this theorem remains true if we replace normality by complete regularity. It may be shown that the assumption of normality may be replaced by the following weaker assumption:[14] If F_1 and F_2 are two closed subsets of S such that F_1 *is countable* and $F_1F_2 = 0$, there exist two open sets G_1 and G_2 such that $G_1 \supset F_1$, $G_2 \supset F_2$, $G_1G_2 = 0$.

If the space S is compact, then the set $\beta(S) - S$ may consist of a single point. Let S be the set of all ordinal numbers $< \omega_1$, ω_1 being the first uncountable ordinal number. Let S_0 be the set of all ordinal numbers $\leqq \omega_1$. The topology of S and S_0 is the usual topology of an ordered set, an open base being given by the family of all open intervals. It is well known that S is a compact normal Riesz space and that S_0 is a bicompact Hausdorff space. We shall prove that $S_0 = \beta(S)$. Since it is evident that S_0 possesses properties (1)–(3) of $\beta(S)$, it is sufficient to prove that a continuous function f in the domain S admits of a continuous extension to the domain S_0. This is an easy consequence of the following theorem. *If f is a continuous function in the domain S, then there exist a point $\xi \in S$ such that f is constant for $x \geqq \xi$.* It is sufficient to prove that, given a number $\varepsilon > 0$, there exists a point $\xi(\varepsilon) \in S$ such that

[14] AU, p. 58.

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ for $x \in S$, $y \in S$, $x > \xi(\varepsilon)$, $y > \xi(\varepsilon)$. Supposing the contrary, there would exist in S two sequences $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ such that $a_n < b_n < a_{n+1}$ and $|f(a_n) - f(b_n)| \geqq \varepsilon$. But this is impossible, because f would then be discontinuous at α, α being the first ordinal number greater than each a_n.

We say that $x \in S$ is a *$\varkappa$-point*[15], if there exists a sequence $\{x_n\} \subset S - (x)$ such that $\lim x_n = x$, i.e. that, given any neighborhood U of x, we have $x_n \in U$ except for a finite number of subscripts n. Alexandroff and Urysohn raised the question[16] whether there exists a bicompact Hausdorff space which is dense in itself and which contains no $\varkappa$-point. We shall prove that the space $\beta(I) - I$ has this property. Supposing the contrary, there exists a point $c \in \beta(I) - I$ and a sequence $\{a_n\} \subset \beta(I) - I - (c)$ such that $\lim a_n = c$. We may suppose that the points a_n are all distinct from one another. Let A_n be the set of the points $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ together with the point c. It is easy to see that A_n is a closed subset of $\beta(I)$. We shall construct successively open subsets U_n of the space $\beta(I)$ as follows. U_1 contains the point a_1, but $\overline{U}_1 A_2 = 0$. If, for a certain value of n, we have already constructed the set U_n so that $\overline{U}_n \,.\, A_{n+1} = 0$, let U_{n+1} be an open subset containing a_{n+1}, but such that $\overline{U}_{n+1} \,.\, \overline{U}_i = 0$ for $1 \leqq i \leqq n$ and $\overline{U}_{n+1} \,.\, A_{n+2} = 0$. It is easy to see that the successive construction of the sequence $\{U_n\}$ may be carried through. Now put $\Phi = I \,.\, \sum U_{2n-1}$, $\Psi = I \,.\, \sum U_{2n}$. Then $\Phi\Psi = 0$ and the sets Φ and Ψ are of course closed in I, since I is an isolated space. Since I is normal, we must have $\overline{\Phi}\overline{\Psi} = 0$, the bars indicating closures in $\beta(I)$. On the other hand, since I is dense in $\beta(I)$ and U_n is open in $\beta(I)$, it is easy to see that $\overline{IU_n} = \overline{U}_n$, so that $a_n \in \overline{IU_n}$, whence we easily get the contradiction $c \in \overline{\Phi}\overline{\Psi}$.

III.

We shall say that the space S is *topologically complete* if there exists a bicompact Hausdorff space $B \supset S$ such that S is a G_δ in B. Of course S is then completely regular. *A G_δ in a topologically complete space is a topologically complete space. A closed subset of topologically complete space is a topologically complete space.*

A topological space S is topologically complete if and only if is completely regular and a G_δ in $\beta(S)$. If S is a G_δ in $\beta(S)$, then it is topologically complete, since $\beta(S)$ is bicompact Hausdorff space. Conversely suppose that S is topologically complete. Then there exists a bicompact Hausdorff space $B \supset S$ such that S is a G_δ in B. Let B_0 be the closure of S in the space B. Then B_0 is a bicompact Hausdorff space and S is dense in B_0 and a G_δ in B_0. We know that there exists a continuous mapping h of $\beta(S)$ into B_0 such that $h^{-1}(S) = S$. Since S is a G_δ in B_0, it is easy to see that $h^{-1}(S) = S$ is a G_δ in $\beta(S)$.

[15] AU, p. 53.
[16] AU, p. 54.

Let T be a completely regular[17] *space. Let $S \subset T$ be a topologically complete space. Then S is a G_δ in the closure of S in the space T.* Let S_0 be the closure of S in the space $\beta(T)$. It is sufficient to prove that S is a G_δ in S_0. Since S_0 is a bicompact Hausdorff space and since S is dense in S_0, there exists a continuous mapping h of $\beta(S)$ into S_0 such that $h[\beta(S) - S] = S_0 - S$. Since S is topologically complete, it is a G_δ in $\beta(S)$, so that $\beta(S) - S$ is an F_σ in $\beta(S)$. Hence there exist closed subsets F_n of $\beta(S)$ such that $\sum F_n = \beta(S) - S$, whence $S_0 - S = \sum h(F_n)$. Every F_n is a bicompact space, so that every $h(F_n)$ is a bicompact space. Since $h(F_n)$ is a bicompact subset of the Hausdorff space S_0, it is closed in S_0, so that $S_0 - S$ is an F_σ in S_0 and finally S is a G_δ in S_0.

Let T be a topologically complete space. Let $S \subset T$. Then S is a topologically complete space if and only if it is the intersection of a closed subset of T and a G_δ in T. If $S = FH$, where F is closed in T and H is a G_δ in T, then F is a topologically complete space and S is a G_δ in F, so that S is a topologically complete space. Conversely let S be topologically complete. Then S is a G_δ in the closure $\bar{S}$ of S in T, so that $S = \bar{S}H$, H being a G_δ in T.

Let $S \neq 0$ be a topologically complete space.[18] *Let $\{G_n\}$ be a sequence of open and dense subsets of S. Let $H = \prod G_n$. Then $H \neq 0$ and, moreover, H is dense in S.* There exists a regular compact (as a matter of fact, bicompact) space $K \supset S$ such that S is a G_δ in K. We may suppose that $\bar{S} = K$, the bar denoting closure in K. The sets G_n being open in S, there exist sets Γ_n open in K and such that $G_n = S \,.\, \Gamma_n$. Since S is a G_δ in K, there exist sets Δ_n open in K and such that $S = \prod \Delta_n$. Since S is dense in K and G_n are dense in S, the sets G_n are dense in K. Choose an arbitrary point $a_0 \in S$ and an arbitrary neighborhood V of a_0 in the space S. All we have to prove is that $HV \neq 0$. There exists a neighborhood U_0 of a_0 in the space K such that $V = SU_0$. Since the set G_1 is dense in K, there exists a point $a_1 \in G_1U_0 = S \,.\, \Gamma_1 U_0 \subset \Delta_1\Gamma_1U_0$. Hence $\Delta_1\Gamma_1U_0$ is a neighborhood of a_1 in the space K. Since K is regular, there exists a neighborhood U_1 of a_1 (in the space K) such that $\bar{U}_1 \subset \Delta_1\Gamma_1U_0$. Generally, let there be given for a certain value of n a point $a_n \in G_n$ and its neighborhood U_n (in the space K) such that $\bar{U}_n \subset \Delta_n\Gamma_nU_{n-1}$. Then $a_n \in G_n \subset S$ and SU_n is a neighborhood of a_n in the space S; since G_{n+1} is dense in S, there exists a point $a_{n+1} \in G_{n+1}U_n = S \,.\, \Gamma_{n+1}U_n \subset \Delta_{n+1}\Gamma_{n+1}U_n$. Hence $\Delta_{n+1}\Gamma_{n+1}U_n$ is a neighborhood of a_{n+1} in the regular space K, so that there exists a neighborhood U_{n+1} of a_{n+1} (in the space K) such that $\bar{U}_{n+1} \subset \Delta_{n+1}\Gamma_{n+1}U_n$. Thus we construct a sequence $\{a_n\}$ of points and a sequence $\{U_n\}$ of open sets so that $a_n \in G_nU_n$, $\bar{U}_{n+1} \subset \Delta_{n+1}\Gamma_{n+1}U_n$. Since $a_n \in U_n$, we have $U_n \neq 0$. Since K is compact and $\bar{U}_{n+1} \subset U_n$, there exists a point $b \in \prod U_n = \prod \bar{U}_n$. Since $\bar{U}_{n+1} \subset \Delta_{n+1}\Gamma_{n+1}U_n$, we have $b \in \prod \Delta_n \,.\, \prod \Gamma_n = S \,.\, \prod \Gamma_n = \prod \Gamma_n = H$. Moreover $b \in U_0$, so that $b \in HU_0 = HV$.

[17] I do not know whether this assumption is necessary.

[18] It is evident from the proof that it is possible to replace this by the weaker assumption that S is a G_δ in some regular compact space.

Let S be a metric space. A *Cauchy sequence* in S is a sequence $\{x_n\} \subset S$ such that, given a number $\varepsilon > 0$, there exists a number p such that the distance of x_m and x_n is less than ε, whenever both m and n are greater than p. A metric space S is called *metrically complete* if, given any Cauchy sequence $\{x_n\}$ in S, there exists a point $x \in S$ such that $\lim x_n = x$. A topological space is called *completely metrizable*, if it is homeomorphic with a metrically complete space.

We next prove our principal theorem: *A metrizable space S is topologically complete if and only if it is completely metrizable.*

Let S be a metrically complete space and let ϱ be its distance function. We may suppose that $\varrho(x, y) \leqq 1$ for every pair of points, since otherwise we may replace ϱ by ϱ_1, putting $\varrho_1(x, y) = \varrho(x, y)$ if $\varrho(x, y) \leqq 1$, $\varrho_1(x, y) = 1$ if $\varrho(x, y) > 1$. Since S is metric it is completely regular, so that $\beta(S)$ exists. For any given $a \in S$, $\varrho(a, x)$ is a bounded continuous function in the domain S so that there exists a continuous function $\varphi_a(x)$ in the domain $\beta(S)$ such that $\varphi_a(x) = \varrho(a, x)$ for each $x \in S$. If $a \in S$, $b \in S$, then the set $T(a, b)$ of all points $x \in \beta(S)$ such that $\varphi_a(x) + \varphi_b(x) \geqq \varrho(a, b)$ is closed in $\beta(S)$ and contains S. Since S is dense in $\beta(S)$, we must have $T(a, b) = \beta(S)$, i.e. $\varphi_a(x) + \varphi_b(x) \geqq \varrho(a, b)$ for each $x \in \beta(S)$.

For $a \in S$ and $n = 1, 2, 3, \ldots$ let $\Gamma(a, n)$ be the set of all points $x \in \beta(S)$ such that $\varphi_a(x) < n^{-1}$. Since the function $\varphi_a(x)$ is continuous, $\Gamma(a, n)$ is an open subset of $\beta(S)$. Therefore

$$G_n = \sum_{a \in S} \Gamma(a, n)$$

is an open set. We shall prove that $S = \prod G_n$, so that the set S is a G_δ in $\beta(S)$ and thus topologically complete. Evidently $\prod G_n \supset S$. Conversely let $b \in \prod G_n$. We have to prove that $b \in S$. According to the definition of G_n, there exist points $a_n \in S$ such that $\varphi_{a_n}(b) < n^{-1}$. Therefore

$$\varrho(a_n, a_m) \leqq \varphi_{a_n}(b) + \varphi_{a_m}(b) < \frac{1}{n} + \frac{1}{m},$$

so that $\{a_n\}$ is a Cauchy sequence in S. Since S is metrically complete, there exists a point $a \in S$ such that $a = \lim a_n$. It is sufficient to prove that $a = b$. Suppose that $a \neq b$. Since $\beta(S)$ is a Hausdorff space, there exist two open subsets U and V of $\beta(S)$ such that $a \in U$, $b \in V$, $UV = 0$. Since US is a neighborhood of a in the metric space S, there exists an integer $n > 0$ such that U contains every point $x \in S$ such that $\varrho(a, x) < 2 \cdot n^{-1}$. This can be written in the form $SW \subset U$, W being the set of all points $x \in \beta(S)$ such that $\varphi_a(x) < 2 \cdot n^{-1}$. Since φ is continuous, W is an open subset of $\beta(S)$. Since S is dense in $\beta(S)$ and U, V and W are open in $\beta(S)$, we have $W \subset \overline{W} = \overline{SW} \subset \overline{U} \subset \beta(S) - V$, or $WV = 0$. Hence for each $x \in S$ we have $\varrho(a, x) \leqq \varrho(a, a_n) + \varrho(a_n, x) \leqq n^{-1} + \varrho(a_n, x)$, whence it easily follows that for each $x \in \beta(S)$ we have $\varphi_a(x) \leqq \varphi_{a_n}(x) + n^{-1}$, in particular $\varphi_a(b) \leqq \varphi_{a_n}(b) + n^{-1} < n^{-1} + n^{-1} = 2 \cdot n^{-1}$, which is a contradiction.

