Lineární variační úlohy

In: Michail Aleksejevič Lavrent'ev (author); Lazar Aronovič Ljusternik (author); Karel Winkelbauer (translator): Kurs variačního počtu. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 211–237.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402795

KAPITOLA IX.

LINEÁRNÍ VARIAČNÍ ÚLOHY

§ 36. Rovnice Sturm-Liouvilleovy.

Věnujeme se nyní těm variačním úlohám, pro které Eulerovy rovnice jsou lineární.

Vyšetřujme kvadratický funkcionál

$$K(y) = \int_a^b [P(x)y^2 + R(x)y'^2]\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Eulerova rovnice pro tento funkcionál je známá Jacobiova rovnice

$$Py - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Ry') = 0. \tag{2}$$

Vyšetřujeme-li isoperimetrický problém, jak najít podmíněnou extremálu funkcionálu K za podmínky

$$\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x = 1, \tag{3}$$

jsme vedeni k úloze hledat nepodmíněnou extremálu funkcionálu

$$\int_a^b (Ry'^2 + Py^2 - \lambda y^2)\,\mathrm{d}x$$

(λ je konstantní). Příslušná Eulerova rovnice

$$Py - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Ry') = \lambda y \tag{4}$$

(neboli $Ry'' + R'y' - Py + \lambda y = 0$) se nazývá rovnicí Sturm-Liouvilleovou.

Napříště se omezíme na nejjednodušší případ počátečních podmínek

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{5}$$

Dále budeme předpokládat, že funkce $R(x)$ a $P(x)$ patří do třídy C_1, a mimo to budeme předpokládat, že je $R(x) > 0$ pro $a \leqq x \leqq b$.

Pišme krátce:

$$Py - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Ry') \equiv L(y). \tag{6}$$

Rovnice Jacobiova (2) a Sturm-Liouvilleova (4) nabudou nyní tvaru

$$L(y) = 0, \quad L(y) = \lambda y.$$

$L(y)$ se obyčejně nazývá operátorem Sturm-Liouvilleovým. Tento operátor je lineární: pro dvě libovolné funkce y_1 a y_2 třídy C_2 platí

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

Pro jakoukoli konstantu α je

$$L(\alpha y) = \alpha L(y).$$

Kvadratické a bilineární funkcionály. Zavedeme označení

$$K(y, z) = \int_a^b (Ry'z' + Pyz)\, dx. \tag{7}$$

Funkcionál $K(y, z)$ je bilineárním funkcionálem funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$, t. j. K je lineární jak vzhledem k $y(x)$, tak i vzhledem k $z(x)$. Pro $y(x) = z(x)$

$$K(y, y) = K(y)$$

Připomeňme následující identitu:

$$K(a_1 y + a_2 z) = a_1^2 K(y) + 2a_1 a_2 K(y, z) + a_2^2 K(z), \tag{8}$$

kterou si snadno ověříme přímo. Tuto identitu lze zobecnit, a to:

$$K\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 K(y_i) + 2\sum_{j>i} K(y_i, y_j). \tag{8'}$$

Vzhledem k počátečním podmínkám (5) dostaneme:

$$\int_a^b Ry'z'\, dx = -\int_a^b \left(\frac{d}{dx} Ry'\right) z\, dx = -\int_a^b \left(\frac{d}{dx} Rz'\right) y\, dx.$$

Lze tedy integrál (7) napsat v tomto tvaru:

$$K(y, z) = \int_a^b L(y) z\, dx, \tag{9}$$

kde $L(y)$ je definována rovností (6). Je zřejmé, že lze také napsat

$$K(y, z) = \int_a^b L(z) y\, dx,$$

a tedy

$$\int_a^b L(y)z\,\mathrm{d}x = \int_a^b L(z)y\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Speciálně pro $y = z$

$$K(y) = \int_a^b L(y)y\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Symetrické operátory. Budiž na třídě funkcí $[y(x)]$, $a \leqq x \leqq b$, definován lineární operátor $Ay(x)$. Operátor Ay se nazývá *symetrickým*, jestliže pro libovolné funkce $y(x)$ a $z(x)$ naší třídy platí

$$\int_a^b (Ay)z\,\mathrm{d}x = \int_a^b (Az)y\,\mathrm{d}x.$$

Formule (10) ukazuje, že operátor Sturm-Liouvilleův na naší třídě funkcí je symetrickým operátorem.

Analogicky lze dokázat, že operátor Ly na třídě funkcí $[y(x)] \subset C_1$, vyhovujících obecnějším počátečním podmínkám, na příklad

$$y'(a) = 0, \quad y'(b) = 0,$$

je operátor symetrický. Právě tak je tento operátor symetrický na třídě funkcí, u nichž krajové podmínky jsou podmínkami periodicity s periodou $\omega = (b - a)$:

$$y(b) = y(a), \quad y'(b) = y'(a).$$

Jako jiný případ symetrického operátoru lze definovat operátor Fredholmův K, definovaný na všech funkcích třídy C:

$$K(y(x)) = \int_a^b K(x, s)\, y(s)\,\mathrm{d}s$$

se symetrickým jádrem $K(x, s) = K(s, x)$.

Je totiž

$$\int_a^b (Ky)\, z(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b\int_a^b K(x, s)\, y(s)\, z(x)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b (Kz)\, y(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b\int_a^b K(x, s)\, z(s)\, y(x)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x.$$

Vzhledem k symetričnosti jádra $K(x, s) = K(s, x)$ jsou si oba dvojné integrály rovny a je $\int_a^b (Ky)z\,\mathrm{d}x = \int_a^b (Kz)y\,\mathrm{d}x$.

Orthogonalita. Dvě funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ se nazývají *orthogonálními* v intervalu $[a, b]$ *s vahou* $\varrho(x)$, jestliže

$$\int_a^b \varrho(x)\, y_1(x)\, y_2(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Funkce $y_1(x)$ se nazývá *normovanou* v intervalu $[a, b]$ *s vahou* $\varrho(x)$, je-li

$$\int_a^b \varrho(x)\, y_1^2(x)\, \mathrm{d}x = 1.$$

Napříště budeme považovat váhu za nezápornou a přitom v intervalu $[a, b]$ nerovnou identicky nule, $\varrho(x) \geqq 0$.

V případě váhy $\varrho(x) \equiv 1$ mluvíme jednoduše o *orthogonalitě* dvojice funkcí $y_1(x)$ a $y_2(x)$ v intervalu $[a, b]$, je-li

$$\int_a^b y_1 y_2\, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{pro} \quad y_1(x) \neq y_2(x)$$

a o *normovanosti* funkce $y(x)$ v $[a, b]$, je-li

$$\int_a^b y^2\, \mathrm{d}x = 1.$$

Posloupnost funkcí se nazývá *orthonormovanou* v intervalu $[a, b]$ *s vahou* $\varrho(x)$, je-li

$$\int_a^b y_i(x)\, y_j(x)\, \varrho(x)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

Příklady: 1. Posloupnost

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \ldots$$

je orthonormovaná posloupnost o váze 1 v $[0, 2\pi]$.

2. Posloupnost $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx\right\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, je orthonormovaná posloupnost o váze 1 v $[0, 2\pi]$.

Pro jednoduchost se napříště všude omezíme, bez dalších poznámek, na případ váhy $\varrho(x) \equiv 1$. Ale všechno, co v této kapitole dokážeme, lze automaticky přenést na případ jakékoholi kladné váhy $\varrho(x)$.

