KAPITOLA I

PŘEDHISTORIE NEEUKLEIDOVSKÉ GEOMETRIE

20. Poseidonios, Aganis, Proklos, Nasîr-Eddîn, Vitale, Wallis. Již na začátku této knížky jsme řekli, že objev neeukleidovské geometrie má kořeny v době Eukleidově, kdy někteří z řeckých matematiků vážně pochybovali, že by se V. postulát nedal dokázat z ostatních a pokoušeli se podat důkaz tohoto postulátu. Takových matematiků byla celá řada. Nejstarší z nich, které známe podle jména, byli Poseidonios a Aganis (I. st. př. Kr.). Domnívali se, že k důkazu stačí zaměnit Eukleidovu definici rovnoběžek definicí jinou. Jak známo, Eukleides nazývá rovnoběžkami přímky, ležící v rovině, které se neprotínají. Má tedy gramaticky negativní tvar, a proto ji někteří považovali za vadnou.

Poseidonios a Aganis definovali rovnoběžky *jako přímky v rovině, které mají od sebe stále touž vzdálenost.* My však víme, že již pouhý předpoklad, že existují ekvidistantní přímky, je ekvivalentní s Eukleidovým V. postulátem (viz naši VĚTU 15,10). Ostatně již někteří Řekové viděli slabinu podobného důkazu a namítali, že Poseidoniova a Eukleidova definice rovnoběžek nemusí vždy vyjadřovat totéž. Geminos (I. st. př. Kr.) uváděl hyperbolu s její asymptotou jako příklad čar, které jsou rovnoběžné ve smyslu Eukleidově (neprotínají se, jakkoli daleko je prodloužíme), nejsou však rovnoběžné ve smyslu Poseidoniově.

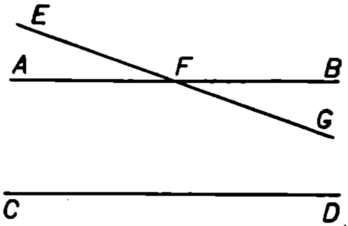
O několik století později si řecký matematik Proklos (410—485) povšiml, že obrácení V. Eukleidova postulátu (t. j. obrácení implikace v něm obsažené) dává větu „*součet dvou vnitřních úhlů trojúhelníka je menší dvou pravých*“, která se dá dokázat nezávisle na V. postulátu (u nás je to VĚTA 12,28). Při tom mu připadalo nemožné, že by se z týchž předpokladů nedala odvodit věta, jejíž obrat lze dokázat.

Sám pak dokazuje V. postulát na základě pomocné věty (věta i její důkaz uveden podle Bonola-Liebmann [17], str. 5):

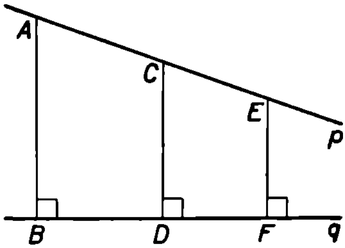
Přímka, která protíná jednu ze dvou neprotínajících se přímek, protíná i druhou přímku.

Důkaz této věty podává následujícím způsobem: Buďtež $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ dvě neprotínající se přímky (viz obr. 105), $\overline{EG}$ přímka, která v bodě F protíná přímku $\overline{AB}$. Vzdálenost přímky $\overline{AB}$ od bodu, pohybujícího se po přímce $\overline{EG}$ směrem od bodu F přes G, roste nade všechny meze (důkaz je analogický důkazu VĚTY 15,15). Protože ale body jedné z obou neprotínajících se přímek mají od druhé konečnou vzdálenost, musí přímka $\overline{EG}$ protnout přímku $\overline{CD}$.

Zde však Proklos mlčky učinil předpoklad, že body jedné ze dvou neprotínajících se přímek mají od druhé konečnou, t. j. shora omezenou vzdálenost, což je tvrzení ekvivalentní s Eukleidovým postulátem (viz naši VĚTU 15,15).



Obr. 105.



Obr. 106.

Po zániku starověkých říší převzali řeckou učenost Arabové, kteří se velmi horlivě věnovali také matematice. Překládali a přepracovávali Eukleidovy *Základy* spolu se všemi pozdějšími komentáři a je tedy přirozené, že pokračovali v pokusech o důkaz postulátu o rovnoběžkách. Vliv na pozdější vývoj theorie rovnoběžek měl, jak se zdá, jen Nasîr-Eddîn (1201—1274),[26a]) jehož překlad a komentář Eukleida byl arabsky vydán r. 1594 v Římě.

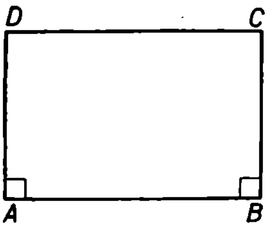
Jeho důkaz je zajímavý tím, že v něm V. postulát vystupuje po prvé ve vztahu s učením o součtu úhlů v trojúhelníku. Při tom se výslovně opírá o tvrzení, jež přijímá bez důkazu (uvedeno podle Kagan [4], str. 119—121; viz také Bonola-Liebmann [17], str. 11):

Jsou-li p a q (viz obr. 106) *takové přímky, že z bodu C na q spuštěná kolmice $\overline{CD}$ na q tvoří s přímkou p nerovné vedlejší úhly $\sphericalangle ECD <$ $< \sphericalangle ACD$, pak úsek kolmice spuštěné z bodu X přímky p na přímku q je*

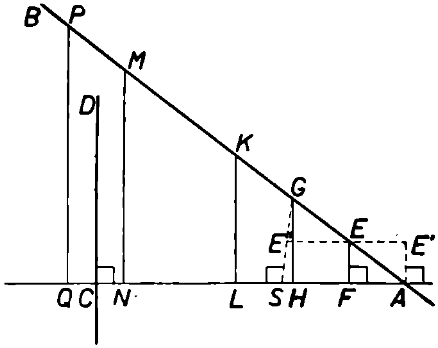
[26a]) Nasîr-Eddîn at Tûsî pocházel z Chorasanu (území jižně od Turkmenské SSR), původem byl však Azerbejdžanec. Je znám také svými pracemi o sférické trigonometrii.

kratší než CD, je-li X jakýkoli bod na p na straně ostrého úhlu (t. j. na polopřímce (CE)), a větší, je-li X na p na straně tupého úhlu.

Na základě tohoto předpokladu dokazuje (sporem), že sestrojíme-li k úsečce AB kolmice v koncových bodech a naneseme na ně shodné úsečky BC a AD, pak úhly při C a D jsou pravé (viz obr. 107) a úsečky AB a CD jsou shodné. Protože čtyrúhelník má součet úhlů $4R$, plyne



Obr. 107.



Obr. 108.

odtud, že pravoúhlý trojúhelník má součet $2R$, a u obecného trojúhelníka dokážeme totéž, když ho rozdělíme výškou na dva pravoúhlé.

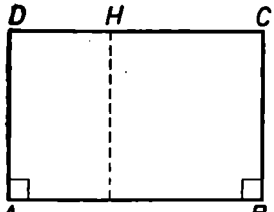
Nyní Nasîr-Eddîn dokazuje Eukleidův axiom takto: Jsou-li dvě přímky proťaty třetí, mohou nastat 3 případy: oba vnitřní úhly na téže straně jsou ostré nebo jeden z nich je tupý nebo jeden z nich je pravý. Je vidět, že první dva případy se snadno převedou na třetí, a proto předpokládejme, že $\sphericalangle\ CAB < DCA \sphericalangle \equiv R$; máme dokázat, že přímky $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ se protnou. Na úsečce AB vezměme bod E (viz obr. 108) a spusťme z něho kolmici na $\overline{AC}$, průsečík F bude po téže straně bodu A jako C, protože $\sphericalangle\ CAB$ je ostrý. Je-li C mezi F a A, jsme hotovi, protože pak $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ se musí protnout. Je-li F mezi A a C, pak na přímce $\overline{AC}$ nanášejme stále úsečky $AF \equiv FH \equiv HL \equiv \ldots \equiv NQ$ až bod Q padne za C a tolikrát pak také naneseme úsečky $AE \equiv EG \equiv \equiv CK \equiv \ldots \equiv \overline{MP}$. Potom spojnice $\overline{PQ}$ je kolmá na $\overline{AC}$, neboť všechny spojnice $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$, $\overline{GH}$, $\overline{KL}$, ... jsou kolmé na $\overline{AC}$, což dokážeme takto:

Bodem A veďme kolmici $\overline{AE'}$ na $\overline{AC}$, $AE' \equiv FE$, bodem G veďme kolmici $\overline{GS}$ na $\overline{AC}$ (je-li S různé od H zatím nevíme), na $\overline{GS}$ budiž bod E'' tak, že $SE'' \equiv FE$. Potom podle výše již dokázané věty o čtyrúhelníku je $AF \equiv E'E$, $SF \equiv E''E$, $\sphericalangle AE'E \equiv \sphericalangle FEE' \equiv \sphericalangle SE''E \equiv \equiv \sphericalangle FEE' \equiv R$. Leží tedy body E, E', E'' na přímce a úhly $\sphericalangle E''EG$ a $\sphericalangle E'EA$ jsou vrcholové; tedy trojúhelníky $\triangle AEE'$ a $\triangle GEE''$ jsou shodné, čili $EE' \equiv EE''$, takže $AF \equiv FS$ čili body H a S splynou a GH je kolmice na $\overline{AC}$. Analogicky se to dokáže i pro $KL, \ldots, PQ$.

Protože $\overline{CD}$ neprotne $\overline{PQ}$, musí protnout $\overline{AB}$, což bylo dokázat.

Z našeho výkladu geometrie víme, že Nasîr-Eddînem učiněný předpoklad je opět ekvivalentní s V. postulátem, neboť s axiomy absolutní geometrie je slučitelný případ, že bod X je na ramenu (CE) (obr. 106) ostrého úhlu $\sphericalangle ECA$ a přesto je jeho vzdálenost od přímky q větší než CD (viz rozběžné přímky v neeukleidovské rovině, Věta 17,15).

