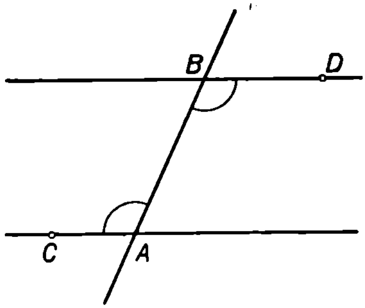
KAPITOLA II

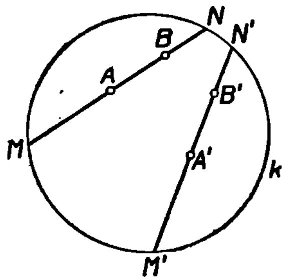
DVOJÍ GEOMETRIE ROVINY

14. Neprotínající se přímky v rovině.

Na předcházejících stránkách jsme se seznámili se základními geometrickými pojmy, při čemž jsme se dosud nedotkli otázky neprotínajících se přímek. Tím se budeme zabývat v tomto i příštím odstavci. Svoje úvahy omezíme v obou odstavcích pouze na geometrii roviny.



Obr. 35.



Obr. 36.

DEFINICE. Dvě přímky, které mají společný bod (které se protínají) nazýváme *různoběžnými* (různoběžkami), v opačném případě říkáme, že to jsou přímky *neprotínající se* nebo také *nerůznoběžné* (nerůznoběžky).

Při tom přímky nerůznoběžné leží buď v rovině nebo neleží. V prvém případě říkáme někdy, že přímky jsou rovnoběžné, v druhém mimoběžné. Názvu „rovnoběžné" budeme však pokud možno málo užívat, protože se mu dává leckdy ještě jiný smysl, jak uvidíme později.

VĚTA 14,1. *V rovině existují přímky, které se neprotínají.*

DůKAZ. Dvě přímky v rovině, které mají společnou kolmici se neprotínají, protože jinak by bodem bylo možno vést k přímce dvě kolmice, což odporuje VĚTĚ 12,21.

VĚTA 14,2. *Body C a D buďtež na různých stranách od přímky $\overline{AB}$ a přitom nechť $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle DBA$. Pak se přímky $\overline{CA}$ a $\overline{BD}$ neprotínají.*

DŮKAZ. Kdyby se přímky $\overline{BD}$ a $\overline{CA}$ (viz obr. 35) protly v bodě E, pak v trojúhelníku $\triangle ABE$ by součet úhlů při vrcholech A a B byl $2R$, což není podle VĚTY 12,28 možné.

OZNAČENÍ. Fakt, že na přímkách p, q, r lze určit body A, B, C, D tak, že $p = \overline{AC}$, $q = \overline{BD}$, $r = \overline{AB}$, při čemž body C a D jsou na různých stranách od přímky r a při tom $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle DBA$ (resp. $\sphericalangle CAB \not\equiv \sphericalangle DBA$), budeme také krátce vyjadřovat tak, že *součet vnitřních úhlů přímek p a q s příčkou r po jedné její straně je roven dvěma pravým* (resp. *různý od dvou pravých*).[16])

VĚTA 14,3. *V rovině lze každým bodem mimo přímku vést alespoň jednu s ní se neprotínající přímku.*

DŮKAZ plyne z toho, že bodem můžeme k dané přímce vždy vést kolmici, a z VĚTY 14,1.

Nyní vzniká otázka, lze-li bodem mimo přímku (v rovině, kterou bod a přímka určují) vést k této přímce nerůznoběžku *právě jednu* nebo *více*. O tom však nelze rozhodnout na základě dosud uvedených axiomů, neboť připouštějí jednak modely, ve kterých je zmíněná nerůznoběžka právě jedna (takové jsou na př. MODELY 1 a 2, str. 43), jednak modely, ve kterých takových nerůznoběžek lze vést více (nekonečně mnoho). Uveďme příklad takového modelu.

MODEL 5. Vezměme obyčejnou eukleidovskou rovinu a v ní nějakou kružnici k (viz obr. 36). „Bodem" našeho modelu rozumějme nyní každý bod uvnitř kružnice k, „přímkou" každou tětivu této kružnice (ovšem bez koncových bodů) a „rovinou" celý vnitřek kružnice.[16a]) Ponecháme-li vztahům *incidence* a *mezi* smysl, jaký mají v obyčejné rovině, pak jsou zřejmě splněny důsledky axiomů $\mathfrak{J}$ pro geometrii roviny a axiomy $\mathfrak{R}$, 1—5.

Shodnost úseček zavedeme tak, že „úsečky" $\overline{AB}$ a $\overline{A'B'}$ budou shodné, jestliže čtveřice bodů M, A, B, N a M', A', B', N' (kde M, N resp. M', N' jsou průsečíky přímky $\overline{AB}$ resp. $\overline{A'B'}$ s kružnicí k a kde pořadí bodů v každé čtveřici odpovídá přirozenému uspořádání bodů na přímce) budou projektivní (viz obr. 36). Z projektivních vlastností čtveřic bodů plyne, že jsou splněny axiomy $\mathfrak{S}$, 1—3. (O těchto projektivních vlastnostech viz na př. *Jan Vojtěch*: *Geometrie projektivní*, JČMF, Praha 1932, str. 43—47 a str. 63.)

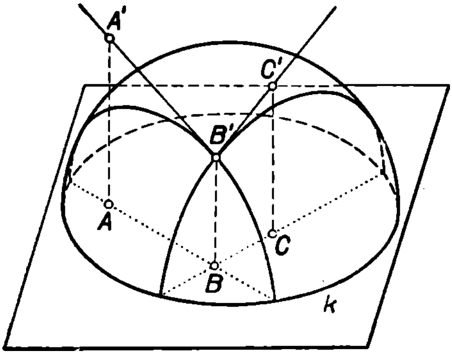
---

[16]) Výrok vytištěný kursivou vzat doslova nemá smysl, protože jsme nezavedli pojem úhlu dvou přímek, nýbrž jen úhel polopřímek nebo polorovin. Uvedený výrok má tedy smysl pouze jako celek, a ačkoliv bychom se bez něho obešli, uvádíme ho proto, že se jím zjednoduší naše vyjadřování. Zmíněný výrok se také objevuje v klasické formulaci V. Eukleidova postulátu (viz str. 16).

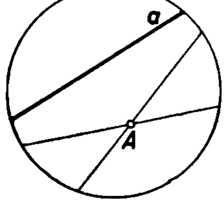
[16a]) *Vnitřek kružnice* je množina všech bodů, které leží *uvnitř kružnice*, t. j. takových bodů, které mají od středu kružnice vzdálenost *menší* než je poloměr kružnice. Body, které leží *na kružnici*, neleží již tedy uvnitř kružnice.

