ČÁST I

VÝKLAD LOBAČEVSKÉHO GEOMETRIE

ÚVOD

1. O geometrii vůbec. V úvodu této knížky, která má čtenáře seznámit se základy neeukleidovské geometrie, pohovoříme nejdříve o tom, jak tato geometrie vznikla, jaký je její význam a v jakém je vztahu ke geometrii eukleidovské, k té geometrii, se kterou se každý setkal ve škole. Nejprve však několik slov o geometrii vůbec.

Geometrické pojmy, tak jako všechny matematické pojmy, jsou odrazem skutečného, nás obklopujícího světa. „*Jak pojem čísla, tak i pojem figury je vypůjčen výlučně z vnějšího světa a nevznikl v hlavě z čistého myšlení. Musely být věci, které měly formu, a jejich formy byly připravovány, než se mohlo dospět k pojmu figury. Předmětem čisté matematiky jsou prostorové tvary a číselné vztahy skutečného světa, tedy velmi reálná látka. Že se tato látka jeví v nejvýš abstraktní formě, může jen velmi slabě zastřít její původ z vnějšího světa. Abychom však mohli tyto tvary a vztahy zkoumat ryzí, musíme je úplně odloučit od jejich obsahu a ten jako lhostejný ponechat stranou.*“[1])

Geometrie, tak jako ostatně celá matematika, obráží svými pojmy a vývody skutečnost v abstraktní formě. Jak způsob logického usuzování, tak i prvotní matematické pojmy se vyvinuly na základě tisícileté praxe a odtud právě vyplývá přesvědčivost a bezespornost matematiky.

S geometrií (a vůbec s matematikou) jakožto *abstraktní vědou* se setkáváme po prvé u starověkých Řeků. Ve svých zárodcích však geometrie vznikala již v šerém dávnověku u orientálních národů a to na základě praktických potřeb a zkušeností, ať už při stavbách nebo vyměřování pozemků nebo jakékoli výrobě. Hlavním přínosem řeckých matematiků byl jednak přechod k vyšším abstrakcím, jednak logický rozbor jednotlivých úvah; a právě tím se řecká matematika dostala na vyšší úroveň než jakou měla u Egypťanů nebo Babyloňanů. Tím, že poučky byly logicky odvozovány a ne pouze konstatovány na základě

[1]) F. Engels: Antidühring, str. 36—37 českého vydání, Svoboda 1949.

přímého pozorování a zkušeností, geometrie přestala být záležitostí jen smyslového vnímání a empirického, více méně náhodě ponechaného pozorování. Nyní vyžadovala naopak uvědomělého pozorování, cílevědomého vyhledávání problémů, kontroly úsudků a jejich třídění v systém. Tím vším byl člověk podněcován k dalším bádáním, jež geometrii stále více obohacovala, takže nakonec byla také způsobilejší řešit konkretní úkoly, z nichž vyrostla.

Říkáme-li, že geometrie obráží a popisuje prostor nás obklopujícího světa, pak musíme hned také dodat, že ho *popisuje jen přibližně, zjednodušeně a schematicky*, protože každá abstrakce je vlastně zjednodušením. Znamená to tedy, že určitý geometrický systém či určitá geometrie si nemůže činit nárok na to, že by skutečnost zobrazovala s neomezenou platností, za všech okolností a podmínek. Někdy proto může jiná geometrie podávat přesnější obraz a lépe vystihnout určité prostorové vlastnosti materiálního světa.

„*Člověk nemůže uchvátit celou skutečnost v její bezprostřední plnosti, on se k tomu může jen věčně blížit.*“[2]) To platí i o zkoumání geometrických vlastností skutečného, mimo nás existujícího prostoru. Rozvoj praxe a vědy ukázal, že eukleidovská geometrie je pouze prvním přiblížením v poznání geometrických vlastností tohoto skutečného prostoru, přes to, že dlouho platila za absolutní, plné a proto i jediné vyjádření těchto vlastností, což jako by se potvrzovalo jejím širokým uplatněním v klasické fysice i denní praxi. Ukázalo se, že dalším přiblížením ve vyšetřování skutečného prostoru je geometrie neeukleidovská.

Tato geometrie zobecňuje v určitém smyslu geometrii eukleidovskou a obsahuje ji jako zvláštní případ, podobně jako geometrie na kouli s hlavními kružnicemi jakožto „přímkami“ zahrnuje v sobě planimetrii: sférická geometrie uvažovaná na celé kouli se sice podstatně liší od geometrie roviny, blíží se jí však tím více, čím menší je vzhledem k poloměru koule část jejího povrchu, na niž geometrii omezíme.

Přesnost, s jakou eukleidovská geometrie popisuje geometrické vlastnosti té části prostoru, jež je našim smyslům dostupná, ať již jde o blízké okolí našeho denního života nebo vzdálený svět stálic, je víc než

[2]) V. I. Lenin, Filosofické sešity, 1947, str. 156 rus. vyd.

postačující. Neeukleidovská geometrie se uplatňuje teprve při popisu světa v kosmickém měřítku, teprve když přihlížíme k tomu, že vesmírný prostor je vyplněn hmotou, teprve když ve fysikálních úvahách nahradíme poměrně nevelike rychlosti rychlostmi řádu rychlosti světla. Neeukleidovská geometrie se uplatňuje plně ve fysice relativistické, zatím co fysika klasická stojí všude na geometrii eukleidovské.

Pojem neeukleidovské geometrie, o niž se opírá relativistická fysika, je svým rozsahem širší než pojem geometrie, kterou se budeme v dalším zabývat a která se přesněji nazývá Lobačevského neeukleidovskou geometrií. Lobačevského geometrie je jen velmi speciálním a jednoduchým případem *neeukleidovské geometrie v širším smyslu*, neboť předpokládá, že prostor má v každé části tentýž charakter a tytéž vlastnosti. Neeukleidovská geometrie v širším smyslu naproti tomu pracuje s prostorem, který má v různých místech charakter různý. Zabývá se tedy prostorem, jehož geometrické vlastnosti jsou v něm, abychom tak řekli, nerovnoměrně rozloženy. Protože geometrické vlastnosti udílí fysikálnímu prostoru teprve hmota a protože hmota je ve vesmírném prostoru rozdělena nerovnoměrně, je odtud snadno patrné, proč se relativistická fysika opírá o neeukleidovskou geometrii v širším smyslu.

Vraťme se nyní ještě k abstraktní stránce geometrie. Jak jsme již jednou řekli, pracujeme v rámci „čisté“ matematiky s pouhými abstrakcemi a poučky dokazujeme úvahami na základě definic pojmů a jiných pouček, aniž bychom se přitom opírali o nějaké experimentální ověřování. Vidíme tak, že matematika zaujímá abstraktní stupeň našeho poznání.

Pokud se na matematiku díváme jako na abstraktní vědu, pak je pro ni příznačné, že nevychází z rámce abstraktnosti: její tvrzení jsou *logicky dokazována*, její pojmy *přesně zaváděny definicemi*. Odtud plyne další charakteristický rys matematiky. Jestliže každý důkaz spočívá na dovolávání se určitých známých vět a jestliže chceme být naprosto důsledni, pak se musíme při důkazech odvolávat jen na věty již dříve dokázané. Protože však není možné dovolávat se dokázaných vět do nekonečna (někde musí totiž výklad začínat), přijímáme některá tvrzení za správná bez důkazu a z nich pak celou příslušnou partii matematiky logicky odvozujeme. Tvrzení, jejichž správnost je takto od počátku předpokládána, se nazývají *postuláty* nebo častěji *axiomy*.

S axiomaticky budovanou matematikou se setkáváme již u řeckých matematiků. Známé Eukleidovy *Základy* jsou prvním pokusem o axiomatický výklad matematiky a v tom spočívá jejich velký význam a Eukleidova zásluha. Eukleides však nebyl všude zcela důsledný, a proto jeho *Základy* jsou skutečně jen pokusem o axiomatisaci matematiky. Svůj výklad začíná sice výčtem axiomů, avšak při důkazech se nevědomky dovolává také takových vět, které ani neuvádí mezi axiomy, ani je nedokazuje. Podat důsledný axiomatický výklad geometrie nebo jiné matematické discipliny nebylo ostatně v době Eukleidově ještě dost dobře možné, uvážíme-li, že to byla doba, kdy se matematika jakožto abstraktní věda teprve začala krystalisovat. Axiomatisace geometrie byla důsledně provedena teprve v 19. století (blíže o tom viz odstavec **7**, str. 36), u ostatních disciplin matematiky se tak stalo až ve 20. století.

Ani abstraktní povaha matematiky ani možnost budovat ji čistě logickou cestou (axiomaticky) nás nesmí mýlit. Nesmíme se domnívat, že by se snad matematika vyvíjela odtrženě od mimo nás existující skutečnosti. „*Myšlení, přecházejíc od konkretního k abstraktnímu, nevzdaluje se — je-li správné — od pravdy, nýbrž přibližuje se k ní ... Od živého pozorování k abstraktnímu myšlení a od něho k praxi — to je cesta dialektického poznání pravdy, poznání objektivní reality.*“[3]) Je nutné, aby si byl každý dobře vědom toho, že matematika nemůže být nikdy chápána odděleně od obklopující nás skutečnosti, od praxe, ale na druhé straně také toho, že v důsledku vysokého stupně abstraktnosti matematiky není její vztah k praxi vždy bezprostřední, nýbrž je často zprostředkován teprve jinými vědeckými a technickými disciplinami.

Leninova základní these o poznávání, kterou jsme právě citovali, se plně ověřuje na geometrii eukleidovské a neeukleidovské. Geometrie přechází nejprve od konkretních útvarů skutečného prostoru k abstrakcím a geometrickým pojmům; důkladným studiem těchto pojmů a jejich vlastností rozvíjí tyto abstrakce, na jejich podkladě dochází k novým pojmům a abstrakcím — k objevu neeukleidovské geometrie došlo vlastně takovýmto způsobem uvnitř geometrie jakožto abstraktní

[3]) V. I. Lenin, Filosofické sešity, 1947, str. 146—147, rus. vyd.

vědy — a odtud se vrací k živé skutečnosti, k našim představám o prostoru, který nás obklopuje, a k aplikacím na fysiku.

Právě uvedená slova nám dávají odpověď nejen na otázku, jaký je význam neeukleidovské geometrie, ale také na otázku, jak tato geometrie vznikla: původní a jednoduché abstrakce skutečného prostoru byly skládány do systému po vzoru Eukleidově. Studium těchto abstrakcí a jejich postupné rozvíjení vyústilo ve vytvoření abstrakcí nových — a právě takovým způsobem došlo mimo jiné k důležitému objevu neeukleidovské geometrie. S hlediska historického bude tento objev osvětlen v následujícím odstavci.