Na počátku novověku přechází matematika od Arabů do jihozápadní Evropy a mezi prvními to jsou Italové, kteří přinášejí v matematice nové výsledky, jak o tom svědčí jména Scipio del Ferro, Tartaglia, Cardano a j. V 16. a 17. stol. se Italové také živě zúčastnili řešení problému rovnoběžek, jako na př. C. Clavio, P. A. Cataldi, G. A. Borelli, abychom jmenovali alespoň některé. Nepřišli však v podstatě na nic nového. Setkáváme se u nich s týmiž myšlenkami jako u starých Řeků nebo Arabů, s důkazem na základě definice rovnoběžek jako ekvidistantních přímek a pod. S novou ideou, zdá se, přišel teprve G. Vitale (1633—1711), který se snažil dokázat existenci ekvidistantních přímek tak, že zkoumal čtyrúhelník $\square ABCD$ s pravými úhly A a B a shodnými stranami AD a BC (viz obr. 109). Dochází k tomu, že důkaz se redukuje na to, jak prokázat existenci bodu H uvnitř úsečky CD, který by měl od přímky $\overline{AB}$ vzdálenost rovnou úsečce AD. Ačkoli Vitale při dalším dokazování upadá do starých omylů, je jeho důkaz pozoruhodný tím, že se při něm objevuje speciální čtyrúhelník, se kterým jsme se již setkali u Nasîr-Eddîna a který o půl století později klade do středu svých úvah Saccheri, jenž učinil první podstatný krok vpřed.



Obr. 109.

V 17. století se zvýšil zájem o Eukleida natolik, že r. 1619 byla založena na oxfordské universitě stolice, jejíž držitel měl povinnost vést každý rok alespoň jednu přednášku o Eukleidových *Základech*. Jedním z prvních profesorů této stolice byl známý matematik J. Wallis (1616—1703), který se zasloužil také o algebru a analysu (od něho pochází také známá formule pro π). Správně poznal společný nedostatek důkazů V. Eukleidova postulátu, které byly do té doby podány, že totiž zakrytě zaměňují tento axiom jiným tvrzením.

R. 1663 podal J. Wallis důkaz, ve kterém se vědomě opírá o předpoklad, že *v rovině existují podobné útvary*. Tím osvětlil důležitý bod v theorii rovnoběžek, neboť jak víme, již pouhý předpoklad, že existují dva podobné trojúhelníky, t. j. trojúhelníky, které mají odpovídající úhly shodné, avšak strany nikoliv, je ekvivalentní s Eukleidovým postulátem o rovnoběžkách (srv. VĚTU 15,17).

21. Girolamo Saccheri. Zatím co matematikové, o nichž jsme dosud mluvili, dokazovali V. postulát tak, že aniž si to uvědomovali, vycházeli z nějakého předpokladu, o němž dnes víme, že je s V. postulátem ekvivalentní, italský jesuita Girolamo Saccheri šel při důkazu úplně novou cestou: snažil se totiž dokázat Eukleidův postulát *nepřímo.* Měl dobré matematické vzdělání a znal také důkazy V. postulátu řeckých i arabských matematiků, jejichž nedostatky správně odhalil a komentoval. Svoje nové výsledky publikoval r. 1733 ve spise *Euclides ab omni naevo vindicatus.*[27]) Způsob, jak postupoval ve svých dedukcích, zasluhuje, aby byl podrobněji vypsán. Nebudeme citovat Saccheriho doslova, nýbrž jeho výklad podáme v poněkud zhuštěné formě, při čemž zachováme jeho původní myšlenky (Saccheriho spis v německém překladu je otištěn v knize Stäckel-Engel [15], str. 41 až 136). Saccheriho „důkaz“ Eukleidova postulátu lze shrnout do následujících 18 vět:

Věta 1. *Jestliže ve čtyrúhelníku □ ABCD jsou úhly A, B pravé a strany AD a BC shodné, pak jsou také úhly C a D shodné.* (Takový čtyrúhelník se dnes nazývá Saccheriho čtyrúhelníkem.)

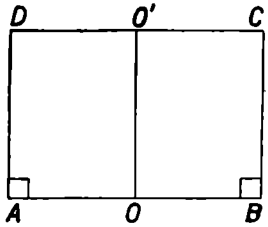
Věta 2. *Jestliže ve čtyrúhelníku □ ABCD s pravými úhly A a B strany AD a BC nejsou shodné, pak z obou úhlů C a D je větší ten, který leží proti menší straně, a naopak.*

---

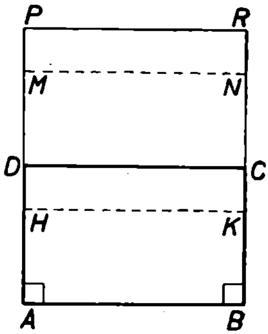
[27]) *Eukleides vší poskvrny zbavený.*

Důkazy obou vět jsou snadné. V druhé větě rozumí Saccheri úhlem ležícím proti straně AD resp. BC samozřejmě úhel C resp. D.

Saccheri byl přesvědčen o tom, že lze dokázat Eukleidův axiom o rovnoběžkách, a ve svém důkazu se snažil dovodit, že ve čtyřúhelníku, o němž je řeč ve větě 1, jsou úhly C a D pravé. A priori jsou tři možnosti: buď jsou úhly C a D *tupé* nebo *pravé* nebo *ostré*. Podle toho mluvíme o *hypothese tupého, pravého* nebo *ostrého úhlu*.



Obr. 110.



Obr. 111.

Aby Saccheri dokázal, že platí hypothesa pravého úhlu, snažil se obě zbývající hypothesy přivést ad absurdum. Sledujme dále Saccheriho:

Věta 3. *Podle toho, platí-li v Saccheriho čtyrúhelníku* $\square$ *ABCD hypothesa tupého, pravého nebo ostrého úhlu, platí v něm vztahy* $AB > CD$, $AB = CD$, $AB < CD$.

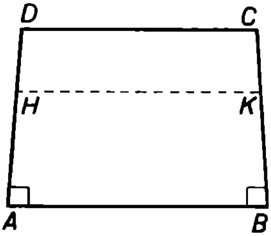
Důkaz. Pro hypothesu pravého úhlu to plyne z věty 2. Budiž nyní O resp. O' půlící bod úsečky AB resp. DC, takže je $\overline{OO'} \perp \overline{AB}$ a $\overline{OO'} \perp \perp \overline{DC}$. Je-li $\sphericalangle D > R$ (viz obr. 110), pak podle věty 2 je $AO > DO'$ čili $AB > DC$. Pro hypothesu ostrého úhlu dostáváme podobně $AB < DC$.

Věta 4. *Podle toho, platí-li pro Saccheriho čtyrúhelník* $\square$ *ABCD vztah* $AB > CD$, $AB = CD$ *nebo* $AB < CD$, *platí pro něj hypothesa tupého, pravého nebo ostrého úhlu.*

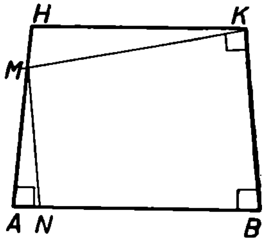
Důkaz lze snadno podat nepřímo.

Věta 5. *Je-li hypothesa pravého úhlu splněna alespoň pro jeden Saccheriho čtyrúhelník, je splněna pro každý.*

Důkaz. Nechť v Saccheriho čtyrúhelníku $\square\ ABCD$ platí hypothesa pravého úhlu. Je tedy $AB \equiv CD$. Budiž H (viz obr. 111) bod úsečky AD a K bod úsečky BC, při čemž $AH \equiv BK$. Kdyby byl $\sphericalangle\ AHK < R$, pak by podle věty 3 bylo $AB < HK$. Při tom by $\sphericalangle\ DHK > R$, takže podle věty 3 by bylo $HK < DC$. Tedy by platilo $AB < DC$, což je spor, neboť je $AB \equiv DC$. Podobně nemůže být $\sphericalangle\ AHK > R$, takže v Saccheriho čtyrúhelníku $\square\ ABKH$ platí hypothesa pravého úhlu.



Obr. 112.



Obr. 113.

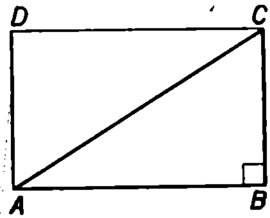
Je-li M bod na prodloužení úsečky AD za bod D a bod N na prodloužení BC za C a při tom $AM \equiv BN$, pak v Saccheriho čtyrúhelníku $\square\ ABNM$ platí hypothesa pravého úhlu. To je zřejmé, je-li AM celistvý násobek úsečky AD. Jestliže tomu tak není, dokazujeme dál pomocí Archimedova axiomu. Máme-li nyní dokázat, že v libovolném Saccheriho čtyrúhelníku $\square\ STUV$ platí hypothesa pravého úhlu, naneseme úsečku ST na přímku $\overline{AD}$ od bodu A a důkaz pokračuje analogicky.

Věta 6. *Je-li hypothesa tupého úhlu splněna alespoň pro jeden Saccheriho čtyrúhelník, je splněna pro každý.*

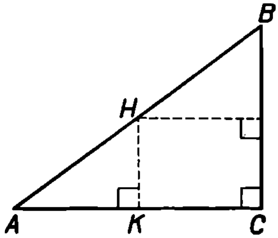
Důkaz. Nechť v Saccheriho čtyrúhelníku $\square\ ABCD$ je splněna hypothesa tupého úhlu. Budiž H (viz obr. 112) bod úsečky AD a K bod úsečky BC tak, že $AH \equiv BK$. Úhel $\sphericalangle\ KHA$ nemůže být pravý, neboť by pak v Saccheriho čtyrúhelníku $\square\ ABKH$ a následkem toho i v $\square\ ABCD$ platila hypothesa pravého úhlu.

Kdyby $\sphericalangle\ KHA$ byl ostrý, pak by bylo $HK > AB$ (věta 3). Protože v Saccheriho čtyrúhelníku $\square\ ABCD$ platí hypothesa tupého úhlu, je $AB > DC$, takže by bylo $HK > AB > DC$.

Pohybuje-li se nyní bod H po přímce $\overline{AD}$ směrem k D, a tedy také bod K po přímce $\overline{BC}$ směrem k C, přejde úsečka HK, která byla na začátku větší než AB, nakonec v úsečku CD, která je menší než AB. V důsledku spojitosti této změny existuje na HD takový bod H', že $H'K' \equiv AB$. Potom by však v čtyrúhelníku $\square\ ABK'H'$ platila hypothesa pravého úhlu (věta 4) a tedy by nemohla v Saccheriho čtyrúhelníku $\square\ ABCD$ platit hypothesa tupého úhlu (podle věty 5).



Obr. 114.



Obr. 115.