Shodnost úhlů zavedeme takto: mysleme si nejdříve polokouli, která má kružnici k za kružnici hlavní (na př. jako rovník) — viz obr. 37. Je-li nyní v naší „rovině" dán „úhel" $\sphericalangle ABC$, pak vedeme přímkami $\overline{AB}$ a $\overline{BC}$ roviny kolmé na rovinu kružnice k, které protnou povrch polokoule ve dvou polokružnicích, které mají společný bod B'. Úhlu $\sphericalangle ABC$ přiřadíme nyní úhel tečen $\sphericalangle A'B'C'$ a dva „úhly" $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle DEF$ budeme považovat za „shodné", budou-li jim přiřazené úhly $\sphericalangle A'B'C'$ a $\sphericalangle D'E'F'$ shodné v obvyklém smyslu. Pro takto definovanou „shodnost úhlů" se dá dokázat, že jsou splněny axiomy $\mathfrak{S}$, 4—7.

Snadno se můžeme přesvědčit, že v tomto modelu lze „bodem" mimo danou „přímku" vést k ní více „nerůznoběžek" (viz obr. 38).



Obr. 37.



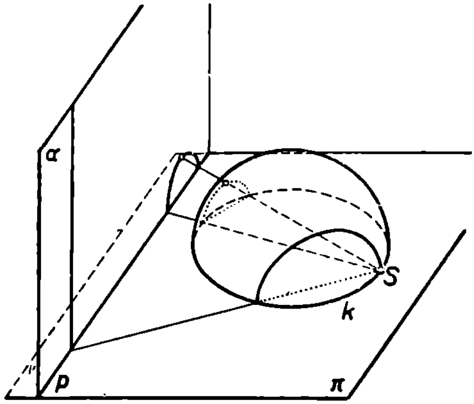
Obr. 38.

Uvedený Model 5 bychom mohli zobecnit i pro úvahy prostorové, totiž tak, že bychom místo kružnice vzali kouli a její vnitřek vzali za „prostor" a analogicky podle Modelu 5 bychom definovali pojmy „bod", „přímka", atd.

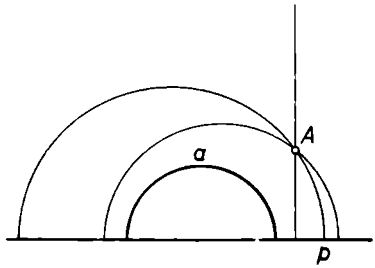
Model 5 se často nazývá modelem Beltrami-Kleinovým (někdy se také spojuje se jménem Cayleyho). Jak později uvidíme, vystihuje tento model některé význačné vlastnosti Lobačevského geometrie. Podobných modelů existuje několik. Na tomto místě se seznámíme ještě se dvěma druhy modelů Poincarého. Abychom snáze pochopili jejich podstatu, seznámíme se ještě s modelem polokulovým.

Model 6. Polokulový model odvodíme z modelu Beltrami-Kleinova takto: plocha kulová je hlavní kružnicí k rozdělena na dvě části. Jednu z nich bez bodů na hlavní kružnici k označme Φ a budeme ji pojímat jako „rovinu". Body z Φ budou „body" naší „roviny", polokružnice na Φ, jejichž roviny jsou kolmé k rovině hlavní kružnice k, budeme pojímat jako „přímky". Vztahy incidence, rozmístění a shodnosti přeneseme na naši rovinu kolmým promítáním modelu Beltrami-Kleinova na povrch polokoule (tak totiž, že mezi průměty budou definitoricky platit tytéž vztahy jako mezi originály).

Model 7. Oba modely Poincarého vzniknou *středovým promítnutím* polokulového modelu na určitou rovinu (všechno v Eukleidově geometrii). V jednom se promítá na rovinu α (viz obr. 39) kolmou k rovině π kružnice k, při čemž střed promítání S je vzdálenější koncový bod průměru kolmého na rovinu α. Při tomto promítnutí se celý povrch polokoule zobrazí na *otevřenou polorovinu*[18]) roviny α určené průsečnicí p rovin α a π. Každá „přímka" modelu je tedy buď polopřímka kolmá na přímku p, na které má i počátek (viz obr. 40), buď polokružnice se středem

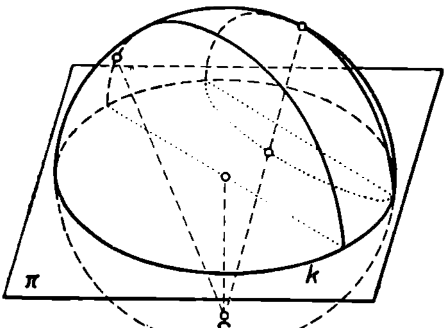


Obr. 39.

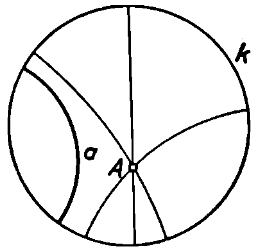


Obr. 40.

na přímce p. Vztahy *incidence, rozmístění* a *shodnosti* můžeme převést z polokulového modelu promítnutím. Snadno se přesvědčíme, že v právě uvedeném modelu lze „bodem" A mimo „přímku" a vést k a více než jednu „nerůznoběžku" (viz obr. 40).



Obr. 41.

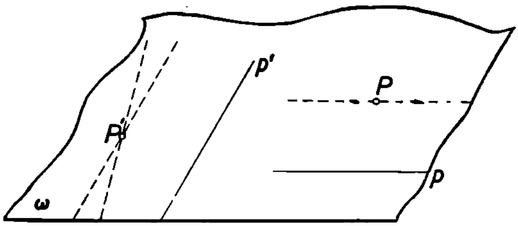


Obr. 42.

Model 8. V druhém modelu Poincarého se promítá polokulový model do

[18]) *Otevřená polorovina* vznikne z poloroviny dříve již definované vynecháním bodů na hranici. Podobně *otevřená polopřímka* vznikne z polopřímky vynecháním počátku.

roviny π kružnice k z bodu, který je pólem „doplňkové" polokoule (obr. 41). Je vidět, že při tomto promítání se celá „rovina" promítá do *vnitřku kružnice k*, při čemž body uvnitř kružnice k jsou „body" našeho modelu a „přímky" se zde promítají buď jako průměry, buď jako oblouky kružnic (obr. 42), orthogonální ke kružnici k. Také na tento model můžeme přenést promítnutím pojmy *incidence, rozmístění* a *shodnosti* a také zde je názorně vidět, že k „přímce" a může existovat více „nerůznoběžek" procházejících týmž „bodem" A (obr. 42). Modely 7 a 8 mají podobně jako Model 5 také prostorovou analogii. Zde „prostorem" bude otevřený poloprostor (t. j. poloprostor bez ohraničující jej roviny) resp. vnitřek koule, „přímky" a „roviny" budou příslušné části kružnic nebo povrchů koulí (jež mohou někdy přejít v přímky nebo roviny), jež jsou orthogonální k hranici poloprostoru resp. základní koule.



Obr. 43.

Definice. Jestliže bodem A lze k přímce a, která bodem A neprochází, vést *právě jednu* nerůznoběžku, budeme říkat, že pár elementů A, a *má vlastnost* I; lze-li nerůznoběžek vést *více*, budeme říkat, že má *vlastnost* II.