2. Jak se zrodila neeukleidovská geometrie. Neeukleidovská geometrie je nauka poměrně nová. V únoru 1826 s ní po prvé veřejně vystoupil mladý ruský matematik N. I. Lobačevskij a první tištěnou prací o ní byl jeho spis *O načalach geometrii*, napsaný r. 1829. Majetkem matematické veřejnosti se však nová geometrie stala teprve po r. 1860, tedy až po smrti Lobačevského, a tehdy se také ukázalo, jak velký je význam jejího objevu.

Ačkoliv je neeukleidovská geometrie dílem 19. století, sahá svými kořeny o celá dvě tisíciletí nazpět. K jejímu objevu došlo totiž při řešení jednoho velmi starého geometrického problému, táhnoucího se dějinami matematiky již od dob Eukleidových. Lobačevskij byl nucen se s tímto problémem vypořádat, když jako mladý docent kazaňské university konal přednášky o základech geometrie, a jeho objev svědčí o tom, že tak učinil způsobem opravdu skvělým.

Tímto problémem byl t. zv. *problém rovnoběžek*; naznačíme nyní, oč v něm šlo. Zmínili jsme se již o tom, že Eukleides pojal výklad geometrie ve svých *Základech* axiomaticky. Celou geometrii odvozuje ze 14 axiomů, z nichž 5 nazývá postuláty a jež zní takto:

I. *Dvěma body lze vždy vést jedinou přímku.*

II. *Úsečku lze neomezeně prodloužiti.*

III. *Z libovolného středu lze libovolným poloměrem sestrojit kružnici.*

IV. *Všechny pravé úhly jsou shodné.*

V. *Dvě přímky v rovině, které protínají jinou přímku této roviny a tvoří s ní po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých, se vždy protínají a to po té straně přímky, kde je součet menší.*[4])

Poslední postulát je tak zvaný „postulát o rovnoběžkách", neboť říká totéž, jak později podrobně rozebereme, jako tvrzení, že „*v rovině lze bodem mimo danou přímku k ní vést právě jednu přímku, která ji neprotíná neboli je s ní rovnoběžná.*" Již řečtí vykladači Eukleidových *Základů* si povšimli, že V. postulát se od ostatních liší svou složitostí, a pojali podezření, že by se dal z ostatních odvodit, takže by bylo zbytečno ho uvádět. Říkali, že Eukleides v dalším výkladu dokazuje věty, které bychom mohli mnohem snáze přijmout pro jejich jednoduchost bez důkazu než pátý postulát. Všimli si také, že celá řada důležitých základních vět se u Eukleida dokazuje bez tohoto postulátu. Aby si ověřili své podezření, pokoušeli se ho dokázat. Již několikrát se zdálo, že se jim to podařilo, ale po každé se ukázalo, že při důkazu nebylo použito jenom vět dokazovaných bez pomoci V. postulátu, takže se důkaz opíral vlastně o něco, co měl teprve dokázat. Matematikové se snažili znovu a znovu najít správný důkaz, ale ku podivu stále marně. Tak vznikl problém rovnoběžek: nebylo totiž jisto, zda pokusy selhávají proto, že důkaz není možný, či proto, že důkaz sice možný je, ale vyžaduje nějakého dosud neznámého obratu.

Na otázku, jak je to s důkazem V. postulátu, nedal odpověď ani starověk, ani středověk, ačkoli se o řešení problému pokoušeli matematikové neustále, od starověkých Řeků přes středověké Araby po novodobé Italy, Angličany, Francouze, Švýcary i Němce. Rozřešit tento problém se podařilo teprve v 19. století, a to N. I. Lobačevskému a skoro současně maďarskému matematikovi Janu Bolyaiovi. V té době znal již řešení také německý matematik C. F. Gauss. ~~O všem tom budeme podrobněji jednat v historické části našeho výkladu~~. Nyní se však podíváme, jakou cestou rozřešil tuto otázku Lobačevskij.

Můžeme říci, že Lobačevskij užil v podstatě methody *nepřímého dů-*

[4]) Některé rukopisy *Základů* mají postuláty jen čtyři, zatím co postulát o rovnoběžkách je uveden mezi axiomy, nejčastěji jako axiom XI, někdy jako axiom IX nebo XII. Dříve se vedly diskuse o tom, jaký je vlastně rozdíl mezi postulátem a axiomem. Dnes se však mezi nimi žádný podstatný rozdíl nehledí a obou slov se užívá ve stejném smyslu.

kazu. Tato methoda spočívá, jak známo, v tom, že z vět, na základě nichž důkaz provádíme, a z předpokladu, že neplatí tvrzení, jehož správnost chceme dokázat, se odvozují důsledky tak dlouho, až se objeví spor, to znamená, až dojdeme v důsledcích ke dvěma tvrzením, z nichž jedno je negací druhého. To pak znamená, že předpoklad, podle něhož dokazované tvrzení neplatí, je falešný, a tudíž podle principu o vyloučeném třetím musí platit tvrzení dokazované. Lobačevskij vzal v úvahu první čtyři Eukleidovy postuláty i s jejich důsledky, tedy všechny věty eukleidovské geometrie, které se dají dokázat bez užití V. postulátu (o takových větách se dnes říká, že tvoří absolutní geometrii), a k nim přidal negaci V. postulátu:

> *Existuje alespoň jeden pár neprotínajících se přímek v rovině, které protínají tutéž přímku a tvoří s ní po jedné její straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých.*

Nyní se dalo čekat, že při odvozování vět z takovýchto podivných předpokladů se jistě objeví spor a že tím bude V. postulát dokázán. Lobačevskij odvozoval větu za větou, ale na žádný spor nepřicházel. Při tom bylo zapotřebí velkého ostrovtipu, aby se mezi neobvyklými, s hlediska eukleidovské geometrie úplně absurdními důsledky našel skutečný *logický spor*, to znamená taková dvojice tvrzení, z nichž jedno tvrdí opak druhého, a ne jen nějaký spor zdánlivý, spočívající v tom, že určité tvrzení odporuje našim vžitým představám. Nenechat se zmást navyklými představami, ale vidět logický spor jen tam, kde skutečně je, bylo velmi těžké. Již před Lobačevským se někteří matematikové pokoušeli řešit problém rovnoběžek nepřímým důkazem, avšak během svých úvah se zastavili u některého tvrzení v přesvědčení, že jistě odporuje nějakému důsledku absolutní geometrie a negace V. postulátu, a domnívali se pak, že postulát o rovnoběžkách dokázali. Ve skutečnosti však jejich poslední tvrzení neodporovalo žádnému takovému důsledku, nýbrž odporovalo jen nějaké zdánlivě tak samozřejmé větě, že se před tím nikdo nezajímal o její důkaz a nevěděl, že ho lze podat jen na základě V. postulátu.

Lobačevskij naproti tomu se takové chyby nikde nedopustil a hledal skutečný logický spor, avšak stále marně. Když již měl celou dlouhou řadu neobvyklých vět, počal si náhle uvědomovat, že se k sobě jaksi

„rozumně“ řadí, jako by měly tvořit harmonickou stavbu. Tehdy mu také připadla na mysl možnost, že se spor nikde neobjeví, protože třebas všechny důsledky z jeho předpokladů tvoří bezesporný celek. Vypořádat se s těmito myšlenkami znamenalo veliký krok kupředu. Této možnosti nepostřehli ti, kteří již před Lobačevským dokazovali V. postulát nepřímo, při čemž ani na chvíli nepřestali pochybovat, že se dokázat dá. Toto jejich přesvědčení bylo tak silné, že viděli spor tam, kde žádného nebylo, a proto V. postulát nakonec vždy „dokázali“.

Od počátečního tušení přešel Lobačevskij brzy k přesvědčení o bezespornosti nových tvrzení, takže potom odvozoval další věty již s vědomím, že mu pod rukama vzniká jiná stavba geometrických pojmů a tvrzení než je geometrie eukleidovská, a tak tvoří vlastně novou geometrii. Té dnes říkáme geometrie neeukleidovská, přesněji *Lobačevského neeukleidovská geometrie.*

Nebudeme se nyní zabývat dalším historickým vývojem neeukleidovské geometrie. Nemůžeme však pominout mlčením, že druhá polovina 19. století nám dala ještě jednu neeukleidovskou geometrii. R. 1854 přišel totiž Bernhard Riemann diferenciálně-geometrickými úvahami na obecnou metrickou geometrii, jež zahrnovala celkem tři typy různých geometrií: vedle geometrie Eukleidovy a Lobačevského to byla geometrie, jež později byla nazvána jménem Riemannovým. Eukleidovská geometrie má s ní daleko méně společných vět než s geometrií Lobačevského. V Riemannově geometrii se na příklad vždy protínají kolmice na tutéž přímku, což má za následek, že v rovině neexistují přímky, které by se neprotínaly, neexistují v ní tedy rovnoběžky. Další zvláštností jejích přímek je, že se chovají — řečeno názorně — tak, že bod pohybující se stále v témž smyslu po přímce vrací se opět do původní polohy. Chovají se tedy jako uzavřené čáry.

Obě neeukleidovské geometrie, Lobačevského i Riemannova, byly v 19. století osvětleny ještě s dalšího hlediska, a to projektivní geometrií. Tato geometrie vznikla tak, že nejdříve byly v geometrických úvahách zavedeny nevlastní body, přímky a roviny (Desargues)[4a]) a potom později se vyšetřovaly věty, ve kterých nebylo rozlišováno mezi elementy vlastními a nevlastními. Protože takové věty vyjadřovaly

[4a]) Viz začátek odstavce **18**, str. 124.

jenom ty vlastnosti útvarů, které se při promítání (při projekci) nemění, nepatřily mezi ně poučky o metrických vlastnostech a ani metrické pojmy (délka úsečky, velikost úhlu) nemohly mít v projektivní geometrii žádného místa. Další vývoj ukázal, že přece však lze jistým způsobem zavést metrické vztahy projektivně (Laguerre 1853, Cayley 1859). R. 1872 ukázal F. Klein, že projektivně lze zavést metriku v podstatě trojím způsobem, a obdržel tak vedle geometrie Eukleidovy a Lobačevského také geometrii Riemannovu. Podle Kleina se pro Lobačevského geometrii užívá také názvu *hyperbolická geometrie* a pro Riemannovu názvu *eliptická geometrie.*[5])

3. Význam objevu neeukleidovské geometrie. Objevem neeukleidovské geometrie bylo potvrzeno, že se postulát o rovnoběžkách dokázat nedá a že ho tudíž Eukleides uváděl mezi postuláty právem. Tím však nebyl význam nového objevu vyčerpán. Neeukleidovskou geometrií se totiž objasnila mnohá bolavá místa v základech geometrie, která byla odkryta nezdařenými pokusy o důkaz V. postulátu a kvůli nimž byla theorie rovnoběžek od 17. století nazývána „skvrnou na krásném těle geometrie", „skandálem základů geometrie", „ostudnou částí matematiky" a pod. Zmíněné nedostatky spočívaly v tom, že některé pojmy nebyly ještě blíže analysovány a mnohá tvrzení byla pokládána za samozřejmá, zatím co jejich důkaz je možno podat jen pomocí V. postulátu.