§ 37. Vlastní hodnoty a vlastní funkce.

Rovnice (4) za podmínek (5) pro jakékoli reálné nebo komplexní λ má vždy triviální řešení

$$y(x) \equiv 0.$$

Avšak pro některé hodnoty λ může mít tato rovnice pro počáteční podmínky (5) také netriviální (t. j. nikoli identicky rovné nule) řešení: $y(x) \not\equiv 0$.

Příslušné hodnoty λ se nazývají *vlastními hodnotami* pro operátor L.

Příklad. Budiž

$$K(y) = \int_a^b (cy^2 + c_1 y'^2)\,dx, \ \varrho = 1,$$

kde $c_1 > 0$ (c, c_1 jsou konstanty). Rovnice Sturm-Liouvilleova má nyní takový tvar:

$$y'' + \frac{\lambda - c}{c_1}\, y = 0. \tag{12}$$

Z toho je

$$y = A_1 e^{mx} + A_2 e^{-mx},$$

kde

$$m^2 = -\frac{\lambda - c}{c_1}. \tag{13}$$

Počáteční podmínky (5) vedou k páru homogenních rovnic vzhledem k A_1 a A_2, a to:

$$A_1 e^{ma} + A_2 e^{-ma} = 0, \ A_1 e^{mb} + A_2 e^{-mb} = 0. \tag{14}$$

K tomu, aby systém (12) měl netriviální řešení, je nutné a stačí, aby jeho determinant se rovnal nule, t. j. aby

$$e^{m(a-b)} = e^{-m(a-b)} \text{ neboli } e^{2m(a-b)} = 1.$$

Je tedy $m(a - b) = n\pi i$ ($i = \sqrt{-1}$), kde n je libovolné celé číslo. Proto lze řešení rovnice (11) vzhledem k λ napsat v takovémto tvaru:

$$\lambda = \frac{c_1 n^2 \pi^2}{(b - a)^2} + c. \tag{15}$$

Řešení rovnice (12) za podmínek (5) lze dát tvar

$$y = A \sin \frac{n\pi(x - a)}{b - a}, \tag{16}$$

kde A je libovolná konstanta. Pro n celé různé od nuly dostaneme netriviální řešení.

Budou tedy vlastními hodnotami všechna čísla tvaru (15).

Vlastní funkce. Každé netriviální řešení rovnice Sturm-Liouvilleovy

$$L(y) = \lambda y$$

pro $y(a) = y(b) = 0$, odpovídající vlastní hodnotě λ, se nazývá *vlastní funkcí* operátoru Ly. Vlastní funkce $y(x)$ se nazývá *normovanou*, je-li

$$\int_a^b y^2(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Pro předcházející příklad budou funkce (16) vlastními funkcemi.

Základní vlastnosti vlastních hodnot a vlastních funkcí. Stanovíme předběžně řadu důležitějších vlastností pro vlastní funkce.

1. *Je-li $y(x)$ vlastní funkce, pak je*

$$y'(a) \neq 0,$$

$$y'(b) \neq 0.$$

Jelikož totiž rovnice Sturm-Liouvilleova je rovnicí druhého řádu a koeficient při y'' je různý od nuly, je podmínkami $y(a) = 0$, $y'(a) = 0$ nebo $y(b) = 0$, $y'(b) = 0$ integrál určen jednoznačným způsobem. Avšak stejným počátečním podmínkám vyhovuje triviální řešení $y \equiv 0$ a tedy za předpokladu, že pro vlastní funkci $y = y(x)$ je $y(a) = 0$ a $y'(a) = 0$, dostaneme, že tato funkce je identicky rovna nule, což je ve sporu s definicí.

2. *Jsou-li $y_1(x)$ a $y_2(x)$ vlastní funkce, odpovídající jedné a téže vlastní hodnotě, pak jejich lineární kombinace*

$$y = y(x) = c_1y_1 + c_2y_2,$$

kde c_1 a c_2 jsou konstanty, je buď vlastní funkcí nebo triviálním řešením.

Na základě vlastností homogenních lineárních rovnic je totiž $y(x)$ integrálem rovnice (4), a mimo to je

$$y(a) = c_1y_1(a) + c_2y_2(a) = 0,$$

$$y(b) = c_1y_1(b) + c_2y_2(b) = 0.$$

Je-li tedy $y(x) \not\equiv 0$, je tato funkce vlastní funkcí.

3. *Jestliže $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou vlastní funkce funkcionálu K, odpovídající jedné a téže vlastní hodnotě, pak y_1 a y_2 jsou lineárně závislé, při čemž*

$$y_2(x)\, y_1'(a) - y_1(x)\, y_2'(a) \equiv 0. \tag{17}$$

Skutečně, funkce

$$y(x) = y_2(x)\, y_1'(a) - y_1(x)\, y_2'(a)$$

je řešením rovnice (4) pro příslušné λ. Protože kromě toho je pro ni $y(a) = y'(a) = 0$, pak na základě jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice rovněž dostaneme (17).

4. *Pro každou vlastní hodnotu λ existují jenom dvě normované vlastní funkce. Tyto funkce se od sebe liší jenom znaménkem.*

Vyplývá totiž z vlastností 1 a 3, že jsou-li $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dvě vlastní funkce, příslušné jedné a téže vlastní hodnotě λ, je

$$y_2(x) = ky_1(x),$$

kde $k \neq 0$ je některá konstanta. Z rovnosti

$$\int_a^b y_2^2\, dx = \int_a^b y_1^2\, dx = 1$$

plyne, že je $k = \pm 1$.

Nyní dokážeme řadu elementárních, ale důležitých vět.

Věta I. *Jsou-li λ_1 a λ_2 dvě různé vlastní hodnoty pro K a $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jim odpovídající vlastní funkce, pak jsou tyto funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ orthogonální, t. j. splňují rovnost*

$$\int_a^b y_1 y_2\, dx = 0.$$

Vskutku je

$$L(y_1) = \lambda_1 y_1,$$

$$L(y_2) = \lambda_2 y_2.$$

Násobíme-li obě strany první rovnice činitelem $y_2(x)$ a druhé rovnice činitelem $y_1(x)$, integrujeme-li v mezích od a do b a odečteme-li od sebe dosažené výsledky, obdržíme

$$\int_a^b [(Ly_1)y_2 - (Ly_2)y_1]\, dx = (\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b y_1 y_2\, dx = 0,$$

a protože je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, máme tedy

$$\int_a^b y_1 y_2 \, dx = 0.$$

Věta 2. *Všechny vlastní hodnoty K jsou reálné.*[1])

Budiž λ komplexní vlastní hodnota funkcionálu K, v kterém ovšem předpokládáme, že funkce P a R jsou reálné, a budiž $y(x)$ příslušná vlastní funkce. Označíme-li $\bar{\lambda}$ a $\bar{y}(x)$ veličiny s nimi konjugované, pak z rovnice

$$L(y) = \lambda y$$

dostaneme

$$L(\bar{y}) = \bar{\lambda}\bar{y},$$

t. j. $\bar{\lambda}$ je rovněž vlastní hodnota funkcionálu K a $\bar{y}$ je odpovídající vlastní funkce. Avšak na základě věty 1 pro $\lambda \neq \bar{\lambda}$ máme

$$\int_a^b y\bar{y} \, dx = \int_a^b |y^2| \, dx = 0.$$

Poslední rovnost je možna jenom tehdy, když je $|y|$ identicky rovno nule, což je ve sporu s našimi předpoklady. Je tedy $\bar{\lambda} = \lambda$, t. j. λ je číslo reálné.