Budiž nyní dán Saccheriho čtyrúhelník s libovolnou základnou, na př. BK (viz obr. 113). Protože úhel K v Saccheriho čtyrúhelníku $\square\ ABKH$ je tupý, protne kolmice na $\overline{BK}$ vedená bodem K přímku $\overline{AH}$ mezi body A a H v bodě M. Podle věty o vnějším úhlu trojúhelníka je $\sphericalangle\ AMK > \sphericalangle\ AHK$, takže $\sphericalangle\ AMK$ je tupý. Podle věty 3 ve čtyřúhelníku $\square\ ABKM$ je $AB > KM$, takže existuje mezi A a B bod N tak, že $MK \equiv NB$. Podle věty o vnějším úhlu v trojúhelníku je $\sphericalangle\ MNB > \sphericalangle\ MAB$, takže úhel $\sphericalangle\ MNB$ je tupý a v Saccheriho čtyrúhelníku $\square\ BKMN$ platí hypothesa tupého úhlu.

Věta 7. *Je-li hypothesa ostrého úhlu splněna alespoň pro jeden Saccheriho čtyrúhelník, je splněna pro každý.*

Důkaz lze provést nepřímo na základě vět 5 a 6.

Věta 8. *Podle toho, platí-li hypothesa tupého, pravého nebo ostrého úhlu, je součet úhlů v trojúhelníku větší, rovný nebo menší než* $2R$.

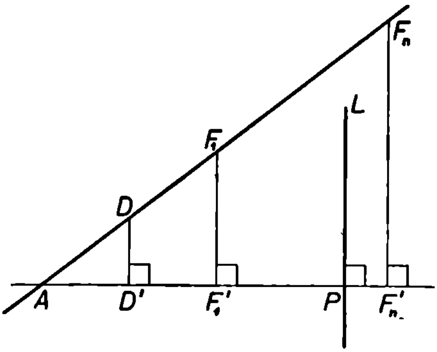
Důkaz. Budiž dán pravoúhlý trojúhelník $\triangle\ ABC$ s pravým úhlem u vrcholu B. Budiž bod D (obr. 114) na téže straně od $\overline{AB}$ jako C a takový, že $\sphericalangle\ DAB \equiv R$ a $DA \equiv BC$, takže $\square\ ABCD$ je Saccheriho čtyrúhelník. Platí-li hypothesa pravého úhlu, je $\triangle\ ABC \equiv \triangle\ CDA$ a součet úhlů trojúhelníka $\triangle\ ABC$ je $2R$.

Platí-li hypothesa tupého úhlu, je $AB > DC$, takže $\sphericalangle ACB > \sphericalangle DAC$. Odtud plyne, že součet úhlů trojúhelníka $\triangle ABC$ je větší než $2R$.

Platí-li hypothesa ostrého úhlu, je $AB < DC$, takže $\sphericalangle ACB < \sphericalangle DAC$, a odtud součet úhlů trojúhelníka $\triangle ABC$ je menší než $2R$.

Je-li dán obecný trojúhelník, můžeme ho výškou rozdělit na dva pravoúhlé a tím převést vyšetřování na předcházející případy.

Věta 9. *Budiž $\triangle ABC$* (viz obr. 115) *trojúhelník pravoúhlý ve vrcholu C a budiž K průsečík strany AC s kolmicí vedenou středem H strany AB na $\overline{AC}$. Podle toho, platí-li hypothesa tupého, pravého nebo ostrého úhlu, je $AK < KC$, $AK \equiv KC$, $AK > KC$.*



Obr. 116.

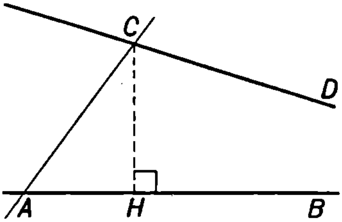
Důkaz. Budiž L průsečík strany BC s kolmicí vedenou bodem H na stranu BC. Platí-li hypothesa pravého úhlu, je tvrzení zřejmé. Platí-li hypothesa tupého úhlu, pak bude $\sphericalangle AHK < \sphericalangle HBC$, neboť součet úhlů čtyrúhelníka $\square\ KCBH$ je větší než $4R$; v trojúhelnících $\triangle AHK$ a $\triangle HBL$ je tedy $AK < HL$. Ve čtyrúhelníku $\square\ KCLH$ je úhel L pravý, úhel H tupý (hyp. tupého úhlu), tedy $HL < KC$, takže je $AK < KC$. Podobně dokážeme větu pro hypothesu ostrého úhlu.

Věta 10. *Platí-li hypothesa tupého resp. pravého úhlu, pak kolmice a nekolmice k téže přímce se vždy protínají.*

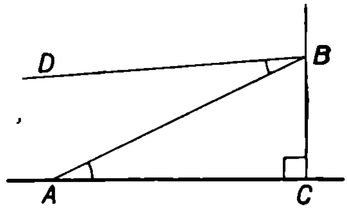
Důkaz. Nechť $\overline{LP}$ (obr. 116) je přímka kolmá na $\overline{AP}$ a přímka $\overline{AD}$ nechť svírá s $\overline{AP}$ ostrý úhel $\sphericalangle DAP$. Na přímce $\overline{AD}$ určeme body $F_1, F_2, \dots$ tak, že D je mezi A a F_1, F_1 mezi D a F_2, F_2 mezi F_1 a F_3 atd. a při tom $AD \equiv DF_1$, $AF_1 \equiv F_1F_2, \dots$ atd. Jsou-li D_1' F_1', $F_2', \dots$ atd. průsečíky přímky $\overline{AP}$ s kolmicemi vedenými body $D, F_1, F_2, \dots$ atd. na $\overline{AP}$, pak podle předcházející věty je $AF_k' \geq 2^k.AD'$. Podle Archimedova axiomu existuje n tak, že $2^n.AD' > AP$ čili $AF_n' > AP$. Protože přímka $\overline{PL}$ protíná AF_n' a neprotíná F_nF_n', musí protnout AF_n.

Věta 11. *Platí-li hypothesa pravého resp. tupého úhlu, pak platí V. Eukleidův postulát.*

Důkaz. Buďtež $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ (viz obr. 117) dvě přímky, při čemž body B a D jsou na téže straně od $\overline{AC}$ a při tom $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACD < 2R$. Pak je jeden z obou úhlů ostrý, budiž to $\sphericalangle BAC$. Budiž H průsečík přímky $\overline{AB}$ s kolmicí vedenou bodem C na $\overline{AB}$. Podle předpokladu je $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACH + \sphericalangle HCD + \sphericalangle CHA + \sphericalangle CHB < 4R$. V troj-



Obr. 117.



Obr. 118.

úhelníku $\triangle AHC$ platí podle předpokladu ve větě vztah $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACH + \sphericalangle CHA \geqq 2R$, takže $\sphericalangle HCD + \sphericalangle CHB < 2R$. Úhel $\sphericalangle CHB$ je pravý, podle věty 10 se tedy AB a CD protnou.

Věta 12. *Hypothesa tupého úhlu je falešná.*

Důkaz. Z hypothesy tupého úhlu plyne V. Eukleidův postulát a z něho plyne správnost hypothesy pravého úhlu. To však je spor, neboť obě hypothesy nemohou platit současně.

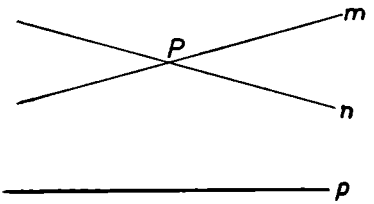
V této větě přivedl Saccheri hypothesu tupého úhlu ke sporu. Aby mohl dokázat V. Eukleidův axiom, bude se nyní snažit přivést ke sporu i hypothesu ostrého úhlu. Proto se v dalším stále předpokládá platnost této hypothesy, což nebudeme již znovu připomínat.

Věta 13. *Platí-li hypothesa ostrého úhlu, pak kolmice a nekolmice k téže přímce se nemusí protnout.*

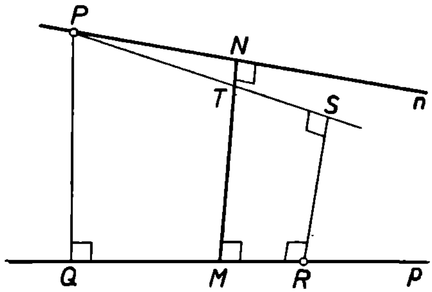
Důkaz. Budiž $\triangle ABC$ ve vrcholu C pravoúhlý trojúhelník (viz obr. 118). Určeme bod D tak, že A a D jsou na téže straně od $\overline{BC}$ a D a C na různých stranách od $\overline{AB}$ a při tom $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DBA$. Přímky $\overline{AC}$ a $\overline{DB}$ se neprotnou (srv. naši Větu 14,2) a při tom $\sphericalangle ACB$ je pravý a podle hypothesy ostrého úhlu je úhel $\sphericalangle DBC$ ostrý.

Věta 14. *Dvě přímky mají buď společnou kolmici nebo se protínají, nebo se k sobě stále blíží.*[28])

Důkaz. *Část 1.* Budiž bod P mimo přímku p (viz obr. 119). Přímky svazku P mohou být vzhledem k přímce p rozděleny na přímky, které protínají p, a na přímky, které mají s p společnou kolmici. Na základě vlastností spojitosti existují přímky m a n, které rozdělují svazek na dvě části: do jedné patří přímky neprotínající p a do druhé ty, které



Obr. 119.



Obr. 120.

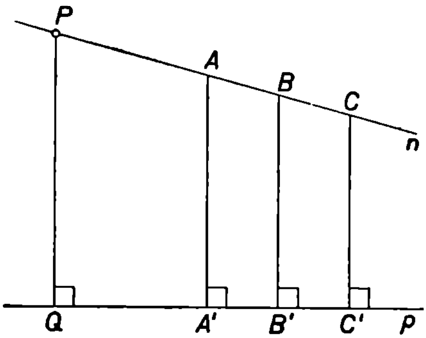
mají s p společnou kolmici. Dokážeme, že přímky m a n nepatří do žádné z obou skupin.

Je zřejmé, že n a p se neprotnou. Předpokládejme nyní, že n a p mají společnou kolmici NM (viz obr. 120). Budiž $\overline{PQ}$ kolmice na p a R bod na p takový, že M je mezi Q a R. Budiž $\overline{RS}$ kolmice na p a $\overline{PS}$ kolmice na $\overline{SR}$. Budiž T průsečík $\overline{PS}$ a $\overline{MN}$. Ve čtyřúhelníku $\square\, MRST$ jsou tři pravé úhly, tedy $\sphericalangle\, MTS$ je ostrý, takže $\sphericalangle\, PTM$ je tupý, což má za následek, že polopřímka (PS) padne do úhlu $\sphericalangle\, QPN$, takže přímka $\overline{PS}$ protíná p. Na druhé straně $\overline{PS}$ a p mají společnou kolmici, což je spor. Tedy n a p nemohou mít společnou kolmici.

