řádu n-tého jest 1, když n jest prvočíslo, nebo nula, když n není prvočíslo, jest iracionální. Totéž platí pro číslo, jehož cifra řádu n-tého jest 1 nebo 0, podle toho, zda n jest či není mocninou čísla dvě. Dokažte tato tvrzení! (Důkazy opírají se o periodicitu čísla racionálního.)

Kapitola II.

POSLOUPNOSTI ČÍSELNÉ.

4. O limitách posloupností. V předešlé kapitole definovali jsme posloupnost čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$; řekli jsme si, co rozumíme slovy *limita* posloupnosti a *konvergentní* posloupnost. Posloupnost má limitu A, když a jen když má*) definitívní úseky všech řádů, které definují reálné číslo A (limitu). Všimněme si, v jakém vztahu jsou členy posloupnosti k její limitě A. *Zhruba můžeme říci, že členy a_n s dosti vysokým indexem velmi málo se liší od limity A.* To vyplývá z té okolnosti, že všechny členy, které mají definitívní úseky řádu k-tého, liší se podle definice těchto úseků a limity od A nanejvýše o jednu jednotku řádu k-tého(10^{-k}). Vlastnost tu budou míti všechny členy a_n pro něž n jest větší, než určité číslo celé, kladné $N(k)$, závislé na k. Zvolím-li nyní kladné číslo ε libovolně malé, mohu vždy nalézti k takové, že bude 10^{-k} ještě menší než ε.

Z toho plyne, že prostá hodnota rozdílu $|a_n - A|$ jest menší než ε pro všechna n, která jsou větší než pevné číslo $N(k) = N(\varepsilon)$, závislé na k a tedy na ε. Proto říkáme, že členy posloupnosti se vzrůstajícím n blíží se ke své limitě. Také obráceně, platí-li nerovnina $| a_n - A | < \varepsilon$ pro *každé* ε, pokud $n > N(\varepsilon)$, můžeme tvrditi, že posloupnost má definitivní úseky každého řádu a že tedy má limitu. Neboť volím-li $\varepsilon = 10^{-k} (n > N(\varepsilon))$, jest a_n větší nebo menší než pevné číslo A nanejvýše o 10^{-k} a tedy má s číslem A nutně totožný nebo

*) Budeme užívati rčení (viz též odst. 7.)

B, když a jen když A

místo dvou vět

1) *B, když A.* 2) *non B, když non A.*

Na př. věta: »Číslo jest dělitelno třemi, když a jen když ciferný součet je dělitelný třemi« zastupuje dvě věty: »Číslo jest dělitelno třemi, když ciferný součet jest dělitelný třemi« a »Číslo není dělitelno třemi, když ciferný součet není dělitelný třemi«.

téměř totožný úsek řádu $(k-1)$-ho. Jest zřejmo, že úseky ty budou totožné, má-li A na k-tém místě cifru jinou než 0 nebo 9 a po případě téměř totožné, má-li tam A jednu z obou jmenovaných cifer. Z toho plyne věta, která může sloužiti za druhou *definici* limity:

Posloupnost má limitu A, když a jen když pro každé libovolně zvolené kladné ε jest splněna nerovnina

$$|a_n - A| < \varepsilon \quad \text{čili} \quad A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

pro všechna $n > N(\varepsilon)$.

Věty této užíváme k rozhodnutí, zda určité číslo A jest či není limitou dané posloupnosti, hlavně tenkráte, když členy posloupnosti nejsou dány ve tvaru čísel desetinných a když tedy nemůžeme použíti původní definice limity. Tak na př. posloupnost $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots$ má limitu 1, neboť rozdíl $a_n - 1 = (n+1)/n - 1 = 1/n$ jest menší než ε pro všechna n, která jsou větší než $1/\varepsilon$.

Jako zvláštní případ jest třeba pamatovati, že posloupnost, jejíž členy od nějakého a_n počínaje jsou všechny rovny témuž číslu b, má podle definice limitu rovnou b.

Limita jest číslo, které udává vlastnost posloupnosti jakožto celku. To jest nejlépe patrno z toho, že limita se nezmění, když několik libovolně zvolených členů posloupnosti nahradíme jinými, libovolnými čísly nebo je prostě vynecháme.

Názornou představu o posloupnosti s limitou A získáme tímto fysikálním přirovnáním. Považujme členy posloupnosti $a_1, a_2, a_3 \ldots$ za posice za sebou jdoucí, které zaujímá bod m, pohybující se na ose x-ové. Bod ten blíží se k posici A. Toto »blížení se« k bodu A může se díti velmi rozmanitými způsoby. Tak na př. v posloupnosti $1/1, 1/2, 1/3, \ldots 1/n \ldots$ blížíme se k limitě $A = 0$ stále víc a více a stále z prava, to jest čísly většími než A. V posloupnosti $3/1, 3/2, 7/3, 7/4 \ldots [2n + (-1)^{n+1}] : n, \ldots$ blížíme se k limitě $A = 2$ stále víc a více, avšak střídavě z prava a z leva. Jest to jakýsi oscilační pohyb kolem středu A s největším výkyvem stále se zmenšujícím. Ve fysice nazývá se takový pohyb tlumený. Konečně v posloupnosti $(1 + 1/2^1)$, $(1 + 1/10^2)$, $(1 + 1/2^3)$, $(1 + 1/10^4)$, $(1 + 1/2^5)$ atd., blížíme se k limitě $A = 1$ opět oscilačním pohybem, jehož největší výkyvy nezmenšují se sice stále $(1/2,$

1/100, 1/8, 1/1000...), avšak pohyb má přes to charakter *tlumený*, který definujeme znakem: Po určité řadě výkyvů již žádný další výkyv nepřestoupí předem dané, libovolně malé kladné číslo ε.

Posloupnost $1^k, 2^k, 3^k, \ldots n^k, \ldots$ při celistvém kladném k a posloupnost $-1, 7, 5, 21, 19, \ldots n^2 + (-1)^n (n+1), \ldots$ tvoří příklady posloupností, které nemají limity. Jsou však pozoruhodné pro tuto vlastnost:

Ať zvolím kladné číslo M jakkoli veliké, vždy mohu nalézti člen posloupnosti, takže nejen on, ale i všechny další členy posloupnosti jsou větší než M.