Příkladem takového nevyjasněného pojmu byla ekvidistance přímek. Někteří matematikové si položili otázku, zda by se V. postulát nedal dokázat, kdyby se rovnoběžky definovaly jako přímky všude od sebe stejně vzdálené (ekvidistantní) na rozdíl od Eukleida, který, jak známo, nazývá rovnoběžkami přímky v rovině, které se neprotínají. Přitom považovali za samozřejmé, že takové přímky existují, čili jinými slovy, že body ležící ve stejné vzdálenosti od přímky (a po téže její straně) leží v přímce. Později ukážeme, že toto tvrzení je rovno-

[5]) Riemannova geometrie (v užším smyslu) zahrnuje vedle eliptické ještě také sférickou geometrii, která při dimensi 2 splývá s geometrií na obyčejné kouli, jestliže za „přímky" vezmeme hlavní kružnice. Zde jsou tedy přímky opravdu uzavřené čáry a vidíme také, že zde neexistují rovnoběžky, protože každé dvě „přímky" se protínají. Protože se protínají dokonce vždy ve dvou bodech, neplatí ve sférické geometrii věta „*dvěma body je určena jedna a jen jedna přímka*" a tím se geometrie sférická odlišuje od eliptické, ve které je tato věta splněna.

cenné s V. postulátem. Jiným takovým choulostivým místem byl pojem podobnosti útvarů, u něhož bylo teprve později zjištěno, že stojí a padá s postulátem o rovnoběžkách.

Tato nejasná místa, která způsobila, že problém rovnoběžek přitahoval tolik pozornosti, ukázala také na dříve uvedené vážné nedostatky Eukleidových *Základů*: neúplný výčet axiomů, z nichž se všechny geometrické věty mají dokazovat, a neuspokojivé definice základních pojmů, tedy jedním slovem — nedůsledné uplatnění axiomatické methody.

Eukleidova kniha byla dlouhou dobu považována za vzor logického budování jakékoli nauky a platila jako svrchovaná autorita až do 18. století jak u učenců, tak na školách, kde se jí do té doby užívalo jako učebnice geometrie (na anglických školách ještě i ve století devatenáctém). Během 19. století však její autorita padla (nejdříve se tak stalo ve Francii po revoluci z roku 1789), její nedostatky byly kritisovány a na školách byla nahrazena prvními novými učebnicemi. Pro tuto dobu je charakteristická Lobačevského poznámka v úvodu jeho spisu *O načalach geometrii*:

> „Kdo by nepřiznal, že by žádná matematická nauka neměla začínat takovými temnými pojmy, jakými my po vzoru Eukleida začínáme geometrii a že by se nikde v matematice nemělo trpět tolik nepřesnosti, jako se to stalo v theorii rovnoběžek." (Lobačevskij [5], str. 185.)[6])

Odstranit všechny nejasnosti v geometrii a nahradit je přesným výkladem bylo možné až po objevu neeukleidovské geometrie, neboť teprve ona ukázala mnohé pojmy ve správném světle. Nový objev vedl tak k přezkoumání logických základů geometrie a posléze se stal jedním z mocných podnětů k revisi základů celé matematiky. Tato revise charakterisuje matematiku 19. století a spolu s rodící se matematickou logikou dala vznik nové matematické disciplině, t. zv. *základům matematiky*. Prvním ovocem této nové discipliny bylo důsledné propracování axiomatické methody, z níž se brzy stal důležitý nástroj moderní matematiky.

O tom, že objev neeukleidovské geometrie obohatil naše nazírání na prostor, když se tato geometrie ukázala být hlubším vystižením geo-

---

[6]) Čísla v hranatých závorkách odkazují na seznam citované literatury, str. 215.

metrických vlastností světového prostoru, a o tom, jaký význam to mělo později pro fysiku, jsme se zmínili již v prvním odstavci. Těchto důsledků nového objevu si byl ostatně plně vědom již sám Lobačevskij. Ve svých spisech se zamýšlel nad tím, jak by se novou geometrií změnila klasická mechanika, a experimentálně se pokoušel zjistit, do jaké míry nová geometrie platí ve skutečném prostoru. Protože v hyperbolické geometrii je součet úhlů trojúhelníka vždy menší než $2R$ a při tom tím menší, čím větší jsou strany trojúhelníka, pozůstával jeden způsob experimentu v měření součtu úhlů velikých trojúhelníků. Zatím co Gauss zkoumal velké trojúhelníky na povrchu zemském, vyšetřoval Lobačevskij trojúhelníky, jejichž vrcholy tvořily různé stálice; zjistil však, že i tak velké trojúhelníky jsou ještě příliš „malé", takže odchylka od $2R$, byla-li vůbec jaká, byla ještě v mezích pozorovacích chyb.

Jestliže eukleidovská geometrie dlouho platila za plné (adekvátní) a jediné vystižení prostorových vlastností materiálního světa, pak Lobačevského objev neeukleidovské geometrie znamenal revoluční průlom do těchto starých představ i do idealistického učení, které na nich bylo založeno. Přesvědčení o jedinečnosti eukleidovské geometrie totiž způsobilo, že mnozí matematikové i filosofové zapomněli na empirický původ geometrických pouček, takže pak vykládali, že způsob geometrického nazírání nám byl vrozen a dán jednou provždy a před jakoukoliv zkušeností (a priori). Podle nich Eukleidova zásluha spočívala v tom, že popsal právě toto naše vrozené geometrické nazírání. Někteří šli dokonce tak daleko, že říkali, že prostor je jen naší subjektivní nazírací formou. S takovýmto pojetím věci se setkáváme u Kanta v jeho učení o synthetických soudech a priori.

K zapomenutí faktu, že eukleidovská geometrie je odrazem skutečnosti, přispělo také to, že geometrie je nauka abstraktní a že může být budována axiomaticky. Deduktivní odvozování z axiómů, i když ne všude zcela důsledné, svádělo mnohé k tomu, že se dívali na geometrii jako na výtvor čistého rozumu. S podobným pojetím se setkáváme ještě i dnes u idealisticky zaměřených matematiků. To však je nesprávný pohled na axiomatickou methodu, jejíž skutečný význam se pokusíme vyložit v příštím odstavci. Pokud jde o abstraktní stránku geometrie, postačí snad, když řekneme, že „*abstrakce je nezbytným a důležitým stupněm nebo, chceme-li, stránkou poznání; abstrakce obrážejí* *skutečnost... Každá abstrakce je pouze stupínkem ve věčném přibližování se k plnému poznání přírody. Nesmí tedy být abstrakce zabsolutněna a vytržena z obecné souvislosti, z obecného vývoje poznání.*"[7])

Viděli jsme, že v době, v níž byla objevena neeukleidovská geometrie, byla noetická stránka geometrie a vlastně celé matematiky pojímána na mnoha místech falešně. Jedním z prvních průlomů do fronty mylných názorů byl Lobačevského objev, což je další a jistě ne nejmenší význam objevu neeukleidovské geometrie.

Tyto mylné představy však neodešly a neodcházejí samy sebou. Lobačevskij přišel na svoji geometrii právě v době, kdy v Evropě všude vládlo Kantovo učení, o němž jsme se již zmínili. Psát tehdy o nové geometrii a plně se k ní hlásit — k tomu bylo zapotřebí velké odvahy a odhodlání za vědeckou pravdu třebas ~~i bojovat~~, neboť ve světle kantovského učení o prostoru byla jakákoli řeč o jiné geometrii než eukleidovské absurdností a bláznovstvím. Gaussovi, nesporně velikému matematikovi, se této odvahy nedostalo, a proto o neeukleidovské geometrii, na kterou přišel zcela nezávisle na Lobačevském, nepublikoval ani řádky, ačkoliv si byl plně vědom jejího významu. Naproti tomu Lobačevskij si nenechal za nepříznivých okolností nový objev pro sebe, ale pustil se nebojácně do boje proti dogmatismu a nedal se zastrašit ani nepochopením, ani výsměchem. O tom všem je blíže pojednáno v historické části naší knížky.

4. O axiomatické methodě. Chceme-li přesně vyložit základy neeukleidovské geometrie a ukázat souvislosti mezi touto geometrií a geometrií eukleidovskou, je snad nejlépe vyložit vše na základě přesně vyslovených axiomů geometrie, jak je vytvořila matematika koncem 19. století. Protože výklad geometrie v naší knížce je podán tímto způsobem, bude jistě vhodné seznámit se podrobněji s axiomatickou methodou, což nyní také učiníme. Nejdříve pojednáme o axiomatické methodě s obecného stanoviska, později pak také s ohledem na její užití v geometrii.

---

[7]) A. D. Alexandrov: Leninská dialektika a matematika, Priroda, 1951, č. 1, str. 6. Český překlad tohoto článku viz Sovětská věda, Matematika-fysika, 1951, č. 6, str. 327 nebo také Časopis pro pěstování matematiky, roč. **76** (1951), str. 239.

Každá matematická disciplina pracuje s určitými pojmy, zabývá se určitými (matematickými) objekty, studuje jejich vlastnosti a vzájemné vztahy a svoje výsledky shrnuje v poučkách. Rozrůstáním a postupným zdokonalováním disciplíny se stává, že u mnohých vlastností, které byly dříve považovány za jasné samy sebou, se ukáže, že je lze odvodit z jednodušších, a podobně, že některé objekty, o nichž máme jednoduchou názornou představu, mohou být odvozeny z objektů jiných a elementárnějších (na př. kružnice může být odvozena z pojmu bodu a vzdálenosti). Vidíme tedy, že jak pojmy, s nimiž určitá disciplina pracuje, tak i věty, které do ní patří, spolu navzájem souvisí takovým způsobem, že některé z nich se dají odvodit pomocí jiných. O odvozených *pojmech* (objektech a vztazích) říkáme, že jsme je pomocí jiných *definovali* (někdy také konstruovali), o *větách*, které jsme odvodili, říkáme, že jsme je na základě jiných *dokázali*.

Protože každá definice převádí definovaný pojem na pojmy jiné a podobně i důkaz je redukcí na jiné, před tím již známé věty, je zřejmé, že by bylo nesmyslné žádat, aby *všechny pojmy*, s nimiž disciplina pracuje, byly definovány a aby *všechny* její *věty* byly dokázány. Postupné logické rozvíjení discipliny musí vycházet z několika pojmů, jež zůstávají nedefinovány, a od určitého počtu tvrzení, jež dále nedokazujeme, nýbrž jejichž pravdivost prostě předpokládáme.