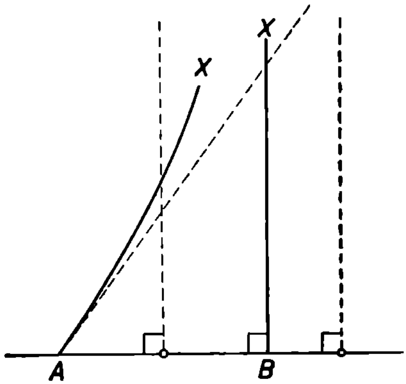
Část 2. V této části zbývá dokázat, že dvě přímky, které se neprotínají a nemají společnou kolmici, se k sobě stále blíží. Uvažujme tedy přímky n a p z 1. části důkazu a budiž $\overline{PQ}$ kolmice na p (viz obr. 121).

[28]) Saccheriho rčení, že dvě přímky se k sobě stále blíží, znamená, že na první přímce nelze nalézt bod, který by měl ze všech bodů této přímky nejmenší vzdálenost od přímky druhé (speciálně také žádný z těchto bodů nemá od druhé přímky vzdálenost nulovou, t. j. obě přímky se neprotínají). Roli přímek lze ovšem zaměnit.

Zvolme na n body A, B, C v pořadí P, A, B, C na straně ostrého úhlu $\sphericalangle QPA$ a nechť AA', BB', CC' jsou kolmice na p. Z úhlů $\sphericalangle PAA'$, $\sphericalangle PBB'$, $\sphericalangle PCC'$ není žádný pravý úhel, ale také ne ostrý, neboť z předpokladu, že by tomu tak nebylo, a z toho, že úhel $\sphericalangle QPA$ je ostrý, by se na základě vlastností spojitosti dokázalo, že existuje společná kolmice přímek n a p. Ve čtyrúhelníku $\square\ QA'AP$ jsou úhly Q a A'



Obr. 121.



Obr. 122.

pravé, úhel A tupý a P ostrý. Tedy podle věty 3 je $PQ > AA'$. Podobně dokazujeme dále, že $PQ > AA' > BB' > CC'$.

Další Saccheriho věty uvedeme bez důkazů:

Věta 15. *Dvě přímky, které se k sobě stále blíží, blíží se dokonce asymptoticky* (*t. j. je-li dána libovolná úsečka, pak vždy na jedné z obou přímek lze určit bod, který má od druhé přímky vzdálenost menší než daná úsečka*).

Takovéto přímky nazývá Saccheri asymptotickými a vyjadřuje se o nich také, že se setkají (ne však protnou) „teprve v nekonečnu“, a „bod v nekonečnu“ u obou asymptotických přímek označuje týmž písmenem, takže říká na př. „asymptotické přímky AX a BX“.

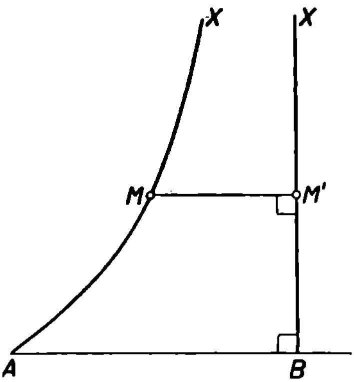
Je pozoruhodné, že Saccheri odvozuje také některé klasické věty neeukleidovské geometrie. Nesouvisí přímo s řetězem vět, které podle Saccheriho vedou k cíli vyvrátit hypothesu ostrého úhlu, a proto je uvedeme jen mimochodem.

Věta A. *Jsou-li AX a BX dvě asymptotické přímky, úhel $\sphericalangle ABX$ pravý* (viz obr. 122), *pak*:

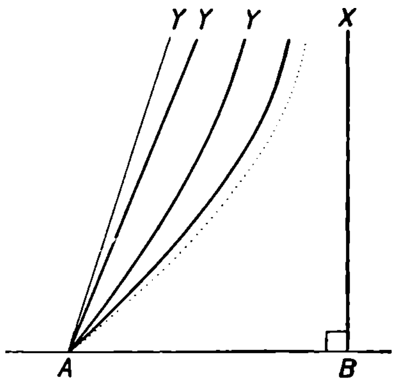
1. *každá kolmice na $\overline{AB}$ vedená bodem úsečky AB protne přímku AX,*

2. *kolmice na AB vedená bodem C, pro který je B mezi A a C, neprotne AX,*

3. *každá přímka, vedená bodem A pod menším úhlem než $\sphericalangle BAX$, protne přímku BX.*



Obr. 123.



Obr. 124.

Věta B. *Máme-li libovolný úhel $\sphericalangle BAX$, pak nemůže každá kolmice na rameno (AB) protnout rameno (AX).*

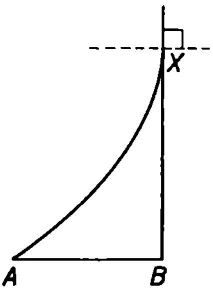
Cestu k vyvrácení hypothesy ostrého úhlu vede Saccheri ještě přes tyto dvě věty (důkazy jsou vynechány):

Věta 16. *Jestliže přímky $\overline{AX}$ a $\overline{BX}$ se blíží asymptoticky a je-li M* (viz obr. 123) *bod na $\overline{AX}$ a $\overline{MM'}$ je kolmice na $\overline{BX}$, pak úhel $\sphericalangle AMM'$ je vždy tupý. Pohybuje-li se M od bodu A k X, pak se úhel $\sphericalangle AMM'$ zmenšuje a to tak, že rozdíl mezi ním a pravým úhlem může být učiněn libovolně malý.*

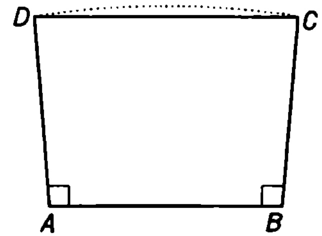
Věta 17. 1. *Mezi přímkami AY vedenými bodem A, které mají s BX* (viz obr. 124) *společnou kolmici, neexistuje přímka, která by svírala nejmenší úhel s polopřímkou (AB) (t. j. ke každé z přímek AY lze vždy mezi přímkami AY najít takovou, která s (AB) svírá úhel menší než $\sphericalangle BAY$).*

2. *Úhel $\sphericalangle BAY$ můžeme však volit vždy tak (malý), že společná kolmice přímek AY a BX má s oběma přímkami průsečíky o vzdálenosti menší než libovolně daná úsečka.*

Obě věty 16 a 17 jsou podivuhodně přesné, uvážíme-li, že cílem úvah Saccheriho je „přechod k limitě"; Saccheri z nich však činí závěr, že dvě asymptotické přímky v bodě, v němž se setkají v nekonečnu, „mají společnou kolmici" a že tam tudíž splynou (snad tu má Saccheri představu, že „v nekonečnu" vypadají obě asymptotické přímky AX a BX se společnou kolmicí tak, jak to ukazuje obr. 125).



Obr. 125.



Obr. 126.

Uveďme nyní doslovné znění Saccheriho závěru!

„Hypothesa ostrého úhlu je veskrze falešná, neboť odporuje přirozenosti přímky.

Důkaz. Jak jsme na předcházejících theoremech viděli, vede Eukleidově geometrii se příčící hypothesa ostrého úhlu nakonec k tomu, že musíme připustit v téže rovině existenci dvou přímek AX a BX, které směrem k bodu do nekonečna prodlouženy, nakonec splynou v jednu a tutéž přímku, protože totiž v nekonečně vzdáleném bodě mají společnou kolmici, která leží v téže rovině jako obě přímky samy." (Stäckel-Engel, [15], str. 109.)

Tento důkaz spočívá na mylném pojetí „nekonečně vzdáleného bodu", s nímž Saccheri nakládá jako s obyčejným bodem „v konečnu". To je vidět zvlášť dobře, když za větou 15 ukazuje, že se asymptotické přímky „*nemohou protnout ani v nekonečnu*". Kdyby se prý totiž asymptotické přímky $\overline{AX}$ a $\overline{BX}$ protly v bodě X (úhel $\sphericalangle\, ABX$ pravý), pak by bodem Z na přímce $\overline{AX}$ „*za bodem* X" (!) vedená kolmice na $\overline{AB}$ padla mimo úsečku AB za bod B, což není možné (podle bodu 2, věty A).

Po tomto důkazu uvádí Saccheri důkaz ještě jeden, nebyl tedy s prvním asi příliš spokojen. Druhý důkaz se zakládá na této myšlence:

Úsečka AB a úsek DC ekvidistanty přímky $\overline{AB}$ mezi kolmicemi $\overline{DA}$ a $\overline{CB}$ k přímce $\overline{AB}$ (viz obr. 126) mají stejnou délku (jak tvrdí Saccheri).

Za předpokladu hypothesy ostrého úhlu je však ekvidistanta křivá čára, a proto oblouk *DC* ekvidistanty je větší než úsečka *DC* a úsečka *DC* je podle věty 3 větší než *AB*, takže máme spor.

Pracovat s délkou křivé čáry předpokládá úvahy o infinitesimálních veličinách a zde se Saccheri dopustil omylů, když třemi různými způsoby (a po každé chybně) dokazoval, že úsek *DC* ekvidistanty je stejně dlouhý jako úsečka *AB*.

Saccheri je si plně vědom hlubokého rozdílu mezi jeho vyvrácením hypothesy tupého úhlu a hypothesy úhlu ostrého. Na konci svého pojednání Saccheri píše:

„U hypothesy tupého úhlu je věc jasnější než slunce v poledne, neboť přijmeme-li ji za správnou, lze z ní odvodit plnou a obecnou platnost diskutovaného Eukleidova axiomu, z něhož lze pak dokázat nesprávnost hypothesy tupého úhlu.

Naproti tomu se mi nepodařilo ukázat nesprávnost hypothesy ostrého úhlu, aniž bych před tím ukázal, že čára, jejíž všechny body leží stejně daleko od dané přímky a leží s ní v téže rovině, je právě s touto přímkou stejně dlouhá."

(Stäckel-Engel [15], str. 132.)

Přes chyby, kterých se Saccheri dopustil na konci svých úvah, je jeho dílo velice významné a pozoruhodné. Jsou v něm po prvé vysloveny některé věty neeukleidovské geometrie.

22. L. Bertrand, J. H. Lambert. V předcházejícím odstavci jsme viděli, že Saccheri v obou důkazech, jimiž chtěl vyvrátit hypothesu ostrého úhlu, operoval s nekonečnem. 18. století bylo obdobím úpadku úvah o nekonečně velkém i nekonečně malém. Na druhé straně byly tyto úvahy tehdy velice v módě, což se projevilo i na důkazech Eukleidova axiomu té doby.