Věta 3. *Je-li λ vlastní hodnotou K a $y(x)$ příslušná normovaná vlastní funkce, je*

$$K[y(x)] = \lambda.$$

Vskutku je

$$L(y) = \lambda y. \tag{18}$$

Z toho podle formule (11) máme

$$K(y) = \int_a^b L(y) y \, dx = \lambda \int_a^b y^2 \, dx = \lambda.$$

Věta 4. *Je-li $y(x)$ vlastní funkce K a $y_1(x)$ k $y(x)$ orthogonální funkce, je $K(y, y_1) = 0$.*

Násobíme-li totiž obě strany rovnosti (4) výrazem y_1, pak po integraci podle rovnosti (9) dostaneme

$$K\,(y, y_1) = \int_a^b L\,(y)\, y_1 \, dx = \lambda \int_a^b y y_1 \, dx = 0.$$

---

[1]) Věty 1 a 2 platí pro všechny symetrické operátory.

Hledejme nyní křivku $y = y(x)$, která náleží ke třídě C_1 (nebo D_1, viz §6), a splňuje podmínky (3) a (5) a činí $K(y)$ minimálním. Lze dokázat, že vždycky existuje funkce $y = y_1(x)$ třídy C_1 [1'] dávající integrálu $K(y)$ minimum.[2] Tato funkce musí vyhovovat Eulerově rovnici (4) pro některou hodnotu parametru $\lambda = \lambda_1$. Tudíž pro rovnici Sturm-Liouvilleovu vždycky existuje jak vlastní funkce $y_1(x)$, tak i k ní příslušná vlastní hodnota. Podle věty 3 je

$$K(y_1) = \lambda_1.$$

Avšak podle definice $y_1(x)$ λ_1 je minimum funkcionálu K za podmínek (3) a (5). Jiné vlastní hodnoty podle téže věty jsou také hodnoty funkcionálu K (různé od minimálních) pro některé funkce, vyhovující těmže podmínkám (3) a (5).

λ_1 je proto nejmenší z vlastních hodnot. Tak jsme došli k následující větě.

Věta 5. *Nejmenší z vlastních hodnot je právě minimum funkcionálu K za podmínek* (3) *a* (5).

Věta 6. *Je-li λ_1 nejmenší z vlastních hodnot funkcionálu K, $y_1(x)$ příslušná vlastní funkce, pak pro jakoukoli funkci $y(x)$ třídy C_1 nebo D_1, vyhovující počátečním podmínkám* (5), *je splněna nerovnost*

$$K(y) \geqq \lambda_1 \int_a^b y^2 \,\mathrm{d}x, \tag{19}$$

při čemž znamení rovnosti platí jenom v tom případě, když je $y(x) \equiv \pm k y_1(x)$, kde $k^2 = \int_a^b y^2 \,\mathrm{d}x$.

Je-li $\int_a^b y^2 \,\mathrm{d}x = 1$, pak je podle věty 5 $K(y) \geqq \lambda_1$. Nechť je nyní $\int_a^b y^2 \,\mathrm{d}x = m^2 \neq 0$; potom je $\int_a^b \left(\frac{1}{m} y\right)^2 \mathrm{d}x = 1$, a proto

$$\frac{1}{m^2} K(y) = K\left(\frac{1}{m} y\right) \geqq \lambda_1,$$

[1'] Funkce dávající minimum integrálu K patří ke třídě C_1. Vskutku, v každém bodě lomu c rovnost Weierstrassova-Erdmanova (§ 17) má tvar $R(c)y'(c-0) = R(c)y'(c+0)$. Avšak je $R(c) > 0$, a tedy $y'(c-0) = y'(c+0) = y'(c)$.

[2] Důkaz existence takové funkce lze najít na příklad v naší knize „Osnovy variacionnogo isčislenija", sv. I, č. II, str. 255—260 nebo 386—394.

z čehož plyne (19). Je-li nyní $K(y) = \lambda_1 \int_a^b y^2\, dx$, pak klademe $\int_a^b y^2\, dx = k^2$ a $\bar{y}(x) = \frac{1}{k}\, y(x)$. Potom je $K(\bar{y}) = \lambda_1$ a tedy $\bar{y}(x)$ činí funkcionál K minimálním. Tedy tato funkce patří ke třídě C_1 a je řešením rovnice (4) pro $\lambda = \lambda_1$ a za podmínek (3) a (5). Na základě vlastnosti 4 je $\bar{y}(x) = \pm\, y_1(x)$, t. j. $y(x) = \pm\, k y_1(x)$.

§ 38. Extremální theorie vlastních hodnot.

Věta 5 uvádí extremální definici nejmenší vlastní hodnoty. Jinými slovy, vlastní hodnota je minimum funkcionálu K na křivkách třídy $C_1(D_1)$ za podmínek (3) a (5) a příslušnou vlastní funkcí je funkce třídy C_1, pro niž se tohoto minima dosahuje. Nyní dokážeme, že lze definovat zbývající vlastní hodnoty jako minima funkcionálu K na křivkách třídy C_1 za některých dodatečných podmínek, a příslušné vlastní funkce jako ty funkce třídy C_1, pro něž toto minimum nastává. Důkaz existence takových funkcí nebudeme opět provádět.

Věta 7. *Všechny vlastní hodnoty funkcionálu K mohou být sestaveny v rostoucí nekonečnou posloupnost*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \ldots$$

Při tom, jestliže $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}, y_n, \ldots$ je posloupnost příslušných normovaných vlastních funkcí, pak pro každé n je vlastní hodnota λ_n rovna minimu funkcionálu $K(y)$ za podmínek

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b y^2\, dx = 1, \quad \int_a^b y y_i\, dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ y(a) = y(b) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

a funkce $y(x)$, realisující toto minimum, je rovna y_n.

Ustanovili jsme totiž v § 37, že minimum funkcionálu K za podmínek (3) a (5) je rovno nejmenší vlastní hodnotě λ_1. Podmínky (3) a (5) mohou být zřejmě vyšetřovány jako zvláštní případ podmínek (20) pro $n = 1$. Tudíž druhá část naší věty je správná pro $n = 1$. Budeme nyní předpokládat, že jsme určili vlastní hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ a jim příslušné vlastní funkce $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, při čemž $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n-1}$, a že neexistuje již žádná jiná vlastní hodnota, ležící mezi λ_1 a λ_{n-1}. Potom dokážeme, že minimum funkcionálu K za podmínek (20) je vlastní hodnota následující přímo za λ_{n-1} a že funkce dávající minimum je příslušná vlastní funkce.