Na počátku každé logicky důsledně budované matematické discipliny musí tudíž stát určitá skupina *nedefinovaných pojmů* a určitá skupina *nedokázaných tvrzení*. To také budou jediné nedefinované pojmy a nedokázaná tvrzení, kdežto všechny ostatní pojmy i všechna ostatní tvrzení musí být z nich pomocí pravidel logické dedukce odvozeny. Takové nedefinované pojmy budeme nazývat *primitivní pojmy*, nedokázaná tvrzení *axiomy* a soubor primitivních pojmů a axiomů *axiomatickým systémem* příslušné matematické discipliny. Zaxiomatisovat určitou disciplinu nebo podat její axiomatiku znamená totéž, jako určit její axiomatický systém.

Pro matematickou disciplinu nemusí být axiomatický systém určen jednoznačně. Podobně jako v geometrii může být táž rovina určena různými trojicemi bodů (neležících v přímce), tak i jedna a táž disciplina může být zaxiomatisována různě; prohlásit některé pojmy za primitivní a některá tvrzení za axiomy (tak, aby se z nich pak dala celá disciplina odvodit), je do jisté míry věc výběru, právě tak jako u bodů určujících naši rovinu. Přitom ovšem tvrzení, které v jednom zaxiomatisování je axiomem, může být v jiném dokazovanou větou a podobně je to i u pojmů. Je tedy zřejmé, že mluvit o důkazu nějakého tvrzení a o definici nějakého pojmu můžeme jen vzhledem k určitému axiomatickému systému. Současně je vidět, že v tomto pojetí nejsou axiomy „tvrzení, jež nelze dokázat“ nebo „tvrzení, jež jsou sama sebou zřejma, takže důkazů nepotřebují“, jak se to někde říkalo ještě u starších autorů.

Na primitivní pojmy i axiomy patřící do axiomatického systému klademe obvykle podmínku, aby byly *nezávislé*, t. j. aby se žádný člen axiomatického systému nedal ze zbývajících odvodit. Tento požadavek není nutný, umožňuje však, aby axiomatický systém nebyl zbytečně rozsáhlý, ale obsahoval jen ty členy, jichž je k vybudování celé discipliny nezbytně zapotřebí. To značně napomáhá přehlednosti a usnadňuje další práci. Axiomatický systém musí dále nutně splňovat podmínku, že jeho axiomy tvoří *bezespornou soustavu*, t. j. že z nich nelze odvodit dvě tvrzení, jež by si odporovala. Kdyby totiž soustava axiomů nebyla bezesporná, pak by se z ní dalo odvodit *jakékoli* tvrzení, tedy i nesprávné.[7a])

Velmi nám pomůže hlouběji pochopit axiomatickou methodu, jestliže ji budeme současně pojímat následujícími dvěma různými způsoby.

První spočívá v tom, že se na primitivní pojmy díváme jako na prázdné bezobsažné symboly, jimž teprve axiomy dávají určitý obsah. Jestliže tedy primitivní pojmy označujeme mnohdy slovy s vžitým obsahem (jako *bod*, *přímka*, *vzdálenost*, *násobení*, *číslo* atd.), musíme dát pozor, abychom nerozuměli takovým pojmem víc než co o něm říkají axiomy. Také na dokazované věty se musíme dívat tak, jako by tvořily systém čistě abstraktních vět, dokazatelných úplně formálně, bez zřetele na jejich obsah. V tomto prvém pohledu se axiomatika často přirovnává ke hře v šachy: primitivní pojmy hrají roli figur, které samy o sobě nemají žádný smysl. Teprve pravidla šachové hry, jež v našem přirovnání odpovídají axiomům, ukazují, co se s figurami má dělat.

S tímto pojetím je nezbytné spojit pojetí druhé, neboť obě se navzá-

---

[7a]) O tom viz blíže O. V. Zich: Úvod do filosofie matematiky, JČMF, Praha 1947, 34. sv. sbírky Cesta k vědění, str. 59.

jem doplňují: je sice pravda, že primitivní pojmy jsou bezobsažné symboly, ale jsou to symboly, a proto si pod nimi můžeme myslet jakékoil konkretní objekty a vztahy, jen když budou vyhovovat příslušným axiomům. Ostatně při rozvíjení axiomaticky pojaté discipliny nikdy nepostupujeme ryze formálně, nýbrž všechny úvahy provádíme nakonec v určitých konkretních pojmech a představách, které si za primitivní pojmy dosazujeme.

Takto jsme se dostali k pojmu *modelu* nebo také *interpretace* abstraktní zaxiomatisované discipliny. Řečeno obecně, je to dosazení určitých pojmů (o nichž předpokládáme, že je již známe) za primitivní pojmy zaxiomatisované discipliny, dosazení zcela libovolné, vázané pouze podmínkou, aby dosazené pojmy vyhovovaly daným axiomům.

Zaxiomatisovaná disciplina jakožto systém abstraktních vět je vždy schopna rozmanitých modelů. Jestliže na př. axiomatisujeme nějakou rozvinutou klasickou disciplinu (na př. geometrii), pak ona je jedním (a obyčejně nejdůležitějším) modelem získané axiomatiky. Vedle toho však tutéž axiomatiku lze interpretovat také jinými modely, někdy na první pohled velmi odlehlými a někdy velmi zvláštními. Z tohoto hlediska se jeví geometrie Eukleidova a Lobačevského jako dva různé modely téže *absolutní geometrie* (o tom viz později).

Abychom lépe pochopili všechno to, co jsme dosud řekli o axiomatisaci, bude nejlépe uvést nějaký příklad, což také v odst. **6** učiníme. Nyní shrneme ještě v několika poznámkách význam axiomatické methody, zejména pro dnešní matematiku.

Zaxiomatisovat rozvinutou klasickou disciplinu má především určitý didaktický význam, neboť tím se v disciplině zavádí systém a lepší přehled. Na druhé straně to prospívá dalšímu rozvoji discipliny samé, neboť se upřesní její logické základy. Rigorosnost logických základů neprobíhá během staletí stále po vzestupné linii, ale v určitých výkyvech. Jsou taková údobí, kdy se hromadí nový a nový materiál, nové a nové objevy, kdy se postupuje vpřed jen zdravým odhadem, zatím co chybí pevné logické základy. Proto se někdy do leckterých detailů vloudí i mylné představy. Příkladem takového údobí může být pro infinitesimální počet 17. a 18. století. Nato přichází údobí, kdy se nahromaděný materiál přezkoumává, provádí se jeho revise a dodatečně se objasňuje logická struktura mnohých, jinak správných theorií.

Zaxiomatisovat některou matematickou disciplinu znamená proto vždy velký krok vpřed. Jedním z nejnovějších úspěchů tohoto druhu bylo zaxiomatisování theorie pravděpodobnosti zásluhou sovětské matematické školy, zejména pak A. N. Kolmogorova, jednoho z největších sovětských matematiků. Tímto zásahem byl počet pravděpodobnosti povýšen na skutečnou matematickou disciplinu, na kterou pak bylo možno aplikovat i ty důležité partie matematiky, které před tím stály od počtu pravděpodobnosti stranou (na př. theorii míry), a tak z původní theorie hazardních her, používané z počátku pouze v theorii vyrovnávání chyb a v pojistné matematice, stává se dnes důležitý nástroj matematické statistiky, theoretické fysiky a celé řady technických disciplin.

Jestliže axiomatická methoda, jež byla důsledně propracována teprve v nejnovější době, se stává jedním z charakteristických znaků dnešní matematiky, pak je příčinou a zároveň i důsledkem jednoho důležitého rysu moderní matematiky, totiž tendence víc a víc zobecňovat základní pojmy i theorie. Starověká matematika byla naukou o číslech, veličinách a geometrických útvarech našeho názorného prostoru. Matematika 17. a 18. století postavila ve formě funkcionální závislosti na přední místo ideu plynulé změny (vlivem fysiky) a v geometrii si začala všímat nejrůznějších geometrických příbuzností (transformací). Dnešní matematika se svými množinami, abstraktními prostory různých dimensí a struktur, grupami, algebraickými tělesy atd. už rozhodně nezapadá do starých rámců matematiky. Postupným zobecňováním dochází matematika jak k novým, dosud neprobádaným oblastem, tak také, a to je velice důležité, k synthese již existujících a na první pohled od sebe vzdálených theorií. Odhaluje mezi nimi panující souvislosti, abstrahuje jejich společné jádro a propracovává je dál v theorii, která zahrnuje původní theorie jako speciální případy. Je právě znakem axiomatické methody, že nám umožňuje všímat si vnitřní stavby té které partie matematiky a neulpívat pouze na vnějších formulacích.

5. Množiny. Pro naše další výklady bude vhodné seznámit se s pojmem *množiny*, který hraje dnes v matematice důležitou úlohu. Je to vlastně pojem patřící do logiky, takže se ho v podstatě užívá již v elementární matematice, byť podvědomě a pod jinými názvy, jako je *souhrn*, *soubor*, *množství* a pod.

Množinou rozumíme souhrn určitých věcí, které nazýváme jejími *prvky*. Tak na př. kružnice je množina všech bodů, stejně vzdálených od jistého bodu; všechna čísla m taková, že $m^3 + 2m^2 — 5m — 6 = 0$ tvoří množinu, jež má tři prvky, totiž čísla 2, —1, —3; množina všech kladných dělitelů čísla 600 obsahuje 24 prvků (která jsou to čísla?).

Množina je *určena*, jestliže o každé věci víme, zda do ní patří nebo nepatří; stačí tedy vyjmenovat všechny její prvky (což lze jen u množin s konečným počtem prvků; obsahuje-li taková množina prvky a, b, c, d, pak ji značíme symbolicky $\{a, b, c, d\}$) nebo udat vlastnost, kterou mají všechny prvky množiny a už žádné jiné; tímto druhým způsobem jsou na př. určeny tyto množiny: množina všech přirozených čísel od 1 do 2000; množina všech bodů prostoru, majících od dané přímky stejnou vzdálenost. Každou množinu považujeme jejími prvky za *jednoznačně* určenou. Když nějaká věc označená písmenem a je prvkem množiny $\boldsymbol{A}$, pak to píšeme symbolicky $a \in \boldsymbol{A}$. Když dvě množiny $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ mají tytéž prvky (čili když pro každé $a \in \boldsymbol{A}$ platí také $a \in \boldsymbol{B}$ a když pro každé $a \in \boldsymbol{B}$ platí také $a \in \boldsymbol{A}$), pak je nazýváme *identickými*, symbolicky $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. V opačném případě říkáme, že jsou *různé*, $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$.