Now suppose that the metric space S is topologically complete. Let ϱ denote the distance function of S; again, we shall suppose that $\varrho(x, y) \leqq 1$ for every couple of points. Since S is topologically complete, there exists a sequence $\{F_n\}$ of closed subsets of $\beta(S)$ such that $\beta(S) - S = \sum F_n$. If $S = \beta(S)$, then S is a bicompact metric space, and then it is well known that S is metrically complete. Hence let us suppose that $S \neq \beta(S)$; we may then assume that $F_n \neq 0$ for every n. Given any point $a \in \in S$, $\varrho(a, x)$ is a bounded continuous function in the domain S, which admits of a continuous extension φ_a to the domain $\beta(S)$. If the point $b \in \beta(S)$ is different from a, then there exist open subsets U and V of $\beta(S)$ such that $a \in U$, $b \in V$, $UV = 0$. Since SU is a neighborhood of a in the metric space S, there exists a number $\varepsilon > 0$ such that U contains every point $x \in S$ such that $\varrho(a, x) < \varepsilon$. Since S is dense in $\beta(S)$, it easily follows that $\overline{U}$ contains every point $x \in \beta(S)$ such that $\varphi_a(x) < \varepsilon$. Since $U \subset \beta(S) - - V = \overline{\beta(S) - V}$, we have $\overline{U} \subset \beta(S) - V$ so that $b \in \beta(S) - \overline{U}$, whence $\varphi_a(b) \geqq \varepsilon$. Thus we proved that $\varphi_a(b) > 0$ for every $b \in \beta(S)$ except for $b = a$. Since the set $F_n \neq 0$ is closed in the bicompact space $\beta(S)$, it is easy to see that the function $\varphi_a(x)$, x running over F_n, admits of a minimum value $\sigma(a, F_n)$. Since $a \in S$, $F_n S = 0$, we have $\sigma(a, F_n) > 0$.

If $a \in S$, $b \in S$, then we have $\varrho(a, x) \leqq \varrho(a, b) + \varrho(b, x)$ for every $x \in S$, whence $\varphi_a(x) \leqq \varrho(a, b) + \varphi_a(x)$ for every $x \in \beta(S)$. Therefore $\sigma(a, F_n) \leqq \varrho(a, b) + \sigma(b, F_n)$ and similarly $\sigma(b, F_n) \leqq \varrho(a, b) + \sigma(a, F_n)$. Hence

$$|\sigma(a, F_n) - \sigma(b, F_n)| \leqq \varrho(a, b) .$$

Now let us put for $x \in S$, $y \in S$,

$$f_n(x, y) = \varrho(x, y) + \sigma(x, F_n) + \sigma(y, F_n) ,$$

$$g_n(x, y) = \frac{\varrho(x, y)}{f_n(x, y)} ,$$

$$\varrho_0(x, y) = \varrho(x, y) + \sum_1^\infty 2^{-n} \cdot g_n(x, y) .$$

Since $\varrho(x, y) \geqq 0$, $\sigma(x, F_n) > 0$, $\sigma(y, F_n) > 0$, we have $f_n(x, y) > 0$. Hence $g_n(x, y)$ exists and $0 \leqq g_n(x, y) \leqq 1$, so that the series $\sum 2^{-n} \cdot g_n(x, y)$ is convergent. It is evident that $\varrho_0(x, y) = \varrho_0(y, x)$ and that $\varrho_0(x, x) = 0$, whereas $\varrho_0(x, y) > 0$ if $x \neq y$. Next we shall prove that $\varrho_0(x, z) \leqq \varrho_0(x, y) + \varrho_0(y, z)$ for $x \in S$, $y \in S$, $z \in S$. Since

$$\frac{t_1}{c + t_1} \leqq \frac{t_2}{c + t_2} \quad \text{for} \quad c > 0 , \quad 0 \leqq t_1 \leqq t_2$$

and since $0 \leqq \varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ we have

$$g_n(x, z) \leqq \frac{\varrho(x, y) + \varrho(y, z)}{\varrho(x, y) + \varrho(y, z) + \sigma(x, F_n) + \sigma(z, F_n)} .$$

Since

$$\sigma(y, F_n) \leqq \varrho(x, y) + \sigma(x, F_n),$$
$$\sigma(y, F_n) \leqq \varrho(y, z) + \sigma(z, F_n),$$

we have

$$\varrho(x, y) + \varrho(y, z) + \sigma(x, F_n) + \sigma(z, F_n) \geqq \begin{cases} \varrho(x, y) + \sigma(x, F_n) + \sigma(y, F_n), \\ \varrho(y, z) + \sigma(y, F_n) + \sigma(z, F_n), \end{cases}$$

whence

$$g_n(x, z) \leqq g_n(x, y) + g_n(y, z),$$

so that indeed

$$\varrho_0(x, z) \leqq \varrho_0(x, y) + \varrho_0(y, z).$$

Hence ϱ_0 has all the properties of a distance function. Next we prove that ϱ and ϱ_0 are equivalent metrics in S, i.e. that for $x \in S$ and $\{x_n\} \subset S$ we have

$$\lim \varrho(x_n, x) = 0 \quad \text{if and only if} \quad \lim \varrho_0(x_n, x) = 0.$$

If $\lim \varrho_0(x_n, x) = 0$, then $\lim \varrho(x_n, x) = 0$, since $0 \leqq \varrho(x_n, x) \leqq \varrho_0(x_n, x)$. Conversely suppose that $\lim \varrho(x_n, x) = 0$. Choose a number $\varepsilon > 0$ and an integer $k > 0$ such that $2^{-k+1} < \varepsilon$. Then we have for all values of n

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} g_i(x_n, x) \leqq \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-k} < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

whence

$$\varrho_0(x_n, x) < \varrho(x_n, x) + \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} g_i(x_n, x) + \tfrac{1}{2}\varepsilon \leqq$$
$$\leqq \varrho(x_n, x) + \sum_{i=1}^{k} 2^{-1} \frac{\varrho(x_n, x)}{\varrho(x_n, x) + \sigma(x, F_i)} + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Since $\lim \varrho(x_n, x) = 0$, we must have

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} \frac{\varrho(x_n, x)}{\varrho(x_n, x) + \sigma(x, F_i)} = 0,$$

so that there exists an integer p such that for $n > p$ we have

$$0 \leqq \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} \frac{\varrho(x_n, x)}{\varrho(x_n, x) + \sigma(x, F_i)} < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Therefore

$$\varrho_0(x_n, x) < \varrho(x_n, x) + \varepsilon$$

for every $n > p$. Since $\lim \varrho(x_n, x) = 0$ and the number $\varepsilon > 0$ was arbitrary, we have indeed $\lim \varrho_0(x_n, x) = 0$. Thus we proved that ϱ and ϱ_0 are equivalent metrics in S, i.e. that the metric spaces $S = (S, \varrho)$ and (S, ϱ_0) are homeomorphic.

It remains to be shown that the metric space (S, ϱ_0) is metrically complete. Hence suppose that $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence in (S, ϱ_0). We have to prove that there exists a point $x \in S$ such that $\lim \varrho_0(x_n, x) = 0$, or, what we already know to be equivalent, that $\lim \varrho(x_n, x) = 0$. Since the space $\beta(S)$ is bicompact, it is easy to see that there exists a point $x \in \beta(S)$ such that, given any neighborhood U of x (in the space $\beta(S)$), we have $x_n \in U$ for an infinite number of values of n. It is sufficient to prove that $x \in S$, for then, since $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence, it is easy to show that $\lim \varrho(x_n, x) = 0$. Suppose, on the contrary, that the point x belongs to the set $\beta(S) - S = \sum F_n$. Hence there exists an integer $k > 0$ such that $x \in F_k$.

We shall prove that $\sigma(x_n, F_k) \to 0$ for $n \to \infty$. Choose a number $\varepsilon > 0$. There exists an integer $p > 0$ such that for $n > p$, $m > p$ we have $\varrho(x_n, x_m) \leqq \varrho_0(x_n, x_m) < \varepsilon$. Let n be greater than p. The number $\sigma(x_n, F_k)$ is the minimum value of $\varphi_{x_n}(y)$ for $y \in F_k$. Since $x \in F_k$, we must have $0 < \sigma(x_n, F_k) \leqq \varphi_{x_n}(x)$. There exists a neighborhood Ω_n of x in $\beta(S)$ such that $|\varphi_{x_n}(z) - \varphi_{x_n}(x)| < \varepsilon$ for every $z \in \Omega_n$. There exists an integer $m_n > p$ such that $x_{m_n} \in \Omega_n$, whence $|\varphi_{x_n}(x_{m_n}) - \varphi_{x_n}(x)| < \varepsilon$, i.e. $|\varrho(x_n, x_{m_n}) - \varphi_{x_n}(x)| < \varepsilon$. Since $n > p$, $m_n > p$, we must have $\varrho(x_n, x_{m_n}) < \varepsilon$, whence $\varphi_{x_n}(x) < 2\varepsilon$. Therefore $0 < \sigma(x_n, F_k) < 2\varepsilon$ for $n > p$, so that indeed $\sigma(x_n, F_k) \to 0$ for $n \to \infty$.

Since $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence in (S, ϱ_0), there exists an integer p such that $\varrho_0(x_n, x_p) < 2^{-k-2}$ for each $n > p$. But

$$\varrho_0(x_n, x_p) \geqq 2^{-k} g_k(x_n, x_p) = 2^{-k} \frac{\varrho(x_n, x_p)}{\varrho(x_n, x_p) + \sigma(x_n, F_k) + \sigma(x_p, F_k)}.$$

Since

$$\sigma(x_p, F_k) \leqq \varrho(x_n, x_p) + \sigma(x_n, F_k),$$

it follows that

$$\varrho_0(x_n, x_p) \geqq 2^{-k-1} \frac{\varrho(x_n, x_p)}{\varrho(x_n, x_p) + \sigma(x_n, F_k)} \geqq 0,$$

so that for every $n > p$ we have

$$0 \leqq \frac{\varrho(x_n, x_p)}{\varrho(x_n, x_p) + \sigma(x_n, F_k)} < \frac{1}{2},$$

whence $\varrho(x_n, x_p) < \sigma(x_n, F_k)$. But $\sigma(x_n, F_k) \to 0$ for $n \to \infty$. Therefore $\varrho(x_n, x_p) \to 0$ for $n \to \infty$. Hence there exists an integer $q > 0$ such that for every $n > q$ we have $\varrho(x_n, x_p) < \frac{1}{2}\varphi_{x_p}(x)$. [Since $x_p \in S$, $x \in \beta(S) - S$, we know that $\varphi_{x_p}(x) > 0$.] There exists a neighborhood U of x in the space $\beta(S)$ such that $\varphi_{x_p}(z) > \frac{1}{2}\varphi_{x_p}(x)$ for any $z \in U$. There exists an integer $n > q$ such that $x_n \in U$, whence $\varrho(x_n, x_p) = \varphi_{x_p}(x_n) > \frac{1}{2}\varphi_{x_p}(x)$, which is a contradiction.

IV.

Let S be a completely regular space. Let $\lambda(S)$ be the set of all points $x \in \beta(S)$ such that x possesses a neighborhood U (in the space $\beta(S)$) such that $S\overline{U}$ is a normal space. ($\overline{U}$ is the closure of U in $\beta(S)$.) It is easy to see that $\lambda(S)$ is an open subset of $\beta(S)$.