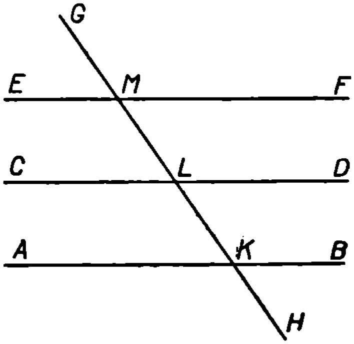
Důmyslný důkaz toho druhu, který svého času byl dlouho pokládán za správný, podal švýcarský matematik L. Bertrand (1731—1812) ve spisech *Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques* (1778) a *Eléments de géometrie* (1812). Jeho důkaz se redukuje na následující dvě tvrzení.

„Jestliže dvě přímky AB a CD [(viz obr. 127)] *ležící v téže rovině tvoří s přímkou HG vnitřní úhly BKL a DLK, jejichž součet je roven dvěma pravým, pak část roviny, kterou obě přímky ohraničují, je vzhledem k celé rovině tak malá, že je v ní obsažena nekonečněkrát."* (Kagan [4], str. 128.)

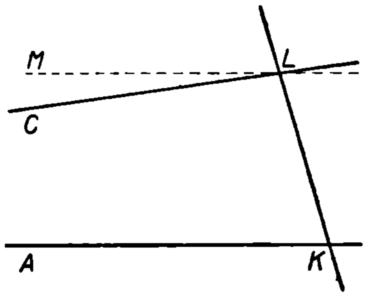
Toto tvrzení odůvodňuje Bertrand tak, že lze na přímku $\overline{GH}$ bez omezení nanášet za sebou úsečky shodné s úsečkou KL a každým bodem M vést přímku $\overline{EF}$ tak, že $\sphericalangle\, LMF$ je shodný s $\sphericalangle\, KLD$.

„Jestliže součet vnitřních úhlů dvou přímek s příčkou je po jedné straně této příčky menší než $2R$, pak se obě přímky na této straně protínají.

Předpokládejme, že přímky LC a KA [(obr. 128)] svírají s příčkou KL vnitřní úhly AKL a CLK, jejichž součet je menší dvou pravých; pak existuje



Obr. 127.



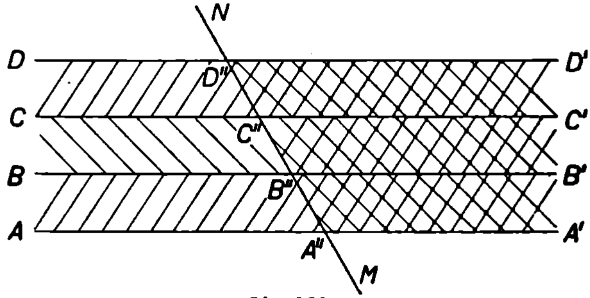
Obr. 128.

přímka LM, svírající s LC takový úhel, že platí $AKL + KLC + CLM = AKL + KLM = 2R$. Odtud plyne, že úhel MLC by byl cele obsažen uvnitř pásu $MLKA$, jestliže by přímka LC neprotínala KA. Tento pás je však obsažen v rovině nekonečněkrát, zatím co úhel MLC je v ní obsažen pouze tolikrát, kolikrát se oblouk MC dá nanést na obvod kružnice opsané kolem bodu L poloměrem ML. Tedy úhel MLC není cele obsažen uvnitř pásu $MLKA$, a proto jeho rameno LC vychází ven z pásu a protíná přímku KA.“

(Kagan [4], str. 128—129.)

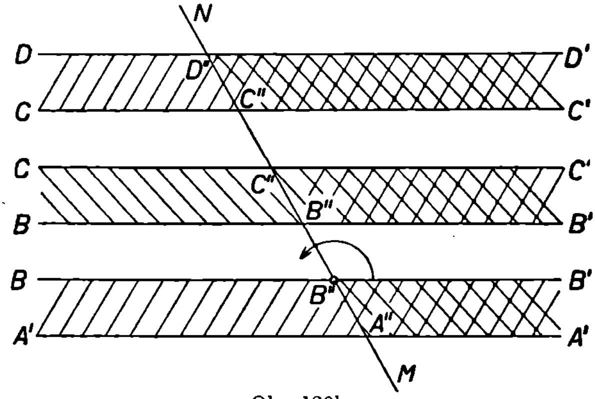
Bertrandův důkaz spočívá, jak je vidět, na předpokladu, že není možné, aby jednou byla celá rovina pokryta konečným počtem útvarů (zde jde o úhly — pro větší názornost si je mysleme, jako by byly vystřiženy z papíru) a po druhé, při jiném způsobu rozmístění týchž útvarů, nestačil rovinu pokrýt sebevětší jejich počet. Takový předpoklad je však neopodstatněný a v tom je slabina Bertrandova důkazu.

Je totiž chybné jen tak beze všeho přenášet na pokrývání celé roviny vlastnosti týkající se pokrývání omezené její části. Je na příklad jasné, že když rozložíme daný omezený rovinný útvar (na př. vnitřek kružnice nebo čtverce) na konečný počet částí, pak nelze všechny tyto části nějakým jiným způsobem složit tak, aby zůstala pokryta jen část tohoto útvaru (a při tom se tyto části nepřekrývaly, t. j. neměly mimo



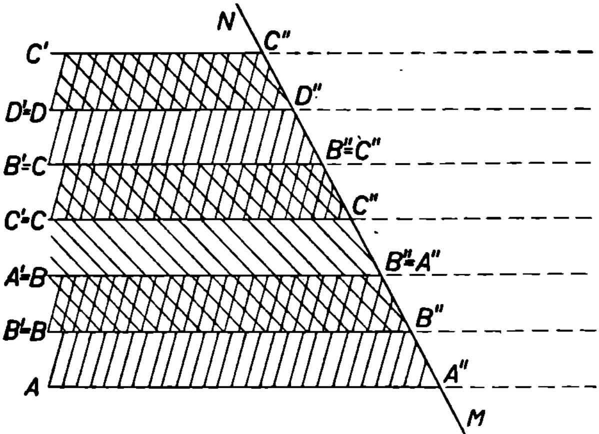
Obr. 129a.

hranici společný bod). Naproti tomu lze nekonečný počet útvarů, které pokrývají celou eukleidovskou rovinu, přeskupit tak, že vzniká pokrytí pouze její části.



Obr. 129b.

Uvažujme na př. pokrytí eukleidovské roviny vytvořené obdobně jako na obr. 127 (viz obr. 129a); zde přímky $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ atd. jsou mezi sebou rovnoběžné a úsečka délky $A''B''$ je nanášena na přímce $\overline{MN}$ v obou smyslech její orientace. Mysleme si, že jednotlivé pásy, omezené polopřímkami a úsečkou (jako na př. $(A''A)$, $(B''B)$, $A''B''$ — takový pás budeme stručně označovat $AA''B''B$), jsou pohyblivé (jako by byly vystřiženy z papíru). Nejdříve oddělíme jednotlivé pásy $AA'BB'$ atd. od sebe posuvem podél přímky $\overline{MN}$ vždy o jistý celistvý násobek šířky pásu (viz obr. 129b), a potom pásy ležící napravo od přímky $\overline{MN}$ přemístíme otočením vždy okolo určitého bodu na přímce $\overline{MN}$, abychom zaplnili všechny mezery nalevo od přímky $\overline{MN}$ (na př. pás $AA''B''B'$



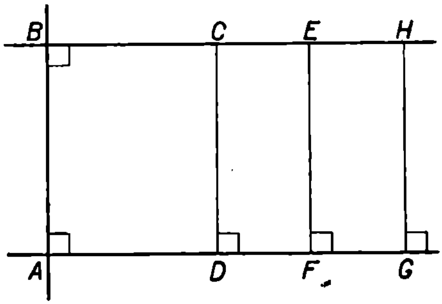
Obr. 129c.

okolo bodu B'' do polohy pásu $BB''B''B$). Tím dosáhneme toho, že všechny pásy z obr. 129a pokryjí celou polorovinu po levé straně přímky $\overline{MN}$, jak to ukazuje obr. 129c.

Nyní se obrátíme na švýcarského matematika J. H. Lamberta (1728—1777), který při pokusu o důkaz V. Eukleidova postulátu o rovnoběžkách došel podobně jako Saccheri k některým větám neeukleidovské geometrie. Lambert pravděpodobně znal Saccheriho práci, ale pouze z disertace G. S. Klügela *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio* (1763), která rozebírala všechny do té doby podané důkazy a byla vlastně prvním spisem o dějinném vývoji theorie rovnoběžek.

Roku 1766 napsal Lambert práci *Theorie der Parallellinien*, kterou však nepublikoval (pravděpodobně s ní nebyl spokojen), takže vyšla až po jeho smrti přičiněním J. Bernoulliho. Byla však vytištěna v málo známém časopise *Magazin für die reine und angewandte Mathematik*, kde zůstala práce zapomenuta, až ji r. 1893 náhodou objevil P. Stäckel, historik neeukleidovské geometrie. Otisk této práce je dnes snadno přístupný v knize Stäckel-Engel [15], str. 152—206.

Ve svých úvahách vycházel Lambert ze čtyrúhelníka, který má tři pravé úhly (je to jeden z obou čtyrúhelníků, na které rozděluje spojnice půlících bodů základen čtyrúhelník Saccheriho). Kdyby se podařilo dokázat, že i čtvrtý úhel je pravý, byl by tím dokázán Eukleidův axiom. Lambert proto staví o tomto úhlu *tři hypothesy*: hypothesu úhlu 1. pravého, 2. tupého, 3. ostrého, a snaží se poslední dvě přivést ke sporu.



Obr. 130.

Lambertovo pojednání znamená proti práci Saccheriho pokrok: všechny tři hypothesy projednává odděleně, hypothesu tupého úhlu přivádí ke sporu nezávisle na větě o vnějším úhlu trojúhelníka, která není již pro tuto hypothesu platná, a důsledky hypothesy tupého a ostrého úhlu rozvíjí více než Saccheri.

Když Lambert ukázal, že hypothesa pravého úhlu je ekvivalentní s Eukleidovým postulátem, obrací se na hypothesu tupého úhlu. Jeho úvahy se dají shrnout takto (originál viz Stäckel-Engel [15], str. 186 až 192):

Buďtež $\overline{AG}$ a $\overline{BH}$ (viz obr. 130) dvě přímky v rovině, obě kolmé k přímce $\overline{AB}$, a body C, E, H na přímce $\overline{BH}$ veďme kolmice $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{HG}$ na $\overline{AG}$. Úsečky CD, EF, HG se zmenšují, vzdalují-li se od $\overline{AB}$; jsou-li vzdálenosti DF a FG atd. stejné, zmenšují se stále více, t. j. platí $EF - HG > CD - EF$ (důkazy nebudeme uvádět).