Místo tohoto souvětí říkáme stručně o každé posloupnosti toho druhu, že členy její vzrůstají do nekonečna kladnými čísly a označujeme vlastnost tu symbolem

$$a_n \to \infty, \text{ nebo také } a_n \to +\infty,$$

který čteme: a_n se blíží k (plus) nekonečnu. Jest třeba zdůrazniti, že slovo nekonečno neznačí *číslo*, nýbrž pouhý symbol pro dosti komplikovaný fakt, týkající se posloupností. Dále jest dobře všimnouti si toho, že členy posloupnosti takového druhu musí sice konečně vzrůstati nad každé číslo M, že však není nutno, aby každý následující byl větší než předcházející. O tom svědčí příklad 2.

Obdobně užíváme symbolu $a_n \to -\infty$ při posloupnostech takového druhu, jako na př. $a_n = -n^3$.

Posloupnosti s limitou mají některé důležité vlastnosti, jichž si ihned povšimneme.

a) Má-li posloupnost limitu A, jest oboustranně ohraničená, to znamená, že lze všechny její členy uzavříti do intervalu $< A - d, A + d >$.

Volme $\varepsilon = 1$ a vyhledejme takové N, aby bylo $|a_n - A| < 1$ pro $n > N$. Nerovnost napsaná má ten význam, že všechna a s indexem $n > N$ jsou uzavřena v intervalu $< A - 1, A + 1 >$. Mimo interval ten leží jen prvních N členů posloupnosti, které vhodným rozšířením intervalu lze do něho také zahrnouti.

b) Každá nová posloupnost, vybraná z členů dané posloupnosti mající limitu A, má rovněž limitu A.

Seřaďme členy vybrané posloupnosti vzestupně podle indexů $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3} \ldots a_{n_q}, \ldots$ kdež tedy $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ Původní posloupnost má limitu A, to jest ke každému ε lze nalézti $N(\varepsilon)$ takže $|a_n - A| < \varepsilon$ pro všechna $n > N(\varepsilon)$. Jestliže tedy zvolím q tak veliké, že $n_q > N(\varepsilon)$, což nastane jistě pro všechna q větší než nějaké $Q(\varepsilon)$, bude $|a_{n_q} - A| < \varepsilon$ pro všechna $q > Q(\varepsilon)$ a tedy $\lim\limits_{q \to \infty} a_{n_q} = A$.

c) Jestliže posloupnost $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n \ldots$ má limitu rovnou nule a je-li k číslo reálné, o němž víme, že jest menši než kterékoli ε_n

$$k < \varepsilon_n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (c)$$

pak jest nutně $k \leq 0$.

Kdyby totiž k bylo kladné, bylo by zřejmě možno nalézti mezi čísly ε_n takové, které by bylo menší než k. To však by odporovalo předpokladu (c) a nemůže tedy býti k kladné.

d) Uvedeme ještě několik vět, týkajících se *dvou* posloupností. Nechť jest *$\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$*. Utvoříme-li nové posloupnosti sčítáním, odčítáním, násobením nebo dělením stejnolehlých členů, daných posloupností, obdržíme posloupnosti, které rovněž mají limitu, a sice

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b.$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \,.\, b_n) = \lim a_n \,.\, \lim b_n = a \,.\, b.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b} \text{ pokud } b \neq 0.$$

Dokážeme poslední z napsaných vztahů. Zvolme číslo ε menší než $|b| : 2$ a vyhledejme N tak, aby $|a_n - a| < \varepsilon$, ale také $|b_n - b| < \varepsilon$, pokud jest $n > N$. Pak je

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a_n\, b - b_n\, a}{b\, b_n} \right| = \left| \frac{(a_n - a)\, b - (b_n - b)\, a}{b\, b_n} \right|.$$

Protože však $|b_n - b| < \dfrac{|b|}{2}$ bude $|b_n| > \dfrac{|b|}{2}$ a tedy

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| < 2 \frac{|a_n - a| \,.\, |b| + |b_n - b| \,.\, |a|}{|b|^2} \leqq 2\varepsilon \frac{|b| + |a|}{|b|^2}$$

pokud $n > N$.

Zvolíme-li nyní libovolně malé η, je vždy $\left| \dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b} \right| < \eta$, pokud je ε voleno tak, že $2\varepsilon(|b| + |a|) : |b^2| < \eta$. a $\varepsilon < \left| \dfrac{b}{2} \right|$

Jest tedy podle definice $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, když ovšem $b \neq 0$. Zcela stejně dokáží se věty, vztahující se k součtu nebo součinu limit.

e) Nechť posloupnosti $a_1, a_2, a_3 \ldots, b_1, b_2, b_3 \ldots$ mají limity. Jestliže pro všechna n od určitého počínaje jest

$$a_n \geqq b_n \text{ pak také } \lim a_n \geqq \lim b_n.$$

Abychom větu dokázali, položme

$$a_n = a + \varepsilon_n,\ b_n = b + \eta_n,$$

a uvažme, že podle věty předešlé jest $\lim \varepsilon_n = \lim (a_n - a) = \lim a_n - a = a - a = 0$ a podobně $\lim \eta_n = 0$. Podle předpokladu jest od určitého n počínaje $a + \varepsilon_n \geqq b + \eta_n$ čili $a - b \geqq \eta_n - \varepsilon_n$. Klademe-li ve větě (*c*) $k = b - a$ a $\varepsilon_n - \eta_n$ místo ε_n obdržíme $(b - a) \leqq 0$ čili $a \geqq b$.

Cvičení. 1. Jakou vlastnost má aritmetická posloupnost $a_1 = a$, $a_2 = a + d$, $a_3 = a + 2d, \ldots a_n = a + (n-1)d, \ldots$ pro *kladné d*, pro záporné d a pro $d = 0$! ($a_n \rightarrow +\infty$, $a_n \rightarrow -\infty$, $\lim a_n = a$).

2. Jakou vlastnost má geometrická posloupnost $a_1 = a \,.\, q$, $a_2 = aq^2, \ldots a_n = aq^n \ldots$ pro $a > 0$, $0 \leqq q < 1$, pro $0 > q > -1$, pro $q = 1$, pro $q > 1$. ($\lim a_n = 0$, $\lim a_n = 0$, $\lim a_n = a$, $a_n \rightarrow +\infty$ nebo $a_n \rightarrow -\infty$).

3. Jsou-li $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ úseky iracionálního čísla a, jest $\lim a_n = a$!

4. Určete limity posloupností $(n \rightarrow \infty)$: $a_n = \dfrac{3n^2 + 2n + 5}{n^2}$, $a_n = \dfrac{an^2 + bn + c}{dn^2 + e}$ (dělte čitatele i jmenovatele n^2), $a_n = \dfrac{\sin n\alpha}{n}$, $a_n = q^n . \cos n\alpha$ ($|q| < 1$) (uvažte, že *sin* a *cos* mají prostou hodnotu menší než jedna nebo rovnou jedné).