Let F_1 and F_2 be two closed subsets of a completely regular space S such that $F_1F_2 = 0$. Then

$$\overline{F}_1 \,.\, \overline{F}_2 \,.\, \lambda(S) = 0\,,$$

the bars indicating closures in $\beta(S)$. Supposing the contrary, there exists a point $a \in \overline{F}_1 \,.\, \overline{F}_2 \,.\, \lambda(S)$. Since $a \in \lambda(S)$, there exists a neighborhood U of a (in the space $\beta(S)$) such that $S \,.\, \overline{U}$ is a normal space. There exists a neighborhood V of a such that $\overline{V} \subset U$. Put

$$\Phi_1 = \overline{V} \,.\, F_1 \,, \Phi_2 = \overline{U} \,.\, F_2 + S(\overline{U} - U)\,.$$

Then Φ_1 and Φ_2 are two closed subsets of $S\overline{U}$ such that $\Phi_1\Phi_2 = 0$. Moreover, it is easy to see that $a \in \overline{\Phi}_1\overline{\Phi}_2$. Since $S\overline{U}$ is a normal space, there exists a bounded continuous function f in the domain $S\overline{U}$ such that $f(x) = 0$ for each $x \in \Phi_1$ and $f(x) = 1$ for each $x \in \Phi_2$. For $x \in S$ put (i) $g(x) = f(x)$ if $x \in SU$, (ii) $g(x) = 1$ if $x \in S - U$. Then it is easy to see that g is a bounded continuous extension of f to the domain S. According to the definition of $\beta(S)$, there exists a continuous extension φ of g (hence of f) to the domain $\beta(S)$. We have $\varphi(x) = f(x) = 0$ for each $x \in \Phi_1$ and $\varphi(x) = f(x) = 1$ for each $x \in \Phi_2$. Since φ is continuous, we have must $\varphi(x) = 0$ for each $x \in \overline{\Phi}_1$ and $\varphi(x) = 1$ for each $x \in \overline{\Phi}_2$, so that $\overline{\Phi}_1\overline{\Phi}_2 = 0$, which is a contradiction.

The topological space S will be called *locally normal* if each point $x \in S$ possesses a neighborhood U such that $\overline{U}$ is a normal space. Any normal space is locally normal; more generally, any open subset of a locally normal space is locally normal.

A locally normal Riesz space S is completely regular. Let a be a given point of a locally normal space S and let V be a given neighborhood of a. There exists a neighborhood U of a such that $\overline{U}$ is a normal space. Also $\overline{UV}$ is a normal space, since it is a closed subset of $\overline{U}$. Since (a) and $\overline{UV} - UV$ are two closed subsets of the normal space $\overline{UV}$ without a common point, there exists a continuous function f in the domain $\overline{UV}$ such that $f(a) = 0$ and $f(x) = 1$ for each $x \in \overline{UV} - UV$. For $x \in S$ put (i) $g(x) = f(x)$ if $x \in UV$, (ii) $g(x) = 1$ if $x \in S - UV$. Then it is easy to see that g is a continuous function in the domain S such that $g(a) = 0$ and $g(x) = 1$ for each $x \in S - V$. Therefore S is completely regular.

A completely regular space S need not be locally normal. Let ω be the first infinite ordinal number. Let ω_1 be the first uncountable ordinal number. Let S_1 be the space of all ordinal numbers $\leqq \omega$. Let S_2 be the space of all ordinal numbers $\leqq \omega_1 \,.\, \omega$. The topology in S_1 and in S_2 is defined in the usual way by means of intervals. Let S_{12} be the cartesian product of the two spaces S_1 and S_2. Let T be the set of all points

$(x, y) \in S_{12}$, for which $x = \omega$ and $y = \omega_1 . n$ $(n = 1, 2, 3 \dots)$. Let $S = S_{12} - T$. Then S is a completely regular space, but it is not locally normal.

It is easy to see that a completely regular space S is locally normal if an only if $S \subset \lambda(S)$. I do not know whether there exists a completely regular space $S \neq 0$ such that $S . \lambda(S) = 0$.

A Riesz space S is locally normal if and only if it is homeomorphic with an open subset of a normal Riesz space[19]. We know that an open subset of a normal Riesz space is a locally normal Riesz space. Conversely let S be a locally normal Riesz space. Let S_0 be a new space consisting of all points of S and of a single new point ω. The topology of S_0 is defined as follows. If $\omega \in A \subset S_0$, then A is closed in S_0 if and only if $A - (\omega)$ is closed in S. If $A \subset S_0 - (\omega) = S$, then A is closed in S_0 if and only if (i) A is closed in S, (ii) $\bar{A} \subset \lambda(S)$, the bar indicating closure in $\beta(S)$. It is easy to see that S_0 is a Riesz space and that S is an open subset of S_0. It remains to be shown that the space S_0 is normal. Let F_1 and F_2 be two closed subsets of S_0 such that $F_1 F_2 = 0$. Since the point ω belongs at most to one of the two sets F_1 and F_2, we may suppose that $F_1 \subset S$. Since F_1 is closed in S_0, the closure $\bar{F}_1$ of F_1 in the space $\beta(S)$ is a subset of $\lambda(S)$. Put $F_3 = F_2 - (\omega)$. Then F_1 and F_3 are two closed subsets of S and $F_1 F_3 = 0$. We know that $\bar{F}_1 . \bar{F}_2 . \lambda(S) = 0$ (the closures being formed again in $\beta(S)$). But $\bar{F}_1 \subset \lambda(S)$ so that $\bar{F}_1$ and $\bar{F}_3 + \beta(S) - \lambda(S)$ are two closed subsets of $\beta(S)$ without a common point. Since $\beta(S)$ is a bicompact Hausdorff space, it is normal, so that there exists a continuous function φ in the domain $\beta(S)$ such that $\varphi(x) = 0$ for each $x \in \bar{F}_1$ and $\varphi(x) = 1$ for each $x \in \bar{F}_3$ and for each $x \in \beta(S) - \lambda(S)$. Let us define a function f in the domain S_0 in the following way. If $x \in S$, then $f(x) = \varphi(x)$; moreover $f(\omega) = 1$. Then it is easy to see that f is a continuous function in the domain S_0 such that $f(x) = 0$ for each $x \in F_1$ and $f(x) = 1$ for each $x \in F_2$.

I conclude with two more unsolved questions. A topological space S is called *completely normal* if every subset of S is a normal space. S may be called *locally completely normal* if every point $x \in S$ possesses a neighborhood U such that $\bar{U}$ is a completely normal space. S may be called *completely locally normal* if every subset of S is a locally normal space. It is easy to see that a locally completely normal space is completely locally normal. I do not know whether the converse holds true. Any open subset of a completely normal space is a locally completely normal space. I do not know whether a locally completely normal space must be homeomorphic with an open subset of a completely normal space.

Brno, Czechoslovakia

[19] I do not know whether the restriction to Riesz spaces is really necessary in this theorem.

30

I. SUR LES ESPACES COMPACTS
II. SUR LES CARACTÈRES DES POINTS DANS LES ESPACES $\mathfrak{L}$

(Avec B. Pospíšil)

Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou
Masarykovy university.
Brno *258* (1938), 14 pp.

Ouvrages cités

„AU" ... P. Alexandroff et P. Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verhandelingen des konink. Akademie van Wetenschappen, eerste Sectie, Deel XIV, No 1.

„Č" ... E. Čech, On bicompact spaces, Annals of Math., 38, 1937, pp. 823–844, [29].

„P, esp. abstr." ... B. Pospíšil, Trois notes sur les espaces abstraits, ces publications 249, 1937.

„P, exist." ... B. Pospíšil, Théorèmes d'existence pour les caractères des points, Čas. mat. fys. 67, No 3, Praha 1938.

I. Sur les espaces compacts

On appelle *caractère* du point p dans l'espace topologique R la plus petite puissance d'un système d'entourages de p dans R qui contienne, pour tout entourage quelconque U de p dans R, un entourage-élément V avec $V \subset U$. Nous commençons par une généralisation d'un théorème dû à MM. Alexandroff et Urysohn („AU", p. 29). Étant donnée une puissance $\mathfrak{a}$ infinie quelconque, un espace topologique sera dit *compact* ($\mathfrak{a}$), lorsque toute famille $\mathfrak{F}$ de puissance $\leqq \mathfrak{a}$ d'ensembles fermés admet des points communs à tous ses ensembles-éléments, supposé que cette proposition soit vraie pour toute sous-famille finie de $\mathfrak{F}$.

Théorème I. *Soit R un espace régulier compact* ($\mathfrak{a}$); *soit $\mathfrak{a}$ la borne inférieure des caractères des points dans R. Alors, la puissance de R n'est pas inférieure à* $2^{\mathfrak{a}}$.

Démonstration. Désignons par α le plus petit nombre ordinal de puissance $\mathfrak{a}$. Soit s_ξ une suite transfinie quelconque du type ξ; alors, nous désignons par $[s_\xi, y]$ la suite transfinie du type $\xi + 1$ qui s'en obtient en lui ajoutant le terme y; y est le dernier terme de $[s_\xi, y]$. Dorénavant, nous désignons par s_ξ une suite du type ξ et dont les termes ne prennent que les valeurs 0 et 1. Ainsi, on a fait correspondre, à tout ξ ordinal de puissance $\mathfrak{x}$, une famille de puissance $2^{\mathfrak{x}}$ des suites s_ξ.

Pour prouver notre théorème, on n'a qu'à faire correspondre, à toute suite s_ξ avec $\xi = \eta + 1 < \alpha$, un sous-ensemble ouvert O_{s_ξ} sous les conditions suivantes (nous désignons par $\overline{M}$ la fermeture dans R d'un $M \subset R$ quelconque):

(i) Étant donnée une suite quelconque s_ξ $(\xi < \alpha)$, la partie commune des O_{s_η}, où s_η parcourt tous les segments de types isolés de la suite s_ξ, est non vide,

(ii) $\overline{O}_{[s_\xi, 0]} \cdot \overline{O}_{[s_\xi, 1]} = 0 \ (\xi < \alpha)$,

(iii) $\overline{O}_{[s_\xi, y]} \subset O_{s_\xi} \ (\xi = \eta + 1 < \alpha; y = 0, 1)$.

Les conditions (i), (ii) et (iii) prouvent notre théorème. En effet, étant donnée une famille finie quelconque de segments $[s_\xi, y]$ d'une suite donnée quelconque s_α, la partie commune de tous les $O_{[s_\xi, y]}$ correspondant est non vide d'après (i). Il en est de même, à plus forte raison, de la partie commune des $O_{[s_\xi, y]}$. Alors, par compacticité $(\mathfrak{a})$ de notre espace, on établit ainsi la propriété de ne pas être vide de la partie commune de tous les $\overline{O}_{[s_\xi, y]}$ où $[s_\xi, y]$ parcourt tous les segments confinaux à 2 de la suite s_α. La relation (iii) entraîne alors que le partie commune s_α^* de tous les O_{s_ξ} en question est non vide. De plus, pour de différentes suites s_α, nos ensembles s_α^* sont disjoints deux à deux en vertu de la condition (ii). Alors, l'ensemble-somme de tous les s_α^* a la puissance $\geqq 2^{\mathfrak{a}}$, d'où notre théorème.

Reste à construire les ensembles $O_{[s_\xi, y]}$ $(\xi < \alpha)$. Nous procédons par induction transfinie. Admettons alors qu'on ait donné déjà la construction en question pour tous les $\xi < \iota < \alpha$. Distinguons deux cas:

I. ι est un nombre-limite. La partie commune s_ι^* de tous les O_{s_ξ}, où s_ξ parcourt tous les segments de types isolés de la suite s_ι, est non vide. On le voit de la même façon que dans le cas $\iota = \alpha$ qui vient d'être traité. Alors, s_ι^* contient au moins deux points distincts p_0 et p_1. En effet, si s_ι^* n'en contenait qu'un seul, le pseudo-caractère de ce point dans R serait $< \mathfrak{a}$, c'est à dire ce point serait la partie commune de moins de $\mathfrak{a}$ ensembles ouverts. Mais c'est impossible ce qu'on prouve par un procédé dû aux auteurs précités („AU“, p. 65) et duquel il résulte que le caractère du point en question serait $< \mathfrak{a}$.

Cela étant, il existe, par régularité de R, deux ensembles ouverts $O_{[s_\iota, 0]}$ et $O_{[s_\iota, 1]}$ à fermetures disjointes et qui contiennent le point p_0 et p_1 resp. Les conditions (i) et (ii) se trouvent ainsi vérifiées. On n'a pas besoin de vérifier la troisième; car elle est dépourvue du sens.

II. Dans le cas où $\iota = \varkappa + 1$, on n'a qu'à choisir deux sous-ensembles ouverts non vides quelconques $O_{[s_\iota, 0]}$ et $O_{[s_\iota, 1]}$ à fermetures disjointes et contenues dans O_{s_ι}, pour satisfaire aux conditions (i), (ii) et (iii).

Remarquons encore que M. Novák s'est aperçu du fait que notre théorème reste vrai sous l'hypothèse plus générale suivante faite sur R : R est la partie commune d'une famille de puissance $< \mathfrak{a}$ d'ensembles ouverts dans un espace régulier compact $(\mathfrak{a})$; les caractères des points dans R sont $\geqq \mathfrak{a}$. On l'obtient par une modification légère du procédé qui vient d'être donné.

Nous nous servirons de la construction des O_{s_ξ} dans la démonstration du second théorème. Avant de l'énoncer, rappelons qu'on appelle *complet* („Č", p. 837) tout espace qui est un G_δ dans un espace bicompact.