Podle Archimedova axiomu při dostatečném počtu kolmých úseček bude součet úbytků větší než AB, takže $\overline{AG}$ a $\overline{BH}$ se protnou na téže straně od bodu A, jako jsou body D, F, G. Podle věty o shodnosti trojúhelníků se však přímky $\overline{AG}$ a $\overline{BH}$ protnou také na druhé straně od bodu A. Tedy přímky $\overline{BH}$ a $\overline{AG}$ se protínají po obou stranách kolmice. To však je spor, protože „dvě přímky místa neomezují."[29])

Lambert neodvozuje spor z toho, že by se bodem daly vést k přímce dvě kolmice, protože toto tvrzení plyne z věty o vnějším úhlu trojúhelníka, jež za hypothesy tupého úhlu není již správná. Formulace, že dvě přímky omezují část roviny, je tak sugestivní, že není vyloučeno, že Lambert si již zde uvědomil souvislost geometrie hypothesy tupého úhlu s geometrií na kouli (na které platí geometrie, odpovídající hypothese tupého úhlu, a na které také skutečně existují dvojúhelníky), ačkoliv o této souvislosti výslovně mluví až později u obsahu trojúhelníků.

Když přivedl druhou hypothesu ad absurdum, uvažuje Lambert o poslední hypothese (originál viz Stäckel-Engel [15], str. 192—196):

Mějme zase jako u předešlé úvahy přímky $\overline{AG}$ a $\overline{BH}$ (viz obr. 130) v rovině, obě kolmé k přímce $\overline{AB}$, a kolmice $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ na $\overline{AG}$. Zde se úsečky CD, EF, HG zvětšují, a jsou-li vzdálenosti DF, FG atd. stejné, zvětšují se stále více, t. j. platí $HG - EF > EF - CD$ a pro úhly platí, že se $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle BEF$, $\sphericalangle BHG$ stále zmenšují (důkazy opět vynecháváme). To však zde nevede ke sporu, takže chceme-li vyvrátit hypothesu ostrého úhlu, musíme hledat jinou cestu.

Lambert obrací proto svoji pozornost na trojúhelníky a dokazuje, že v trojúhelníku je součet úhlů menší než $2R$. Dodává pak, že odtud marně odvozoval další důsledky, aby došel ke sporu. Poznal jen, že hypothesa ostrého úhlu se nedá tak snadno vyvrátit jako hypothesa úhlu tupého. Jako jeden z nejvíce zarážejících důsledků uvádí Lambert to, že za předpokladu hypothesy ostrého úhlu mají délky úseček „*absolutní míru*".

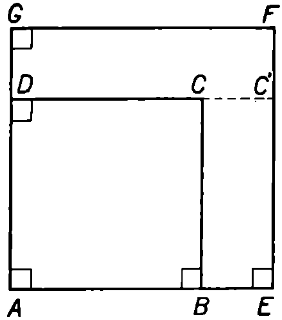
Pojem absolutní míry vysvětlíme čtenáři na příkladě *úhlů*, které mají jak v Lobačevského, tak i v Eukleidově geometrii absolutní míru. Tomu je rozumět takto: lze udat konstrukci úhlu určité velikosti, která se opírá výhradně jen o axiomy geometrie, takže ať prvky, které se mají během konstrukce volit, zvolíme jakkoli, sestrojené úhly budou

---

[29]) Axiom „*Dvě přímky místa neomezují*", uvedený v Eukleidových Základech, nepochází od Eukleida, nýbrž z pozdější doby. Chce se jím říci, že dvě přímky nemohou tvořit „*dvojúhelník*". Dnes tento fakt vystihujeme slovy „*dvě různé přímky mají nejvýše jeden průsečík*".

vždy mezi sebou shodné. Takovou konstrukci lze udat na příklad pro pravý úhel.

V Eukleidově geometrii nemůžeme naproti tomu udat konstrukci *úsečky* určité velikosti, která by se opírala výhradně jen o axiomy geometrie. Takovou konstrukci můžeme udat pouze tehdy, jestliže je dána k disposici ještě určitá úsečka jako *měřítko* (*etalon*). Ryze prakticky bychom rozdíl mezi mírou úseček a mírou úhlů mohli vyjádřit tak, že zatím co v Bureau international des Poids et Mesures v Sèvres u Paříže je chován etalon délkové míry jako vzdálenost mezi jistými vrypy na platino-iridiové tyči, není zde žádného etalonu pro míru úhlovou.



Obr. 131.

Na rozdíl od geometrie Eukleidovy mají však v Lobačevského geometrii také úsečky absolutní míru. Podle toho, co jsme řekli v prvé části naší knížky, může se výhradně pomocí axiomů geometrie konstruovat jednoduchým způsobem úsečka určité velikosti na př. takto: vezmeme úhel velikosti $\frac{1}{2}R$ a na jedno jeho rameno vedeme kolmici, která by byla souběžná s druhým ramenem. Pata této kolmice spolu s vrcholem úhlu určí hledanou úsečku. V Lobačevského geometrii lze dokonce získat tímto způsobem jednoznačné přiřazení úhlů a úseček (úsečce d bude přiřazen úhel souběžnosti $\Pi(d)$), takže měření úseček lze převést na měření úhlů, jejichž míra je, jak už jsme řekli, absolutní.

Lambert, který neznal pojem souběžných přímek, uváděl jednoznačný vztah úhlů a přímek takovýmto způsobem (originál viz Stäckel-Engel [15], str. 200): jsou-li $\square\, ABCD$ a $\square\, AEFG$ dva čtyrúhelníky s pravými úhly $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle D$, $\sphericalangle E$, $\sphericalangle G$ (viz obr. 131), pak úhly $\sphericalangle C$ a $\sphericalangle F$ jsou ostré. Je-li při tom na př. $AB \equiv AD < AE \equiv AG$, pak $\sphericalangle C > \sphericalangle F$. Protože dvěma různým úsečkám odpovídají různé úhly, lze každé úsečce AB tímto způsobem jednoznačně přiřadit úhel $\sphericalangle DCB$.

K tomu, že délky za předpokladu hypothesy ostrého úhlu mají absolutní míru, Lambert poznamenává:

„Tento důsledek má v sobě cosi vábného, co lehko vzbuzuje přání, aby třetí hypothesa byla přece jen pravdivá.“ (Stäckel-Engel [15], str. 200.)

Ani zde nenalezl Lambert spor, a proto pokračuje ve svých úvahách dále. Dokazuje, že úchylka součtu úhlů trojúhelníka od $2R$ je přímo úměrná velikosti jeho plochy, a poznamenává k tomu, že analogická vlastnost plyne i z hypothesy tupého úhlu. Lambert k tomu píše:

„Při tom se mi zdá zvláštní, že druhá hypothesa platí, když místo rovinných trojúhelníků vezmeme *sférické*, neboť u těchto je jak součet úhlů větší než 180°, tak také exces úměrný ploše trojúhelníka.

Ještě pozoruhodnější je, že to, co říkám o sférických trojúhelnících, se dá prokázat bez ohledu na potíže s theorií rovnoběžek a neopírá se o jinou základní větu než tu, že každá rovina procházející středem koule ji rozděluje na dvě stejné části.

Z toho bych měl činit takřka závěr, že třetí hypothesa platí pro imaginární kulovou plochu. Jistě v tom musí něco být, že ji nelze pro rovinu zdaleka tak snadno vyvrátit, jako se to podařilo s druhou hypothesou."

(Stäckel-Engel [15], str. 202-203)

Je pravděpodobné, že tato poznámka byla motivována tím, že když do vzorce

$$r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

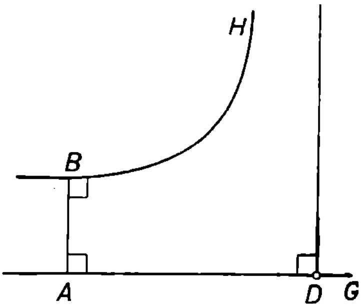
pro obsah sférického trojúhelníka s úhly α, β, γ dosadíme za r imaginární poloměr ir, dostáváme

$$r^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma),$$

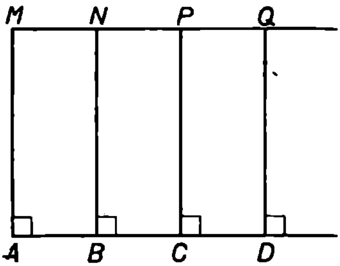
z čehož je vidět, že na imaginární kouli je plocha trojúhelníka také úměrná úchylce a že součet úhlů v trojúhelníku nemůže být větší než $2R$.

V každém případě je Lambertova poznámka pozoruhodná. Myšlenka srovnávat geometrii roviny s geometrií na kouli nabyla později rozhodujícího významu (na př. v úvahách Riemannových). Při tom Lambert uvažoval o imaginární kouli v době, kdy ještě tak mnozí matematikové měli před imaginárními čísly strach. Patrně v souvislosti s těmito úvahami začal Lambert přemýšlet o hodnotách trigonometrických funkcí, jestliže je argument imaginární; tak vzniklo pojednání *Sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques*, které r. 1767 Lambert četl před berlínskou akademií. V této práci je ukázáno, že goniometrické funkce nabývají pro *ryze imaginární* argumenty hodnot ryze imaginárních nebo dokonce reálných;[29a]) místo kružnice, dovolující sledovat průběh goniometrické funkce, nastupuje pak rovnoosá hyperbola a funkce goniometrické přejdou v hyperbolické.

Ve svém pojednání o theorii rovnoběžek pokračuje Lambert zkoumáním důsledků věty, že součet úhlů ve čtyrúhelníku je menší než $4R$, a dochází k závěru, že hypothesa ostrého úhlu by se dala vyvrátit, kdyby se podařilo odvodit ať už z ní samé nebo jen z ostatních axiomů,



Obr. 132.



Obr. 133.

že jsou-li přímky $\overline{AG}$ a $\overline{BH}$ kolmé na $\overline{AB}$ (viz obr. 132), pak kolmice na přímku $\overline{AG}$ vedená libovolným bodem D této přímky protíná přímku $\overline{HB}$. Ani zde však, jak říká, nenalezl nic, co by ho uspokojilo.