Množinu $\boldsymbol{A}$ nazýváme *částí* množiny $\boldsymbol{B}$ nebo také *podmnožinou* množiny $\boldsymbol{B}$ (resp. v množině $\boldsymbol{B}$), jestliže pro každé $a \in \boldsymbol{A}$ platí také $a \in \boldsymbol{B}$. Symbolicky to píšeme $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ nebo $\boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A}$. Někdy místo podmnožina říkáme také *třída*. Je-li na př. $\boldsymbol{A}$ množina všech čísel iracionálních a $\boldsymbol{B}$ množina všech čísel komplexních, pak je jistě $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$; obsahuje-li množina $\boldsymbol{A}$ n prvků, pak v množině $\boldsymbol{A}$ existuje $\binom{n}{k}$ podmnožin o k prvcích. Vztah označený symbolem $\subset$ nazýváme *vztahem inkluse*. Podle toho jak jsme ho zavedli je zřejmé, že ať je $\boldsymbol{A}$ jakákoli množina, platí vždy $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{A}$. Dále je patrno, že je-li $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ a současně $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{C}$, pak je vždy také $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{C}$. Jestliže je současně $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$, pak snadno zjistíme podle toho jak jsme zavedli vztahy $\subset$ a $=$, že je $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

Součtem množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ rozumíme množinu všech prvků, které patří alespoň do jedné z nich, neboli názorně, je to množina skládající se z prvků obou množin zároveň. Součet množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ značíme $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ nebo $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$. Je-li $\boldsymbol{A} = \{a, b, c, d\}$ a $\boldsymbol{B} = \{c, d, e, f\}$, pak $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} =$

$= \{a, b, c, d, e, f\}$. Nechť si čtenář promyslí, že pro jakékoli množiny **A**, **B**, **C** platí na příklad: $\mathbf{A} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$; $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$; je-li $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, pak také $\mathbf{A} + \mathbf{C} \subset \mathbf{B} + \mathbf{C}$.

Průnikem množin **A**, **B** rozumíme množinu všech prvků, které patří do obou množin současně, čili množinu všech prvků společných oběma množinám. Průnik množin **A**, **B** značíme symbolicky **AB** nebo **BA**. Je-li na př. **A** množina všech násobků čísla 2 a **B** množina všech násobků čísla 3, pak **AB** je množina všech násobků čísla 6. Je zřejmé, že průnik **AB** je vždy podmnožinou každé z množin **A**, **B**.

Někdy se může stát, že dvě množiny nemají žádný prvek společný. Abychom i u takových množin mohli mluvit o průniku, zavádíme t. zv. *prázdnou množinu*, která tedy nemá žádný prvek. Protože je jenom jedna prázdná množina (množina je totiž svými prvky jednoznačně určena), budeme ji vždy značit **O**. Je-li tedy na př. **P** množina všech bodů přímky p a **Q** množina všech bodů přímky q a přímky p, q jsou mimoběžné, pak $\mathbf{PQ} = \mathbf{O}$. O množinách, které nemají společné prvky čili mají prázdný průnik, říkáme, že jsou *disjunktní*. Ať je **A** jakákoli množina (třeba i prázdná), je vždy $\mathbf{O} \subset \mathbf{A}$. Dále snadno zjistíme, že $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$; $\mathbf{AO} = \mathbf{O}$. Prázdná množina je zahrnuta i mezi množinami, jež jsou určeny společnou vlastností jejich prvků. Tak na příklad množina všech čísel, která jsou současně větší než 2 a menší než 1, je množina prázdná. Podobně i množina všech bodů prostoru majících od každého ze tří daných bodů ležících na přímce stejnou vzdálenost je prázdná.

6. Ukázka axiomatisace: uspořádání množiny. Abychom se blíže seznámili s axiomatickou methodou, ukážeme nyní, jak se axiomaticky zavádí pojem *uspořádání množiny*. Tento příklad volíme proto, že je jednoduchý a protože pojem uspořádání je důležitý, neboť se s ním v matematice setkáváme na každém kroku a v geometrii patří mezi nejzákladnější pojmy. Budeme ho potřebovat také během našeho výkladu geometrie a tento odstavec může k tomu proto sloužit jako příprava.

Pojem uspořádání je zcela názorný. Je v něm zahrnuto na př. srovnávání čísel podle velikosti, orientace přímky a vůbec jakékoli řadění podle vztahů menší — větší, vpravo — vlevo, nahoře — dole a pod.

Uvidíme, že v jistém smyslu sem patří také dělitelnost celých čísel a množinová inkluse.

Při axiomatickém zavádění pojmu uspořádání zvolíme za primitivní pojmy *množinu* **M** a *dvojčlennou relaci* R, t. j. pravidlo, které udává, zda mezi *dvěma* prvky z **M** relace R platí nebo neplatí. Že mezi prvky $a, b \in M$[7a]) platí vztah R budeme symbolicky psát $a\,R\,b$.

O množině **M** budeme říkat, že je *relací R uspořádána*, nebo kratčeji, že je *uspořádanou množinou*, jestliže budou splněny axiomy:

1. *Pro každé dva prvky* $a, b \in M$ *platí právě jeden ze vztahů*

$$a = b, \quad a\,R\,b, \quad b\,R\,a.$$ [8])

2. $a, b, c \in M, \; a\,R\,b, \; b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c.$[9])

O relaci, která splňuje axiom 1, říkáme, že je vzhledem k množině **M** *trichotomická*, a o relaci, která splňuje axiom 2, že je *transitivní*.

Relaci, která splňuje axiomy 1 a 2, budeme nazývat také krátce uspořádáním.

Nyní uvedeme několik konkretních interpretací (modelů) pojmu uspořádání (přesvědčte se sami o tom, že jsou splněny axiomy 1 a 2): 1. Za množinu **M** vezměme množinu všech reálných čísel a za relaci R vztah $<$ (*větší*, *menší*). 2. **M** budiž množina všech bodů na přímce a relace R vztah „*leží napravo*". 3. **M** budiž množina všech bodů roviny, při čemž relace R je zavedena takto: $a\,R\,b$ resp. $b\,R\,a$ znamená, že *vzdálenost bodů* a a m *je menší* resp. *větší než vzdálenost bodů* b a m, kde m je určitý pevný bod naší roviny. Bude-li tedy vzdálenost am stejná jako bm, pak v našem modelu bude podle axiomu 1 $a = b$. 4. **M** budiž mno-

---

[7a]) Místo „$a \in M$ *a současně* $b \in M$" píšeme krátce „$a, b \in M$". Podobný význam má „$a, b, c \in M$".

[8]) Slůvko *právě* má v matematice zvláštní význam: *právě dvě přímky* znamená totéž jako *alespoň dvě přímky a současně nejvýše dvě přímky*. Ve starší terminologii by se místo *právě jeden ze vztahů* řeklo *jeden a jen jeden vztah*.

[9]) Symbol „$p \Rightarrow q$" čteme obvykle „*když platí p, pak platí také q*. Přesně vzato je však $\Rightarrow$ symbol pro *logickou implikaci*. Jsou-li p a q dva výroky, pak „$p \Rightarrow q$" znamená, že „*výrok p implikuje výrok q*", což má tento význam: ze čtyř možností, jež se navzájem vylučují, totiž [1] *p platí, q platí*; [2] *p neplatí, q neplatí*; [3] *p neplatí, q platí*; [4] *p platí, q neplatí*, nastane některá z prvých tří. Jsou-li p_1, p_2, q tři výroky, pak „$p_1, p_2 \Rightarrow q$" znamená, že „*současná platnost výroků* p_1 *a* p_2 *implikuje výrok* q". – Symbol „$p \Leftrightarrow q$" znamená totéž, jako „$p \Rightarrow q$ *a současně* $q \Rightarrow p$" čili $\Leftrightarrow$ je symbol pro *logickou ekvivalenci*.

žina všech mocnin čísla 3 (s celými kladnými exponenty) a relace R vztah „*je pravým dělitelem*". Při tom „*a je pravým dělitelem b*" znamená totéž jako „*číslo a je dělitelem čísla b, při čemž* $a \neq b$".

Relace může mít obecně ještě jiné vlastnosti než je trichotomie a transitivnost. Z nich důležité jsou *reflexivnost* a *symetrie*. Relace R je reflexivní, jestliže pro každé $a \in \mathsf{M}$ platí $a R a$. Relace R je symetrická, jestliže kdykoliv je $a R b$ je také $b R a$. Uvedeme příklady takových relací. Reflexivní, transitivní a nesymetrickou relaci nám představuje na př. vztah $\leq$ na množině reálných čísel nebo vztah „*je dělitelem*" na množině všech mocnin čísla 3. Relací reflexivní, transitivní a symetrickou je na př. známý vztah rovnosti ($=$). Příkladem množiny s netrichotomickou relací může být množina M všech částí neprázdné množiny A spolu se vztahem inkluse. V M mohou totiž existovat prvky, jež jsou *disjunktními částmi* množiny A, takže mezi nimi neplatí ani vztah $\subset$ ani $\supset$. Jiným příkladem může být množina všech přirozených čísel spolu se vztahem „*je dělitelem*", neboť na př. mezi dvěma různými prvočísly není tento vztah nikdy splněn.

O relaci uspořádání, t. j. o relaci R, která je trichotomická i transitivní, platí však následující věty, jak se dá z axiomů 1 a 2 snadno dokázat:

3. *Relace R není reflexivní.*
4. *Relace R není symetrická.*
5. *Každé dva různé prvky* $a, b \in \mathsf{M}$ *jsou v relaci, t. j. je vždy buď* $a R b$ nebo $b R a$.
6. *Zavedeme-li pomocí R relaci S tak, že je* $a S b$ *kdykoli je* $b R a$, *pak relace S je uspořádáním.*

K důkazu věty 6 si stačí uvědomit, že z toho, že R splňuje axiom 1 plyne, že i S splňuje axiom 1. Abychom dokázali, že S splňuje axiom 2 vezměme takové prvky $a, b, c \in \mathsf{M}$, že je $a S b$, $b S c$. Potom je ale také $b R a$, $c R b$, a protože R je transitivní, je $c R a$. Podle definice relace S je ale také $a S c$, což jsme měli dokázat. Právě definované uspořádání S se nazývá *inversní* k R a často se značí symbolem R^*. Je zřejmé, že uspořádání inversní k R^* je opět R.

Nyní se budeme blíže zabývat větami 3, 4, 5. Lze se totiž snadno přesvědčit, že místo tvrzení 1 a 2 můžeme vzít za axiomy tvrzení

5, 3 a 2, protože všechno, co lze odvodit (i to, co jsme dosud ještě neodvodili) z 1 a 2, lze také odvodit z 5, 3 a 2. To plyne odtud, že sama tvrzení 1, 2 lze z 5, 3 a 2 odvodit.