Théorème II. *Soit E un espace complet compact complètement normal; soit S un sous-ensemble de E tel que toute fonction réelle bornée continue définie sur S admet une extension continue sur l'espace E tout entier. Alors, S est compact en soi.*

L'hypothèse de normalité complète est essentielle. Pour s'en convaincre, il suffit de poser $E = \beta(S)$ („Č") avec un S non compact complètement régulier quelconque; en effet, E est bicompact (alors même complet, compact et normal) et toute fonction réelle bornée continue définie sur S admet une extension continue sur E tout entier. De même, la compacticité de E est essentielle ce qui est bien trivial.

D'autre part, il n'en est pas ainsi de la propriété de E d'être complet. En effet, nous la remplaçons, dans la démonstration, par les conditions suivantes: (iv) E est la partie commune d'une famille de puissance $\aleph_1$ d'ensembles ouverts O_ι $(\iota < \omega_1)$ dans un espace R régulier compact $(\aleph_1)$ et (v) les fermetures dans R d'ensembles fermés dans E disjoints deux à deux sont disjointes deux à deux. Tout espace complet normal satisfait à ces conditions („Č", p. 837, Chap. III, § 2).

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e II. Supposons par impossible que S ne soit pas compact. Alors, S contient un ensemble infini J sans points d'accumulation dans S. L'espace S étant (complètement) normal, toute fonction réelle bornée définie sur l'espace isolé J admet une extension continue sur S, alors même sur l'espace E tout entier en vertu de nos hypothèses. Alors, on peut admettre a priori la condition suivante: (vi) L'ensemble S condésiré comme espace est isolé.

D'après un théorème bien connu d'Urysohn, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction réelle bornée continue définie sur S admette une extension continue sur l'espace normal E est qu'elle en admette une sur la fermeture de S dans E. De plus, la dite fermeture jouit évidemment des propriétés (iv) et (v), supposé que l'espace E en jouisse. Car elle est la partie commune des FO_ι où F désigne la fermeture dans R de l'ensemble S. Alors, on peut admettre a priori la condition suivante: (vii) S est dense dans l'espace E.

En désignant toujours par $\overline{M}$ la fermeture dans E d'un $M \subset E$ quelconque, on voit que (viii) les relations

$$F_1 \subset E\,, \; F_2 \subset E\,, \; F_1\overline{F}_2 + \overline{F}_1 F_2 = 0$$

entraînent que $\overline{F}_1\overline{F}_2 = 0$. En effet, par normalité complète de E, il existe deux ensembles ouverts dans $E : G_1$ et G_2 disjoints et tels que $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$. D'après (vii), les ensembles SG_1 et SG_2 resp. sont denses dans G_1 et G_2 resp. Soit g une fonction réelle bornée définie sur S et qui prend la valeur i sur l'ensemble SG_i. Soit f l'extension continue de g sur l'espace E tout entier. Alors, la fonction f prend la valeur i sur l'ensemble $\bar{G}_i$ ce qui prouve que $\bar{G}_1\bar{G}_2 = 0$. On en tire l'égalité voulue $\bar{F}_1\bar{F}_2 = 0$.

Chaque point de S est isolé dans E d'après (vi) et (vii). De plus, le caractère de chaque point de $E - S$ dans l'espace $E - S$ est indénombrable; on la prouve par un procédé donné par Čech („Č", pp. 836 et 837). De plus, l'espace $E - S$ jouit des propriétés (iv), (v) et (viii) énoncées pour E. Alors, en remplaçant par $E - S$ l'espace E, il suffit de prouver la proposition suivante:

(ix) Un espace compact normal E à caractères des points indénombrables ne saurait jouir en même temps des propriétés (iv), (v) et (viii).

En effet, on peut construire, pour $\alpha = \aleph_1$, les ensembles O_{s_ξ} assujettis aux conditions (i), (ii) et (iii) dans notre espace R (sic!). De plus, on peut assujettir les s_ξ^* à la condition de contenir des points de E. En effet, on voit que les procédés I et II de la démonstration du théorème I restent vrais, lorsqu'on y remplace les O_{s_ξ} par les EO_{s_ξ} correspondants. De même, on peut admettre que les fermetures dans R de tous les O_{s_ξ} avec un ξ donné soient contenues dans O_ξ. Les s_α^* $(\alpha = \omega_1)$ en question sont alors contenus dans l'espace E.

Les suites s_α peuvent être considérées comme les points d'un espace C dont la topologie sera définie comme suit. Soit J un ensemble fini de nombres ordinaux $< \alpha$. Soit s_α une certaine de nos suites. Soit U l'ensemble de toutes les suites-points de C dont le ι-ième terme est égal au ι-ième terme de s_α pour tout $\iota \in J$. Alors, les U parcourent les entourages définissants de s_α dans l'espace C. Il est aisé de voir que la transformation $s_\alpha^* \to s_\alpha$ de l'espace-somme C^* des s_α^* en l'espace C est continue. Les ensembles U étant à la fois ouverts et fermés dans C, il en est de même de leurs originaux U^* dans l'espace C^*. Soit s'_α la partie commune des fermetures dans R de tous les U^* qui contiennent s_α^*. Les ensembles s'_α sont disjoints deux à deux. En effet, soient s_α et t_α deux suites-points de C. Soient U et V deux entourages à la fois fermés et ouverts dans C des points s_α et t_α resp., $UV = 0$. Les originaux correspondant U^* et V^* sont alors séparés (c'est à dire disjoints et fermés dans leur somme) ce qui entraîne, d'après (viii), que leurs fermetures dans E sont disjointes. Il en est de même, selon (v), des fermetures des ensembles en question dans l'espace R ce qui prouve que les ensembles s'_α et t'_α sont sans points communs, c. q. f. d.

De plus, étant donné un sous-ensemble quelconque ouvert G de R, $s'_\alpha \subset G$, il existe un U, $s_\alpha \subset U$, tel que la fermeture dans R de l'ensemble U^* est contenue dans G. Dans le cas contraire, les intersections finies des fermetures en question contiendraient des points de $R - G$. Ce dernier ensemble étant compact $(\aleph_1)$, la partie commune s'_α de toutes nos fermetures ne serait pas contenue dans G (cf. „AU", p. 65). De plus, les dites fermetures sont ouverts dans l'espace-somme des s'_α. On le tire du raisonnement du § précédent où l'on a posé $V = C - U$.

D'autre part, il existe deux sous-ensembles séparés A_1 et A_2 de C et tels qu'étant donnés deux G_1 et G_2 ouverts dans C, $A_1 \subset G_1$, A_2 et G_2, les ensembles G_1 et G_2 ne sauraient être disjoints („P, esp. abstr.", p. 8). Les originaux A_1' et A_2' des ensembles A_1 et A_2 dans le transformation $s_\alpha' \to s_\alpha$ de l'espace-somme C' des s_α' en s_α jouissent de la même propriété. Car tout ensemble ouvert dans C' et qui contient A_i' contient aussi l'original d'un certain G_i en vertu du § précédent. D'autre part, les ensembles A_i' sont séparés d'où l'on tire le fait impossible que C' ne saurait être complètement normal. En effet, tout espace normal à propriété (viii) est même complètement normal.

Notre théorème se trouve ainsi prouvé.

Remarquons encore que l'ensemble S peut vérifier le second théorème sans être fermé dans E même dans le cas d'un E bicompact. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à poser E égal à l'espace ordonné des nombres ordinaux $\leqq \omega_1$ et $S = E - (\omega_1)$ („Č", p. 836).

Corollaire. *Soit S un espace non compact complètement réguliér. Alors, l'espace $\beta(S)$ ne saurait être complètement normal.*

L'espace $\beta(S)$ se trouve défini dans le mémoire cité de Čech.

II. Sur les caractères des points dans les espaces $\mathfrak{L}$

Lemme. *Soit R un espace régulier; soit N un sous-ensemble infini de R. Alors, N contient une suite de points distincts a_n telle qu'on peut faire correspondre, à tout n naturel, un sous-ensemble ouvert O_n de R de façon qu'on ait $a_n \in O_n$ et $O_k O_l = 0$ pour $k \neq l$.*

En effet, supposons qu'on ait déjà construit des ensembles $O_1, O_2, \ldots, O_n$ de façon que l'ensemble $N_n = N - (\overline{O}_1 + \overline{O}_2 + \ldots + \overline{O}_n)$ fût infini (nous désignons par $\overline{M}$ la fermeture dans R de l'ensemble $M \subset R$). L'ensemble N_n contient évidemment un point a_{n+1} tel que l'ensemble $N_n - \overline{O}_{n+1}$ est infini pour un entourage convenable O_{n+1} de a_{n+1}. Car l'ensemble N_n ne possède qu'un seul point-limite tout au plus. De plus, on peut assujettir $\overline{O}_{n+1}$ à la condition d'être disjoint des $\overline{O}_k$ déjà construits.

Soit E un ensemble donné quelconque. Soit u une fonction qui fait correspondre, à tout sous-ensemble quelconque M de E, un certain sous-ensemble uM de E. On appelle *espace topologique général* tout couple ordonné (E, u). La topologie u peut être introduite de plusieurs manières différentes. Le but de ce travail est d'étudier le rapport mutuel des deux manières de procéder suivantes:

I. Faisons correspondre, à tout point p de E, un système $\Omega(p)$ non vide de sous-ensembles de E. Soit uM l'ensemble des points p de E tels que l'ensemble MU n'est vide pour aucun $U \in \Omega(p)$. Nous disons que $\Omega(p)$ est un *système complet d'entourages* du point p dans l'espace (E, u). Suivant M. Markoff, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de tels systèmes $\Omega(p)$ est qu'on ait à la fois $u0 = 0$ et $uM_1 \subset$

$\subset uM_2$ lorsque $M_1 \subset M_2 \subset E$. Nous nous bornerons ici exclusivement à l'étude des topologies u qui satisfont aux dites conditions. On appelle *caractère* on *pseudo-caractère* resp. du point p dans (E, u) la plus petite puissance $\chi_u(p)$ ou $\psi_u(p)$ resp. d'un système $\Omega(p)$ ou d'un sous-système de $\Omega(p)$ tel que la partie commune de ses ensembles-éléments est égale à celle des ensembles appartenant à $\Omega(p)$ resp.: $\psi_n(p)$ ne dépend pas du choix particulier de $\Omega(p)$. Nous étudierons ici la notion de caractère; nous ne traiterons le pseudocaractère que dans les cas où cela ne compliquera pas nos considérations.

II. Nous écrivons $\lambda(u) = 1$ si et seulement si l'on peut faire correspondre, à de certaines suites infinies dénombrables de points de E — dites convergentes —, d'une façon univoque, des points-limites $\in E$ de façon que uM soit l'ensemble des limites des suites convergentes extraites de M. On dit que toute suite convergente converge vers sa limite. L'ordre de termes de nos suites n'influence pas leur convergence. L'égalité $\lambda(u) = 0$ veut dire que $\lambda(u) \neq 1$.

On écrira de même $\lambda^*(u) = 1$ lorsqu'on aura les axiomes suivants: a) Toute suite dont tous les termes sont égaux à un certain point constant converge vers ce point, b) toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite et, c) lorsqu'une suite ne converge pas vers p, on en peut extraire une suite partielle dont aucune sous-suite ne converge vers p. Nous écrirons $\lambda^*(u) = 0$ lorsque $\lambda^*(u) \neq 1$.

De plus, nous faisons correspondre, à toute topologie u, la topologie $\bar{u}$ ou $\bar{u}M$ est le plus petit ensemble tel que $M \subset \bar{u}M$ et que $N \subset \bar{u}M$ entraîne que $uN \subset \bar{u}M$.

Dorénavant, désignons par F l'ensemble des fonctions réelles continues définies sur l'espace topologique R. Soit Q un sous-ensemble dense de R. La topologie u de l'espace (F, u) sera définie par convergence: On appellera convergente vers $f \in F$ toute suite $f_n \in F$ pour laquelle $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour tous les $x \in Q$ au sens usuel.

Théorème I. *Soit R un espace complètement régulier quelconque; soit $u \subset v \subset \bar{u}$. Alors, les caractères des points dans l'espace (F, v) sont au moins égaux à la puissance de Q.*

L'inclusion $u \subset v \subset \bar{u}$ veut dire que $uM \subset vM \subset \bar{u}M$ pour chaque $M \subset F$.

Démonstration. Pour tout point a de Q désignons par $O(a)$ l'ensemble des $f \in F$ avec $|f(a)| < 1$. $O(a)$ est un entourage dans $(F, \bar{u})$ de la fonction $o \in F$ égale à zéro identiquement, c'est à dire o non $\in \bar{u}[F - O(a)]$. A plus forte raison, $O(a)$ est un entourage de o dans (F, v). Nous allons nous servir du fait élémentaire bien connu suivant: Ω est un système complet d'entourages de o dans (F, v) si et seulement si tous ses ensembles-éléments sont des entourages de o dans (F, v) et que tout entourage quelconque de o dans (F, v) est un sur-ensemble d'un ensemble-élément de Ω. En désignant, pour tout entourage U de o dans (F, v), par U^* l'ensemble de tels $a \in Q$ que $U \subset O(a)$, remarquons qu'on prouvera plus tard que U^* est toujours fini. Admettons que U parcoure un système complet d'entourages de o dans (F, v). Alors, d'après ce qui précède, à chaque point a de Q on peut faire correspondre un $U = U(a) \subset O(a)$. Pour chaque $a \in Q$ soit T_a l'ensemble des $b \in Q$ avec $U(b) = U(a)$. On a ainsi sub-divisé Q en tranches disjointes finies. En effet, on a $U(b) \subset O(b)$, alors $U(a) \subset O(b)$ pour tout $b \in T_a$; alors $T_a \subset U^*(a)$ d'où l'on tire que T_α est finie. Le nombre des T_α étant égal à la puissance de Q, il en est de même du nombre des $U(a)$. Alors la puissance du système des U est au moins égale à celle de Q. On en tire une proposition analogue pour toute fonction $\in F$ prise au lieu de o. Car (F, u) et $(F, \bar{u})$ sont des groupes topologiques.