Na základě výsledků kap. V funkce $y(x)$, realisující minimum funkcionálu K za podmínek (20), musí být nepodmíněnou extremálou funkcionálu

$$\int_a^b [(Ry'^2 + Py^2) - \mu y^2 - \sum_{i=1}^{n-1} 2\nu_i y_i y]\, dx,$$

kde μ a $2\nu_i$ jsou Lagrangeovy multiplikátory. Euler-Lagrangeova rovnice dává

$$L(y) = \mu y + \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i y_i. \tag{21}$$

Násobíme-li obě strany rovnice (21) činitelem y_j a integrujeme-li v mezích od a do b, dostaneme potom tuto rovnost:

$$\int_a^b L(y) y_j\, dx = \mu \int_a^b y y_j\, dx + \nu_j \int_a^b y_j^2\, dx + \sum_{i \neq j} \nu_i \int_a^b y_i y_j\, dx. \tag{22}$$

Protože podle věty 1

$$\int_a^b L(y) y_j\, dx = K(y, y_j) = 0$$

a též podle věty 1

$$\int_a^b y_i y_j\, dx = 0 \quad \text{pro } i \neq j,$$

nalezneme pak na základě podmínek věty z rovnosti (22) vztah

$$\nu_j = 0.$$

Rovnice (21) se tedy stane rovnicí Sturm-Liouvilleovou, funkce $y(x)$ realisující minimum za podmínek (20) je vlastní funkce a činitel μ je příslušná vlastní hodnota, která je podle věty 3 rovna velikosti hledaného podmíněného minima:

$$K(y) = \mu.$$

Dokážeme, že μ je vlastní hodnota, která bezprostředně následuje podle velikosti za hodnotami $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. Předpokládejme totiž naopak, že existuje ještě vlastní hodnota λ funkcionálu K menší než μ a různá od $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. Budiž $\bar{y}(x)$ příslušná vlastní normovaná funkce. Potom je

$$\int_a^b \bar{y}^2 \, dx = 1, \quad \int_a^b \bar{y} y_i \, dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n - 1)$$

a

$$\bar{y}(a) = \bar{y}(b) = 0.$$

Funkce $\bar{y}(x)$ je tedy jedna z přípustných funkcí naší isoperimetrické úlohy a je pro ni $\lambda = K(\bar{y}) < \mu = K(y)$, což je ve sporu s definicí $y(x)$ jakožto funkce, realisující naše podmíněné minimum. S druhé strany μ nemůže být rovno ani jednomu z čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, neboť kdyby bylo $\mu = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$, pak by z vlastnosti 4 str. 217 vyplývalo, že $y(x) = \pm y_i(x)$, a z podmínek (20), že

$$\int_a^b y y_i \, dx = \pm \int_a^b y^2 \, dx = 0,$$

což je nemožné. Je tudíž $\mu > \lambda_{n-1}$ a přitom je μ nejbližší vlastní hodnota následující za λ_{n-1}. Označíme ji znakem λ_n. Necháme-li nyní n probíhat postupně hodnoty 2, 3, ..., budou všechna tvrzení věty úplně dokázána.

Věta 8. *Je-li funkce $y(x)$ třídy C_1 (nebo D_1) orthogonální k prvním $(n - 1)$ vlastním funkcím a vyhovuje-li podmínkám (5), pak je pro ni*

$$K(y) \geqq \lambda_n \int_a^b y^2 \, dx, \tag{23}$$

při čemž znamení rovnosti platí jenom tehdy, když je $y(x) \equiv \pm k y_n(x)$, kde $k^2 = \int_a^b y^2 \, dx$. Důkaz je zcela analogický důkazu věty 6.

Věta 9. *Vzrostou-li koeficienty $P(x)$ a $R(x)$ o kladné přírůstky $\delta P(x)$ a $\delta R(x)$, pak n-tá vlastní hodnota λ_n vzroste $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.*

Přejděme totiž od funkcionálu $K(y) = \int_a^b [P(x) y^2 + R(x) y'^2] \, dx$ k funkcionálu

$$K_1 = \int_a^b [(P + \delta P) y^2 + (R + \delta R) y'^2] \, dx =$$

$$= K(y) + \int_a^b (\delta P y^2 + \delta R y'^2) \, dx;$$

budiž $y_n(x)$ n-tá vlastní funkce, odpovídající původnímu funkcionálu $K(y)$, a $\bar{y}_n = y_n(x) + \delta y_n(x)$ funkce, odpovídající změněnému funkcionálu. Při tom zůstane hodnota $\int_a^b y_n^2 \, dx$ nezměněna (rovna 1) a je

$$\delta \int_a^b y_n^2 \, dx = 2 \int_a^b y_n \delta y_n \, dx = 0. \tag{24}$$

Variace $\lambda_n = K(y_n)$ při změně funkcionálu se skládá ze dvou částí:

$$\delta\lambda_n = K_1(\bar{y}_n) - K(y) = [K_1(\bar{y}_n) - K_1(y_n)] + [K_1(y_n) - K(y_n)]$$

1) z variace $\delta K(y_n, \delta y_n) = 2\int_a^b [R y_n' \delta y_n' + P y_n \delta y_n'] \, dx$, vyplývající ze změny integrované funkce,

2) z výrazu $\int_a^b (\delta P y_n^2 + \delta R y_n'^2) \, dx$, vytvořeného změnou samotného funkcionálu, t. j.

$$\delta\lambda_n = 2\int_a^b (R y_n' \delta y_n' + P y_n \delta y_n) \, dx + \int_a^b [(\delta P) y_n^2 + (\delta R) y_n'^2] \, dx. \tag{25}$$

První integrál ve vzorci (25) je roven nule, neboť podle vztahu $Ly_n = \lambda_n y_n$ a podle vztahu (24) je roven výrazu

$$2K(y, \delta y) = \int_a^b (Ly_n) \delta y \, dx = \lambda \int_a^b y_n \delta y_n \, dx = 0.$$

Je tedy

$$\delta\lambda_n = \int_a^b [(\delta R) y_n'^2 + (\delta P) y_n^2] \, dx;$$

pro $\delta R(x) > 0$ je $\delta P(x) > 0$, $\delta\lambda_n > 0$. Věta je dokázána.

Tedy vlastní hodnoty λ_n neklesají ani v tom případě, když je $\delta P_n(x) \geqq 0$, $\delta R_n(x) \geqq 0$.

Důsledek. Odhadneme shora i zdola vlastní hodnotu λ_n, odpovídající funkcionálu

$$\int_a^b [R(x) y'^2 + P(x) y^2] \, dx.$$

Nechť c, c_1 označují minima a C, C_1 maxima funkcí $P(x)$ a $R(x)$.

Vyšetříme funkcionály

$$\int_a^b (cy^2 + c_1 y'^2)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b (Cy^2 + C_1 y'^2)\,\mathrm{d}x.$$

Buďte λ'_n a λ''_n n-té vlastní hodnoty, odpovídající těmto funkcionálům. Na základě předešlé věty je

$$\lambda'_n \leqq \lambda_n \leqq \lambda''_n.$$

Z rovnosti (15) plyne:

$$\lambda'_n = \frac{n^2\pi^2 c_1}{(b-a)^2} + c, \quad \lambda''_n = \frac{n^2\pi^2 C_1}{(b-a)^2} + C,$$

z čehož

$$\frac{n^2\pi^2 c_1}{(b-a)^2} + c \leqq \lambda_n \leqq \frac{n^2\pi^2 C_1}{(b-a)^2} + C. \tag{26}$$

Z formule (26) plyne (poněvadž je $c_1 > 0$), že pro $n \to \infty$ je $\lambda_n \to \infty$, t. j. *posloupnost vlastních hodnot konverguje kladnými hodnotami k nekonečnu jako* n^2; tedy jenom konečný počet vlastních hodnot může být záporný.