5. Rozhodněte, pro které hodnoty čísla x mají limitu posloupnosti

$a_n = x : n$, $a_n = x . n$, $a_n = 1 : nx$, $a_n = x^n (1 - x)^n$, $a_n = (x^n + 1) : (x^n - 1)$, $a_n = (\cos x)^n$, $a_n = \sin nx$, $a_n = x^n . \sin nx$.

6. Počet dní v roce N po Kr. jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 365 + \left|\cos \frac{2NR}{4}\right|^n - \left|\cos \frac{2NR}{100}\right|^n + \left|\cos \frac{2NR}{400}\right|^n \right\};\ R = 90^\circ,\ N \geqq 1582.$$

5. Posloupnosti monotoní. Nikoliv každá posloupnost má limitu. V příkladech dosud uvažovaných mohli jsme vždy nějakým jednoduchým úsudkem zjistiti existenci i velikost, jindy zase neexistenci limity. To však není vždy možno, jak o tom svědčí na př. posloupnost $\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \ldots$ Jest tedy nutno vyhledati taková pravidla, která by umožnila zjistiti, zda daná posloupnost má limitu čili nic. Nejdříve odvodíme větu, týkající se zvláštního druhu posloupností:

Každá shora ohraničená posloupnost čísel neklesajících má limitu.

Vysvětleme nejdříve slova, jichž je v této větě užito. Posloupnost $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n, \ldots$ nazývá se shora ohraničenou, je-li možno nalézti takové číslo M, že každý člen posloupnosti jest menší než M: tedy $a_n < M$ pro *každé* n. Posloupnost jest *neklesající*, to jest, členy posloupnosti jsou neklesající, jestliže každý její člen jest buď větší než člen předcházející nebo jest mu roven, tedy

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots . \leqq a_n \leqq \ldots .$$

Dokážeme větu nejdříve za předpokladu, že všechny členy posloupnosti jsou *kladné*. Každý člen posloupnosti jest reálné číslo, které má určitý ciferný obraz. Čísla s periodou 9 nahraďme čísly ekvivalentními s periodou 0. Sledujme, jak se mohou měniti tyto ciferné obrazy, když postupujeme od a_1 k a_2, pak k a_3 atd. Tvrdíme: Existuje ke každému celistvému s takové číslo celistvé k_s že všechna čísla a_n s indexem $n \geqq k_s$ shodují se ve všech cifrách řádu vyššího než s. Názorněji můžeme také říci: Od jistého a_n počínaje, všechna další mají totožné úseky řádu s-tého.

Důkaz provedeme nepřímo. Mysleme si ve všech číslech $a_1, a_2, a_3 \ldots$ odděleny úseky řádu s-tého: $a_1^s, a_2^s, a_3^s \ldots$ a přirovnávejme při přechodu od a_{k-1}^s k a_k^s velikost těchto úseků v jednotkách řádu s-tého. Počet jednotek těch buď zůstane při přechodu nezměněn, nebo se o jednu či více jednotek *zvětší*. Mezi těmi přechody, při nichž nastává zvětšení, musí býti jeden *poslední*. Kdyby totiž tomu tak nebylo, musily by za *každým* a_k^s následovati úseky s větším počtem jednotek řádu s-tého, nežli má a_k^s. To by mělo ten následek, že při postupu k indexům vyšším a vyšším musili bychom konečně dojíti k úsekům a_n^s, které by byly větší než číslo M, což jest ve sporu s předpokladem, že číslo M jest horní hranicí posloupnosti. Tedy *poslední* zvětšený člen existuje a jeho index jest pak hledané číslo k_s. Důkaz právě provedený platí pro každé celistvé číslo s. Výsledek dosavadní úvahy shrneme do této věty: Sledujeme-li členy posloupnosti $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n \ldots$ shledáme, že má definitivní úseky každého řádu. Těmito definitivními úseky jest jednoznačně definována limita posloupnosti A.

Poznamenejme ještě, že žádné a_n nemůže býti větší než A. Neboť kdyby na př. bylo $a_{1000} - A = 10^{-6}$, pak by *všechna*

a_n s indexem větším než 1000 lišila se od A nejméně o 10^{-6} a tedy by A nemohlo býti limitou čísel a_n.

Při důkazu jsme předpokládali, že všechny členy posloupnosti jsou kladné. Jest zřejmo, že důkaz platí beze změny i tenkráte, když několik počátečních členů jest záporných, nebo rovno nule, další pak kladné. Jsou-li všechny členy posloupnosti záporné a je-li $(-M)$ jejich dolní hranice, bude míti nová posloupnost $b_n = M + a_n$ všechny členy kladné neklesající a tedy bude míti limitu B. Podle věty d) odst. 4, jest potom

$$\lim a_n = \lim (b_n - M) = \lim b_n - M = B - M.$$

Podobně dokážeme, že posloupnost *nestoupající* a ohraničená má limitu. V posloupnosti takové platí vztahy $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \ldots$ Nová posloupnost $b_n = -1 \,.\, a_n$ jest neklesající a má tedy limitu na př. B. Z toho plyne, že také $a_n = b_n \,.\, (-1)$ má limitu $B \,.\, (-1) = -B$.

Posloupnosti nestoupající a posloupnosti neklesající nazýváme společným názvem *posloupnosti monotonní*. Výsledkem celé úvahy jest tedy věta základní důležitosti:

Ohraničená posloupnost monotonní má vždy limitu.

6. Odmocnina a obecná mocnina čísla reálného kladného. Abychom mohli počítati čísly reálnými, musíme ještě definovati odmocninu a obecnou mocninu čísla reálného. Nechť a jest dané kladné číslo reálné, n celistvé číslo kladné. Rovnice

$$x^n = a$$

jest jen někdy řešitelná racionálním číslem x. V tom případě nazýváme x n-tou odmocninou z čísla a, a píšeme $x = \sqrt[n]{a}$ nebo $x = a^{\frac{1}{n}}$. Pro jiná a nemá rovnice racionální kořen. Můžeme však nalézti posloupnost desetinných zlomků o konečném počtu cifer $x_0, x_1, x_2, \ldots x_k \ldots$ neklesajících, které mají následující vlastnosti: x_k jest největší desetinné číslo o k cifrách za desetinnou tečkou té vlastnosti, že rozdíl $x_k^n - a = -\varepsilon_k$ jest záporný (to jest, každé číslo o k cifrách, které jest větší než x_k dává rozdíl kladný). Takové číslo lze vždy nalézti ke každému indexu k. Neboť a leží jistě mezi dvěma n-tými mocninami celistvých čísel, to jest $(r+1)^n > a > r^n$. Potom volíme $x_0 = r$. Dále jest jistě možno nalézti cifru r_1, takže