Reste à prouver que U^* ne saurait être infini. En effet, on pourrait extraire, d'un U^* infini, une suite $\{a_n\}$ et définir des O_n de façon à satisfaire au lemme $(M = U^*)$. La régularité complète de l'espace R entraîne. pour chaque n naturel, l'existence d'une fonction $f_n \in F$ avec $f_n(a_n) = 2$ et qui s'annulle en dehors de O_n. Par définition de U^*, U ne contient aucune fonction f_n, d'où l'on tire que o non $\in vS$ où S désigne l'ensemble des f_n. D'autre part, $f_n(x)$ converge évidemment vers 0 pour chaque $x \in R$. Alors, on a $o \in uS$ ce qui est impossible. Car on aurait $o \in vS$.

Dans les notations précédentes, désignons par t la topologie de l'espace (F, t) définie par convergence comme suit. Les fonctions $f_n \in F$ convergent vers $f \in F$ lorsqu'on peut faire correspondre, à tout point de Q, un entourage dans R où les fonctions f_n convergent uniformément au sens usuel.

Théorème II. *Soit R un espace normal quelconque; soit $t \subset v \subset \bar{u}$; soit $\mathfrak{a}$ le caractère d'un point quelconque dans l'espace (F, v). Alors, Q se laisse décomposer en $\mathfrak{a}$ sous-ensembles compacts en soi.*

Démonstration. On peut admettre que o soit le point en question. On n'a qu'à modifier légèrement la démonstration précédente. En effet, Q se laisse décomposer en tranches T_a, alors même en sous-ensembles $U^*(a)$ dont le nombre peut être pris $\leqq \mathfrak{a}$. Car on peut prendre la puissance du système des U égale à $\mathfrak{a}$. Reste à déduire la compacticité des U^*. En effet, on pourrait extraire, d'un U^* non compact en soi, une suite $\{a_n\}$ de points distincts sans points d'accumulation. Par normalité de R, on peut ajouter à chaque point a_n un entourage O_n dans R de façon que l'ensemble-somme des $\bar{O}_n$ avec $n \geqq k$ soit fermé dans R pout tout k naturel et qu'on ait $\bar{O}_k\bar{O}_l = 0$ $(k \neq l)$ („AU“, p. 55–56). En définissant les fonctions f_n comme auparavant, on voit que $f_n \in F - U$ pour chaque n, d'où l'on obtient comme plus haut la contradiction voulue.

Désignons par Π l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels définis sur un intervalle compact R. La topologie u de l'espace (Π, u) sera définie par convergence comme auparavant où l'on pose $Q = R$.

Théorème III. *Les caractères des points dans tout espace (Π, v) avec $u \subset v \subset \bar{u}$ sont égaux à $\exp \aleph_0$.*

(Nous écrivons toujours $\exp \mathfrak{r} = 2^{\mathfrak{r}}$.)

Démonstration. La puissance de Π étant égale, comme on sait, à $\aleph_0$, nos caractères ne peuvent pas supasser $\exp \aleph_0$ évidemment. Notre démonstration se réduit presque entièrement à celle du théorème I. Mais, il faut remplacer les fonctions

f_n par des polynômes p_n que nous allons définir. D'après un théorème bien connu de Weierstrass, on peut trouver de tels p_n que $|f_n(x) - p_n(x)| < n^{-1}$ pour tous les $x \in R$. Ce sont justement nos polynômes à définir.

On voit que les théorèmes précédents restent valables, sans qu'on change leurs démonstrations, si l'on définit la topologie $\bar{u}$ comme suit. Pour définir un entourage du point f dans l'espace $(F, \bar{u})$ ou $(\Pi, \bar{u})$, on choisit un sous-ensemble fini quelconque K de Q et un $\varepsilon > 0$; les fonctions-éléments g de l'entourage à construire sont caractérisées par les inégalités $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ avec $x \in K$.

Nous abordons maintenant les questions d'existence pour les caractères des points dans les espaces du type $\mathfrak{L}$ de M. Fréchet. Commençons par quelques définitions. Les deux topologies u et v définies sur un même ensemble sont dites *incomparables* si l'on n'a ni $u \subset v$ ni $v \subset u$. Nous disons que le nombre de topologies incomparables d'un certain genre est égal à $\mathfrak{x}$ lorsqu'il existe une famile de puissance $\mathfrak{x}$ de nos topologies incomparables et que $\mathfrak{x}$ est le plus grand nombre cardinal qui jouisse de la dite propriété. Ce nombre sera dit *précis*, lorsqu'il n'existe pas plus de $\mathfrak{x}$ topologies distinctes de notre genre.

Les théorèmes d'existence pour les caractères ne surpassant pas la puissance de l'espace ont été donnés, pour les espaces munis de la notion de limite, dans „P. exist.". Nous abordons ici des questions concernant de grands caractères. Dorénavant, nous désignons par E un ensemble quelconque infini de puissance $\mathfrak{e}$. Soit o un certain élément fixé de E. De plus, on aura $\omega(u) = 1$ pour une topologie u définie sur E, lorsque tous les points sont ouverts et fermés à la fois dans l'espace (E, u) sauf le point o qui est fermé sans être ouvert. La relation $\omega(u) = 0$ veut dire que $\omega(u) \neq 1$. Dorénavant, nous désignons par η une fonction à valeurs réelles dont l'argument parcourt toutes les topologies sur E. Soit $\mathfrak{z}$ un aleph quelconque $\leqq \mathfrak{e}$.

Théorème IV. *Soit* $\omega \,.\, \lambda^* \leqq \eta \leqq \lambda$. *Alors, le nombre précis de topologies* w *incomparables avec* $\eta(w) = 1$, $\chi_w(o) = \exp \mathfrak{e}$, $\psi_w(o) = \mathfrak{z}$ *est égal à* $\exp \mathfrak{e}^{\aleph_0}$.

Démonstration. Remarquons d'abord que le nombre des u avec $\eta(u) = 1$ ne saurait surpasser $\exp \mathfrak{e}^{\aleph_0}$. En effet, le nombre des suites dénombrables de points de E est égal à $\mathfrak{e}^{\aleph_0}$ (on ne tient pas compte de l'ordre!). On définit une topologie u avec $\lambda(u) = 1$ en ajoutant à chaque suite un point-limite $\in E$ ou la propriété de ne pas converger. Il y a donc $\exp \mathfrak{e}^{\aleph_0}$ possibilités tout au plus, c. q. f. d.

Soit R un espace normal pouvant être décomposé en sous-espaces R_1 et R_2 disjoints et fermés dans R de façon que les propositions suivantes soient vérifiées: (i) La puissance de R_1 est $\exp \mathfrak{e}$, (ii) la puissance de R_2 est $\mathfrak{e}^{\aleph_0}$, (iii) R possède une base ouverte $\mathfrak{B}$ de puissance $\mathfrak{e}$, c'est à dire un tel système $\mathfrak{B}$ d'ensembles ouverts que tout ensemble ouvert dans R est la somme des ensembles éléments d'un sous-système de $\mathfrak{B}$ et (iv) R_2 peut être décomposé en deux parties disjointes denses Δ et Θ; la puissance d'une certaine d'elles — soit Δ — est égale à $\mathfrak{e}^{\aleph_0}$.

Un tel espace R se construit bien aisément. En effet, on peut prendre pour R_1 le produit cartésien (v. „Č", p. 829 ou „P, esp. abstr.", p. 8) de $\mathfrak{e}$ espaces isolés à deux points. De même, le produit cartésien R_2 de $\aleph_0$ espaces homéomorphes à un espace bicompact de puissance $\mathfrak{c}$ et qui ne possède qu'un seul point non isolé jouit des propriétés qui viennent d'être énoncées. La normalité de R résulte de la bicompacticité des produits cartésiens d'espaces bicompacts („Č", p. 830). Car on sait que la bicompacticité entraîne la normalité.

Dorénavant, soit $\overline{M}$ la fermeture dans R de M quelconque. A tout couple d'ensembles-éléments U et V de $\mathfrak{B}$ avec $\overline{U} \subset V$, faisons correspondre, suivant Urysohn, une fonction $f_{U,V}$ réelle continue définie sur R avec $f_{U,V}(x) = 1$ ou $= 0$ resp. lorsque $x \in \overline{U}$ ou $x \in R - V$ resp. Soit E_1 l'ensemble des $f_{U,V}$. Posons encore $Q = R_1 + \Theta + + \Gamma$ avec un $\Gamma \subset \Delta$ quelconque. La topologie u étant définie de la même manière que dans le théorème I, le caractère du point o dans $(E_1 + (o), u)$ est égal à $\exp \mathfrak{c}$. En effet, ce caractère ne pouvant pas surpasser $\exp \mathfrak{c}$ (car il n'y a que $\mathfrak{c}$ fonctions $f_{U,V}$ tout au plus), il suffit, pour prouver l'inégalité $\chi_u(o) \geqq \exp \mathfrak{c}$, de reprendre le raisonnement du théorème I en s'apercevant que les f_n peuvent être choisies de façon qu'on ait toujours $f_n = f_{U,V}$ pour un couple convenable U, V (qui dépend de n).

Assujettissons encore l'ensemble Δ à la condition supplémentaire que (v) les caractères des points de Δ dans l'espace R soient dénombrables. En effet, cette condition est admissible en appelant Δ le produit cartésien qu'on obtient de R_2 en supprimant dans tout facteur le point unique non isolé.

Désignons par v la topologie qu'on obtient de u en isolant tous les $f_{U,V}$ sauf o. Les entourages de o seront les mêmes pour les deux topologies u et v. Pour mettre en évidence que v dépend de Γ, écrivons-la v_Γ. On voit que $v_{\Gamma''}$ non $\subset v_{\Gamma'}$ lorsque Γ' non $\subset \Gamma''$. En effet, soit $a \in \Gamma' - \Gamma''$. Il existe, d'après (v), deux suites d'ensembles-éléments de $\mathfrak{B}$, soit U_n et V_n, avec $\overline{U}_n \subset V_n$ et $V_{n+1} \subset V_n$, $a \in U_n$; les V_n ne contiennent que le point a en commun. Soit $f_n = f_{U_n,V_n}$. Il est bien évident que les nombres $f_n(x)$ convergent vers 0 pour tout $x \in \Gamma''$ tandis qu'on a $f_n(a) = 1$ pour tout n. Alors, $o \in v_{\Gamma''}S - v_{\Gamma'}S$, où S désigne la suite des f_n. On a donc $v_{\Gamma''}$ non $\subset v_{\Gamma'}$, c. q. f. d.

Soit E_2 un ensemble disjoint de $E_1 + (o)$ de puissance $\mathfrak{z}$ et de plus, soit E_3 un ensemble disjoint de $E_1 + E_2 + (o)$ de puissance $\mathfrak{c}$. Posons $E = E_1 + E_2 + E_3 + + (o)$. Dans l'espace (E, w) à construire, tous les points seront ouverts et fermés à la fois, sauf le point o qui aura pour ses entourages les ensembles $E_2 - K + U$ avec un K fini quelconque et où U désigne un entourage quelconque de o dans l'espace $(E_1 + (o), v)$, On voit que $\lambda^*(w) = 1$. Ainsi, on vérifie sans peine toutes les propriétés voulues de la topologie w.

Pour établir l'existence de topologies w incomparables en nombre $\exp \mathfrak{c}^{\aleph_0}$ il suffit de remplacer chacune d'elles par la topologie correspondente v et trouver les topologies v incomparables en nombre $\exp \mathfrak{c}^{\aleph_0}$. D'autre part, nous avons déjà prouvé que les topologies $v_{\Gamma'}$ et $v_{\Gamma''}$ sont incomparables, supposé que les ensembles Γ' et Γ'' le soient, c'est à dire qu'on n'ait ni $\Gamma' \subset \Gamma''$ ni $\Gamma'' \subset \Gamma'$. Alors, il nous reste à prouver que, dans un ensemble Δ de puissance $\vartheta = \mathfrak{c}^{\aleph_0}$, on peut trouver des sous-ensembles incomparables en nombre $\exp \vartheta$. Pour cela, envisageons un produit cartésien P

d'espaces isolés à deux points à ϑ facteurs. On peut identifier les éléments de $\varDelta$ à ceux d'une base ouverte de P. A chaque point p de P nous faisons correspondre le système $\varDelta_p$ de tous les ensembles-éléments de $\varDelta$ qui contiennent p. On sait qu'il existe, pour tout couple de points p' et p'' de P, un $U' \in \varDelta_{p'}$ et un $U'' \in \varDelta_{p''}$ avec $U'U'' = 0$. Alors, U'' non $\in \varDelta_{p'}$ et U' non $\in \varDelta_{p''}$ d'où l'incomparabilité des systèmes $\varDelta_{p'}$ et $\varDelta_{p''}$. Le nombre de ces systèmes étant égal à celui des p alors à exp ϑ, on a le théorème à prouver.