O tvrzení 2 je to triviální, protože je v obou systémech obsaženo. Zbývá to tedy dokázat o tvrzení 1. Nejdříve dokážeme tu část, která říká, že pro každé dva prvky a, b platí alespoň jeden z případů $a = b$, $a R b$, $b R a$. Vezměme libovolné prvky $a, b \in \boldsymbol{M}$. Je-li $a = b$, není již co dokazovat. Je-li $a \neq b$, pak podle tvrzení 5 je buď $a R b$ nebo $b R a$ a tím jsme hotovi. Dokážeme nyní druhou část tvrzení 1, že totiž platí nejvýše jeden z případů $a = b$, $a R b$, $b R a$. Kdyby platil zároveň první a druhý, mohli bychom v $a R b$ „dosadit" za b prvek a, takže by bylo $a R a$, což je ve sporu s 3. Zcela tak se dokáže, že nemůže platit zároveň první a třetí případ. Konečně ani druhý a třetí nemohou zároveň platit, protože potom by podle 2 bylo $a R a$, což by bylo opět ve sporu s 3. Tím je celý důkaz hotov.

Poznamenejme ještě, že tvrzení 3 jsme potřebovali pouze k důkazu druhé části tvrzení 1. V tomto místě důkazu lze však místo tvrzení 3 užít také tvrzení 4. Neboť kdyby platil zároveň první a druhý z diskutovaných případů, pak bychom v $a R b$ mohli nalevo „dosadit" za a a napravo za b podle vztahu $a = b$, čímž bychom dostali, že platí také $b R a$, což by bylo ve sporu s tvrzením 4. Podobně, kdyby platil první a třetí případ. Vzhledem k tvrzení 4 je bezprostředně patrno, že nemůže platit ani druhý ani třetí případ.

Vidíme tedy, že i tvrzení 5, 4 a 2 lze vzít jako axiomy a tím docházíme ke *třem různým axiomatisacím* pojmu uspořádání. Všechny tři mají tytéž primitivní pojmy a liší se jen v axiomech. První má za axiomy tvrzení 1 a 2, druhá tvrzení 5, 3 a 2, třetí 5, 4 a 2.

Axiomatický výklad o uspořádání lze podat také pomocí axiomatického systému, který vychází z *jiných primitivních pojmů*. Takový výklad pomocí jiného axiomatického systému si také nyní skutečně provedeme. Za tím účelem se ještě v dosavadní axiomatice (s tvrzeními 1 a 2 jako axiomy) seznámíme s jedním novým pojmem.

Mějme opět naši množinu $\boldsymbol{M}$ a předpokládejme, že je relací R uspořádána. Pomocí R zavedeme nyní *novou relaci* mezi prvky množiny $\boldsymbol{M}$, tentokráte *trojčlennou*, t. j. týkající se *tří* prvků, kterou budeme značit μ. Jsou-li prvky a, b, c (v tomto pořadí) v relaci μ, budeme to symbolicky psát $\mu(abc)$. Relace μ bude definována tak, že

$$\mu(abc) \Leftrightarrow a\,R\,b\,R\,c \text{ nebo } c\,R\,b\,R\,a.$$ [10])

O relaci μ mezi prvky a, b, c můžeme tedy mluvit, jen když tyto prvky jsou všecky různé. Podle interpretací relace R je vidět, že relace μ je abstrakce známého vztahu „*mezi*". Podívejme se nyní na některé vlastnosti tohoto vztahu.

7. $\mu(abc) \Rightarrow \mu(cba)$.

Tato vlastnost plyne přímo z definice vztahu μ.

8. *Jsou-li a, b, c tři různé prvky z* $\mathbf{M}$, *pak nastává právě jeden z případů* $\mu(abc)$, $\mu(bca)$, $\mu(cab)$.

Bezprostředním důsledkem věty 5 je, že nastává *aspoň* jeden z těchto tří případů. Zbývá tedy dokázat, že nastává *nejvýše* jeden z těchto případů. Nejdříve dokážeme, že nemůže současně být $\mu(abc)$, $\mu(bca)$. Za předpokladu, že oba tyto vztahy platí, odvodíme spor. Rozeznávejme dva případy podle toho, co znamená $\mu(abc)$. Nechť nejdříve $\mu(abc) \Leftrightarrow a\,R\,b\,R\,c$. Jestliže $\mu(bca) \Leftrightarrow b\,R\,c\,R\,a$, pak podle věty 2 je $a\,R\,a$, což je spor, a jestliže $\mu(bca) \Leftrightarrow a\,R\,c\,R\,b$, pak podle věty 2 je $b\,R\,b$, což je spor. Budiž nyní $\mu(abc) \Leftrightarrow c\,R\,b\,R\,a$. Potom i předpoklad $\mu(bca) \Leftrightarrow b\,R\,c\,R\,a$ i předpoklad $\mu(bca) \Leftrightarrow a\,R\,c\,R\,b$ vede ke sporu. Ve všech případech dostáváme spor. Stejným způsobem se dokáže, že ze zmíněných tří případů nemůže současně nastat ani první s třetím, ani druhý s třetím.

Další vlastnosti relace μ uvedeme bez důkazu.

9. $\mu(abc), \mu(bcd) \Rightarrow \mu(abd)$.

10. $\mu(abc), \mu(abd), c \neq d \Rightarrow \mu(bcd)$ *nebo* $\mu(bdc)$.

Tyto věty vyjadřují názorné vlastnosti vztahu „*mezi*" pro skupinu čtyř bodů na přímce.

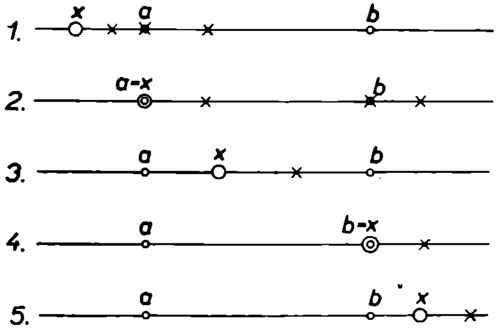
Nyní se dá dokázat toto: jestliže se relace μ položí jako *primitivní pojem* a jestliže se bude předpokládat, že vzhledem k množině $\mathbf{M}$ *splňuje tvrzení* 7, 8, 9 a 10 *vzatá za axiomy*, pak se dá pomocí μ definovat dvojčlenná relace R o níž se z vět 7, 8, 9 a 10 dokáže, že splňuje tvrzení 1 a 2. Definovat relaci R pomocí μ lze velmi názorně na příklad tímto způsobem:

---

[10]) Místo „*$a\,R\,b$ a současně $b\,R\,c$*" píšeme zde krátce „*$a\,R\,b\,R\,c$*".

V množině $\boldsymbol{M}$ zvolíme dva pevné prvky a, b a pro libovolné prvky $x, y \in \boldsymbol{M}$ položíme $x R y$, jestliže (viz obr. 1)

1. *při* $\mu(xab)$ *bude* $\mu(xya)$ *nebo* $y = a$ *nebo* $\mu(xay)$
2. *při* $x = a$ *bude* $\mu(ayb)$ *nebo* $y = b$ *nebo* $\mu(aby)$
3. *při* $\mu(axb)$ *bude* $\mu(axy)$
4. *při* $x = b$ *bude* $\mu(aby)$
5. *při* $\mu(abx)$ *bude* $\mu(bxy)$.



Obr. 1.

Jiným způsobem, jak zavést pomocí relace μ relaci R pro uspořádání, se budeme zabývat v první kapitole našeho výkladu geometrie, kde většina **11**. odstavce bude v podstatě věnována zavedení pojmu uspořádání pomocí relace μ.

Ve zbývající části tohoto odstavce uvedeme ještě některé zvláštní vlastnosti uspořádané množiny, o nichž bude během našeho výkladu geometrie řeč. Jde zejména o pojem *spojitého uspořádání* (*spojitosti*), jehož význam pro geometrii bude blíže probrán v odstavci **13**. Zbytek tohoto odstavce stačí proto číst teprve současně s odstavcem **13**.

Všimneme-li si blíže uspořádané množiny racionálních nebo reálných čísel nebo bodů na přímce, pak snadno nahlédneme, že mají následující vlastnost:

11. *Ke každým dvěma prvkům* $a, b \in \boldsymbol{M}$ *existuje vždy prvek* $c \in \boldsymbol{M}$ *takový, že je* $\mu(acb)$ *čili že je buď* $a R c R b$ *nebo* $b R c R a$.

Uspořádaná množina, která vyhovuje tvrzení 11 se nazývá *hustě uspořádanou množinou*. Při tom tvrzení 11 je na axiomech 1, 2 (nebo 5, 3, 2 resp. 5, 4, 2, které jsou s 1, 2 ekvivalentní) nezávislé, t. j. nedá se z nich dokázat, jak ukazuje příklad množiny přirozených čísel s uspořádáním „větší — menší", které splňuje tvrzení 1, 2, nikoli však tvrzení 11. Toto tvrzení musí proto být pojímáno jako další axiom.

Z formulace tohoto axiomu je vidět, že každá hustě uspořádaná množina má nekonečně mnoho prvků.

Nyní přistoupíme k pojmu *spojitého uspořádání*. Za tím účelem zavedeme pojem *řezu* (kterému se často také říká *Dedekindův řez*):

Jestliže rozdělíme všechny prvky hustě uspořádané množiny $\boldsymbol{M}$ *do dvou neprázdných tříd, označených* $\boldsymbol{S}_1$ a $\boldsymbol{S}_2$, *tak, že platí*

a) *třídy* $\boldsymbol{S}_1$ *a* $\boldsymbol{S}_2$ *jsou disjunktní,*

b) *každý prvek z* $\boldsymbol{M}$ *náleží alespoň do jedné z obou tříd,*

c) *jsou-li* a, b *libovolné dva prvky z* $\boldsymbol{M}$, *pro které je* $a \in \boldsymbol{S}_1$, $b \in \boldsymbol{S}_2$, *pak je vždy* $a\ R\ b$,

potom řezem množiny $\boldsymbol{M}$ *rozumíme dvojici obou tříd* $(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)$.

Dříve než osvětlíme pojem řezu na příkladě, uvedeme hned ještě následující definici:

Říkáme, že řez $(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)$ *množiny* $\boldsymbol{M}$ *je vytvořen prvkem* $d \in \boldsymbol{M}$ *nebo že* d *je vytvořující prvek řezu, jestliže pro každé* $a \neq d$, $a \in \boldsymbol{S}_1$ *a pro každé* $b \neq d$, $b \in \boldsymbol{S}_2$ *platí* $\mu(adb)$ (obě nerovnosti $a \neq d$, $b \neq d$ píšeme proto, že se nestaráme o to, zda prvek d patří do $\boldsymbol{S}_1$ nebo $\boldsymbol{S}_2$, při čemž podle vlastnosti b), uvedené v definici řezu, jistě náleží jedné z obou tříd).