Věta 10 (Courant). *Vlastní hodnota $\lambda_n(b)$, n-tá podle velikosti, je monotonně klesající funkce horní meze b.*

V § 20 jsme odvodili formule pro diferenciál dJ integrálu J, vzatého podél extremály pro $(J + \lambda K)$ za podmínky, že integrál $K = \text{const.}$

Nechť $y_n^b(x)$ je n-tá vlastní funkce, odpovídající n-té vlastní hodnotě λ_n^b. Máme:

$$\lambda_n^b = K_b[y_n^b].$$

y_n^b je extremála funkcionálu $[K_b - \lambda_n^b I_b]$, kde je $I_b(y) = \int_a^b y^2\,\mathrm{d}x$ a $I_b(y_n^b) = 1$. V koncovém bodě b máme:

$$y_n(b) = 0, \quad y'_n(b) \neq 0. \tag{27}$$

Označíme: $H = Ry'^2 + Py^2 - \lambda y^2$; potom

$$H - y'H_{y'} = -Ry'^2 + Py^2 - \lambda_n^b y^2.$$

Pro křivku $y = y_n^b(x)$ při $x = b$ máme podle (27):

$$(H - y'H_{y'})^{(1)} = -R(b)[y'(b)]^2 < 0.$$

Při přechodu od y_n^b k y_n^{b+db} vzrostou souřadnice koncových bodů o přírůstky:

$$dx_0 = da = 0, \; dy_0 = 0; \; dx_1 = db, \; dy_1 = 0,$$

proto

$$d\lambda_n^b = dK_b(y_n^b) = (H - y'H_{y'})^{(1)}\, db = -R(b)[y'(b)]^2\, db.$$

Z toho plyne, že λ_n^b pro rostoucí b klesá. Analogicky se dokazuje, že vlastní hodnoty, vyšetřované jako funkce dolní meze a, jsou funkcemi rostoucími. Jestliže b konverguje klesajícími hodnotami k a, pak $\lambda_n(b)$ roste. Z formule (26) plyne trochu více, a to:

$$\lambda_n(b) \to \infty \text{ pro } b \to a. \tag{28}$$

§ 39. Závislost vlastní hodnoty na integračních mezích. Oscilační věta.

Budeme nyní předpokládat, že horní mez ve vzorcích (1), (3) a (5) je proměnná. Abychom to zdůraznili, napišme u znaku K jakožto index písmeno b:

$$K_b = \int_a^b (Py^2 + Ry'^2)\, dx. \tag{1'}$$

Pokud vlastní hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ závisí na téže mezi b, budeme je označovat takto:

$$\lambda_1(b), \lambda_2(b), \lambda_3(b), \ldots$$

Věta II (oscilační). *Vlastní funkce $y_n(x)$, odpovídající vlastní hodnotě $\lambda_n(b)$, n-té podle velikosti, se anuluje uvnitř intervalu (a, b) $(n - 1)$-krát.*

Důkaz je založen na této větě:

Pomocná věta. *Je-li $z_\nu(x)$ netriviální řešení rovnice*

$$L(z) = \nu z \tag{29}$$

(ν je konstanta), *vyhovující podmínce $z_\nu(a) = 0$, pak nulové body funkce z_ν, t. j. kořeny rovnice $z_\nu(c) = 0$, větší než a, jsou právě kořeny rovnic $\lambda_i(c) = \nu$.*

Budiž pro $c > a$ $z_\nu(c) = 0$. Protože mimo to $z_\nu(a) = 0$ a ježto

$z_\nu(x)$ je netriviálním řešením rovnice (29), je $z_\nu(x)$ vlastní funkce pro K_c a číslo ν je jedna z vlastních hodnot: $\nu = \lambda_i(c)$.

Nechť je obráceně pro některé přirozené i

$$\lambda_i(c) = \nu.$$

Jednou z vlastních hodnot funkcionálu K_c je hodnota ν, jíž odpovídá vlastní funkce $\bar{z}_\nu(x)$ vyhovující rovnici (27) a počátečním podmínkám daným vztahy $\bar{z}_\nu(a) = 0$, $\bar{z}_\nu(c) = 0$. Protože dvě netriviální řešení lineární diferenciální rovnice (27) druhého řádu, která jsou současně rovna nule pro $x = a$, se liší jenom o konstantu různou od nuly, mají tato řešení společné kořeny. Je proto $z_\nu(c) = 0$. Pomocná věta je dokázána.

Vraťme se nyní k naší větě. Budiž $\lambda_n(b) = \nu$. Znakem c_k budeme označovat bod uvnitř intervalu (a, b), pro který je $\lambda_k(c_k) = \nu$ (jestliže takový bod existuje). Dokážeme, že existuje právě $(n - 1)$ takových bodů.

Vskutku, protože $\lambda_n(\xi)$ je funkce monotonně klesající, je $\lambda_n(\xi) > \lambda_n(b) = \nu$ pro $a < \xi < b$ a tím spíše pro $k > n$, $\lambda_k(\xi) > \lambda_n(\xi) > \nu$.

Tedy pro $k \geqq n$ uvnitř intervalu (a, b) neexistují body c_k.

Obráceně, je-li $1 \leqq i \leqq n - 1$, pak je $\lambda_i(b) < \lambda_n(b) = \nu$; současně pro $\xi \to b$ je $\lambda_i(\xi) \to +\infty$ (viz formule (26)). Pro ξ dostatečně blízké k b je $\lambda_i(\xi) > \nu$. Funkce $\lambda_i(\xi)$ přejde uvnitř intervalu (a, b) od hodnot větších než ν k hodnotám menším než ν. Existuje takové c_i, $a \leqq c_i \leqq b$, že je $\lambda_i(c_i) = \nu$. Existuje tedy právě $(n - 1)$ čísel c_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Všechna jsou od sebe různá, neboť je-li $j > i$, pak je $\lambda_j(c_i) > \lambda_i(c_i) = \nu$, a tedy $c_i \neq c_j$.

Podle pomocné věty těchto $(n - 1)$ čísel $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ a jenom těchto $(n - 1)$ čísel je nulovými body funkce $y_n(x) = z_\nu(x)$ uvnitř intervalu (a, b). Oscilační věta je tím dokázána.

§ 40. Vyšetřování druhé variace.

V § 11 jsme objasnili, že pro extremálu $y = y(x)$ funkcionálu

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\, \mathrm{d}x$$

přírůstek funkcionálu

$$J(y+\eta) - J(y)$$

až na veličinu nekonečně malou druhého řádu ve srovnání s $r(y, y+\eta)$ je roven druhé variaci

$$\delta^2 J = \int_a^b (P\eta^2 + R\eta'^2)\,\mathrm{d}x = K(\eta),$$

kde je

$$R = F_{y'y'},\ P = F_{yy} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'y'}.$$

Budeme předpokládat, že podél extremály je vyhověno zesílené Legendreově podmínce

$$F_{y'y'} = R > 0.$$

K vyšetřování druhé variace dokážeme předběžně několik dalších vlastností funkcionálu $K(\eta)$.

Řekneme, že tento funkcionál je *positivně definitní* nebo prostě *kladný*, když pro jakoukoli funkci $\eta(x) \not\equiv 0$ třídy C_1 (nebo D_1), vyhovující podmínkám $\eta(a) = \eta(b) = 0$, je $K(\eta) > 0$.

Věta 12. *K tomu, aby funkcionál $K_b(\eta)$ byl kladný, je nutné a stačí, aby jeho nejmenší vlastní hodnota byla kladná*

$$\lambda_1(b) > 0.$$

Nutnost této podmínky vyplývá z toho, že vlastní hodnota λ_1 je hodnotou funkcionálu K pro příslušnou vlastní funkci. Z nerovnosti (19) vyplývá, že podmínka je postačující.