Dorénavant, la relation $\nu(u) = 1$ $(\nu(u) = 0)$ veut dire quel' espace doué de la topologie u est (n'est pas) complètement normal.

Théorème V. *Soit* $\nu \,.\, \lambda^* \leqq \eta \leqq \lambda$. *Alors, le nombre précis de topologies w incomparables avec* $\eta(w) = 1$ *et* $\chi_w(e) = \exp \mathfrak{e}$, $\psi_w(e) = \mathfrak{z}$ *pour tout* $e \in E$ *est égal à* $\exp \mathfrak{e}^{\aleph_0}$.

Démonstration. Pour prouver ce théorème, il suffit de remplacer, les espaces $J = (E, w)$ que nous avons construits dans la démonstration précédente par les espaces N qui s'en obtiennent de la manière que nous allons décrire. Les points de N seront les suites finies $p = \{p^1, p^2, \ldots, p^k\}$ avec $p^l \in E - (o)$; posons $k = \lambda p$; soit U_p l'ensemble de tous les $q = \{q^1, q^2, \ldots\} \in N$ avec $\lambda q \geqq \lambda p$, $q^l = p^l$ pour $l = 1, 2, \ldots, \lambda p$; les entourages définissants du point p dans N seront les ensembles $U_p - \sum\limits_x U_x$ avec $x \in U_p - (p)$, $\lambda x = \lambda p + 1$ et x^{n+1} parcourant un ensemble $X \subset E$ tel que $E - X + (o)$ est un entourage de o dans J. Les propriétés désirées des espaces N se vérifient sans peine (cf. „P, exist.", 0.1 et 0.2).

Nous exprimons par $\tau(u) = 1$ la propriété de u qu'il existe, pour tout couple de points, des entourages ouverts disjoints; on écrit $\tau(u) = 0$ lorsque $\tau(u) \neq 1$.

Théorème VI. *Soit* $\tau \,.\, \lambda^* \leqq \eta \leqq \lambda$, $\mathfrak{e} \leqq \mathfrak{h}^{\aleph_0}$. *Alors, le nombre précis de topologies w incomparables avec* $\eta(w) = 1$ *et* $\chi_w(e) = \exp \mathfrak{e}$ *pour tout* $e \in E$ *est égal à* $\exp \mathfrak{e}^{\aleph_0}$ *sous la condition que tout espace en question contienne une partie dense de puissance* $\mathfrak{h}$.

Avant de le prouver, remarquons encore que la dite condition entraîne d'une façon bien trivial que $\mathfrak{e}$ ne saurait surpasser $\mathfrak{h}^{\aleph_0}$.

Démonstration. Pour prouver notre théorème, envisageons le produit cartésien P de $\aleph_0$ espaces isolés de puissances $\mathfrak{h}$. C'est un espace de Hausdorff à caractères dénombrables; c'est alors que P est un espace dont la topologie rend égale à l'unité la fonction λ^*. De plus, c'est un espace de puissance $\mathfrak{h}^{\aleph_0}$ contenant une partie dense T de puissance $\mathfrak{h}$. Modifions encore un peut la topologie de P en isolant tous les points de T et en prenant pour les entourages des points $p \in P - T$ les ensembles TU, où U parcourt les entourages de p dans P. Soit K un sous-espace de l'espace ainsi obtenu avec $T \subset K$ et tel que la puissance de $K - T$ est égale à $\mathfrak{e}$. Imaginons maintenant de posséder de tels espaces K en nombre infini dénombrable. Soient K_n (n naturel) les espaces en question supposés disjoints deux à deux. Étant donnée une valeur fixée de Γ dans la démonstration du théorème IV, nous allons construire un espace S (qui dépend de Γ) qui se composera du point o qu'on suppose étranger à tous les K_n et des derniers espaces eux-mêmes. Il existe pour tout n naturel une fonction f_n biunivoque dont l'argument parcourt l'ensemble E du théorème IV excepté le point o et dont les valeurs sont des points non isolés de K_n. Nous introduisons dans S la notion de limite qui sera identique, dans les K_n, à celle définie par la topologie des K_n. De plus, une suite infinie de points de $\sum_n K_n^i$, où K_n^i désigne la partie isolée de K_n, aura o pour sa limite, lorsqu'elle ne contiendra une infinité de points en commun avec aucun K_n. Soit de plus $\sum_n F_n$ une décomposition en parties disjointes finies d'une suite de points convergente vers o dans l'espace (E, u) du théorème IV. Alors, la suite $\sum_n f_n(F_n)$ sera convergente vers o dans l'espace à construire. En énonçant encore pour convergeant vers un point p quelconque toute suite ne contenant qu'un nombre fini de termes distincts de p ainsi que toute suite-somme d'un nombre fini de suites convergeant vers p, on voit que la topologie r ainsi définie rend égale à l'unité la fonction λ^*. De plus, il est facile de prouver que $\bar{r} = r$ et qu'on obtient, en faisant varier Γ, des topologies r incomparables. C'est ainsi que nous avons obtenu la proposition intermédiaire suivante:

Le nombre précis de topologies r incomparables sur un ensemble de puissance $\mathfrak{c}$ *avec* $\bar{r} = r$, $\eta(r) = 1$ $(\tau . \lambda^* \leqq \eta \leqq \lambda)$ *où le caractère d'un point est égal à* exp $\mathfrak{c}$ *et telles que les espaces correspondents contiennent chacun une partie dense de puissance* $\mathfrak{h}$ *est égal à* exp $\mathfrak{c}^{\aleph_0}$.

Pour obtenir notre théorème, on n'a qu'à replacer tout espace S par un espace dont les points parcourent l'ensembles E des suites finies de points de $S - (o)$ et où la convergence des suites-points $p_n = \{p_n^1, p_n^2, \ldots, p_n^{k_n}\}$ vers un point $p = \{p^1, p^2, \ldots, p^k\}$ $(p_n^i \in S - (o),\ p^i \in S - (o))$ veut dire qu'ou bien $p_n = p$ pour presque tous les n, ou bien presque tous les k_n surpassent k et l'on a $p_n^i \to p^i$ $(i \leqq k,\ n \to \infty)$, $p_n^{k+1} \to 0$ (nous exprimons par $\to$ la convergence dans S).

Les propriétés de l'espace qui vient d'être construit se vérifient sans peine. En particulier, pour prouver la propriété de sa topologie de rendre égale à l'unité la fonction τ, il suffit d'envisager les entourages ouverts $U + (p)$ que nous allons décrire d'un $p = \{p^1, p^2, \ldots, p^k\} \in E$ quelconque. A chaque $l \leqq k$ faisons correspondre un sous-ensemble ouvert U_i de $S - (o)$ avec $p^l \in U_l$. De même, soit $U_{k+1} + (o)$ un sous-ensemble ouvert de S, o non $\in U_{n+1}$. Alors, U sera l'ensemble de tous les $q = \{q^1, q^2, \ldots, q^N\}$ avec $N > k$ et $q^l \in U_l$ pour $l \leqq k + 1$.

31

ON REGULAR AND COMBINATORIAL IMBEDDING

(Together with J. Novák)

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky
72 (1947), 7–16

In his paper *Lattices and topological spaces* (Annals of Math. 39 (1938), 112–127) H. Wallman constructed, for an arbitrary topological space[1] Q, a definite bicompact space ωQ containing Q as a dense subset. In § 3 of the present paper, we prove that ωQ may be characterised by the property that Q is both regularly and combinatorially imbedded in it. Regular imbedding is defined and analyzed in § 1, combinatorial imbedding, in § 2. In § 4, we consider the question whether two points may be separated by open subsets of ωQ.

1. **Definition.** A subspace Q of a space P is said to be *regularly imbedded* in P if the family $(\bar{F})$ of the closures in P of all sets F closed in Q constitutes a closed basis of P, i.e. if every set closed in P is the intersection of some subfamily of the family $(\bar{F})$. As P itself is closed in P, we have:

(1.1) *If Q is regularly imbedded in P, then Q is dense in P.*

(1.2) *If Q is regularly imbedded in P and if $Q \subset P_0 \subset P$, then Q is regularly imbedded in P_0.*

Definition. Let $Q \subset P$. The point $x \in P$ is said to be a *Q-regular point* of P if, for any set $\Phi \subset P - x$ closed in P, there exists a set F closed in Q such that $\Phi \subset \bar{F} \subset$ $\subset P - x$, $\bar{F}$ indicating closure in P. Clearly:

(1.3) *$Q \subset P$ is regularly imbedded in P if and only if, (i) Q is dense in P, (ii) any point $x \in P$ is Q-regular in P.*

(1.4) *If $x \in P$ is a regular point of P, then x is Q-regular for any set Q dense in P.*

Proof. Let $\Phi \subset P - x$ be closed in P. Then $P - \Phi$ is a neighborhood of x in P. As x is a regular point of P, there exists an open neighborhood U of x in P such that

[1] We consider only spaces in which the closure of any point set is closed and, for convenience, we make also the easily avoidable assumption (not made by Wallman) that each finite point set is closed.

$\bar{U} \subset P - \Phi$. The set $F = Q - U$ is closed in Q and $\bar{F} \subset P - U \subset P - x$. As $Q = QU + F$, we have $P = \bar{Q} \subset \bar{U} + \bar{F} \subset (P - \Phi) + \bar{F}$, whence $\Phi \subset \bar{F}$.

Definition. A space P is called *nearly regular* if any Q dense in P is regularly imbedded in P. From (1.3) and (1.4) we have:

(1.5) *Any regular space is nearly regular.*

Definition. A space P is called *hereditarily nearly regular* (h. n. r.) if every subspace of P is nearly regular. Since regularity is a hereditary property, (1.5) gives:

(1.6) *Any regular space is h. n. r.*

From (1.2) we see at once:

(1.7) *If every closed subspace of P is nearly regular, then P is h. n. r.*

Example 1. The space P_1 consists of the points x_{ni} $(n = 1, 2, 3, \ldots, i = 1, 2, 3, \ldots)$, x_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, and z. Each point x_{ni} is an isolated point. The point x_n possesses the fundamental neighborhoods U_{nk} $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ consisting of x_n and x_{ni} $(i \geqq k)$. The point z possesses the fundamental neighborhoods V_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ consisting of z and x_{ni} $(n \geqq k, i \geqq k)$. Clearly P_1 is a countable Hausdorff space satisfying the second countability axiom; each point except z is regular. The subspace Q_1 consisting of z and all x_{ni}'s is dense in P_1, but Q_1 is not regularly imbedded in P_1, since the set Φ consisting of all x_n's is closed in P_1, but Φ is not of the form $\Pi \bar{F}$ for any family (F) of sets closed in Q_1. Hence P_1 is not nearly regular.

Example 2. The space P_2 consists of the points x_{ni}, y_{ni} $(n = 1, 2, 3, \ldots, i = 1, 2, 3, \ldots)$, x_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, and z. The points x_{ni} and y_{ni} are isolated. Each point x_n possesses the fundamental neighborhoods U_{nk} $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ consisting of the points x_{ni} $(i \geqq k)$, y_{ni} $(i \geqq k)$, and x_n. The point z possesses the fundamental neighborhoods V_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ consisting of the points x_{ni} $(n \geqq k, i \geqq k)$ and z. Again, P_2 is a countable Hausdorff space satisfying the second countability axiom and z is the only irregular point of P_2. We shall prove that P_2 is nearly regular. Let Q be any dense subset of P_2; clearly $Y \subset Q$, Y being the set of all y_{ni}'s. By (1.3) and (1.4) we have only to show that the point z is Q-regular. Let $\Phi \subset P_2 - z$ be closed in P_2. Then $F = Q\Phi + Y_0$ is closed in Q, Y_0 being the closure of Y in Q and clearly $\Phi \subset \bar{F} \subset P_2 - z$. Hence z is Q-regular. Therefore P_2 is nearly regular, but not hereditarily, which follows from example 1.