$(r \cdot r_1 + 1)^n > a > (r \cdot r_1)^n$, kdež $0 \leqq r_1 \leqq 9$*). Potom jest $x_1 = r \cdot r_1$ atd. Patrně jest $x_k \geqq x_{k-1}$. Při tom se x_k shoduje s x_{k-1} až po $(k-1)$vé desetinné místo inklusive. Mimo to jest $x_k^n < a < (r+1)^n$ a tedy $x_k < r+1$. Posloupnost má tedy limitu $\lim x_k = x$. Při tom shoduje se x_k s číslem x až po k-té desetinné místo inklusive. Číslo x nazýváme n-tou odmocninou z čísla a a píšeme

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Důvod pro toto označení spočívá v tom, že $a - x_k^n = \varepsilon_k$ má limitu rovnou nule, když $k \to \infty$, jak vyplývá z těchto vztahů

$$a - x_k^n = \varepsilon_k > 0 \quad , \quad (x_k + 10^{-k})^n - a > 0.$$

a tedy sečtením

$(x_k + 10^{-k})^n - x_k^n > \varepsilon_k$ čili $\varepsilon_k < 10^{-k}\{x_k^{n-1} + x_k^{n-2}(x_k + 10^{-k}) + \ldots + (x_k + 10^{-k})^{n-1}\}$. Dále víme, že $x_k < r+1 < r+2$ a také $x_k + 0{\cdot}1 < r+2$. Z toho plyne $0 < \varepsilon_k < 10^{-k} \,.\, n \,.\, (r+2)^{n-1}$ a protože n a r nezávisí na k, $\lim \varepsilon_k = 0$ a tedy $a - x^n = 0$.

Toto řešení jest jediné. Neboť kdyby nějaké jiné reálné číslo kladné y hovělo rovnici $a = y^n$, bylo by také $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2} \,.\, y + \ldots + y^{n-1}) = 0$ a tedy, protože druhá závorka jest kladná, $x - y = 0$.

Z toho plyne ihned vztah

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{nm}},$$

neboť všechna tato čísla hovějí rovnici

$$x^{nm} = a.$$

Dále definujeme racionální mocninu vztahem

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Z toho plyne

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)^n = \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)^m = a^m \text{ a tedy } a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Mimo to je

$$a^{\frac{mk}{nk}} = \left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{mk} = \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{k}}\right)^{km} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}.$$

*) Je-li $r_1 = 9$, rozumíme znakem $r \cdot r_1 + 1$ číslo $r+1$.

Užitím těchto vět dokáže se obecně, značí-li r_1 a r_2 dvě libovolná racionální čísla, že

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2},\ (a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2},\ (a \cdot b)^{r_1} = a^{r_1} \cdot b^{r_1}.$$

Je-li číslo $a > 1$, jest také $x = a^{\frac{1}{n}} > 1$. Z toho plyne: Jestliže $r_1 > r_2$, $a > 1$, je také $a^{r_1} > a^{r_2}$.

Nyní můžeme definovati mocninu $y = a^x$ reálného čísla $a > 1$, jehož exponent x jest číslo iracionálné. Úseky čísla x jsou racionální čísla $x_0, x_1, x_2 \ldots$, která mají limitu x. Potom také posloupnost

$$y_0 = a^{x_0},\ y_1 = a^{x_1},\ y_2 = a^{x_2} \ldots$$

má limitu, neboť $a^{x_k} = a^{x_{k-1}} \cdot a^{x_k - x_{k-1}}$, $x_k - x_{k-1} \geqq 0$ a tedy $a^{x_k - x_{k-1}} \geqq 1$. Z toho $y_k \geqq y_{k-1}$. Mimo to jest $y_k < a^{x_0+1}$ a posloupnost čísel $y_0, y_1, y_2 \ldots$ má tedy limitu y, která právě definuje mocninu a^x.

Při záporném x budeme, jako u racionálních exponentů, považovati výraz a^x za číslo $1 : a^{-x}$. Je-li $a = 1$, klademe $1^x = 1$, je-li $a < 1$, definujeme

$$(1 : a^x) = (1 : a)^x \text{ a tedy } a^x = 1 : \left(\frac{1}{a}\right)^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}.$$

O těchto obecných mocninách platí opět věty

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y},\ (a^x)^y = a^{xy},\ (ab)^x = a^x \cdot b^x.$$

Připomeňme ještě, že v rovnici $y = a^x$ přísluší k většímu x vždy větší y, pokud ovšem $a > 1$.

Příklad. 1. Nechť $a > 1$. Dokážeme, že $\lim\limits_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. Posloupnost $a^{\frac{1}{1}}, a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}} \ldots$ jest stále ubývající, zdola ohraničená $(a^{\frac{1}{n}} \geqq 1)$. Má tedy limitu A. Posloupnost z původní vybraná $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{6}} \ldots$ má tedy touž limitu (odst. 4b) $\lim\limits_{n \to \infty} a^{\frac{1}{2n}} = A$. Z toho však plyne dále

$$\lim a^{\frac{1}{n}} = \lim a^{\frac{1}{2n}} \cdot a^{\frac{1}{2n}} = \lim a^{\frac{1}{2n}} \cdot \lim a^{\frac{1}{2n}},\ \text{čili } A = A^2.$$

Rovnici té hoví jen čísla $A = 0$, nebo $A = 1$. Prvá možnost odpadá, neboť $\left| a^{\frac{1}{n}} - 0 \right|$ jest stále větší než 1 a zbývá tedy jen možnost $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. Důkaz lze provésti také jinak. Pro dvě reálná čísla a, b platí vždy $(a^n - b^n) = (a-b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}.b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1})$ a tedy $(a - 1) = \left\{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1^n\right\} = \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)\left\{a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}} + \ldots + 1\right\}$. Jest tedy $\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = (a-1) : \{\}$; protože pak $a^{\frac{n-k}{n}} > 1$, bude i $0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < (a-1) : n$.

Z toho plyne podle věty e) z odst. 4 jednak $\lim a^{\frac{1}{n}} - 1 \geqq 0$ a za druhé $\lim a^{\frac{1}{n}} - 1 \leqq 0$, což oboje může býti, jen když $\lim a^{\frac{1}{n}} - 1 = 0$.