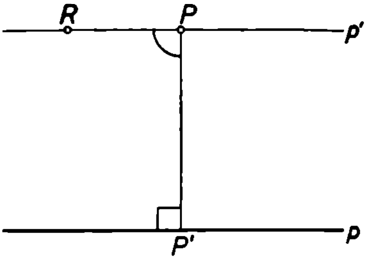
Věta 14,4. *V rovině má každý pár elementů P, p právě jednu z vlastností* I *a* II.

Důkaz. Z předcházející věty je zřejmé, že vlastnosti I a II vyčerpávají všechny možnosti: bodem P lze totiž vést přímku neprotínající p buď jednu nebo jich lze vést více.

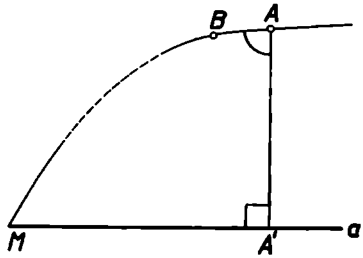
A priori je myslitelné, že některý pár A, a roviny má vlastnost I a současně jiný pár vlastnost II. Pokud bereme v úvahu jen axiomy incidence a rozmístění, může tomu tak skutečně být, jak ukazuje následující model.

Model 9. „Rovinou" bude otevřená polorovina eukleidovské roviny, „bodem" bude každý bod této poloroviny, „přímkou" část přímky uvnitř poloroviny (tedy buď otevřená polopřímka nebo celá přímka, viz obr. 43 a pozn. [18]) na str. 91). Vztahy „incidentní" a „mezi" budeme chápat ve smyslu eukleidovské roviny, ve které je model konstruován. Nyní je patrné, že naše „rovina" bude mít, pokud jde o incidenci a rozmístění, tytéž vlastnosti, jaké se dají pro rovinu odvodit z axiomů $\mathfrak{I}$ a $\mathfrak{R}$. Při tom „přímka", jež vznikla z přímky rovnoběžné s hranicí poloroviny, bude mít s každým „bodem" vlastnost I (přímka p' na obr. 43) a „přímka“, která vznikla z přímky různoběžné s hranicí, má s každým „bodem“ vlastnost II (přímka p'').

Okolnost, že některý pár v Modelu 9 má vlastnost I a jiný vlastnost II, je způsobena tím, že v tomto modelu *nelze zavést* vztah shodnosti tak, aby byl splněn Archimedův axiom. Jestliže však naproti tomu v geometrii předpokládáme, že platí Archimedův axiom, potom každá rovina je vůči vlastnostem I a II *homogenní*, t. j. všechny její páry mají buďto vlastnost I nebo všechny mají vlastnost II. Úkolem tohoto paragrafu je dokázat na základě našich axiomů takovouto homogennost roviny.



Obr. 44.



Obr. 45.

Věta 14,5. *Platí-li všechny dosud uvedené axiomy* $\mathfrak{I}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ *a má-li jediný pár* P, p *vlastnost* I, *pak tuto vlastnost mají všechny páry roviny* $\overline{Pp}$.

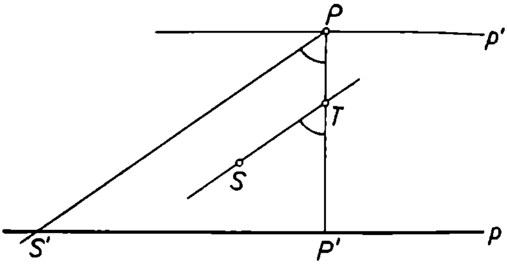
Důkaz.[19]) Nechť elementy P, p mají vlastnost I. Označme P' (viz obr. 44) průsečík p s kolmicí vedenou k ní bodem P a budiž p' jediná nerůznoběžka, kterou lze bodem P vést k p (přímka p' je pak nutně kolmá na $\overline{PP'}$). Důkaz provedeme v několika krocích:

1. *Každý pár* A, a, *pro který platí* $Aa \equiv Pp$, *má vlastnost* I. Označíme-li totiž A' (viz obr. 45) průsečík přímky a s kolmicí vedenou k ní bodem A a je-li $R \neq P$ bod přímky p' a je-li bod B takový, že $\sphericalangle BAA' \equiv \sphericalangle RPP'$, pak a a $\overline{AB}$ jsou nerůznoběžné. Kdyby se totiž protly v bodě M, protínaly by se přímky p a p' v bodě N, kde $NP' \equiv MA'$. Právě tak je vidět, že $\overline{AB}$ je jediná nerůznoběžka bodem A s přímkou a.

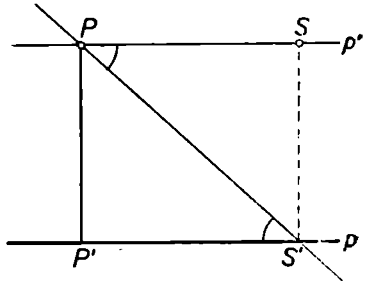
2. *Každý pár* A, a, *pro který platí* $Aa < Pp$, *má vlastnost* I. Budiž T vnitřní bod úsečky PP' (viz obr. 46) a $\overline{ST}$ přímka bodem T, jež není kolmá na $\overline{PP'}$. Přímky $\overline{ST}$ a p se protínají. Neboť je-li $\overline{S'P}$ přímka ve-

[19]) Podle Baldus [1], str. 52.

dená bodem P tak, že je $\sphericalangle S'PT \equiv \sphericalangle STP'$, pak $\overline{S'P}$ protíná přímku p, jelikož není kolmá na $\overline{PP'}$, a to v bodě S', a s přímkou $\overline{ST}$ je nerůznoběžná podle VĚTY 14,2. Podle $\mathfrak{R}$, 4 musí tedy $\overline{ST}$ protnout přímku p.

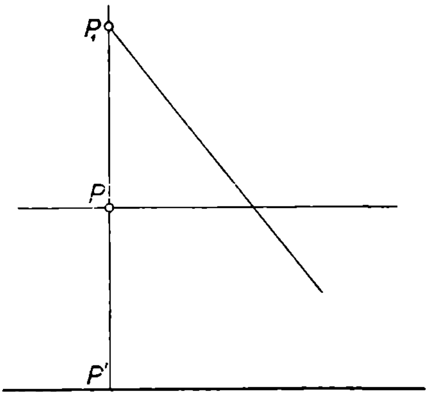


Obr. 46.



Obr. 47.

Ze všech přímek procházejících bodem T je tedy pouze kolmice na $\overline{TP'}$ nerůznoběžná s přímkou p, takže pár T, p má vlastnost I. Závěr vyvodíme podobně jako v 1. části našeho důkazu.



Obr. 48.