Example 3. Let M be any uncountable set. The space P_3 consists of the points $x_{n\mu}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots, \mu \in M)$, x_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, and z. The points $x_{n\mu}$ are isolated. Each point x_n possesses the fundamental neighborhoods U_{nK} consisting of the points $x_{n\mu}$ $(\mu \in M - K)$ and x_n, where K runs over the family of all finite subsets of M. The point z possesses the fundamental neighborhoods $V_k - S_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, V_k consisting of the points $x_{n\mu}$ $(n \geqq k, \mu \in M)$ and S_k running over the family of all countable subsets of V_k. Clearly P_3 is a Hausdorff space and z is the only irregular point of P_3. We shall show that the space P_3 is h. n. r. Let Q denote any subspace of P_3 such that $z \in \bar{Q}$. By (1.3) and (1.4) we have only to show that, in the space $\bar{Q}$, the point z is Q-regular. Let $\Phi \subset \bar{Q} - z$ be closed in $\bar{Q}$, hence in P_3. Let X_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) denote the set of the points $x_{n\mu}$ ($\mu \in M$). For each n such that the set $X_n Q$ is infinite, choose an infinite countable subset T_n of $X_n Q$; let $T_n = 0$ if $X_n Q$ is finite. Then $F = Q\Phi + (\sum_1^\infty T_n)_0$, the subscript 0 indicating closure in Q, is closed in Q and it is easy to see that $\Phi \subset \bar{F} \subset P_3 - z$, which proves z to be Q-regular in $\bar{Q}$.

2. **Definition.** Let $n = 2, 3, 4, \ldots$ A subspace Q of a space P is said to be *n-combinatorially imbedded* in P if, for any choice $F_1, F_2, \ldots, F_n$ of relatively closed subsets of Q such that $\prod_1^n F_i = 0$ we have $\prod_1^n \bar{F}_i = 0$. Clearly m-combinatorial imbedding implies n-combinatorial imbedding for $2 \leqq n < m$. The imbedding is said to be *combinatorial* if it is n-combinatorial for each $n = 2, 3, 4, \ldots$

Definition. A subspace Q of a space P is said to be *combinatorially imbedded in P in the strong sense* if, for any choice F_1, F_2 of relatively closed subsets of Q we have $\overline{F_1 F_2} = \bar{F}_1 \bar{F}_2$. By an easy induction, this implies $\overline{\Pi F_i} = \Pi \bar{F}_i$ for any finite number of relatively closed $F_i \subset Q$, so that combinatorial imbedding in the strong sense implies ordinary combinatorial imbedding.

(2.1) *Let Q be 2-combinatorially imbedded in a regular space P. Then Q is combinatorially imbedded in P in the strong sense.*

Proof. Suppose, on the contrary, that there exist two relatively closed sets $F_1 \subset Q$ and $F_2 \subset Q$ such that $\overline{F_1 F_2} \neq \bar{F}_1 \bar{F}_2$. Then there exists a point $x \in \bar{F}_1 \bar{F}_2 - \overline{F_1 F_2}$. By regularity, there exists an open neighborhood U of x in P such that $\bar{U}\overline{F_1 F_2} = 0$, whence $\bar{U} F_1 F_2 = 0$. Clearly $x \in \bar{\Phi}_1 \bar{\Phi}_2$ where the sets $\Phi_1 = F_1 \bar{U}$ and $\Phi_2 = F_2 \bar{U}$ are closed in Q. But this is impossible, since $\Phi_1 \Phi_2 = 0$ and Q is 2-combinatorially imbedded in P.

For $n = 0, 1, 2, \ldots$ let ω_n denote the least ordinal number of power $\aleph_n$ and Z_n, the set of all ordinal numbers $\xi < \omega_n$.

Example 4. Let $P_4 = Z_1 + \omega_1$. Each $\xi \in Z_1$ posseses the fundamental system of neighborhoods $U_{\xi\eta}$ ($\eta \in Z_1$, $\eta < \xi$), where $U_{\xi\eta}$ consists of all ordinals ζ such that $\eta < \zeta \leqq \xi$. The point ω_1 possesses the fundamental system of neighborhoods V_ξ ($\xi \in Z_1$), where V_ξ consists of ω_1 together with all isolated ordinals $\eta \in Z_1$, $\eta > \xi$. Clearly P_4 is a Hausdorff space and ω_1 is the only irregular point of P_4. Then Z_1 is combinatorially imbedded in P_4. Suppose, on the contrary, that there exist relatively closed sets $F_i \subset Z_1$ ($1 \leqq i \leqq n$) such that $\prod_1^n F_i = 0 \neq \prod_1^n \bar{F}_i$. Then it is clear that no F_i is countable. But then there exist points $\xi_k \in Z_1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) such that $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots$ and

$$\xi_{jn} \in F_1, \xi_{jn+1} \in F_2, \ldots, \xi_{jn+n-1} \in F_n \quad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

which is impossible, since it implies $\lim \xi_k \in \prod_1^n F_i$. Hence Z_1 is combinatorially imbedded in P_4, but not in the strong sense. For let F_1 consist of the points

$$\xi, \xi + 1, \xi + 3, \xi + 5, \ldots$$

and F_2, of the points

$$\xi, \xi + 2, \xi + 4, \xi + 6, \ldots,$$

$\xi \in Z_1$ running over all non isolated ordinals; the sets $F_1 \subset Z_1$ and $F_2 \subset Z_1$ are relatively closed and we have $\omega_1 \in \bar{F}_1 \bar{F}_2 - \overline{F_1 F_2}$.

Lemma.[2] Let $m, i_1, i_2, \ldots, i_m$ be integers such that $m \geqq 1$, $0 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_m$. Let $S = S(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ be the cartesian product

$$(Z_{i_1} + \omega_{i_1}) \times (Z_{i_2} + \omega_{i_2}) \times \ldots \times (Z_{i_m} + \omega_{i_m})$$

in its usual topology. Let A be a subset of $Z_{i_1} \times Z_{i_2} \times \ldots \times Z_{i_m}$ such that $(\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_m}) \in \bar{A}$. Choose an integer r such that $1 \leqq r \leqq m$ and an ordinal $\alpha \in Z_{i_r}$. Then $\bar{A}$ contains a point $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ such that $\xi_s = \omega_{i_s}$ for $1 \leqq s \leqq m$, $s \neq r$ and $\alpha < \xi_r < \omega_{i_r}$.

Proof. The lemma being trivial for $m = 1$, we may assume its validity for $m - 1$. Suppose first $r < m$. Since $(\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_m}) \in \bar{A}$, for a given $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in Z_{i_1} \times Z_{i_2} \times \ldots \times Z_{i_m}$ the set A contains points $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ such that $\alpha_1 < \xi_1 < \omega_{i_1}, \ldots, \alpha_m < \xi_m < \omega_{i_m}$. The cardinal number of the set of all such points $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ being equal to $\aleph_m$, whence greater than the cardinal number of $Z_{i_1} \times \ldots \times Z_{i_{m-1}}$, the cardinal number of the set of our points will remain equal to $\aleph_m$ even if we restrict the first $m - 1$ coordinates to fixed, but conveniently chosen, values. Therefore, $\bar{A}$ contains points $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ such that $\alpha_s < \xi_s < \omega_{i_s}$ for $1 \leqq s \leqq m - 1$ and $\xi_m = \omega_{i_m}$. Now if B denotes the set of all $(\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}) \in Z_{i_1} \times \ldots \times Z_{i_{m-1}}$ such that $(\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}, \omega_{i_m}) \in \bar{A}$ we have clearly $(\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_{m-1}}) \in \bar{B}$ in the space $S(i_1, \ldots, i_{m-1})$. The lemma being true for $m - 1$, $\bar{B}$ contains a point $(\xi_1, \ldots, \xi_{m-1})$ such that $\xi_s = \omega_{i_s}$ for $1 \leqq s \leqq m - 1$, $s \neq r$ and $\alpha < \xi_r < \omega_{i_r}$; but then $(\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}, \omega_{i_m}) \in \bar{A}$. Secondly, let $r = m$. Choose $(\alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in Z_{i_2} \times \ldots \times Z_{i_m}$. By transfinite induction, we may construct a transfinite sequence (p_λ) of type ω_{i_1} of points $p_\lambda = (\xi_{\lambda_1}, \ldots, \xi_{\lambda_m}) \in A$ such that $\xi_{\lambda_1} < \xi_{\mu_1}, \ldots, \xi_{\lambda_m} < \xi_{\mu_m}$ for $\lambda < \mu < \omega_{i_1}$ and $\xi_{\lambda_2} > \alpha_2, \ldots, \xi_{\lambda_m} > \alpha_m$ for all λ's. The point $p = (\xi_1, \ldots, \xi_m) = \lim p_\lambda$ belongs to $\bar{A}$ and we have $\xi_1 = \omega_{i_1}$ and $\alpha_s < \xi_s < \omega_{i_s}$ for $2 \leqq s \leqq m$. Hence if B denotes the set of all $(\xi_2, \ldots, \xi_m) \in Z_{i_2} \times \ldots \times Z_{i_m}$ such that $(\omega_{i_1}, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \bar{A}$ we have $(\omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_m}) \in \bar{B}$ in the space $S(i_2, \ldots, i_m)$. The lemma being true for $m - 1$, $\bar{B}$ contains a point $(\xi_2, \ldots, \xi_m)$ such that $\xi_s = \omega_{i_s}$ for $2 \leqq s \leqq m - 1$ and $\alpha < \xi_m < \omega_{i_m}$; but then $(\omega_{i_1}, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \bar{A}$.

[2] This lemma is a fairly obvious generalization of a result of A. Tychonoff (Math. Annalen 102, 1930, see Behauptung I., on p. 553 and Behauptung III., on p. 555).

Example 5.[3] Let $n = 3, 4, 5, \ldots$. The space P_5 consists of all n-tuples $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ such that $\xi_i \in Z_i + \omega_i$ for $1 \leqq i \leqq n$ and $\xi_i = \omega_i$ for at least one i. We put $z = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$. The point $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in P_5 - z$ possesses the fundamental system of neighborhoods $V_\xi(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ $(\eta_i \in Z_i, \eta_i < \xi_i$ for $1 \leqq i \leqq n)$ consisting of all n-tuples $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \in P_5$ such that $\eta_i < \zeta_i \leqq \xi_i$ for $1 \leqq i \leqq n$. The point z possesses the fundamental system of neighborhoods $V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ $(\xi_i \in Z_i$ for $1 \leqq i \leqq n)$ consisting of z together with all points $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \in P_5$ such that $\eta_i > \xi_i$ for $1 \leqq i \leqq n$ and $\eta_i = \omega_i$ for one and only one value of i. Clearly P_5 is a Hausdorff space and z is the only irregular point of P_5. For $1 \leqq i \leqq n$, let Φ_i consist of all points $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in P_5 - z$ such that $\xi_i = \omega_i$. Then the sets $\Phi_i \subset \subset P_5 - z$ are relatively closed and we have $\prod_1^n \Phi_i = 0$, $\prod_1^n \overline{\Phi}_i = z$, whence $P_5 - z$ is not n-combinatorially imbedded in P_5. However, we shall show that this imbedding is $(n-1)$-combinatorial. First, let us put $S_i = S(j_1, \ldots, j_{n-1})$ (see the lemma above) the sequence $j_1, \ldots, j_{n-1}$ being obtained from the sequence $1, 2, \ldots, n$ by cancelling the term i. If f_i $(1 \leqq i \leqq n)$ denotes the cancelling of the i-the coordinate, then $f_i(\Phi_i + z) = S_i$ is $1-1$, though not topological; however, the partial transformation $f_i(\Phi_i) = S_i - z$ is a homeomorphism. Now let the sets $F_r \subset P_5 - z$ $(1 \leqq r \leqq n-1)$ be relatively closed and let $z \in \prod_1^{n-1} \overline{F}_r$. We have to show that $\prod_1^{n-1} F_r \neq 0$. Since $P_5 - z = \sum_1^n \Phi_i$, for each r $(1 \leqq r \leqq n-1)$ there must exist an i_r $(1 \leqq i_r \leqq n)$ such that $z \in \overline{F_r \Phi_{i_r}}$. Now this relation valid in the space P_5 evidently implies the analogous relation $z \in \overline{f_{i_r}(F_r \Phi'_{i_r})}$ in the space S_{i_r} where $\Phi'_{i_r} = \Phi_{i_r} - \sum_{j \neq i_r} \Phi_j$. Since r assumes only $n-1$ values, there exists an integer s such that $1 \leqq s \leqq n$ and $s \neq i_r$ for $1 \leqq \leqq r \leqq n-1$. Using the lemma and recalling that $f_{i_r}(\Phi_i) = S_{i_r} - z$ is a homeomorphism, we see that, for any given ordinal $\alpha \in Z_s$ and for any r $(1 \leqq r \leqq n-1)$, there exists a point $p = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \overline{F_r \Phi_{i_r}}$ such that $\xi_i = \omega_i$ for $1 \leqq i \leqq n$, $i \neq s$ and $\alpha < \xi < \omega_s$. Of course, we have $p \in F_r \Phi_{i_r}$ since the set $F_r \Phi_{i_r} \subset P_5 - z$ is relatively closed. By induction, we may now construct an infinite sequence of points $p_k = (\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, \ldots, \xi_{k_n})$ such that $\xi_{k_i} = \omega_i$ for $1 \leqq i \leqq n$, $i \neq s$ and all k's, $\xi_{1_s} < < \xi_{2_s} < \xi_{3_s} < \ldots < \omega_s$ and $p_k \in F_r \Phi_{i_r}$ for $1 \leqq r \leqq n-1$, $k \equiv r \bmod (n-1)$. There exists the limit point $p = \lim p_k$ and clearly $p \in \prod_1^{n-1} F_r$, whence $\prod_1^{n-1} F_r \neq 0$.