Věta 13. *Pro každý kladný funkcionál K_b existují takové kladné konstanty d_1 a d_2, že pro všechny funkce třídy C_1* (nebo D_1), *vyhovující podmínkám $\eta(a) = \eta(b) = 0$,* platí vztahy:

$$K_b(\eta) \geqq 2d_1 \int_a^b \eta^2\,\mathrm{d}x, \tag{30}$$

$$K_b(\eta) \geqq 2d_2 \int_a^b \eta'^2\,\mathrm{d}x, \tag{30'}$$

$$K_b(\eta) \geqq d_1 \int_a^b \eta^2\,\mathrm{d}x + d_2 \int_a^b \eta'^2\,\mathrm{d}x. \tag{31}$$

Nerovnost (31) je důsledkem dvou předcházejících nerovností. (30) plyne z (19) a z věty 12: $2d_1 = \lambda_1(b)$.

Dokážeme nerovnost (30′). Máme

$$K_b(\eta) \geqq c\int_a^b \eta^2\,dx + c_1\int_a^b \eta'^2\,dx, \tag{32}$$

kde c a c_1 ($c_1 > 0$) jsou minima funkcí $P(x)$ a $R(x)$ v intervalu $[a, b]$. Je-li $c \geqq 0$, pak stačí položit $2d_2 = c_1$. Budiž $c = -c_2$, $c_2 > 0$. Vyšetříme oba možné případy:

1) $c_2\int_a^b \eta^2\,dx \leqq \frac{c_1}{2}\int_a^b \eta'^2\,dx$; potom z (32) plyne

$$K_b(\eta) \geqq \frac{c_1}{2}\int_a^b \eta'^2\,dx. \tag{33}$$

2) $c_2\int_a^b \eta^2\,dx > \frac{c_1}{2}\int_a^b \eta'^2\,dx$; potom z (30) dostaneme

$$K_b(\eta) \geqq \lambda_1(b)\int_a^b \eta^2\,dx \geqq \frac{c_1\lambda_1(b)}{2c_2}\int_a^b \eta'^2\,dx. \tag{34}$$

Položíme-li $2d_2$ rovno menšímu z čísel $\frac{c_1}{2}$ a $\frac{c_1\lambda_1(b)}{2c_2}$, dostaneme jako výsledek z (33) a (34) vztah (30′).

Souvislost s theorií Jacobiovy rovnice. Jacobiova rovnice (2) je zvláštním případem rovnice Sturm-Liouvilleovy pro $\lambda = 0$. Označíme jako v předešlých kapitolách znakem $\Delta(a, x)$ netriviální řešení Jacobiovy rovnice, pro které

$$\Delta(a, a) = 0, \quad \Delta'_x(a, a) = 1.$$

Všechna netriviální řešení Jacobiovy rovnice, která jsou rovna nule pro $x = a$, se dostanou z $\Delta(a, x)$, násobíme-li je konstantou různou od nuly.

Hodnotami *konjugovanými* s a budeme nazývat kořeny rovnice $\Delta(a, x) = 0$ různé od a.

Věta 14. *Počet záporných vlastních hodnot $\lambda_\nu(b)$ funkcionálu K_b je roven počtu hodnot konjugovaných s a a ležících uvnitř intervalu (a, b).*

Počet nekladných vlastních hodnot K_b je roven počtu hodnot, konjugovaných s a v intervalu $(a, b]$ zprava uzavřeném.

Podle definice konjugovaných hodnot a podle pomocné věty na str. 225 jsou hodnoty konjugované s a větší než a kořeny rovnic $\lambda_i(\xi) = 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Každé konjugované hodnotě c, $a < c < b$, odpovídá index i, pro nějž $\lambda_i(c) = 0$. Vzhledem k monotonnímu poklesu funkce $\lambda_i(\xi)$ je $\lambda_i(b) < 0$, t. j. každé hodnotě konjugované s a uvnitř intervalu (a, b) odpovídá záporná vlastní hodnota $\lambda_i(b)$.

Obráceně každé záporné vlastní hodnotě $\lambda_i(b)$ odpovídá uvnitř intervalu (a, b) bod c, pro který $\lambda_i(c) = 0$ (ježto při konvergenci ξ k a změní se $\lambda_i(\xi)$ ze záporné hodnoty na kladnou, při čemž konverguje k $+ \infty$); podle naší pomocné věty je c hodnota konjugovaná s a.

Tím je první část věty dokázána.

K důkazu druhé části připomeneme ještě podle téže pomocné věty, že nulové vlastní hodnotě $\lambda_k(b) = 0$ (jestliže taková existuje) odpovídá konjugovaná hodnota $c = b$, která souhlasí s koncovým bodem našeho intervalu. Obráceně, je-li b hodnota konjugovaná s a, pak existuje vlastní hodnota $\lambda_k(b) = 0$ (podle téže pomocné věty); je tedy věta dokázána.

Z toho vyplývá:

Věta 14'. *K tomu, aby všechny vlastní hodnoty byly nezáporné, je nutné a stačí, aby interval (a, b) neobsahoval hodnoty konjugované s a.*

K tomu, aby všechny vlastní hodnoty byly kladné, je nutné a stačí, aby interval $(a, b]$ zprava uzavřený neobsahoval hodnoty konjugované s a.

Z druhé části věty a z nerovnosti (19) plyne dále:

Věta 15. *K tomu, aby K_b byl kladným funkcionálem, je nutné a stačí, aby zprava uzavřený interval $(a, b]$ neobsahoval hodnoty konjugované s a.*

Postačující podmínka Jacobiova. Věta 15 je ekvivalentní postačující Jacobiově podmínce pro minimum funkcionálu v nejjednodušší úloze (viz § 35).

Předpokládejme totiž, že podél extremály $y = y_0(x)$, $a \leqq x \leqq b$, je $F_{y'y'} = R > 0$, a dále, že je podél ní vyhověno Jacobiově podmínce

— že totiž neexistují hodnoty konjugované s a v intervalu $[a, b]$. Podle věty 15 je druhá variace

$$\delta^2 J = K_b(\eta) = \int_a^b (P\eta^2 + R\eta'^2)\, dx$$

kladným funkcionálem proměnné η, t. j. (věta 13)

$$\delta^2 J = K_b(\eta) \geqq \int_a^b (d_1\eta^2 + d_2\eta'^2)\, dx. \tag{35}$$

Porovnáme-li nerovnost (35) s rovností (15′) § 11, dostaneme

$$J(y + \eta) - J(y) =$$

$$= \delta^2 J + \int_a^b (\varepsilon_1\eta^2 + \varepsilon_2\eta'^2)\, dx \geqq \int_a^b [(d_1 + \varepsilon_1)\eta^2 + (d_2 + \varepsilon_2)\eta'^2]\, dx.$$

Zde ε_1 i ε_2 konvergují stejnoměrně k nule spolu s $r(y, y + \eta)$. Pro dostatečně malé $r(y, y + \eta)$ stanou se koeficienty u η'^2 a η^2 kladnými a dostaneme

$$J(y + \eta) - J(y) \geqq 0.$$

Ještě jednodušeji se dokáže nutná podmínka Jacobiova (viz § 29). Nechť uvnitř intervalu (a, b) existuje hodnota konjugovaná s a. Potom podle věty 14′ existují záporné vlastní hodnoty pro druhou variaci $\delta^2 J = K_b(\eta)$. Jinými slovy, druhá variace může nabývat i záporných hodnot. Avšak v takovém případě vůbec nemáme případ minima.

Klasifikace extremál. Morse navrhl klasifikovat extremály podle počtu záporných vlastních hodnot jejich druhé variace.