3. *Každá kolmice na jednu z přímek p, p' je kolmá i na druhou a průsečíky kolmic s oběma přímkami mají konstantní vzdálenost (přímky p a p' jsou ekvidistantní).* Nechť $S' \neq P'$ je bod na p (viz obr. 47). Budiž S bod, který má tu vlastnost, že $\sphericalangle P'S'P \equiv \sphericalangle SPS'$, $SP \equiv P'S'$ a že P' a S jsou na různých stranách od $\overline{PS'}$. Pak $\overline{PS}$ a p jsou podle VĚTY 14,2 nerůznoběžné, takže S leží na p'. Protože $\triangle PP'S' \equiv \triangle S'SP$, je $\sphericalangle PSS' \equiv R$ a $PP' \equiv SS'$. Také $\sphericalangle SS'P' \equiv \equiv R$, protože podle části 1 tohoto důkazu mají S', p' vlastnost I, takže kolmice bodem S' na $\overline{SS'}$ je jediná nerůznoběžka s p'.

4. *Každý pár A, a, pro který platí $Aa > Pp$, má vlastnost* I. Nechť P_1 (viz obr. 48) leží na přímce $\overline{PP'}$ a při tom $P_1P' \equiv 2 \,.\, PP'$. Je-li $\mu(P'PP_1)$, potom pár P_1, p' má vlastnost I, takže každá přímka bodem

P_1, jež není kolmá na $\overline{PP_1}$, protíná přímku p', a protože průsečík s p' má od p podle části 3 tohoto důkazu vzdálenost PP', protíná také přímku p podle 1. části důkazu. Elementy P_1, p mají tedy vlastnost I. Závěr plyne pomocí Archimedova axiomu a 2. části našeho důkazu.

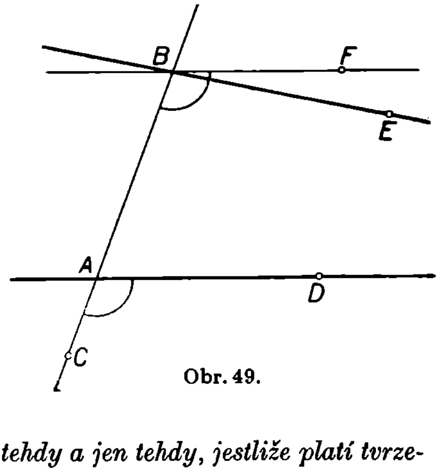
VĚTA 14,6. *Má-li jediný pár P, p vlastnost* II, *pak ji má každý pár roviny $\overline{Pp}$.*

DŮKAZ plyne z VĚT 14,4 a 14,5. Kdyby totiž jeden pár roviny $\overline{Pp}$ měl vlastnost II a kdyby přitom neměl každý pár této roviny vlastnost II, potom by alespoň jeden měl vlastnost I a podle VĚTY 14,5 by tedy dokonce každý pár musel mít vlastnost I, což by byl spor.

DEFINICE. Místo abychom říkali, že každý pár roviny má vlastnost I, budeme říkat, že *rovina má vlastnost* I. Podobně pro vlastnost II.

15. Věty ekvivalentní s V. Eukleidovým postulátem.

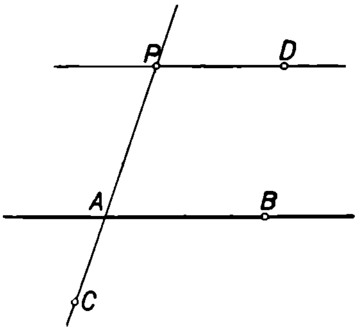
V minulém paragrafu jsme se setkali s dvojím typem roviny. Ačkoliv jejich charakteristické vlastnosti (vlastnost I a II) se dají formulovat pouze pomocí primitivního pojmu incidence, přesto velmi úzce souvisí i s ostatními primitivními pojmy. V tomto paragrafu se budeme zabývat právě těmito souvislostmi. Ukážeme řadu vět, jež jsou *ekvivalentní s tvrzením, že rovina má vlastnost* I, a tím také budeme moci ukázat nutné a postačující podmínky, aby rovina měla vlastnost II. Protože mezi větami ekvivalentními s vlastností I je také V. Eukleidův postulát (jeho znění viz v odstavci **2**, str. 16), budou všechny tyto věty současně ekvivalentní s tímto postulátem. Mnohé z nich byly kdysi nevědomky brány za samozřejmé a tak byl jejich pomocí podán důkaz V. postulátu; nebyl to však skutečný důkaz, jak jsme se o tom zmínili již v odstavci **2**, nýbrž nejvýše objev nové věty ekvivalentní s postulátem o rovnoběžkách, a proto mnohá z těchto vět má historickou cenu a budeme o ní mluvit ještě také v druhé části naší knížky.



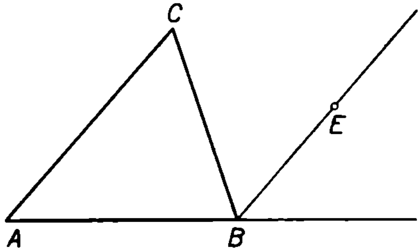
Obr. 49.

VĚTA 15,1. *Rovina má vlastnost* I *tehdy a jen tehdy, jestliže platí tvrzení: je-li součet vnitřních úhlů dvou přímek s příčkou po jedné její straně různý od $2R$, pak se přímky protínají.*

DůKAZ. 1. Nechť rovina má vlastnost I. Jsou-li $\overline{AD}$ a $\overline{BE}$ (viz obr. 49) takové přímky, že mají součet vnitřních úhlů s příčkou $\overline{AB} = \overline{CB}$ po jedné její straně různý od $2R$, při čemž je $\mu(CAB)$, pak budiž F takový bod, že $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle ABF$ a že body D, F leží po téže straně přímky $\overline{AB}$. Přímky $\overline{BF}$ a $\overline{BE}$ jsou různé, $\overline{BF}$ je však jediná přímka jdoucí bodem B, která je s $\overline{AD}$ nerůznoběžná, takže $\overline{AD}$ a $\overline{BE}$ se protínají.



Obr. 50.



Obr. 51.

2. Budiž dána přímka $\overline{AB}$ a bod P mimo ni a nechť C (viz obr. 50) je na polopřímce $(AP)^*$. Budiž D takový bod, že $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle APD$ a nechť bod D leží po téže straně od $\overline{AP}$ jako B. Pak přímky $\overline{AB}$ a $\overline{PD}$ jsou jednak nerůznoběžné, jednak mají součet vnitřních úhlů s příčkou $\overline{AP}$ po jedné její straně rovný $2R$. Každá přímka bodem P různá od $\overline{PD}$ má s příčkou $\overline{AP}$ (po téže straně) součet vnitřních úhlů různý od $2R$, tedy podle předpokladu protíná přímku $\overline{AB}$, takže $\overline{PD}$ je jediná nerůznoběžka s přímkou $\overline{AB}$ bodem P.

VĚTA 15,2. *Rovina má vlastnost* II *tehdy a jen tehdy, jestliže existují dvě neprotínající se přímky, u nichž součet vnitřních úhlů s příčkou po jedné její straně je různý od* $2R$.