3. Let Q be any given topological space. We recall briefly the definition of Wallman's bicompact space $\omega Q \supset Q$. Points of $\omega Q - Q$ will be called *ideal points* and points of Q, *real points*. We have to define first the ideal points and secondly the topology of ωQ. An ideal point α is, by definition, a collection of subsets of Q (called the *coordinates of* α) having the following properties:

[3] This example (for $n = 3$) is due to M. Katětov.

(i) the elements of the collection are non vacuous closed subsets of Q,

(ii) the intersection of any finite number of elements of the collection belongs itself to the collection,

(iii) any closed subset of Q intersecting each element of the collection belongs itself to the collection,

(iv) the intersection of the whole collection is vacuous.

For any open subset G of Q, let G^* consist of all real points belonging to G and of all ideal points α such that there exists some coordinate $A \subset G$ of α. If G runs over the family of all open subsets of Q then G^* runs over an open basis of ωQ, thus defining the topology of ωQ. For any closed subset F of Q, the closure $\bar{F}$ of F in ωQ consists of all real points belonging to F and of all ideal points α such that F is a coordinate of α.

(3.1) *The imbedding of an arbitrary topological space Q in Wallman's bicompact space ωQ is both regular and combinatorial in the strong sense.*

Proof. We begin by proving that the imbedding is regular. Q is clearly dense in ωQ. Let x be any point (real or ideal) of ωQ and let Φ be a closed subset of ωQ not containing x. By (1.3) it suffices to indicate a closed subset F of Q such that $\Phi \subset \bar{F} \subset \subset \omega Q - x$. Since x belongs to the open subset $\omega Q - \Phi$ of ωQ, there exists an open subset G of Q such that $x \in G^* \subset \omega Q - \Phi$. Then $F = Q - G$ is a closed subset of Q. Since $x \in G^*$, we cannot have $x \in \bar{F}$. This is evident if x is real; if x is ideal, then $x \in G^*$, $x \in \bar{F}$ would mean that x has a coordinate $A \subset G$ as well as the coordinate F, which is impossible as $GF = 0$. It remains to show that $\alpha \in \bar{F}$ for any $\alpha \in \Phi$. For a real α this is a consequence of the evident relation $Q\Phi \subset Q - G = F$; if α is ideal, the inclusion $G^* \subset \omega Q - \Phi$ shows that, since $\alpha \in \Phi$, any coordinate of α meets $Q - - G = F$ so that F itself is a coordinate of α whence $\alpha \in \bar{F}$.

It remains to show that the imbedding is combinatorial in the strong sense. Let F_1 and F_2 be two closed subsets of Q and let $\alpha \in \bar{F}_1\bar{F}_2$; we have to prove that $\alpha \in \overline{F_1F_2}$. This being evident for a real α, let α be ideal. Then $\alpha \in \bar{F}_1$, $\alpha \in \bar{F}_2$ means that both F_1 and F_2 are coordinates of α so that F_1F_2 is also a coordinate of α whence $\alpha \in \overline{F_1F_2}$.

(3.2) *Let the space Q be both regularly and 2-combinatorially imbedded in the bicompact space P. Then there exists a homeomorphism $f(\omega Q) \subset P$ such that $f(x) = x$ for each $x \in Q$. If the imbedding is combinatorial, we have $f(\omega Q) = P$.*[4]

Proof. For any $X \subset Q$, let $\bar{X}$ denote the closure of X in the space ωQ and $\tilde{X}$, the closure in the space P. For $x \in Q$, let $f(x) = x$. We next define $f(\alpha)$ for an ideal point α of ωQ. Now α is, by definition, a collection of closed subsets of Q having properties (i) to (iv). Let α^0 denote the collection of all sets $\tilde{A}$, A running over α. By properties (i) and (ii), the intersection of a finite subcollection of α is never vacuous; the space P being bicompact, the intersection $\varphi(\alpha)$ of the whole collection α^0 is not

[4] We do not know whether $f(\omega Q) = P$ whenever the imbedding is 2-combinatorial.

vacuous either; by property (iv), $Q \,.\, \varphi(\alpha) = 0$. Hence $\varphi(\alpha)$ contains at least one point $\beta \in P - Q$. We have $\beta \in \tilde{A}$ for any $A \in \alpha$. Conversely, let F be a closed subset of Q such that $\beta \in \tilde{F}$. Then $\tilde{A}\tilde{F}$ contains β for any $A \in \alpha$. The imbedding of Q in P being 2-combinatorial, it follows that $AF \neq 0$ for each $A \in \alpha$, whence $F \in \alpha$ by property (iii). Hence the collection α consists exactly of those closed subsets A of Q for which the relation $\beta \in \tilde{A}$ holds true. Now by regularity of the imbedding of Q in P, the one-point closed subset (β) of P is the intersection of all such $\tilde{A}$'s. It follows that the set $\varphi(\alpha)$ consists of just the one point β and we may put $f(\alpha) = \beta$. The transformation $f(\omega Q) \subset \subset P$ so defined is clearly $1 - 1$ and $f(x) = x$ for each $x \in Q$. Let us put $f(\omega Q) = P_0$ so that $Q \subset P_0 \subset P$.

For any closed subset F of Q we must have $f(\bar{F}) = P_0 \,.\, \tilde{F}$. Suppose first that $\beta \in P_0 \,.\, \tilde{F}$; we have to prove that $\beta \in f(\bar{F})$. If $\beta \in Q$, then $\beta \in F \subset f(\bar{F})$; hence suppose $\beta \in P_0 - Q$. By definition of P_0, there exists an ideal point α of ωQ such that $\beta = f(\alpha)$; α consists of all closed subsets A of Q such that $\beta \in \tilde{A}$; since $\beta \in \tilde{F}$, we have $F \in \alpha$, whence $\alpha \in \bar{F}$ and $\beta = f(\alpha) \subset f(\bar{F})$. Conversely, let $\beta \in f(\bar{F})$ so that $\beta \in P_0$; we have to prove that $\beta \in \tilde{F}$. There exists an $\alpha \in \bar{F}$ such that $\beta = f(\alpha)$. If α is real, we have $\beta = \alpha \in F \subset f(\bar{F})$. If α is ideal, then $\alpha \in \bar{F}$ means $F \in \alpha$, whence $\beta = f(\alpha) \in \tilde{F}$.

Let C_0 be a closed subset of P_0. There exists a closed C of P such that $C_0 = P_0 \,.\, C$. The imbedding of Q in P being regular, there exists a family φ of closed subsets F of Q such that $C = \Pi \tilde{F}$, whence $C_0 = \Pi P_0 \,.\, \tilde{F}$, F running over φ. But $P_0 \,.\, \tilde{F} = f(\bar{F})$ and the transformation f being $1 - 1$, we have $C_0 = \Pi\, f(\bar{F}) = f(\Pi \bar{F})$. Hence each closed subset C_0 of P_0 has the form $C_0 = f(\Phi)$, Φ being closed in ωQ. Conversely, let Φ be closed in ωQ. By (3.1), the imbedding of Q in ωQ is regular. Hence there exists a family φ of closed subsets F of Q such that $\Phi = \Pi \bar{F}$. The transformation f being $1 - 1$, we have $C_0 = f(\Phi) = \Pi\, f(\bar{F}) = \Pi P_0 \,.\, \tilde{F} = P_0 \,.\, \Pi \tilde{F}$. The set C_0 is the intersection of P_0 and a closed subset of P; therefore, C_0 is closed in P_0. Consequently, the closed subsets of P_0 are precisely the sets $f(\Phi)$ with Φ closed in ωQ, which proves that the transformation f is topological.

Now suppose that the imbedding of Q in P is combinatorial and choose $\beta \in P$. We have to prove that $\beta \in f(\omega Q)$. This being evident for $\beta \in Q$, suppose $\beta \in P - Q$. The imbedding of Q in P being regular, there exists a family φ of closed subsets F of Q such that $\beta = \Pi \tilde{F}$ for $F \in \Phi$. Since $\beta \in P - Q$, we must have $\Pi F = 0$. Now for any finite subfamily $F_1, F_2, \ldots, F_n$ of Φ, we have $\beta \in \prod_1^n \tilde{F}_i$, whence $\prod_1^n F_i \neq 0$, the imbedding of Q in P being combinatorial. As the space ωQ is bicompact, there must exist a point $\alpha \in \Pi \bar{F}$ for $F \in \Phi$. Since $f(\bar{F}) = P_0 \tilde{F} \subset \tilde{F}$, we have $f(\alpha) \subset \Pi \tilde{F} = \beta$, whence $\beta = f(\alpha) \in f(\omega Q)$.

4. Two points a and b of a space P will be said to be *H-separated* if there exist two open sets G_1 and G_2 such that $a \in G_1$, $b \in G_2$, $G_1 G_2 = 0$. A Hausdorff space is then a space such that any two distinct points are H-separated. As was shown by Wallman (l. c.), the space ωQ is a Hausdorff space if and only if the space Q is

normal. We consider here the question of H-separability in ωQ of two real points, a real and an ideal point, and two ideal points. Clearly two H-separated points of a space P are H-separated in every subspace of P containing them.

For a Hausdorff space Q, two real points are always H-separated in ωQ. This is a consequence of the following trivial theorem.

(4.1) *If two points a and b are H-separated in a dense subspace Q of a space P, a and b are H-separated in P.*

Proof. There exist two open subsets H_1 and H_2 of Q such that $a \in H_1$, $b \in H_2$, $H_1 H_2 = 0$. The sets $F_1 = Q - H_1$ and $F_2 = Q - H_2$ are closed in Q and $a \in Q - F_1$, $b \in Q - F_2$, $F_1 + F_2 = Q$. Therefore $a \in P - \bar{F}_1$, $b \in P - \bar{F}_2$, $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = P$. The sets $G_1 = P - \bar{F}_1$ and $G_2 = P - \bar{F}_2$ are open in P and $a \in G_1$, $b \in G_2$, $G_1 G_2 = 0$.

(4.2) *A point $a \in Q$ is regular in ωQ if and only if it is regular in Q.*

Proof. If a is regular in ωQ then, of course, a is regular in $Q \subset \omega Q$ as well. Let a be regular in Q. If U is any neighborhood of a in ωQ, there exists a neighborhood G of a in Q such that $G^* \subset U$. Since a is regular in Q, there exists a neighborhood H of a in Q the closure of which in Q is contained in G. It is easy to see that H^* is a neighborhood of a in ωQ the closure of which is contained in G^*, whence in U.

(4.3) *If a is an irregular point of the bicompact space P, there exists a point $b \in P - a$ such that a and b are not H-separated.*

Proof. There exists a neighborhood U of a such that $\bar{V} - U \neq 0$ for every neighborhood V of a. If V_i $(1 \leqq i \leqq n)$ are neighborhoods of a, then $\prod_1^n V_i$ is also a neighborhood of a, whence

$$\prod_1^n (\bar{V}_i - U) \supset \overline{\prod_1^n V_i} - U \neq 0 .$$

The space being bicompact, there exists a point b such that $b \in \bar{V} - U$ for every neighborhood V of a. It is easy to see that a and b are not H-separated.

If the space Q is regular, we see from (4.2) that a real and an ideal point are always H-separated in ωQ. If Q is an irregular Hausdorff space, we see from (4.1) and (4.3) that a real and an ideal point are not always H-separated. If the regular space Q is not normal, then two ideal points cannot be always H-separated, since otherwise ωQ would be a Hausdorff space, which it is not.

Example 6. Let Q be an irregular Hausdorff space containing a finite subset K such that the subspace $Q - K$ is normal; e. g. $Q = P_1$, $K = z$ (see example 1 above). Then two different ideal points α and β are always H-separated in ωQ. For there exists a coordinate F_1 of α and a coordinate F_2 of β such that $F_1 F_2 = 0$; then

$F_1 - K$ is a coordinate of α, $F_2 - K$ is a coordinate of β, and $F_1 - K$ and $F_2 - K$ are disjoint closed subsets of the normal space $Q - K$. Hence there exist two open subsets G_1 and G_2 of $Q - K$ such that $F_1 - K \subset G_1$, $F_2 - K \subset G_2$, $G_1G_2 = 0$. Since $Q - K$ is open in Q, G_1 and G_2 are so also. Hence G_1^* is a neighborhood of α in ωQ, G_2^* is a neighborhood of β in ωQ, and $G_1^*G_2^* = 0$.