Jinými slovy bychom tedy mohli říci, že vytvořující prvek d řezu má tu vlastnost, že všechny prvky x téže třídy leží po téže jeho straně, t. j. pokud je $x \neq d$, platí stále $x\ R\ d$ nebo $d\ R\ x$, a to podle toho, je-li $x \in \boldsymbol{S}_1$ nebo $x \in \boldsymbol{S}_2$. Z vlastnosti c) uvedené v definici řezu plyne, že je-li a prvek třídy $\boldsymbol{S}_1$, pak každý prvek $x \in \boldsymbol{M}$, pro který je $x\ R\ a$, patří také do $\boldsymbol{S}_1$. Podobně to platí pro $\boldsymbol{S}_2$.

Z toho, co jsme dosud řekli, je vidět, že každý prvek m hustě uspořádané množiny $\boldsymbol{M}$ vytvořuje jistý řez. Ten lze na př. sestrojit tak, že do třídy $\boldsymbol{S}_1$ dáme všechny prvky x množiny $\boldsymbol{M}$, pro které je $x\ R\ m$, do $\boldsymbol{S}_2$ všechny prvky $y \in \boldsymbol{M}$, pro které je $m\ R\ y$, a prvek m sám dáme buď do $\boldsymbol{S}_1$ nebo $\boldsymbol{S}_2$. Na základě tohoto faktu bychom mohli nyní vymyslet libovolný počet příkladů množin s nějakým řezem.

Dá se snadno dokázat, že řez hustě uspořádané množiny je vytvořen *nejvýše jedním* prvkem. Z předpokladu, že by řez $(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)$ množiny $\boldsymbol{M}$ měl dva vytvořující prvky $d_1 \neq d_2$ plyne totiž spor, jak hned dokážeme. Předpokládejme pro určitost, že je $d_1\ R\ d_2$. Protože množina $\boldsymbol{M}$ je relací R hustě uspořádána, existuje prvek $m \in \boldsymbol{M}$ takový, že je $\mu(d_1md_2)$ čili že je $d_1\ R\ m\ R\ d_2$. Prvek m nemůže tedy náležet ani do $\boldsymbol{S}_1$ ani do $\boldsymbol{S}_2$ (kdyby totiž náležel do $\boldsymbol{S}_1$, pak by bylo $m\ R\ d_1$, což by bylo ve sporu se vztahem $d_1 \, R \, m \, R \, d_2$, právě tak jako předpoklad, že m náleží do $\boldsymbol{S}_2$). To však není možné, protože $(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)$ je řez a podle definice řezu musí každý prvek z množiny $\boldsymbol{M}$ náležet jedné z obou tříd $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$.

Vraťme se ještě k definici řezu! Jestliže bychom pro uspořádání množiny $\boldsymbol{M}$ měli místo relace R dánu relaci μ (jako tomu tak bude v našem výkladu geometrie), je vhodné podmínku c) v definici řezu nahradit touto s ní ekvivalentní podmínkou:

c′) *jsou-li* a_1, b_1 *libovolné dva prvky z* $\boldsymbol{S}_1$, *pak všechny prvky* $x \in \boldsymbol{M}$, *pro které je* $\mu(a_1 x b_1)$, *patří také do* $\boldsymbol{S}_1$ *a podobně je-li* $a_2, b_2 \in \boldsymbol{S}_2$, *pak pro všechna* $x \in \boldsymbol{M}$, *pro která je* $\mu(a_2 x b_2)$, *je také* $x \in \boldsymbol{S}_2$.

Důkaz ekvivalence podmínek c) a c′) není složitý a proto ho jen naznačíme. Že z c) plyne c′) se dokáže na základě transitivnosti relace pro uspořádání. K tomu, aby se z c′) odvodilo c) stačí dokázat, že když je $a_1, b_1 \in \boldsymbol{S}_1$ a $a_2, b_2 \in \boldsymbol{S}_2$ a při tom $a_1 \, R \, a_2$, pak je také $b_1 \, R \, b_2$. To se ale snadno dokáže sporem pomocí transitivnosti relace R.

Zatím co každý prvek množiny $\boldsymbol{M}$ je vytvořujícím prvkem jistého řezu, opak vždy neplatí: někdy hustě uspořádaná množina $\boldsymbol{M}$ připouští takový řez, že k němu žádný vytvořující prvek neexistuje.

Uvedeme příklad: vezmeme množinu všech racionálních čísel s obvyklým uspořádáním „větší — menší" (ta je jistě hustě uspořádána) a řez utvoříme takto: do třídy $\boldsymbol{S}_1$ dáme všechna čísla a, pro která je $a^2 < 2$, do třídy $\boldsymbol{S}_2$ všechna ostatní čísla, což tedy znamená, že to budou čísla b, pro něž je $b^2 > 2$ (racionální číslo, jehož druhá mocnina by bylo číslo 2, neexistuje). Tento řez *nemá* vytvořujícího prvku, neboť neexistuje racionální číslo d tak, že by pro všechna $x \in \boldsymbol{S}_1$ $(x^2 < 2)$ bylo $x \leqq d$ a současně pro všechna $y \in \boldsymbol{S}_2$ $(y^2 > 2)$ bylo $y \geqq d$.

Vidíme proto, že následující tvrzení, totiž

12. *Ke každému řezu hustě uspořádané množiny existuje v této množině vytvořující prvek*

neplyne z axiomů 1, 2, 11 a proto může být novým axiomem. Množina $\boldsymbol{M}$ se nazývá *spojitě uspořádaná*, jestliže její uspořádání vyhovuje axiomům 11 a 12.

Na závěr se ještě zmíníme o supremu a infimu množiny. Jestliže prvek $d \in \boldsymbol{M}$ je vytvořující prvek řezu $(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)$ množiny $\boldsymbol{M}$, potom má vzhledem k množině S_1 (pro S_2 by to platilo analogicky) tyto vlastnosti:

a) *pro každý prvek* $x \in S_1$ *platí buď* $x R d$ *nebo* $x = d$,

b) *je-li* $d' \in M$, $d' R d$, *pak pro* $x \in S_1$ *není vždy splněno, že buď* $x R d'$ *nebo* $x = d'$, *to je, v* S_1 *existuje alespoň jeden prvek* x' *tak, že je* $d' R x'$.

Vezmeme-li nyní jakoukoli množinu $N \subset M$, k níž existuje prvek $d \in M$ s vlastnostmi a), b) právě uvedenými (kde místo S_1 by se psalo N), potom prvek d se nazývá *supremum množiny* N. Analogicky se definuje *infimum množiny* N. Supremum resp. infimum množiny je jakési zobecnění pojmu největšího resp. nejmenšího prvku. Největší prvek neboli *maximum* množiny N je totiž takový prvek $m \in N$, že pro všechny prvky $x \in N$, $x \neq m$ platí $x R m$. Obdobná bude definice nejmenšího prvku neboli *minima* množiny N. Zatím co u množin s konečným počtem prvků existuje vždy maximum a minimum, nemusí tomu tak být u množin s nekonečně mnoha prvky, i když jsou omezené (množina $N \subset M$ je *omezená*, jestliže existují prvky $k, l \in M$ tak, že pro všechny prvky $x \in N$ platí $k R x R l$), jak ukazuje příklad množiny A čísel $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, obecně $\frac{1}{n}$, která nemá minimum. Je-li však množina M, z níž N bylo vzato, spojitě uspořádaná a při tom množina $N \neq O$ je omezená, pak *vždy* existuje supremum a infimum množiny N. Důkaz tohoto tvrzení, kterého ostatně k našemu výkladu geometrie nepotřebujeme, je celkem snadný: na množině M utvoříme řez (Z_1, Z_2) tak, že do třídy Z_1 dáme každý prvek $x \in N$ spolu se všemi prvky $y \in M$, pro něž platí $y R x$, a do Z_2 dáme prvky zbývající. Bez obtíží si lze podle definice řezu ověřit, že (Z_1, Z_2) je opravdu řez množiny M, a proto podle axiomu 11 existuje vytvořující prvek tohoto řezu. Tento prvek je supremum množiny N, jak se můžeme snadno podle definice suprema přesvědčit. Analogicky probíhá důkaz pro infimum.

Jestliže množina N má maximum, pak zřejmě má také supremum, a to právě toto maximum. Podobně to platí pro infimum a minimum. Naše množina A má supremum 1, jež je současně maximem, naproti tomu nemá minimum. Má však infimum, a to číslo 0.

7. Geometrie a axiomatika. Na jiném místě jsme již připomněli, že Eukleides se první pokusil přesně logicky vyložit určité partie matematiky, mezi nimi také geometrii. Řekli jsme ovšem také, že jeho pokus není plně uspokojivý a ani nemohl být jinačí vzhledem ke stavu rozvoje řecké matematiky. Poznamenali jsme přitom, že důsledné zaxiomatisování geometrie je dílem teprve 19. a 20. století. V tomto paragrafu se pokusíme stručně shrnout charakteristiky jednotlivých axiomatických systémů, jež vznikly v poslední době.

Axiomatisace spočívá, jak jsme si již řekli, jednak ve stanovení některých pojmů jakožto pojmů primitivních, jednak ve výběru některých tvrzení za axiomy.

První novodobé pokusy o axiomatisaci geometrie braly za primitivní pojmy pojem *bodu* a pojem *vzdálenosti* či *shodnosti* (nebo také v odvozené formě pojem kružnice a koule). Tak na příklad o Leibnizovi je známo, že se touto cestou pokoušel (1679) definovat lineární geometrické útvary: rovinu jakožto množinu všech bodů (jako geometrické místo bodů), stejně vzdálených od dvou pevných bodů, a přímku jako průsečnici dvou rovin nebo také jako množinu všech bodů stejně vzdálených od tří bodů neležících v přímce. Podobným způsobem zaváděli rovinu a přímku F. Bolyai a Lobačevskij: rovinu jakožto množinu všech bodů společných vždy dvěma koulím téhož poloměru, opisovaných stále kolem týchž dvou středů, a přímku jakožto množinu všech bodů společných vždy dvěma kružnicím téhož poloměru, opisovaným v téže rovině stále kolem týchž dvou středů. Také Lobačevského současník, francouzský matematik A. Cauchy, se pokoušel na základě pojmu bodu a vzdálenosti definovat poněkud jiným způsobem přímku a rovinu. Přímku určenou body A, B definoval jako množinu všech bodů X takových, že neexistuje v prostoru jiný bod X' té vlastnosti, že by bylo současně $XA \equiv X'A$, $XB \equiv X'B$ (symbol $XA \equiv X'A$ zde znamená, že úsečka XA je shodná s úsečkou $X'A$ čili že body X a A mají touž vzdálenost jako body X' a A). Podle toho definoval analogicky rovinu ABC jako množinu bodů X takových, že v prostoru neexistuje jiný bod X', pro který by bylo $XA \equiv X'A$, $XB \equiv X'B$, $XC \equiv X'C$.