Je skoro podivné a násilné, že po všech těchto správných úvahách Lambert končí svoji práci tím, že přece jen vyvrací hypothesu ostrého úhlu. Citujme zde poslední paragraf jeho práce:

„Z toho všeho je vidět, že zatím co se druhá hypothesa dala snadno vyvrátit, třetí je zcela naopak daleko tvrdošíjnější.

Pominu nyní několik dalších pokusů. Položme $AB = BC = CD =$ atd. [(viz obr. 133)], úhly při A, B, C, D atd. buďtež pravé a $AM = BN = CP =$

[29a]) Platí totiž
$$\cos ia = \frac{e^a + e^{-a}}{2} = \cosh a,$$
neboť $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$. Naproti tomu je
$$\sin ia = i\,\frac{e^a - e^{-a}}{2} = i \sinh a,$$
neboť $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

$= DQ =$ atd. Potom úhly $AMN = MNB = BNP = NPC = CPQ =$ $= PQD =$ atd. jsou v důsledku třetí hypothesy všechny ostré a $MN =$ $= NP = PQ =$ atd. To však znamená, že $MNPQ\ldots$ není přímka, ale část pravidelného mnohoúhelníka, který lze vepsat do kružnice, jejíž střed leží pod M na každé z přímek MA, NB, PC, QD atd. Protože však následkem toho úhly B, C, D atd. nemohou být pravé, je tak vyvrácen předpoklad a s ním i třetí hypothesa.“ (Stäckel-Engel [15]), str. 206—207.)

Víme, kde je nedostatek tohoto důkazu: předpoklad, že každými třemi nekolineárními body lze vést kružnici, je ekvivalentní s Eukleidovým axiomem (srv. VĚTU 15,13).

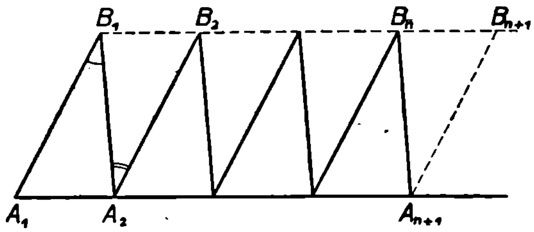
23. A. M. Légendre, F. Bolyai. Lambertovo pojednání spolu se spisem Saccheriho byly ty nejvýznamnější práce, jež byly napsány v oboru theorie rovnoběžek do doby Lobačevského, Bolyaie a Gausse. Přesto neměly na její další rozvoj žádný vliv, protože upadly v zapomenutí. Zcela jinak tomu bylo s dílem francouzského matematika Légendra (1752—1833).

V době kolem revoluce se ve Francii mění názory na sociální a ekonomické vztahy, což se projevuje i v oblasti školství a osvěty, kde vedoucí úlohu hráli tehdy encyklopedisté. Podle revolucionisující stati ďAlemberta v Encyklopedii o tom, jak vykládat začátky geometrie, píší Bézout, Légendre a Lacroix každý svoje „Základy“, které mají nahradit tehdy tolik rozšířené školní vydání Eukleida. Nejvíce se ujaly Légendrovy *Eléments de géométrie*, jež vyšly ještě za života Légendrova celkem ve 14 vydáních (první vyd. 1794), takže někteří nazývají poněkud přehnaně Légendra „Eukleidem nového věku“.

Sestavováním svých *Eléments* byl Légendre přiveden k systematickému přemýšlení o theorii rovnoběžek. V prvních osmi vydáních neklade Légendre mezi axiomy postulát o rovnoběžkách, nýbrž ho dokazuje. Tento důkaz mění od vydání k vydání. Některý důkaz se mu zdál příliš těžký pro začátečníky, s jiným nebyl zase příliš spokojen. Ve vydáních 9 a 11 uvádí proto raději tvrzení o rovnoběžkách jako axiom, ale již ve 12. vydání se pokouší upřesnit jeden z dřívějších pokusů a tato nová varianta se objevuje i ve 13. a 14. vydání.

R. 1833, v roce své smrti, shrnul Légendre svoje úvahy o rovnoběžkách do spisu *Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du* *triangle.* Na konci tohoto pojednání poznamenává, že jeho bádání konečně uspokojivě ukončila dvoutisícileté marné snažení v oboru theorie rovnoběžek.

Mýlil se. Ani jeho výsledky, ani methody, jimiž k nim došel, nemohou být označeny jako pokrok vzhledem k výsledkům Wallisovým a Saccheriho, nedošel ani tak daleko jako Lambert. Jeho dílo se však, jak jsme už jednou řekli, značně rozšířilo ve Francii i v Německu a v tom spočívá jeho velký význam, neboť tak svého času podněcovalo zájem o theorii rovnoběžek.



Obr. 134.

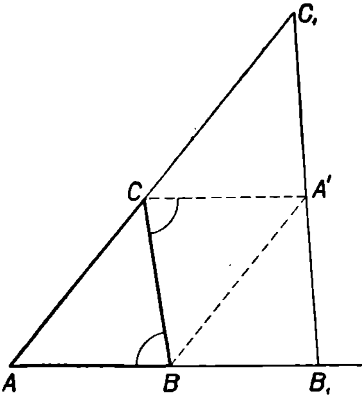
Podívejme se nyní, jak Légendre při svých důkazech postupoval. K problému se postavil tak, že chtěl dokázat, že součet úhlů v trojúhelníku činí $2R$, protože věděl, že toto tvrzení je ekvivalentní s Eukleidovým axiomem o rovnoběžkách.

Nejprve dokázal správně větu, že *v trojúhelníku je součet úhlů menší nebo roven dvěma pravým* (srv. naši VĚTU 13,6). Tato věta se obvykle nazývá *první Légendrova věta,* ačkoliv ji skoro o sto let dříve dokázal již Saccheri.

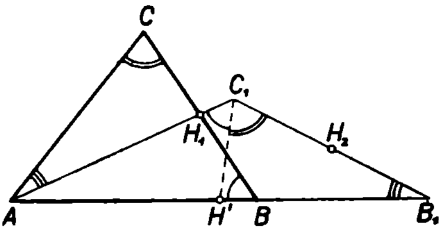
Jednoduchý a elegantní důkaz podává Légendre ve 3. vydání *Eléments* takto (podle Bonola-Liebmann [17], str. 59—60):

Budiž na přímce n shodných úseček A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_{n+1} a nad nimi po téže straně n shodných trojúhelníků s protilehlými vrcholy B_1, B_2, ..., B_n (viz obr. 134). Trojúhelníky $\triangle B_1A_2B_2$, $\triangle B_2A_3B_3$, ..., $\triangle B_{n-1}A_nB_n$ budou také shodné. Zvolme ještě bod B_{n+1} tak, aby i trojúhelník $\triangle B_nA_{n+1}B_{n+1}$ byl s nimi shodný.

Je nyní $\sphericalangle A_1B_1A_2 \leqq \sphericalangle B_1A_2B_2$. Kdyby zde totiž platil vztah $>$, pak srovnáním trojúhelníků $\triangle A_1B_1A_2$ a $\triangle B_2A_2B_1$, které se shodují ve dvou stranách ($A_1B_1 \equiv A_2B_2$, strana B_1A_2 je společná), by vyplynulo, že je $A_1A_2 > B_1B_2$. Protože úsečka je nejkratší spojnice dvou bodů (srv. naši VĚTU 3,32) platil by vztah $A_1B_1 + n \,.\, B_1B_2 + A_{n+1}B_{n+1} > n \,.\, A_1A_2$, který lze psát také $2 \,.\, A_1B_1 > n \,.\, d$, kde d je rozdíl $A_1A_2 - B_1B_2$. Poslední vztah by platil pro libovolné n (A_1B_1 a d jsou zde pevné), ale to by bylo ve sporu s Archimedovým axiomem. Je tedy $\sphericalangle A_1B_1A_2 \leqq \sphericalangle B_1A_2B_2$, takže součet úhlů v trojúhelníku $\triangle A_1B_1A_2$ je menší nebo roven dvěma pravým.



Obr. 135.



Obr. 136.

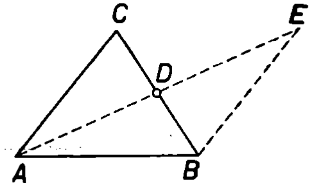
Druhou Légendrovou větou se rozumí věta: *Je-li v jednom trojúhelníku součet úhlů menší resp. roven 2R, pak je tomu tak v každém trojúhelníku.* Také tuto větu dokázal již Saccheri. Légendrův důkaz zde uvádět nebudeme, protože se neliší podstatně od důkazu Saccheriho.

Podívejme se nyní na Légendrovy důkazy věty, že součet úhlů v trojúhelníku je roven dvěma pravým.

V 1. vydání svých *Eléments* ji Légendre dokazuje analyticky. Vychází však z toho, že „na volbě jednotky délky nezávisí správnost dokazované poučky", takže činí vlastně předpoklad, že existují podobné útvary, což je, jak jsme již viděli, ekvivalentní s Eukleidovým axiomem o rovnoběžkách. Protože Légendre usoudil, že analytický důkaz je pro začátečníky obtížný, nahradil jej v dalším vydání tímto geometrickým důkazem (podle Bonola-Liebmann [17], str. 61—62):

Vzhledem k první větě Légendrově stačí dokázat, že součet úhlů v trojúhelníku nemůže být menší dvou pravých. Budiž tedy $\triangle ABC$

trojúhelník, v němž součet úhlů je menší než $2R$, a budiž α defekt trojúhelníka, t. j. úhel daný vztahem $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \alpha \equiv 2R$. Zvolme bod A' (viz obr. 135) na druhé straně od přímky $\overline{CB}$ tak, že $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'CB$ a $\triangle ABC \equiv \triangle A'BC$. Trojúhelník $\triangle A'BC$ má také defekt α. Vedeme-li nyní bodem A' přímku, která protne přímku $\overline{AC}$ v bodě C_1 a přímku $\overline{AB}$ v bodě B_1, pak trojúhelník $\triangle AB_1C_1$ má součet úhlů opět menší než $2R$ a při tom jeho defekt je roven součtu defektů čtyř trojúhelníků, z nichž je složen, tedy je větší než 2α. Opakujeme-li nyní s trojúhelníkem $\triangle AB_1C_1$ totéž, co jsme dělali s trojúhelníkem $\triangle ABC$, dostáváme po n krocích trojúhelník, jehož defekt je větší než $2^n\alpha$. Protože můžeme n volit tak, že $2^n\alpha > 2R$, dostáváme se ke sporu, takže součet úhlů v trojúhelníku nemůže být menší dvou pravých.



Obr. 137.