Omezíme se na oblouky extremál, u nichž není koncový bod konjugován s bodem počátečním (t. j. u nichž má druhá variace vlastní hodnoty různé od nuly). Extremálu budeme nazývat *extremálou k-tého řádu*, jestliže druhá variace obsahuje právě k záporných vlastních hodnot. Podle věty 14 je to ekvivalentní s podmínkou, aby oblouk extremály obsahoval právě k bodů konjugovaných s počátkem. Extremálami nultého řádu jsou extremály realisující minimum.

Příklad. Veďme dvěma body A a B na povrchu koule, které neleží na konci průměru, hlavní kružnici q. Body A a B ji rozdělí na oblouky ACB a ADB. Menší z těchto oblouků ACB je extremálou nultého řádu pro funkcionál vyjadřující délku oblouku na kouli, větší ADB je extremálou prvního řádu.

§ 41. Steklovova věta o úplnosti systému orthonormovaných funkcí.

Budeme vyšetřovat *orthonormální* soustavu $z_k(x)$, t. j. soustavu, pro niž

$$\int_a^b z_i z_j \, dx = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases} \tag{36}$$

Z (36) plyne rovnost

$$\int_a^b (\sum_{i=1}^n a_i z_i)^2 \, dx = \sum_{i=1}^n a_i^2. \tag{37}$$

Fourierovými koeficienty pro funkci $y(x)$ vzhledem k posloupnosti $\{z_i\}$ se nazývají čísla

$$c_i = \int_a^b y z_i \, dx.$$

Řada $\sum_{i=1}^{\infty} c_i z_i(x)$ se nazývá *Fourierovou řadou* pro funkci $y(x)$ a $\sum_{i=1}^{n} c_i z_i(x)$ *částečným součtem této řady*. Označíme znakem $R_n(x)$ rozdíl

$$y(x) - \sum_{i=1}^n c_i z_i(x) = R_n(x);$$

potom je pro $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\int_a^b R_n z_j \, dx = \int_a^b (y - \sum_{i=1}^n c_i z_i) z_j \, dx = c_j - c_j = 0,$$

t. j. $R_n(x)$ je orthogonální ke všem funkcím

$$z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x).$$

Proto z (36) najdeme

$$\int_a^b y^2 \, dx = \int_a^b (\sum_{i=1}^n c_i z_i + R_n)^2 \, dx = \sum_{i=1}^n c_i^2 + \int_a^b R_n^2 \, dx.$$

Z toho plyne, že je

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 \leqq \int_a^b y^2 \, dx \tag{38}$$

pro jakékoli n. To znamená, že řada $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ konverguje, při čemž

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leqq \int_a^b y^2 \, dx. \tag{38'}$$

To je tak zvaná *Parcevalova nerovnost*.

Jestliže Parcevalova nerovnost pro libovolnou funkci $y(x)$ třídy C_2 se změní v rovnost,[3] pak říkáme, že systém $z_n(x)$ je *úplným* orthonormálním systémem. V tomto případě je $\int_a^b R_n^2 \, dx \underset{n\to\infty}{\to} 0$, t. j. částečný součet Fourierovy řady funkce $y(x)$ $\sum_{i=1}^{n} c_i z_i(x)$ konverguje *podle středu* k $y(x)$.

A. M. Ljapunov první dokázal Parcevalovu rovnost pro soustavu trigonometrických funkcí.

Pro systém vlastních funkcí rovnice Sturm-Liouvilleovy platí následující důležitá věta o úplnosti, zahrnující jako zvláštní případ větu Ljapunovou.

Věta 16 (V. A. Steklov). *Posloupnost normovaných vlastních funkcí rovnice Sturm-Liouvilleovy tvoří úplnou orthonormální soustavu.*

Mějme totiž funkcionál $K(y) = \int_a^b (Py^2 + Ry'^2) \, dx$. Vyšetřujme jeho prvních n vlastních funkcí $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ a libovolnou funkci $y(x)$ třídy C_2. Zachováme-li předcházející označení, ($y = \sum c_i y_i + R_n$) (viz (8')), máme

$$K(y) = K(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i + R_n) = K(R_n) + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 K(y_i) +$$
$$+ 2\sum_{i=1}^{n} c_i K(y_i, R_n) + 2\sum_{i\neq j} c_i c_j K(y_i, y_j).$$

Avšak podle věty 3 § 37 je $K(y_i) = \lambda_i$. Dále (věta 4 téhož paragrafu) je

$$K(y_i, R_n) = 0, \; K(y_i, y_j) = 0 \text{ pro } j \neq i$$

(neboť y_i je orthogonální k y_j pro $j \neq i$, zbytek R_n je orthogonální ke všem y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$).

[3]) V tomto případě se změní v rovnost i pro všechny funkce s integrovatelnými čtverci.

Je tedy

$$K(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2 + K(R_n). \tag{39}$$

Protože $R_n(x)$ je orthogonální k $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, je podle formule (23)

$$K(R_n) \geqq \lambda_{n+1} \int_a^b R_n^2 \, dx. \tag{40}$$

Čísla $\lambda_n \to +\infty$, a proto, počínaje od některého indexu, jsou všechna kladná. Řada $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2$, počínaje s některého místa, může jenom růst a výraz

$$K(R_n) = K(y) - \sum_{r=1}^{n} \lambda_i c_i^2, \tag{41}$$

počínaje některým místem, může jenom klesat.

Z (40), (41) plyne nerovnost

$$\int_a^b R_n^2 \, dx \leqq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \left[K(y) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2 \right]. \tag{42}$$

Protože výraz (41) neroste a λ_{n+1} konverguje k $+\infty$, je

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b R_n^2 \, dx = 0,$$

a tím je Steklovova věta dokázána.

Steklovova věta platí i při přechodu od váhy 1 k libovolné kladné váze $\varrho(x)$.

§ 42. Souvislost s integrálními rovnicemi.

Inversní operátor. Vyšetřujme operátor Sturm-Liouvilleův:

$$Ly(x) = [R(x) y'(x)]' + P(x) \, . \, y(x),$$

definovaný na soustavě funkcí $\{y(x)\}$ třídy C_2, vyhovujících krajovým podmínkám

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{43}$$

Budeme předpokládat, že b není bodem konjugovaným s a. *Inversní operátor* L^{-1} je definován vztahem

$$L^{-1}[Ly(x)] = y(x). \tag{44}$$

Budeme hledat inversní operátor L^{-1} k diferenciálnímu operátoru L mezi integrálními operátory se spojitým jádrem $K(x, s)$

$$L^{-1}z(x) = \int_a^b K(x, s)\, z(s)\, \mathrm{d}s. \tag{45}$$

Potom lze rovnici zapsat ve tvaru

$$\int_a^b K(x, s) Ly(s)\, \mathrm{d}s =$$

$$= \int_a^b K(x, s)\{[R(s)y'(s)]'_s + P(s)y(s)\}\, \mathrm{d}s = y(x). \tag{46}$$

Rovnost (46) musí platit pro všechny funkce z $\{y(x)\}$.

Na výraz stojící za integračním znamením užijme transformací Lagrangeovy a Du Bois-Reymondovy.