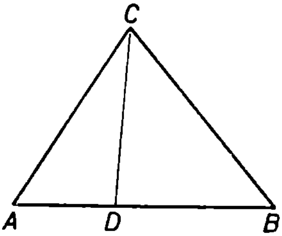
DůKAZ vyplývá z předcházející věty a z VĚTY 14,4.

VĚTA 15,3. *Rovina má vlastnost* I *tehdy a jen tehdy, jestliže v ní existuje alespoň jeden trojúhelník, jehož úhly mají součet rovný* $2R$.

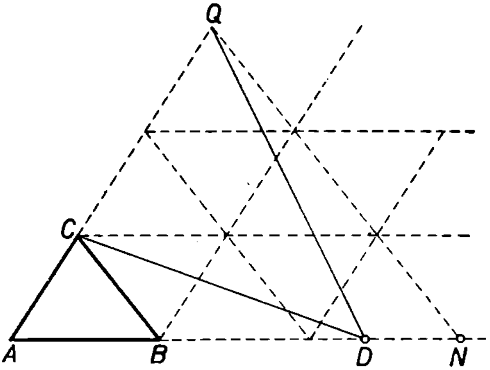
DůKAZ. 1. Nechť rovina má vlastnost I a budiž v ní dán trojúhelník $\triangle ABC$ (viz obr. 51). Nechť E je bod poloroviny (AB, C) takový, že $\sphericalangle ABE + \sphericalangle BAC \equiv 2R$. Přímka $\overline{BE}$ je nerůznoběžná k $\overline{AC}$, tedy podle předpokladu a VĚTY 15,1 je $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle EBC$. Tedy $\sphericalangle ABC +$ $+ \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB \equiv 2R$.

2. Budiž dán trojúhelník $\triangle ABC$, jenž má součet úhlů $2R$. Stačí nyní dokázat, že alespoň jeden pár roviny má vlastnost I. Důkaz provedeme ve třech krocích:

a) *Je-li bod $D \neq A$ na přímce $\overline{AB}$, pak i trojúhelník $\triangle ADC$ má součet úhlů $2R$.* Neboť je-li $\mu(ADB)$ (viz obr. 52), pak součet úhlů u obou trojúhelníků $\triangle ADC$, $\triangle DBC$ činí $4R$. Kdyby v jednom z obou troj-



Obr. 52.



Obr. 53.

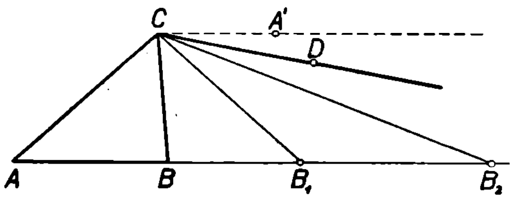
úhelníků byl součet menší než $2R$, musel by být v druhém větší, což podle VĚTY 13,6 není možné. Proto je součet u obou $2R$. Je-li $\mu(ABD)$ (viz obr. 53), pak podle Archimedova axiomu existuje na přímce $\overline{AB}$ bod N tak, že $\mu(ADN)$ a $AN \equiv n \,.\, AB$, kde n je přirozené číslo. Trojúhelník $\triangle ANQ$, kde Q je takový bod poloroviny $(\overline{AB}, C)$, že platí $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ANQ$ a $NQ \equiv n \,.\, BC$, má součet $2R$, neboť je složen z konečného počtu trojúhelníků shodných s $\triangle ABC$. Součet úhlů trojúhelníků $\triangle ADC$, $\triangle DCQ$, $\triangle DQN$ činí $6R$. Zde zase podle VĚTY 13,6 je vidět, že každý z těchto trojúhelníků má součet $2R$.

b) *Vnější úhel trojúhelníka se součtem $2R$ je roven součtu obou vnitřních úhlů, jež k němu nejsou vedlejší,* jak je bezprostředně patrno.

c) *Přímka $\overline{CD}$, pro kterou je $\sphericalangle BCD < \beta \equiv \sphericalangle ABC$* (viz obr. 54), *při čemž body A, D jsou na různých stranách od $\overline{BC}$, protíná přímku $\overline{AB}$.* Budiž A' takový bod na opačné straně od $\overline{BC}$ než je A, že platí $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'CB$. Určeme nyní bod B_1 na polopřímce $(BA)^*$ tak, že $BC \equiv BB_1$, bod B_2 na $(B_1A)^*$ tak, že $B_1C \equiv B_1B_2$, a podobně body

$B_3, B_4, \ldots$ atd. Trojúhelníky $\triangle CBB_1$, $\triangle CB_1B_2, \ldots$ mají součet úhlů $2R$ (neboť podle a) mají trojúhelníky $\triangle AB_1C$, $\triangle AB_2C, \ldots$ součet $2R$) a jsou rovnoramenné. Podle b) je tedy $\sphericalangle CB_1B \equiv \frac{1}{2}\beta$, $\sphericalangle CB_2B \equiv \frac{1}{4}\beta$, $\ldots$ obecně $\sphericalangle CB_iB \equiv \dfrac{\beta}{2^i}$. Snadno se ukáže, že $\sphericalangle B_iCA' \equiv \sphericalangle CB_iB$, takže $\sphericalangle B_iCA' \equiv \dfrac{\beta}{2^i}$. Podle Archimedova axiomu existuje nyní přirozené číslo n tak, že $\dfrac{\beta}{2^n} < \sphericalangle DCA'$, takže potom $\sphericalangle B_nCA' < \sphericalangle DCA'$. Leží tedy polopřímka (CD) mezi polopřímkami (CB) a (CB_n), jež obě protínají $\overline{AB}$. Podle definice pojmu „ležet mezi polopřímkami" a podle $\mathfrak{R}$, 4 protíná $\overline{CD}$ přímku $\overline{AB}$.

VĚTA 15,4. *Je-li alespoň v jednom trojúhelníku součet úhlů $2R$, pak má tuto vlastnost každý trojúhelník.*



Obr. 54.

DŮKAZ je zřejmý z bodu 2 a) předešlého důkazu.

VĚTA 15,5. *Rovina má vlastnost* II *tehdy a jen tehdy, jestliže v ní existuje trojúhelník, jehož součet úhlů je menší než $2R$.*

DŮKAZ plyne z VĚTY 15,3 a 14,4.

DEFINICE. Skupinu čtyř bodů A, B, C, D v rovině nazýváme *čtyrúhelníkem*, symbolicky $\square\, ABCD$, jestliže úsečky AB a CD resp. BC a AD nemají společných bodů, zatím co úsečky AC a BD mají společný (vnitřní) bod. Úsečky AB, BC, CD, DA jsou *strany*, úhly $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$, $\sphericalangle DAB$ (krátce značené, pokud to nevede k nedorozumění, také $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ atd.) jsou *úhly čtyrúhelníka.*[19a]) Dva čtyrúhelníky jsou *shodné*, symbolicky $\square\, ABCD \equiv \square\, EFGH$, jestliže se shodují ve stranách i úhlech.