Příklad 2. Posloupnost daná obecným členem $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest stoupající a má limitu touž, jako posloupnost s obecným členem $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, která jest *klesající*. | K důkazu toho důležitého poznatku užijeme nerovnosti *(Bernoulli-ho)* $(1+p)^k > 1 + kp$, kdež p jest reálné číslo větší než -1 různé od nuly a k číslo celistvé > 1. Nerovnost platí jistě pro $k = 2$, neboť $(1+p)^2 = 1 + 2p + p^2 > 1 + 2p$ a to proto, že p^2 jest kladné. Násobíme-li poslední nerovnost na obou stranách kladným číslem $(1 + p)$, obdržíme $(1+p)^3 > 1 + 3p + 2p^2$ a protože $2p^2$ jest kladné, $(1+p)^3 > 1 + 3p$. Jest tedy velmi pravděpodobno, že dalším násobením nerovniny dostaneme hledaný vztah pro $k = 4$ atd. Že jest tomu vskutku tak, vyplývá z následující úvahy (*obecná indukce*). Dejme tomu, že vztah $(1+p)^k > 1 + kp$ jest dokázán pro určité číslo k. Násobme obě strany nerovnosti kladným číslem $(1 + p)$. Obdržíme $(1+p)^{k+1} > 1 + (k+1)\,p + kp^2$, a tedy $(1+p)^{k+1} > 1 + (k+1)\,p$. Vztah jest tedy v platnosti i pro číslo $(k + 1)$. Protože pak platí pro $k = 2$, jest jeho platnost zaručena pro každé celistvé kladné k. | Podle B nerovnosti pro $n \geqq 2$ jest $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$. Násobíme-li obě strany číslem kladným $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$ obdržíme po jednoduché úpravě $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$ čili $a_n > a_{n-1}$

Podobně jest podle B. $\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n}$.

Násobíme-li nerovnost číslem $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ obdržíme $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n >$ $> \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ čili $b_{n-1} > b_n$.

Mimo to jest $b_n > 1$ a tedy posloupnost ta jest klesající a zdola ohraničená. Má tedy limitu, která od doby Euler-ovy označuje se znakem e. Dále jest $a_n < b_n < b_1$ a tedy posloupnost stoupající $a_1, a_2, a_3, \ldots$ jest shora ohraničená a tedy konvergentní. Její limita jest identická s číslem e, neboť $e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right).\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)$ $.\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1.\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Numerický odhad čísla e můžeme nyní provésti s libovolnou přesností na základě vztahu $a_m < e < b_n$, kdež m, n jsou libovolná celistvá a kladná čísla. Tak na př. pro $m = 1$, $n = 5$ jest $2 < e < (6:5)^6 < 3$; přesnější hodnotu pro číslo e vypočteme později jinou metodou.

Příklad 3. Dokážeme, že $\lim n^{\frac{1}{n}} = 1$. Podle předešlého příkladu jest $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ a tedy tím spíše $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$, když volím $n > 3$. Z toho plyne $n^{\frac{1}{n}} > 1 + \frac{1}{n}$, $(n+1) < n^{1+\frac{1}{n}}$ a tedy $(n+1)^{\frac{1}{n+1}} < n^{\frac{1}{n}}$. To však znamená, že pro $n > 3$ poposloupnost jest monotoní a při tom ohraničená ($n^{\frac{1}{n}} > 1$). Má tedy limitu A. Limita tato jest identická s limitou kterékoliv posloupnosti vybrané z původní. Vybeřme ji tak, že z členů $n^{\frac{1}{n}}$ podržíme jen ty, v nichž $n = 2^{2^k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Čtenář si snadno spočte, že členy této nové posloupnosti jsou $2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{32}}, \ldots$. Avšak tato posloupnost jest obsažena mezi čísly $2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{5}}, \ldots$, která podle prvního příkladu mají limitu rovnou *jedné*. Tedy také $\lim n^{\frac{1}{n}} = 1$.

7. Podmínky nutné a postačující. Dříve než budeme jednati o posloupnostech obecných, vysvětlíme logický význam některých vět, jichž se při důkazech matematických často užívá.

Budiž *A* nějaké tvrzení a *B* jiné tvrzení. Řeknu-li:

1*a*) *B jest platné, když (jestliže) platí A*

jest tím naznačeno, že *vždy* platí *B*, *kdykoliv* platí *A*, z čehož ovšem plyne důsledek, že neplatí *A*, kdykoliv neplatí *B*. Označme opak tvrzení *A* znakem (*non A*). Větu 1*a*) mohu pak nahraditi větou:

1*b*) (*Non A*) *jest platné, když platí* (*non B*).

Místo věty 1*a*) říkáme také z důvodů již vytčených:

1*c*) *A jest postačující podmínka pro B*,

a místo věty 1*b* říkáme:

1*d*) *B jest nutná podmínka pro A*.

Všechna tato rčení 1*a*), 1*b*), 1*c*), 1*d*) jsou ekvivalentní, to jest, z jednoho z nich plynou všechna ostatní jako důsledky.

Příklad 1. Tvrzení *A*: Číslo celistvé jest dělitelno devíti. Tvrzení *B*: Ciferný součet jest dělitelný třemi. Věty ekvivalentní:

1*a*) Ciferný součet jest dělitelný třemi, když číslo jest dělitelno devíti.

1*b*) Číslo není dělitelno devíti, když cif. s. není dělitelný třemi.

1*c*) Dělitelnost čísla devíti jest postačující podmínka pro dělitelnost cif. součtu třemi.

1*d*) Dělitelnost cif. součtu třemi jest nutná podmínka pro dělitelnost čísla devíti.

Příklad 2. A: Trojúhelník jest rovnoúhlý. *B:* Trojúhelník jest rovnostranný.

1*a*) Trojúhelník jest rovnostranný, když jest rovnoúhlý.

1*b*) Trojúhelník není rovnoúhlý, když není rovnostranný.

1*c*) Rovnoúhlost trojúhelníka jest postačující podmínka pro rovnostrannost.

1*d*) Rovnostrannost jest nutná podmínka pro rovnoúhlost.

Příklad druhý má tu vlastnost, že mimo větu: »Trojúhelník jest rovnostranný, když jest rovnoúhlý«, platí také věta stejně tvořená s opačnými tvrzeními: »Trojúhelník není rovnostranný, když není rovnoúhlý«. Tato poslední věta jest *nové* tvrzení, které se v planimetrii dokazuje a které není pouhým logickým ekvivalentem věty prvé, jak zřejmě vyplývá z příkladu prvého, neboť *nelze* říci: »Ciferný součet není dělitelný třemi, když číslo není dělitelno devíti!« Příklad druhý můžeme obecně vyjádřiti následujícím schématem: Nechť jsou správné věty:

$$2a) \begin{cases} B \textit{ jest, když jest } A, \\ (non\, B) \textit{ jest, když jest } (non\, A). \end{cases}$$

Místo těchto dvou vět budeme psáti, jak již jsme to zavedli v odst. 4.,

2b) B jest, když a jen když jest A.