Tak integrací po částech dostaneme:

$$\int_a^b K(x, s)[R(s)y'(s)]'_s\, \mathrm{d}s =$$

$$= [K(x, s)R(s)y'(s)]_{s=a}^{s=b} - \int_a^b K'_s(x, s)R(s)y'(s)\, \mathrm{d}s.$$

Předpokládáme-li, že $K(x, s)$ vyhovuje krajovým podmínkám, analogickým podmínkám (43):

$$K(x, a) = K(x, b) = 0, \tag{43'}$$

pak

$$\int_a^b K(x, s)[R(s)y'(s)]'_s\, \mathrm{d}s = - \int_a^b K'_s(x, s)R(s)y'(s)\, \mathrm{d}s.$$

Dále při označení $U(x, s) = \int_a^s K'_s(x, t)P(t)\, \mathrm{d}t$, t. j. $U'_s(x, s) = K(x, s)P(s)$, máme (vzhledem k podmínce (43')):

$$\int_a^b K(x, s)P(s)y(s)\, \mathrm{d}s = \int_a^b U'_s(x, s)y(s)\, \mathrm{d}s = - \int_a^b U(x, s)y'(s)\, \mathrm{d}s.$$

Nakonec můžeme napsat

$$y(x) = \int_a^x y'(s)\, \mathrm{d}s = \int_a^x T(x, s)y'(s)\, \mathrm{d}s,$$

kde je

$$T(x, s) = \begin{cases} 1 & \text{pro } a \leqq s \leqq x, \\ 0 & \text{pro } x < s \leqq b. \end{cases}$$

Po provedených transformacích nabude rovnice (46) tvaru

$$\int_a^b [R(s)K'(x, s) + U(x, s) + T(x, s)]y'(s)\,ds = 0. \tag{47}$$

Tato rovnice je splněna pro libovolnou funkci $y(x)$ z $\{y(x)\}$. Podle věty Du Bois-Reymondovy je:

$$R(s)K'(x, s) + U(x, s) + T(x, s) = C = \text{const}$$

neboli podle definice $T(x, s)$:

$$\left.\begin{aligned} &R(s)K'(x, s) + U(x, s) + 1 = C \quad \text{pro } a \leqq s \leqq x, \\ &R(s)K'(x, s) + U(x, s) = C \qquad\;\; \text{pro } x < s \leqq b. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Na intervalu $a \leqq x \leqq s$ $U(x, s)$ je diferencovatelná podle s, $U'_s(x, s) = P(s)$. . $K(x, s)$, což znamená, že i $R(s)K'(x, s)$ je diferencovatelná podle s, při čemž

$$[R(s)K'(x, s)]' + P(x)K(x, s) = 0,$$

t. j. $K(x, s)$, funkce K vyhovuje pro $a \leqq x \leqq s$ Jacobiově rovnici; při tom (viz (43')) je $K(x, a) = 0$; z toho

$$K(x, s) = c_1 \Delta(a, s) \text{ pro } a \leqq s \leqq x. \tag{49}$$

Analogicky v intervalu $x < s \leqq b$ $K(x, s)$ vyhovuje Jacobiově rovnici; při tom je $K(x, b) = 0$; z toho

$$K(x, s) = c_2 \Delta(b, s) \text{ pro } x < s \leqq b. \tag{49'}$$

Podle předpokladu je $K(x, s)$ spojitou funkcí v s a proto v bodě $s = x$ máme

$$K(x, s - 0) = K(x, s + 0). \tag{50}$$

Z (50) plyne (vzhledem ke spojitosti $R(s)$ a $T(x, s)$ v s):

$$R(x)K'(x, x - 0) + U(x, x) + 1 = C,$$

$$R(x)K'(x, x + 0) + U(x, x) \qquad = C,$$

z čehož

$$K'_s(x, x + 0) - K'_s(x, x - 0) = \frac{1}{R(x)}. \tag{51}$$

Tedy funkce $K(x, s)$ jakožto funkce proměnné s vyhovuje rovnici Jacobiově v intervalu (a, x) a (x, b) při počátečních podmínkách (43') a v bodě $s = x$ má její derivace skok rovný $\dfrac{1}{R(x)}$.

Protože podle předpokladu není b hodnota konjugovaná s a, jsou $\Delta(a, s)$

a $\Delta(b, s)$ dvě nezávislá řešení rovnice Jacobiovy a odpovídající Wronského determinant:

$$W(s) = \Delta(a, s)\Delta'_s(b, s) - \Delta(b, s)\Delta'_s(a, s)$$

není nikde roven nule v intervalu (a, b). Snadno vyčíslíme $W(s)$; vyhovuje rovnici

$$W'(s) = -\frac{R'(s)}{R(s)} W(s),$$

z čehož

$$(\lg W(s) + \lg R(s))' = 0 \text{ a } W(s)R(s) = c = \text{const},$$

na příklad $W(s)R(s) \equiv W(b)R(b)$. Protože ale $\Delta(b, b) = 0$, $\Delta'_s(b . b) = 1$, pak je $W(b) = \Delta(a, b)$, z čehož

$$W(s)R(s) \equiv R(b)\Delta'(a, b).$$

Podle (50) a (51) napíšeme rovnosti (49) a (49′) ve tvaru

$$c_2\Delta(b, x) - c_1\Delta(a, x) = 0, \quad c_2\Delta'(b, x) - c_1\Delta'(a, x) = \frac{1}{R(x)}.$$

Řešíme-li tyto rovnice vzhledem k c_1 a c_2, dostaneme:

$$c_1 = \frac{\Delta(b, x)}{R(x)W(x)} = \frac{\Delta(b, x)}{R(b)\Delta(a, b)},$$

$$c_2 = \frac{\Delta(a, x)}{R(x)W(x)} = \frac{\Delta(a, x)}{R(b)\,\Delta(a, b)}.$$

Je tedy

$$K(x, s) = \begin{cases} \dfrac{\Delta(b, x)\Delta(a, s)}{R(b)\Delta(a, b)} & \text{pro } a \leqq x \leqq s, \\[2ex] \dfrac{\Delta(a, x)\Delta(b, s)}{R(b)\Delta(a, b)} & \text{pro } s \leqq x \leqq b. \end{cases} \tag{52}$$

Jádro $K(x, s)$ se nazývá *Greenovou funkcí* pro rovnici $Ly = 0$ za krajových podmínek (43′). Lze se snadno přesvědčit, že je symetrické:

$$K(x, s) = K(s, x).$$

Příklad. Pro rovnici $y'' = 0$ $R = 1$, $\Delta(a, x) = x - a$, $\Delta(b, x) = x - b$, $\Delta(a, b) = b - a$, a proto

$$K(x, s) = \begin{cases} \dfrac{(b - x)(s - x)}{b - a} & \text{pro } a \leqq x \leqq s, \\[2ex] \dfrac{(x - a)(b - s)}{b - a} & \text{pro } s \leqq x \leqq b. \end{cases}$$

Jestliže $y(x)$ je vlastní funkce operátoru L za podmínek (43):

$$Ly(x) = \lambda y(x),$$

pak, aplikujeme-li na obě části operátor L^{-1}, dostaneme

$$y(x) = \lambda L^{-1}y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)\,\mathrm{d}s.$$

$y(x)$ je vlastní funkce a číslo λ je *charakteristické číslo* jádra $K(x, s)$.

Vyšetřování rovnice Sturm-Liouvilleovy může být převedeno na vyšetřování integrálních rovnic s jádrem rovným Greenově funkci. Úplná theorie rovnic typu Sturm-Liouvilleova s jejich zobecněním na případ rovnic vyšších řádů na základě theorie jedné třídy integrálních rovnic je uvedena v pracích sovětského matematika M. G. Krejna.