[19a]) Podmínka o společném vnitřním bodě úseček AC a BD zaručuje, že čtyrúhelník $ABCD$ je *konvexní.* Při tom část roviny, jejíž hranici tvoří uzavřená křivka k, se nazývá konvexní, jestliže v ní leží všechny body úsečky XY, kde X a Y jsou jakékoli body křivky k. Nekonvexní čtyrúhelník vylučujeme tedy ze svých úvah.

Je-li $\square\, ABCD$ čtyrúhelník, pak podle definice není na př. $ACBD$ čtyrúhelník. V symbolu $\square\, ABCD$ záleží tedy na pořadí písmen, při čemž tento symbol označuje týž čtyrúhelník zřejmě jen při cyklických záměnách písmen.

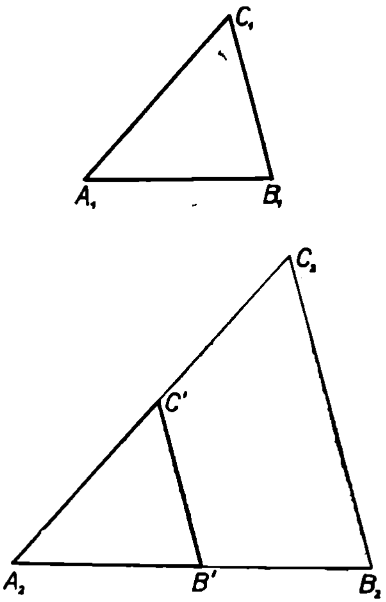
VĚTA 15,6. *Rovina má vlastnost* I *tehdy a jen tehdy, existuje-li v ní alespoň jeden čtyrúhelník se součtem úhlů* 4R.

DŮKAZ je zřejmý podle VĚTY 15,3 a 15,4, uvažujeme-li oba trojúhelníky $\triangle\, ABC$ a $\triangle\, ADC$ čtyřúhelníka $\square\, ABCD$.

DEFINICE. Dva neshodné trojúhelníky, jejichž odpovídající úhly jsou shodné (a tedy odpovídající strany jsou neshodné), se nazývají *podobné.*

VĚTA 15,7. *Rovina má vlastnost* I *tehdy a jen tehdy, jestliže v ní existuje alespoň jeden pár neshodných podobných trojúhelníků.*

DŮKAZ. 1. Nechť rovina má vlastnost I a nechť v ní je dán trojúhelník $\triangle\, ABC$. Podle bodu 2 a) důkazu VĚTY 15,3 existuje $\triangle\, AB_1C_1$, který má shodné úhly s $\triangle\, ABC$ a při tom je $AB_1 \equiv 2\,.\,AB$ (a tedy i $B_1C_1 \equiv 2\,.\,BC$, $AC_2 \equiv 2\,.\,AC$).



Obr. 55.

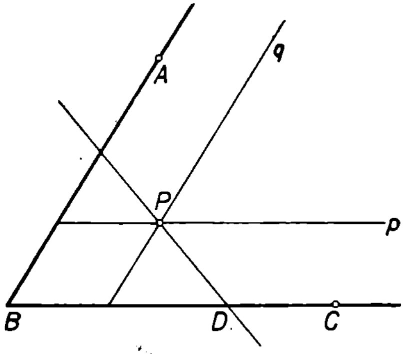
2. Buďtež dány trojúhelníky $\triangle\, A_1B_1C_1$ a $\triangle\, A_2B_2C_2$ tak, že úhly při stejně označených vrcholech jsou shodné (viz obr. 55) a při tom $A_1B_1 < A_2B_2$. Snadno dokážeme nepřímo, že pak je také $A_1C_1 < A_2C_2$ (a $B_1C_1 < B_2C_2$). Budiž C' bod na úsečce A_2C_2 takový, že $A_1C_1 \equiv A_2C'$, a bod B' na úsečce A_2B_2 takový, že $A_1B_1 \equiv A_2B'$. Potom $\sphericalangle\, B'C'C_2 + \sphericalangle\, B_2C_2C' \equiv \sphericalangle\, C'B'B_2 + \sphericalangle\, C_2B_2B' \equiv 2R$, takže čtyrúhelník $\square\, B'B_2C_2C'$ má součet úhlů $4R$. Závěr plyne z VĚTY 15,6.

VĚTA 15,8. *Jestliže rovina má vlastnost* II, *pak v ní neexistují neshodné podobné trojúhelníky.*

DŮKAZ je zřejmý z předcházející věty a z VĚTY 14,4.

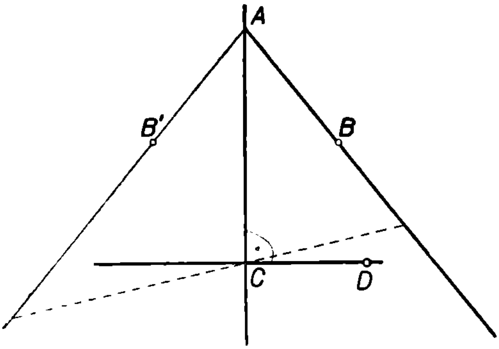
VĚTA 15,9. *Rovina má vlastnost* I *tehdy a jen tehdy, lze-li každým vnitřním bodem úhlu (dutého) vést alespoň jednu přímku protínající obě ramena mimo vrchol.*

DŮKAZ. 1. Nechť rovina má vlastnost I a budiž v ní dán úhel $\sphericalangle ABC$ a jeho vnitřní bod P (viz obr. 56). Nechť dále přímka q jdoucí bodem P je nerůznoběžná s $\overline{AB}$ a přímka p vedená bodem P nerůznoběžná s $\overline{BC}$. Je-li D bod na $\overline{BC}$ takový, že B a D jsou na různých stranách od q, pak $\overline{DP}$ protíná $\overline{AB}$, protože q je jediná nerůznoběžka bodem P k $\overline{AB}$.



Obr. 56.

2. Nechť každým vnitřním bodem úhlu lze vést alespoň jednu přímku protínající obě ramena. Buďte $\overline{AB}$ a $\overline{CD} \equiv \overline{CD'}$ (viz obr. 57) takové dvě přímky, že $\sphericalangle BAC < R \equiv \sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle ACD'$. Je tedy součet úhlů přímek $\overline{AB}$ a $\overline{CD'}$ s příčkou $\overline{AC}$ (po jedné straně) různý od $2R$. Zvolíme-li bod B' v polorovině $(\overline{AC}, B)$* tak, že $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'AC$, pak bod C je uvnitř úhlu $\sphericalangle BAB'$, takže jím lze podle předpokladu vést přímku protínající obě jeho ramena. Pomocí $\mathfrak{R}$, 4 a vlastností shodnosti dokážeme, že $\overline{CD}$ protíná i $\overline{AB}$ i $\overline{AB'}$, takže podle VĚTY 15,1 má rovina vlastnost I.