Jest zřejmo, že můžeme také místo vět *2a*) říci:

2c) A jest nutná a postačující podmínka pro B,

při čemž se opíráme o terminologii zavedenou na počátku tohoto odst. Věty *2a, 2b, 2c* jsou tedy úplně ekvivalentní a naznačují všechny, že tvrzení *A* a tvrzení *B* se mohou navzájem zastupovati.

Důkaz o tom, že *A* jest nutná a postačující podmínka pro *B*, provádí se pravidelně tím způsobem, že se dokáže: »*B* jest, když jest *A*«, ale také »*A* jest, když jest *B*«.

Cvičení. Odůvodněte blíže tato tvrzení a převeďte je na jiná ekvivalentní:

1. Nutná podmínka pro to, aby čtyrúhelník byl čtverec jest, aby úhly jeho byly pravé, postačující podmínka jest, aby úhly byly pravé a současně, aby všechny strany byly dlouhé 4 *cm*. Nutná i postačující podmínka jest, aby úhly byly pravé a strany byly sobě rovny.

2. Číslo celé jest dělitelno šesti, když a jen když jest sudé a ciferný součet jest dělitelný třemi. (Udejte jiné podmínky jenom nutné nebo jenom postačující pro dělitelnost čísla šesti.)

3. »Postačující podmínka pro to, aby posloupnost, jejíž všechny členy leží v daném intervalu, měla limitu, jest její monotonost«. »Nutná podmínka pro to, aby posloupnost měla limitu, jest její oboustranná ohraničenost (to jest všechny členy v nějakém intervalu)«. Tato podmínka není postačující. »Monotoní posloupnost má limitu, když a jen když jest z obou stran ohraničena«.

Sestrojte numerické příklady ke každé z těchto tří vět.

4. Nutná a postačující podmínka pro to, aby posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ měla limitu, jest: Eksistuje reálné číslo A takové, že pro každé kladné ε jest splněna nerovnost $|a_n - A| < \varepsilon$ pro všechna $n > N(\varepsilon)$ (viz počátek odst. 4).

8. Obecné posloupnosti. Limes superior a inferior. V odstavci druhém jsme definovali, kdy posloupnost má limitu. Tato definice poslouží nám k skutečnému rozhodnutí, jen když známe členy posloupnosti ve tvaru zlomků desetinných.

Tomu není vždy tak. Proto odvodíme jiné podmínky pro posloupnosti konvergentní.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ *měla limitu, jest tato:*

Lze definovati dvě monotoní posloupnosti

$$b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots\ldots b_n \leqq \ldots\ldots,$$

$$c_1 \geqq c_2 \geqq \ldots\ldots c_n \geqq \ldots\ldots,$$

které mají touž limitu a to tak, že

$$b_n \leqq a_n \leqq c_n \ldots\ldots \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots.$$

Tím, že podmínky jsou nutné, chceme říci toto: Kdykoliv nějaká posloupnost má limitu na př. A, pak vždy lze sestrojiti dvě posloupnosti b_n a c_n shora uvedených vlastností. Důkaz jest snadný. Nechť jest tedy $\lim a_n = A$. To znamená

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \quad \text{pro} \quad n > N(\varepsilon),$$

ať ε jest zvoleno jakkoliv malé. Dosazujme za ε postupně čísla stále menší a menší, která mají limitu rovnou nule. Z příslušných čísel $A - \varepsilon$ mohu utvořiti posloupnost b_n a z čísel $A + \varepsilon$ posloupnost c žádaných vlastností.*)

Tím, že podmínky jsou postačující, chceme říci toto: Jestliže jsou známy posloupnosti b_n a c_n, které mají vlastnosti shora vytčené, pak také posloupnost a_n má limitu. Důkaz zní takto: Zvolím-li ε libovolně, mohu nalézti $N(\varepsilon)$, takže platí současně

$$A - b_n < \varepsilon, \quad c_n - A < \varepsilon \quad \text{pro všechna } n > N(\varepsilon).$$

To však znamená, že b_n jest obsaženo v intervalu $\langle A - \varepsilon, A\rangle$ a c_n v intervalu $\langle A, A + \varepsilon\rangle$. Protože a_n leží mezi b_n a c_n, je nutně

$$|a_n - A| < \varepsilon \quad \text{pro } n > N(\varepsilon).$$

Protože vztah tento platí pro *každé* ε, má posloupnost a_n limitu A. Větu právě dokázanou si snadno zapamatujeme ve tvaru geometrickém.

---

*) Nechť posloupnost čísel kladných $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots$ má limitu rovnou nule. Příslušná čísla $N(\varepsilon_1), N(\varepsilon_2), \ldots$ lze zřejmě voliti tak, aby bylo $N(\varepsilon_{k+1}) > N(\varepsilon_k)$. Pak jest $A - \varepsilon_k < a_n < A + \varepsilon_k$ pro $N(\varepsilon_{k+1}) \geqq n > N(\varepsilon_k)$. Pro všechna n toho druhu volíme $b_n = A - \varepsilon_k$. Tím jsou sestrojeny hledané posloupnosti pro všechna $n = N(\varepsilon_1)$. Pro $n = 1, 2, \ldots N(\varepsilon)$ volíme b_n rovno nejmenšímu z čísel $a_1\ a_2, \ldots a_{N(\varepsilon_1)}$, $b_{N(\varepsilon_1)+1}$ a c_n rovno největšímu z čísel $a_1, a_2, \ldots a_{N(\varepsilon_1)}$, $c_{N(\varepsilon_1)+1}$.

Uzavřené intervaly $\langle b_1, c_1 \rangle$, $\langle b_2, c_2 \rangle, \dots \langle b_n, c_n \rangle \dots$ mají tu vlastnost, že každý z nich leží celý v intervalu předcházejícím a při tom délka $\langle b_n, c_n \rangle$ má limitu rovnou nule, když $n \to \infty$. Každou posloupnost intervalů takového druhu budeme nazývati »*posloupnost intervalů do sebe zařazených*«. Předcházející větu lze pak vysloviti takto:

Posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots$ má limitu, jestliže jest splněna tato nutná a postačující podmínka:

Lze nalézti posloupnost do sebe zařazených intervalů $J_1, J_2, J_3, \dots J_n, \dots$, takže bod a_n jest v intervalu J_n.