Vidíme tedy, že s různých stran, a to již dost brzy, byly činěny pokusy budovat geometrii na základě pojmu vzdálenosti, avšak důsledná axiomatika pomocí tohoto primitivního pojmu tehdy nebyla vybudována. K tomu bylo nutno provést nejdříve logický rozbor pojmu shodnosti i celé řady pojmů jiných, které se na shodnost převést nedají. Mezi takové patří na příklad pojmy týkající se *uspořádání* bodů na přímce a *rozmístění* bodů v rovině nebo v prostoru, totiž pojmy jako úsečka, polopřímka, polorovina, vztah „mezi", vnitřek trojúhelníka atd. Po prvé na ně upozornil M. Pasch a provedl jejich rozbor. On to také byl, který vlastně první podal důslednou axiomatisaci geometrie (1882). Za primitivní pojmy zvolil *bod, úsečku, omezenou část roviny* (Flächenstück) a *vztah shodnosti.* Italský matematik Peano později ukázal, že v Paschově systému lze vypustit primitivní pojem „omezená část roviny", protože ho lze definovat na základě pojmu úsečky. Ještě o něco později američtí matematikové Moore (1902) a Veblen (1904) nahradili pojem úsečky vztahem „mezi", tak jak jsme o něm mluvili v odstavci 6. Je zřejmé, že výrok „bod C leží na úsečce AB" je týž jako výrok „bod C leží mezi body A a B."

Samotným pojmem shodnosti (úseček a úhlů) se vedle zmíněného již Pasche zabývali také italští matematikové Veronese (1891) a Pieri (1899). Veronese ve své axiomatice bere za primitivní pojmy vedle *bodu, přímky* a *uspořádání* ještě *shodnost úseček*. Shodnost úhlů zavádí definitoricky na základě shodnosti úseček. Poněkud jiným způsobem postupuje Pieri. Za primitivní pojem klade místo pojmu shodnosti pojem *pohybu*: při tom se řekne, že útvar V lze pohybem převést v útvar W, jestliže lze mezi prvky útvaru V a útvaru W (t. j. na př. mezi body, z nichž se V resp. W skládá) určit jednoznačné přiřazení, které splňuje jisté axiomy. Shodnost se pak zavádí definitoricky tak, že dvě úsečky resp. dva úhly jsou shodné v tom a jen v tom případě, jestliže je lze v sebe převést pohybem. Z pojmu pohybu lze také odvodit na př. pojem přímky AB: je to množina všech bodů, které zůstávají nezměněny všemi pohyby, které nechávají nezměněný současně bod A i bod B.

Pomocí pojmů pohybu, bodu a vzdálenosti (jakožto reálného čísla přiřazeného dvojici bodů), vzatých za pojmy primitivní, odvodil celou geometrii ruský matematik V. F. Kagan (1902) a podobně Italové Peano (1902) a Levi (1904) a Angličan Coolidge (1909). Jestliže vzdálenost bodů M, N je označena symbolem $\varrho(MN)$, potom Coolidge definuje přímku určenou body A, B jako množinu, do níž patří všechny body X, pro něž je $\varrho(AB) = \varrho(AX) + \varrho(XB)$ (jež tvoří úsečku AB), dále všechny body X, pro něž je $\varrho(AX) = \varrho(AB) + \varrho(BX)$ (ty tvoří prodloužení úsečky AB za bod B), a konečně všechny body X, pro něž je $\varrho(XB) = \varrho(XA) + \varrho(AB)$ (jež tvoří opačné prodloužení úsečky AB).

Zatím co dosud uvedení matematikové definovali pomocí primitivních pojmů přímku a rovinu jakožto jisté množiny bodů, někteří matematikové položili *bod*, *přímku* a *rovinu* přímo jako pojmy primitivní. Učinil tak na příklad italský matematik F. Enriques (1898). Vedle pojmů bod, přímka, rovina je však nutno vzít ještě jako primitivní pojem vztah mezi těmito útvary, který je opisován různými slovy, jako na př. bod leží na přímce, přímka prochází bodem, přímka spojuje dva body, rovina proložená přímkou a bodem a pod. Zdálo by se, že zde jde o vztahy různé, ale ukázalo se, že je zbytečné je od sebe rozlišovat a že podstatě věci lépe odpovídá pojímat tyto vztahy jako vztah jediný. Nejčastěji se mu pak dává název *incidence*, takže se říká „přímka incidentní s bodem", „bod incidentní s přímkou" atd.

Důležitým příspěvkem pro axiomatisaci geometrie byl rozbor pojmu *spojitosti*, který hraje důležitou roli jak v geometrii, tak v matematické analyse (v infinitesimálním počtu). S pojmem spojitosti souvisí v geometrii představa souvislého oblouku čáry, který se rozpadne na dvě části vyjmutím jednoho bodu, nebo také představa patřící spíše do mechaniky, jako je plynulý pohyb bodu nebo plynulé otáčení. Převedením pojmu takovéto spojitosti na aritmetické pojmy (na pojem množiny a uspořádání, jak jsme o tom mluvili v odstavci **5** a **6**) se úspěšně zabývalo několik matematiků: K. Weierstrass, G. Cantor (1871), R. Dedekind (1872). (V odstavci **6** jsme se poněkud dotkli Dedekindova zavedení pojmu spojitosti.)

Z toho, co jsme dosud uvedli, je patrné, že různí matematikové se zaměřili vždy jen na určitý úsek geometrie, který se jim pak podařilo náležitě osvětlit a zaxiomatisovat. Takové podstatně různé úseky v axiomatisaci geometrie můžeme rozeznávat tři: první se týká incidence, druhý rozmístění (uspořádání), třetí shodnosti.

Podat axiomatiku celé geometrie znamená nyní vybrat náležitě axiomatiku každého z oněch tří úseků a vhodně tyto úseky skloubit v jeden celek. Při tom je mezi těmito třemi úseky taková souvislost, že rozmístění nelze studovat bez incidence a podobně shodnost bez rozmístění a incidence. Naproti tomu incidence může sama o sobě tvořit soběstačný celek, který se nemusí dovolávat jiných pojmů: obor incidence tvoří v geometrii jakousi kostru, axiomy jiných skupin ji vyplňují již jen dalšími vlastnostmi. Každá z geometrií jako je eukleidovská, hyperbolická, eliptická nebo sférická je dostatečně charakterisována již vlastnostmi její incidence. Vždyť i sám axiom o rovnoběžkách patří mezi axiomy incidence.

Spojení zmíněných tří úseků v jedinou axiomatiku geometrie bylo předmětem úvah různých matematiků. Velmi úspěšně se tohoto úkolu zhostil D. Hilbert, který ve spise *Grundlagen der Geometrie* z r. 1899 podal axiomatiku geometrie, která se později stala klasickou. Jeho spis vyšel postupně v několika vydáních, v nichž byla původní axiomatika ještě o něco zjednodušena, takže dnes se Hilbertovy axiomatiky geometrie velmi hojně užívá. Také výklad geometrie v naší knížce je založen v podstatě na Hilbertových axiomech.

8. Poznámka k dalšímu výkladu. Forma, kterou se zapíše matematický výklad, může být velmi rozmanitá a je do určité míry věcí módy. Jiný styl byl vžitý v 19. století, jiný styl převládá dnes. Všeobecně vzato jsou možny dva extrémy. První záleží v tom, že se výklad i se všemi názornými a heuristickými poznámkami podává v souvislém celku a jen občas jsou důležitá fakta shrnuta do vět. Druhý extrém by se mohl nejlépe charakterisovat slovy „definice, věta, důkaz“. Místo plynulého ničím nepřerušovaného výkladu se zde objevuje výklad roztrhaný na drobné celky: z počátku jsou to příslušné definice a axiomy a pak střídavě znění vět a jejich důkazy, případně další definice, vše to bez zbytečných slov a v pokud možno nejpřesnější formulaci.

V současné době je patrna tendence k extrému druhému. Tato forma má před první tu nesmírnou výhodu, že je přehledná, že všechny předpoklady jednotlivých úsudků jsou vždy přesně uvedeny, což při způsobu prvním je nutno mnohdy zpátky hledat v textu; další její výhodou je stručnost. Její nevýhodou je, že studium takto podaného výkladu je trochu obtížnější, protože vyžaduje u čtenáře větší samostatnost. Správný výklad má být totiž takový, aby čtenář nebo posluchač v každém okamžiku věděl, co se vlastně dělá a za jakým cílem. Extrémní výklad formou „věta — důkaz“ má právě tu potíž, že čtenáři není jen tak beze všeho patrno, proč věty za sebou následují právě v uvedeném pořadí. Vidí sice, že věty za sebou následují tak, že důkaz žádné z nich se nedovolává vět uvedených až po ní, přitom mu ale pořadí připadá dost umělé. Ve skutečnosti je to tak, že ten, kdo takový výklad psal, nevypisoval hned věty za sebou v pořadí, jak jsou nakonec sepsány, nýbrž jejich výčet postupně doplňoval. Na příklad v určitém paragrafu bylo nutno dokázat dvě věty fundamentální důležitosti. Při promýšlení jejich důkazu se ukázalo, že by důkaz byl snadný, kdyby se nejdříve dokázala věta pomocného charakteru. K důkazu této pomocné věty se třeba opět ukázalo vhodné odvodit ještě několik pomocných vět. A tak se takovýmto způsobem pozpátku tvořil sled vět, které pak na sebe krásně navazují. Bylo by ovšem možné místo důkazu hlavní věty, rozkouskovaného na pomocné věty, uvést tento důkaz v celku, i když by zabral několik stránek. Je však lépe každý krok isolovat jako pomocnou větu, a to jednak kvůli přehlednosti, jednak kvůli ekonomičnosti, protože mnohý krok se v důkazech vět vyskytuje vícekrát, takže později nemusí být už opakován, ale lze říci prostě „podle VĚTY 11,19 víme že...“ a pod.

Je tedy nutno, aby čtenář při studiu výkladu formou *věta — důkaz* znal předem cestu, proč se od jedné věty přechází k druhé právě v uvedeném pořadí. To může poznat na příklad tak, že projde nejprve znění vět jak za sebou sledují, zatím bez čtení důkazů. Autoři často pomáhají čtenáři naznačit a zdůvodnit směr další cesty různými způsoby: buď poznámkami, uvedenými mezi jednotlivými větami, buď tím, že se odliší věty hlavní od pomocných (na př. tak, že se tyto označí přímo slovy „*pomocná věta*“ nebo někdy řeckým slovem „*lemma*“) a že se bezprostřední důsledky hlavních vět označují slovem „*korolár*“. Nakonec je nutno poznamenat, že žádný z obou zmíněných extrémů se nikdy neobjevuje v ryzím tvaru, nýbrž v různých vzájemných kombinacích.

Výklad geometrie v této knížce je podán formou *věta — důkaz*. Pro větší srozumitelnost je na začátku každého odstavce petitem naznačen jeho program i s upozorněním na hlavní věty, jimž ostatní slouží jako věty rázu spíše pomocného.