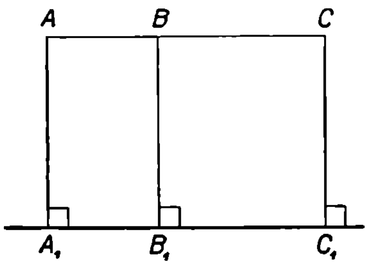
Obr. 57.

VĚTA 15,10. *Rovina má vlastnost* I *tehdy a jen tehdy, jestliže v ní existují alespoň tři body, které jsou stejně vzdáleny od přímky, leží po téže její straně a jsou kolineární.*

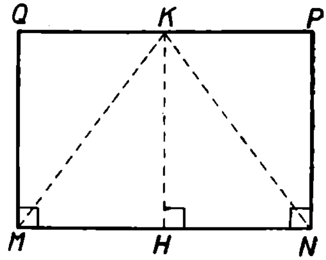
DŮKAZ. 1. Má-li rovina vlastnost I, pak podle části 3 důkazu VĚTY 14,5 existují ekvidistantní přímky.

2. Nechť body A, B, C leží na téže straně přímky p (viz obr. 58) a jsou stejně od ní vzdáleny a při tom jsou kolineární. Označme A_1, B_1, C_1 průsečíky kolmic s přímkou p vedených body A, B, C na p.

Nyní platí věta: jestliže ve čtyrúhelníku $\square\, MNPQ$ (viz obr. 59) jsou úhly při vrcholech M a N pravé a $MQ \equiv NP$, pak úhly při vrcholech Q a P jsou shodné. Neboť je-li H půlící bod strany MN a $\overline{HK}$ kolmice



Obr. 58.



Obr. 59.

bodem H na $\overline{MN}$ a K průsečík $\overline{HK}$ a QP, pak $\triangle\, MHK \equiv \triangle\, NHK$, a proto i $\triangle\, MQK \equiv \triangle\, NPK$.

Je tedy $\sphericalangle\, A_1AB \equiv \sphericalangle\, B_1BA$, $\sphericalangle\, A_1AB \equiv \sphericalangle\, C_1CB$, $\sphericalangle\, B_1BC \equiv$ $\equiv \sphericalangle\, C_1CB$ a odtud plyne, že $\sphericalangle\, B_1BA \equiv \sphericalangle\, B_1BC$, takže všechny tyto úhly jsou pravé a tím je dokázána existence čtyrúhelníka se čtyřmi pravými úhly. Závěr vyplývá z Věty 15,6.

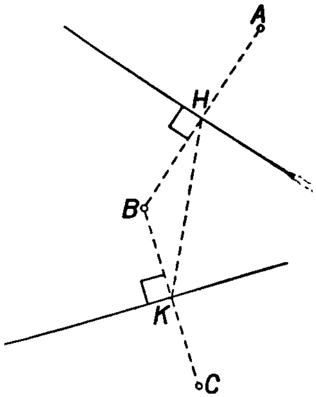
Definice. Čtyrúhelník $\square\, MNPQ$ (viz obr. 59), jehož úhly při vrcholech M a N jsou pravé a strany MQ a NP jsou shodné, se nazývá *Saccheriho čtyrúhelník* $\square\, MNPQ$ (pravé úhly jsou vždy při prvních dvou vrcholech).

Věta 15,11. *V Saccheriho čtyrúhelníku $\square\, MNPQ$ jsou úhly $\sphericalangle\, P$ a $\sphericalangle\, Q$ shodné a spojnice půlících bodů stran MN a PQ je společná kolmice přímek $\overline{MN}$ a $\overline{PQ}$.*

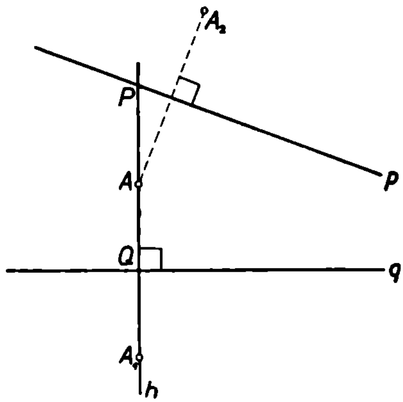
Důkaz. Budiž H půlící bod strany MN (viz obr. 59) a $\overline{KH}$ kolmice bodem H na $\overline{MN}$ a K průsečík $\overline{HK}$ a $\overline{QP}$. Podle části 2 důkazu Věty 15,10 je $\triangle\, MQK \equiv \triangle\, NPK$, takže je $QK \equiv KP$ čili K je půlící bod strany QP. Odtud plyne také, že $\triangle\, QKH \equiv \triangle\, PKH$, takže je $\overline{KH} \perp \overline{QP}$.

VĚTA 15,12. *Má-li rovina vlastnost* II, *pak všechny body, ležící po téže straně nějaké přímky ve stejných vzdálenostech od ní, neleží na přímce (ekvidistanta přímky není přímka).*

DŮKAZ plyne z VĚT 15,10 a 14,4.



Obr. 60.



Obr. 61.

VĚTA 15,13. *Rovina má vlastnost* I *tehdy a jen tehdy, když ke každým třem nekolineárním bodům existuje bod stejně od nich vzdálený (když každé tři nekolineární body leží na kružnici).*

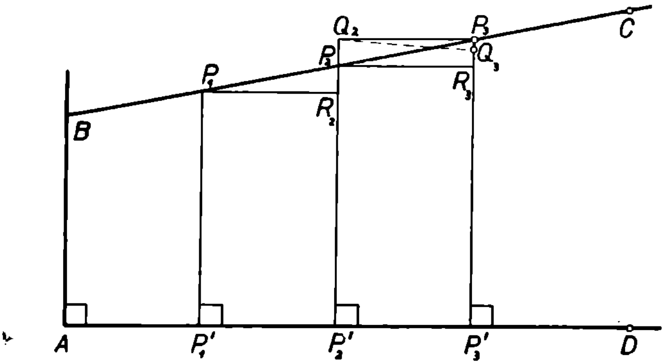
DŮKAZ. 1. Nechť rovina má vlastnost I a buďtež v ní dány tři libovolné nekolineární body A, B, C (viz obr. 60). Podle VĚTY 12,22 by bod stejně vzdálený od A, B i C musel být průsečíkem os úseček AB a BC. Budiž H resp. K půlicí bod úsečky AB resp. BC. Součet vnitřních úhlů tvořených osami s přímkou $\overline{HK}$ je v polorovině $(\overline{HK}, B)$ zřejmě větší než $2R$, a protože rovina má vlastnost I, obě osy se protnou.