Jest třeba ještě připomenouti, že každá posloupnost intervalů do sebe zařazených definuje jediný bod společný všem těm intervalům. To plyne ihned z této úvahy. Kdyby takové body byly dva a a b, pak by oba byly v intervalu J_n ať n volím jakkoliv veliké. Protože pak $\lim\limits_{n \to \infty} J_n = 0$, je také vzdálenost bodů a, b rovna nule, čili body ty splývají.

Užitek odvozené věty jest dvojí. Slouží jednak k numerickému výpočtu limit, jednak k různým teoretickým důkazům. Na obojí uvedeme příklad.

Počítejme limitu posloupnosti s obecným členem

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}, \quad \text{kdež } n! = 1 . 2 . 3 \dots n.$$

Tato posloupnost jest stále vzrůstající a shora ohraničená, neboť

$$a_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Limitu její označme E.

Abychom odhadli velikost čísla E, utvořme rozdíl

$$a_{n+k} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+k)!} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots(n+k)} \right\}.$$

Jest tedy

$$a_{n+k} - a_n < \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{k-1}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \, \frac{1 - 1 : (n+2)^k}{1 - 1 : (n+2)}.$$

$$a_{n+k} - a_n < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - 1:(n+2)} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1}$$

a z toho přičleněním k rovnici $E = E$

$$E - a_n - \frac{1.(n+2)}{(n+1)!\,(n+1)} < E - a_{n+k}.$$

Tento vztah platí pro *každé* k. Levá strana nezávisí na k, pravá strana s rostoucím k blíží se nule. Podle věty *c*) z odst. 4 je tedy

$$E - a_n - \frac{1.(n+2)}{(n+1)!\,(n+1)} \leqq 0.$$

Mimo to víme, že $E > a_n$ a píšeme-li pro stručnost místo zlomku v předešlé nerovnosti b_n, je celkem

$$a_n < E \leqq b_n + a_n.$$

O číslech $(a_n + b_n)$ se čtenář snadno přesvědčí, že tvoří posloupnost klesající. Proto v posledním vztahu rovnost nikdy nemůže nastati. Numerický výpočet probíhá takto $(n = 11)$:

$$\begin{array}{rcl}
0{\cdot}5000000000 = & \dfrac{1}{2!} & = 0{\cdot}5000000000 \\
0{\cdot}1666666666 < & \dfrac{1}{3!} & < 0{\cdot}1666666667 \\
0{\cdot}0416666666 < & \dfrac{1}{4!} & < 0{\cdot}0416666667 \\
0{\cdot}0083333333 < & \dfrac{1}{5!} & < 0{\cdot}0083333334 \\
0{\cdot}0013888888 < & \dfrac{1}{6!} & < 0{\cdot}0013888889 \\
0{\cdot}0001984126 < & \dfrac{1}{7!} & < 0{\cdot}0001984127 \\
0{\cdot}0000248015 < & \dfrac{1}{8!} & < 0{\cdot}0000248016 \\
0{\cdot}0000027557 < & \dfrac{1}{9!} & < 0{\cdot}0000027558 \\
0{\cdot}0000002755 < & \dfrac{1}{10!} & < 0{\cdot}0000002756 \\
0{\cdot}0000000250 < & \dfrac{1}{11!} & < 0{\cdot}0000000251 \\
 & \dfrac{1}{12!}\,\dfrac{13}{12} & < 0{\cdot}0000000023 \\
\hline
0{\cdot}7182818234 & & 0{\cdot}7182818288
\end{array}$$

Jest tedy na osm míst přesně $E = 2{\cdot}71828182\ldots$ Snadno si lze zapamatovati ciferný obraz vícemístný

$$E = 2{\cdot}7\;1828\;1828\;45\;90\;45\ldots.$$

Při té příležitosti dokážeme, že číslo vypočtené jest identické s limitou od dřívějška známou $e = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Binomická věta zní

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}\cdot a^{n-1}\,.\,b + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,a^{n-2}\,.\,b^2 + \cdots + b^n.$$

Jest tedy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots$$
$$+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots,$$

čili
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < E$$

a tedy podle věty *e*) odst. 4.

$$e \leqq E \tag{1}$$

Dále jest pro každé $k < n$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots +$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Jestliže k volíme pevně a n vzrůstá, je podle téže věty

$$e \geqq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}.$$

Protože vztah ten platí pro každé k, lze rovnítko vypustiti. Jest tedy podle věty dvakráte již použité

$$e \geqq \lim_{k \to \infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right) = E\;\ldots\ldots\ldots \tag{2}$$

Pro čísla e a E platí tedy *současně* vztahy (1) a (2). To jest možno, jen když $E = e$.

Teoretický význam věty na počátku odstavce dokázané vysvitne na př. při důkazu věty:

Každá posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ oboustranně ohraničená má aspoň jeden bod zhuštění. Bod zhuštění jest takový, v jehož každém sebe menším okolí leží nekonečně mnoho členů posloupnosti anebo který jest roven nekonečně mnoha členům posloupnosti.

Důkaz. Všechny členy posloupnosti — protože jest ohraničená — lze uzavříti do intervalu $< a, b >$. Rozpolme tento interval J_0. Aspoň v jednom z nových intervalů leží nekonečně mnoho členů posloupnosti, neboť kdyby tomu tak nebylo, měla by posloupnost konečný počet členů, což odporuje definici. Interval ten, a jsou-li to oba, tedy levý z nich, označme J_1 a rozpolme jej opět. Získáme interval J_2, tvořící polovinu J_1 a obsahující nekonečně mnoho členů posloupnosti (jsou-li dva, volíme opět levý). Tak pokračujeme dále. Vzniklé intervaly $J_0, J_1, J_2, \ldots$ jsou do sebe zařazeny ve smyslu definovaném v předešlém odstavci, neboť n-tý má patrně délku $(b - a) : 2^n$, jejíž limita pro $n \to \infty$ jest nula. Každý z intervalů těch obsahuje nekonečně mnoho bodů posloupnosti dané a nalevo od každého z nich leží jen konečný počet členů posloupnosti. Jediný bod, který jest společný všem těmto intervalům, nazveme β. Bod tento jest bod zhuštění posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$, neboť, zvolíme-li libovolně malé číslo ε, je bod β středem intervalu $< \beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon >$ a mimo to je i bodem intervalu J_n. Zvolíme-li n tak veliké, že délka intervalu J_n je menší než ε, padne J_n do okolí uvažovaného $< \beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon >$ a obsahuje tedy toto okolí nekonečně mnoho členů posloupnosti. Z té okolnosti, že na levo od J_n nemůže ležeti žádný bod zhuštění, vyplývá, že bod zhuštění β jest nejmenší ze všech bodů zhuštění. Neboť bod zhuštění menší než β ležel by nalevo od β a tedy také nalevo od nějakého intervalu J_n. Nejmenšímu bodu zhuštění β říkáme latinsky *limes inferior**) posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ a označujeme jej jedním ze znaků

$$\beta = \liminf_{n \to \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \to \infty} a_n.$$