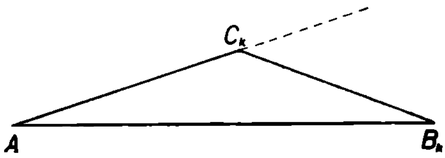
Tento důkaz spočívá, jak je vidět, na skrytém předpokladu, že každým bodem uvnitř úhlu lze vést přímku, jež protíná obě jeho ramena, kterýžto předpoklad je ekvivalentní s Eukleidovým postulátem (viz VĚTU 15,9).

Jiný důkaz podává Légendre takto (podle Kagan [4], str. 136—138): V trojúhelníku $\triangle ABC$ budiž $AB \geqq AC \geqq BC$. Je-li H střed strany BC (viz obr. 136) a na polopřímku $\overline{AH}$ naneseme $AC_1 \equiv AB$ a na (AB) úsečku $AB_1 \equiv 2 \cdot AH$, pak trojúhelník $\triangle AB_1C_1$ má týž součet úhlů jako $\triangle ABC$ (neboť je-li $AH' \equiv H'B_1$ $(\equiv AH)$, pak z $\triangle AHB \equiv \equiv \triangle AH'C_1$ plyne $\sphericalangle AC_1H' \equiv \sphericalangle B$ a $\triangle H'C_1B_1 \equiv \triangle HCA$, odkudž $\sphericalangle H'C_1B_1 \equiv \sphericalangle C$, $\sphericalangle AB_1C_1 \equiv \sphericalangle HAC$; přitom úhel $\sphericalangle HAB$ je oběma trojúhelníkům společný).

Pro úhel $\sphericalangle C_1AB_1$ platí vztah $\sphericalangle C_1AB_1 \leqq \frac{1}{2} \sphericalangle A$, což plyne odtud, že když v trojúhelníku $\triangle ABC$ je $AC \leqq AB$ a přitom D je půlící bod strany BC (viz obr. 137), $AD \equiv DE$, pak $\triangle ADC \equiv \triangle EDB$, takže $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle BED$. Protože v $\triangle ABE$ je $AB \geqq BE$ $(\equiv AC)$, je $\sphericalangle BED \geqq \sphericalangle DAB$.

V trojúhelníku $\triangle AB_1C_1$ platí opět $AB_1 \geqq AC_1 \geqq B_1C_1$, neboť především z $AC_1 \equiv AB$ a z $C_1B_1 \equiv AC$ plyne $AC_1 \geqq C_1B_1$. Dokázat, že $AB_1 \geqq AC_1$, je totéž, jako dokázat, že $AE \geqq AB$ (viz obr. 137), ovšem za předpokladu, že $AB \geqq AC \geqq BC$. Pak je však mimo jiné $\sphericalangle C \geqq \sphericalangle A$. Při tom platí $\sphericalangle ABE > \sphericalangle DBE \equiv \sphericalangle C$ a současně $\sphericalangle A > \sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle AEB$, takže pro $\triangle ABE$ platí $\sphericalangle ABE > > \sphericalangle AEB$, čili skutečně $AE > AB$.

Můžeme tedy pro trojúhelník $\triangle AB_1C_1$ opakovat totéž, co jsme dělali s $\triangle ABC$, a podobně pokračujeme s trojúhelníky $\triangle AB_2C_2$, $\triangle AB_3C_3$ atd. Dostaneme tak trojúhelník $\triangle AB_kC_k$, jehož součet úhlů je stejný jako součet úhlů trojúhelníka $\triangle ABC$, a přitom lze k volit tak, že úhly při vrcholech A a B_k jsou menší než libovolně daný malý úhel.



Obr. 138.

(Úvaha dosud provedená může sloužit jako jiný důkaz první věty Légendrovy. Srovnej s naším důkazem VĚTY 13,6!).

Légendre nyní uzavírá důkaz asi takto: vezmeme-li k tak velké, že každý z úhlů $\sphericalangle A$ a $\sphericalangle B_k$ bude menší než libovolně daný úhel, bude součet těchto úhlů konvergovat (při $k \to \infty$) k nule, takže součet úhlů v trojúhelníku $\triangle AB_kC_k$ (viz obr. 138), který je stejný jako v $\triangle ABC$, bude mít touž limitu jako úhel $\sphericalangle AC_kB_k$. Vezmeme-li vnější úhel při C_k, vidíme, že při $k \to \infty$ konverguje k nule, takže úhel C_k konverguje ke $2R$ a součet úhlů v $\triangle ABC$ je tedy roven dvěma pravým.

Légendre sice správně ukázal, že úhly $\sphericalangle A$ a $\sphericalangle B_k$ konvergují k nule, dopustil se však chyby, když jen tak beze všeho tvrdil, že i vnější úhel při $\sphericalangle C_k$ konverguje k nule. Lobačevskij v kritice tohoto důkazu poznamenal (Lobačevskij [6], str. 150 a n.), že lze připustit, že limita úhlu $\sphericalangle C_k$ je menší než $2R$, neboť zatím co s rostoucím k se úhly $\sphericalangle A$ a $\sphericalangle B_k$ zmenšují, současně se strany trojúhelníka $\triangle AB_kC_k$ bez omezení zvětšují.

Další Légendrův nepřímý důkaz věty, že součet úhlů trojúhelníka je roven dvěma pravým, vedl k závěru, se kterým jsme se již dříve setkali, že by totiž existovala absolutní míra délek. Když Légendre došel ve svých úvahách k tomu, že by délka byla dána pouhým číslem bez volby jednotky, viděl v tom spor a pokládal důkaz za skončený.

Závěrem můžeme o Légendrovi říci, že na všech úskalích, která se mu vyskytla v cestě, ztroskotal, a to proto, že se nedovedl odpoutat od vžitých představ eukleidovské geometrie.

Dříve, než skončíme líčení úspěchů a neúspěchů matematiků v „předhistorickém období" neeukleidovské geometrie, musíme se na chvíli zastavit ještě u maďarského matematika Farkase Bolyaie (1775—1856). Zabýval se po dlouhou dobu důkazy V. postulátu a jeho život je úzce spjat s objevem neeukleidovské geometrie, neboť jeho syn Jan patří mezi první, kteří odhalili novou kapitolu geometrie.

F. Bolyai pocházel ze starého maďarského šlechtického rodu a říká se, že jím začínají dějiny matematické činnosti v Maďarsku. Sklon k matematice se u něho jevil již v mládí. Svoje universitní studia konal v Göttingách (1796—1799) — proto je často uváděn také jako Wolfgang Bolyai — a tam se seznámil s Gaussem, o dva roky mladším. Společné zájmy sblížily oba studenty tak, že se stali nejlepšími přáteli svých mladých let. Svědčí o tom jejich korespondence z doby, kdy F. Bolyai žil již opět v Maďarsku, kde se po několika letech stal profesorem matematiky a fysiky na evangelickém reformovaném gymnasiu v Maros-Vásárhély.

F. Bolyai se zabýval důkazem V. postulátu ještě před příchodem do Götting a ve svých pokusech pokračoval v Göttingách. Göttingenská universita byla tehdy zastoupena několika jmény na hnutí, vzniklém okolo theorie rovnoběžek.

Profesor matematiky A. G. Kaestner pilně sledoval a shromažďoval literaturu o theorii rovnoběžek a dal G. S. Klügelovi podnět k sepsání disertační práce *Recensio conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi* (1763), první to práci o historii tohoto bolavého místa matematiky vůbec, o které jsme mluvili již výše. Kaestner ve svých pozdějších přednáškách pochyboval o tom, že by se V. postulát dal vůbec dokázat. Profesor astronomie S. F. Seyffer, který se také zabýval theorií rovnoběžek, projevoval podobnou resignaci, jak můžeme vidět z tohoto jeho výroku:

„...zdá se nanejvýš pochybné, že by se jedenáctý axiom dal vůbec dokázat, aniž by se přibral nějaký další axiom." (P. Stäckel [10], str. 41.)

Toto ovzduší resignace nebylo založeno na konkretních výsledcích; šlo jen o hypothesy, které se samy nabízely tomu, kdo sledoval již tak dlouhou historii neúspěšných důkazů V. postulátu. Proto snad také nemělo toto ovzduší žádný vliv ani na F. Bolyaie, ani na Gausse, takže se oba pokoušeli dokázat Eukleidův postulát a později si o svých úvahách vyměnili několik dopisů.

Ačkoliv se F. Bolyai zabýval theorií rovnoběžek takřka celý život, nepřinesl nic podstatně nového. Ukázal pouze na příklad to, že V. postulát je ekvivalentní s tvrzením, že každými čtyřmi body neležícími v rovině možno vést kulovou plochu čili jinými slovy, že každými třemi body neležícími v přímce lze vést kružnici. Sám o svém úsilí píše:

> „Protože jsem však nebyl spokojen se svými pokusy dokázat XI. postulát a nenalezl jsem klidu, ani když jsem v těchto pokusech šel až po samy meze možnosti, hasl po určité době můj zápal pro matematiku a vrhl jsem se na poesii.“ (P. Stäckel [10], str. 18.)

F. Bolyai byl nadaným matematikem, avšak trpěl jednak velkou roztříštěností svých zájmů, jednak tím, že zůstal ve svých snahách osamocen. V jeho vlasti nebylo žádné matematické tradice, takže se neměl o koho opřít, a s ostatním světem neměl žádného styku. Vedle několika knížek o elementech matematiky a fysiky pro posluchače gymnasia, na němž učil, vydal latinský spis *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae... introducendi...* (1832—34), který je jeho životním dílem. Jako dodatek k tomuto spisu byla přidána stať mladého Jana Bolyaie *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*, ve které jsou vyloženy základy neeukleidovské geometrie a o které budeme mluvit ještě později.

Předmětem vlastního spisu F. Bolyaie jsou snahy charakteristické pro 19. století, totiž budování základů geometrie a vůbec celé matematiky. Byl však psán v době, kdy nebyly ještě v matematice mnohé ze základních otázek vyjasněny: nebyl na př. ještě podán důkaz t. zv. *fundamentální věty algebry* (která říká, že každá algebraická rovnice má, připouštíme-li komplexní čísla, alespoň jeden kořen), nebyla ještě přesně definována *spojitost*, nebyl zaveden pojem *množiny* (učinil tak teprve r. 1895 G. Cantor). F. Bolyai si položil úkol příliš obtížný, než aby ho mohl cele splnit, a proto jeho spis nenašel žádného ohlasu ani v době, kdy byl psán, a tedy tím spíše ani v době pozdější. Přesto některými svými myšlenkami anticipoval pojmy později zavedené.