2. Nechť ke každým třem nekolineárním bodům existuje bod, stejně od nich vzdálený. Buďte h, p, q (viz obr. 61) tři přímky, při čemž q protíná h v bodě Q a stojí na ní kolmo, p protíná h v bodě P a nestojí na ní kolmo, takže součet vnitřních úhlů přímek p a q s příčkou $\overline{PQ}$ (po jedné její straně) je různý od $2R$. Zvolme mezi P a Q bod A, na polopřímce $(QA)^*$ určeme bod A_1 tak, aby $AQ \equiv QA_1$, a v polorovině $(pA)^*$ určeme bod A_2 tak, aby $\overline{AA_2}$ bylo kolmé na p a vzdálenost $Ap \equiv A_2p$. Bod A_2 neleží na h, takže body A, A_1, A_2 jsou nekolineární. Existuje

tudíž bod, stejně od nich vzdálený, a tímto bodem prochází jak p, tak q (podle VĚTY 12,22), takže p a q se protínají a podle VĚTY 15,1 má rovina vlastnost I.

VĚTA 15,14. *Má-li rovina vlastnost* II, *pak neleží každé tři nekolineární body na kružnici.*

DŮKAZ je důsledkem věty předcházející a VĚTY 14,4.



Obr. 62.

VĚTA 15,15. *Rovina má vlastnost* I *tehdy a jen tehdy, jestliže v ní existuje alespoň jeden pár různých přímek té vlastnosti, že body jedné z nich mají od druhé vzdálenosti shora omezeny.*

DŮKAZ. 1. Nechť rovina má vlastnost I. Potom podle VĚTY 15,10 jsou nerůznoběžné přímky ekvidistantní, takže je splněno tvrzení naší věty.

2. Jestliže rovina nemá vlastnost I (takže má podle VĚTY 14,4 vlastnost II), pak se dá dokázat, že neexistují přímky té vlastnosti, že by body jedné z nich měly od druhé vzdálenosti shora omezeny. Jestliže je totiž $\sphericalangle BAD$ pravý úhel a bod C (viz obr. 62) je po téže straně přímky $\overline{AB}$ jako bod D, pak dokážeme, že ať je $\sphericalangle ABC$ pravý nebo tupý úhel, lze vždy na polopřímce (BC) určit bod T tak, že vzdálenost bodu T od přímky $\overline{AD}$ je větší než libovolná předem daná úsečka.

Zvolme na polopřímce (BC) body P_1, P_2, P_3 tak, že $\mu(P_1P_2P_3)$, $P_1P_2 \equiv P_2P_3$, a veďme jimi kolmice na přímku $\overline{AD}$ a průsečíky označme P_1', P_2', P_3'. Na $(P_2'P_2)$ určeme bod R_2 a na $(P_3'P_3)$ bod R_3 tak, že platí $P_1'P_1 \equiv P_2'R_2$, $P_2'P \equiv P_3'R_3$. Protože $\square\ P_1'P_2'R_2P_1$ je Saccheriho čtyrúhelník, jsou za předpokladu, že rovina má vlastnost II, úhly $\sphericalangle\ P_1'P_1R_2$ a $\sphericalangle\ P_2'R_2P_1$ ostré a podobně i úhly $\sphericalangle\ P_2'P_2R_3$ a $\sphericalangle\ P_3'R_3P_2$. Bod R_2 resp. R_3 padne tedy na úsečku $P_2'P_2$ resp. $P_3'P_3$. Ukážeme nyní, že je $R_2P_2 < R_3P_3$. Zvolme na $(P_2P_2')^*$ bod Q_2 tak, že je $R_2P_2 \equiv P_2Q_2$ a na $(R_3P_3')^*$ bod Q_3 tak, že $P_2Q_2 \equiv R_3Q_3$. Zřejmě platí $\triangle\ P_1R_2P_2 \equiv$ $\equiv \triangle\ P_3Q_2P_2$, takže $\sphericalangle P_3Q_2P_2' > R$. Ježto $\square\ P_2R_3Q_3Q_2$ je čtyrúhelník Saccheriho, je úhel $\sphericalangle\ P_2'Q_2Q_3$ ostrý, takže bod Q_3 padne mezi body P_3 a R_3.

Je-li nyní dána úsečka MN, pak podle Archimedova axiomu existuje přirozené číslo n tak, že $n\ .\ P_2R_2 > MN - P_1P_1'$, takže pro vzdálenost bodu P_{n+1}, který je určen vztahy

$$P_1 \prec P_2 \prec P_3 \prec \ldots \prec P_n \prec P_{n+1}$$

a $P_1P_2 \equiv P_2P_3 \equiv \ldots \equiv P_nP_{n+1}$, od přímky $\overline{AD}$ platí $\overline{AD}\ P_{n+1} >$ $> \overline{AD}\ P_1 + n\ .\ P_2R_2 > MN$.

Jako shrnutí výsledků tohoto paragrafu uvedeme v přehledu věty ekvivalentní s V. postulátem, jež jsou ovšem také navzájem ekvivalentní. Můžeme je roztřídit podle toho, kterých primitivních pojmů se jejich formulace přímo týká.

Věty, týkající se pouze pojmu incidence:

1. *Alespoň jeden pár P, p má tu vlastnost, že bodem P lze k přímce p vést právě jednu nerůznoběžku* (vlastnost I).

2. *Každá přímka, která protíná jednu ze dvou nerůznoběžek, protíná i druhou.*

Věta, vyjádřená pomocí incidence a rozmístění:

3. *Každým vnitřním bodem dutého úhlu lze vést alespoň jednu přímku, protínající obě ramena mimo vrchol.*

Pouze incidence a shodnosti úseček se týká věta:

4. *Ke každým třem nekolineárním bodům existuje bod od všech tří stejně vzdálený.*

Věty, týkající se pojmů incidence, shodnosti úseček a rozmístění:

5. *Existují alespoň dvě přímky té vlastnosti, že body jedné z nich mají od druhé vzdálenosti shora omezeny.*

6. *Existují alespoň tři body stejně vzdálené od přímky, které leží po téže její straně a jsou kolineární.*

Pomocí pojmů incidence, rozmístění a shodnosti úhlů jsou vyjádřeny věty:

7. *Existuje alespoň jeden trojúhelník se součtem úhlů* $2R$.

8. *Existuje alespoň jeden čtyrúhelník se součtem úhlů* $4R$.

9. *Je-li součet vnitřních úhlů dvou přímek po jedné straně příčky různý od* $2R$, *pak se tyto přímky protínají.*

10. *Každá kolmice na jedno rameno ostrého úhlu protne i druhé rameno.* (Přímka je kolmá na rameno, jestliže je kolmá na přímku, v níž rameno leží, a protíná ji ve vnitřním bodě ramena; věta 10 je pouze jiná formulace VĚTY 15,1 čili V. Eukleidova postulátu.)

Věta, týkající se pojmu incidence a shodnosti úseček i úhlů:

11. *Existují alespoň dva trojúhelníky s odpovídajícími shodnými úhly a s odpovídajícími stranami neshodnými.*

POZNÁMKA. V. postulát je také ekvivalentní s tvrzením, které v podstatě říká, že limitou kružnice s neomezeně vzrůstajícím poloměrem je přímka. Přesnou formulaci tohoto tvrzení a důkaz ekvivalence viz v odst. **18** (VĚTA 18,4).