Podobně definujeme největší z bodů zhuštění čili *limes superior**) *lim sup* $a_n = \overline{\lim}\, a_n$. Dospějeme k němu tím způsobem, že při půlení intervalů volíme za další interval onu po-

*) *Limes*, česky doslova *mez* jest latinský název pro bod zhuštění. *Inferior* značí *dolní, superior horní.* Zpravidla budeme užívati názvů latinských, protože značky *lim inf* $\equiv \underline{\lim}$ a *lim sup* $\equiv \overline{\lim}$ jsou mezinárodně užívány.

lovinu, která obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti a při tom leží co nejdále napravo.

Příklad. Posloupnost s obecným členem $a_n = 1 + (-1)^n + \frac{1}{n}$ má

$$\limsup a_n = 2, \qquad \liminf a_n = 0,$$

jak jest bezprostředně patrno.

Cvičení. 1. Utvořte sami posloupnosti o jednom nebo několika bodech zhuštění.

2. Dokažte, že posloupnost $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$, která má $\lim a_n = a$, má *jediný* bod zhuštění $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n = a$, (Návod: Ať ε jest jakkoli malé, vždy leží *vně* intervalu $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$ jen konečný počet členů posloupnosti a uvnitř nekonečný počet.)

3. Dokažte, že posloupnost, která má jediný bod zhuštění

$$\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = a$$

má limitu a. (Posloupnost má jediný bod zhuštění a. V intervalu $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$ leží tedy všechny členy a_n pokud $n > N(\varepsilon)$.)

4. Posloupnost $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ nechť má bod zhuštění γ. Z posloupnosti lze vždy vybrati jinou

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k} \ldots$$

která má vlastnost $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = \gamma$.

(Sestrojíme posloupnost intervalů do sebe zařazených $J_1, J_2, J_3 \ldots$, jichž společným bodem jest γ. První člen posloupnosti $a_1, a_2 \ldots$, který padne do J_1 nazveme a_{n_1}, z dalších členů první, který padne do J_2 nazveme a_{n_2} atd.)

9. Bolzano-Cauchy-ovo všeobecné kriterium pro existenci limity. Nutné a postačující podmínky pro konvergentní posloupnost, které jsme si sestrojili v předešlém odstavci, užívají dvou pomocných posloupností b_n a c_n. Bývá obtížno, sestrojiti monotoní posloupnosti v daném případě. Proto vyslovíme nutné a postačující podmínky ještě v jiné formě, kterou v podstatě objevil již *Bolzano* a později nezávisle na něm *Cauchy*.

Posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots$ má limitu, když a jen když k libovolně zvolenému kladnému číslu ε lze nalézti takové celistvé a kladné číslo $N(\varepsilon)$, že platí

$$|a_{n'} - a_{n''}| < \varepsilon \text{ pro všechna } n' > N(\varepsilon),\ n'' > N(\varepsilon).$$

Především dokážeme, že existence limity jest postačující podmínka pro to, aby byla splněna nerovnost *Bolzano-Cauchy-ova* $(B - C)$. Když posloupnost má limitu, pak od jistého indexu $N(k)$ počínaje všechny členy posloupnosti mají totožné nebo téměř totožné úseky řádu k-tého, a tedy, jsou-li n', n'' dva indexy větší než $N(k)$, jest, jak snadno nahlédneme, $| a_{n'} - a_{n''} | < 2 . 10^{-k}$ Při daném ε lze vhodnou volbou čísla k docíliti toho, aby $2 \; 10^{-k} < \varepsilon$ a tedy také $| a_{n'} - a_{n''} | < \varepsilon$, q. e. d.

Jako druhý krok dokážeme: Jestliže posloupnost splňuje podmínku $B - C$, má limitu. Zvolme $\varepsilon = 10^{-k}$. Pak pro všechna $n > N(k)$ je $| a_N - a_n | < 10^{-k}$ a tedy úseky řádu $(k-1)$-ho pro všechna taková a_n jsou totožné nebo téměř totožné. Jsou totiž tři možnosti. Buď číslo a_N má na k-tém místě desetinném cifru *9* nebo cifru *0*, nebo konečně cifru jinou než *9* a *0*.

Je-li tam cifra jiná než 9 a 0, jsou patrně úseky řádu $(k-1)$-ho u všech čísel a_n pro $n > N(k)$ totožné, neboť $a_n = a_N + \varepsilon_n$, kdež $| \varepsilon_n | < 10^{-k}$. Jsou to tedy úseky *definitivní.*

Je-li cifra ta devítka, jsou patrně úseky $a_n^{(k-1)}$ pro $n > N(k)$ rovny buď $a_N^{(k-1)}$ nebo $(a_N^{(k-1)} + 10^{-k+1})$ a jsou tedy *definitivní.*

Je-li cifra ta nula, jsou patrně $a_n^{(k-1)}$ pro $n > N(k)$ rovny buď $a_N^{(k-1)}$ nebo $(a_N^{(k-1)} - 10^{-k+1})$ a jsou tedy *definitivní.*

Posloupnost, která splňuje podmínky $B - C$, má tedy definitivní úseky každého řádu a má tedy také limitu.

Kapitola III.

ŘADY.

10. Obecné kriterium konvergence. Sčítání jsme definovali pouze pro *konečný* počet sčítanců. Nemůžeme tedy mluviti o »součtu všech členů« dané posloupnosti $u_1, u_2, u_3 \ldots$, aniž jsme přiřkli symbolickému rčení tomu novou definicí nějaký význam. Proto definujeme:

Součet všech členů posloupnosti $u_1, u_2, u_3 \ldots$ jest roven s, jestliže nová posloupnost **částečných součtů**

$$s_1 = u_1, \; s_2 = u_1 + u_2, \; s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots \; s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

má limitu rovnou s.

Místo znaku $s = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n)$

píšeme pak