O metodách rovinných konstrukcí

2. Přehled úloh souvisících s úlohou Apolloniovou

In: Josef Holubář (author): O metodách rovinných konstrukcí. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1940. pp. 14–18.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402963

2.

PŘEHLED ÚLOH SOUVISÍCÍCH S ÚLOHOU APOLLONIOVOU.

Slavná ú. A., definovaná v úvodě, má své jméno podle řeckého geometra Apollonia z Pergy (kolem r. 200 př. Kr.), který se jí zabýval a ji řešil v díle „περὶ ἐπαφῶν“, t. j. „o dotycích“. Spis ten se nezachoval, takže není bezpečně známo, jaké řešení tento velký geometr provedl. Soudí se však, že podal řešení i pro obecný případ, a zdá se, že bylo asi takové, jaké uveřejnil r. 1600 v Paříži francouzský matematik Viète ve spise „Apollonius Gallus...“; je to řešení „dilatací“, které uvedeme v (5A). Vrstevník Viètův Adrian van Roomen (Adrianus Romanus) rozřešil ú. A. užitím kuželoseček. Toto řešení známe z výkladů školních.[1])

Od té doby zabývalo se touto úlohou mnoho slavných matematiků, jako Fermat, Newton, Euler, Carnot, později Plücker, Casey a j., cestou synthetickou i analytickou. K řešení zvláště jednoduchému a elegantnímu dospěl francouzský matematik Gergonne v „Annales de math.“, sv. VII (1816—17), pak Gaultier a později Fouché (viz kapit. 3). Význam řešení Gergonnova je nejlépe viděti z toho, že bylo potom dokázáno mnoha jinými způsoby, ať už jako důsledek řešení založeného na vztazích útvarů prostorových, přiřaděných vhodně k útvarům rovinným, což provedl proslulý geometr německý W. Fiedler užitím cyklografie,[2]) nebo jako zvláštní případ řešení úkolů obecnějších. Tu můžeme jmenovati velkého českého geometra J. Sobotku (viz Lit. č. VIII). Odvození Gergonnova řešení deskriptivní geometrií i jiná řešení naší úlohy podal již prof.

---

[1]) Viz učebnici: Klíma-Ingriš, Rýsování pro III. a IV. tř. rrg. a r., (JČMF, 1934) § 19.

[2]) Na základě promítání kruhového (cyklického) v knize: Zyklographie . . ., Leipzig 1882.

karlínské reálky F. Machovec (viz Lit. č. VI) v r. 1879, jiné odvození geometrií projektivní, a to kolineací, český geometr V. Jarolímek (viz Lit. č. III, sv. 5) a další pak dr. J. Klíma (viz Lit. č. V).

Již ze zájmu, jakému se těšila ú. A., je viděti, že úloha ta má nejen veliký význam teoretický, což bylo naznačeno již v úvodě, ale i obecně kulturní.

A. Určení kružnice podmínkami dotyku. K určení kružnice v rovině jest třeba tří jednoduchých podmínek nezávislých, což je jasné již z toho, že k určení polohy středu je třeba dvou podmínek (v analytické geometrii dvou souřadnic) a k určení poloměru jedné podmínky (na př. jeho délky). V obecné ú. A. jsou dány tři podmínky dotyku s danými kružnicemi k_i, $i = 1, 2, 3$; označíme-li takovou jednu podmínku symbolem (k), můžeme obecnou ú. A. značiti (kkk). Nahradíme-li danou kružnici bodem, jakožto kružnicí poloměru nulového, bude tu jednoduchá podmínka pro hledanou kružnici, aby procházela daným bodem; označíme ji (B). Přejde-li daná kružnice v přímku, jakožto mezní kružnici o poloměru nekonečně velkém, pak bude podmínkou, aby se hledaná kružnice dotýkala této přímky; vznikne podmínka (p).

Utvoříme-li kombinace s opakováním třetí třídy z podmínek (k), (p), (B), dostaneme $\binom{5}{3} = 10$, deset úloh Apolloniových, v nichž nových devět jsou zvláštní případy úlohy obecné.

Jsou to úlohy:

1. kkk	6. kBB
2. kkp	7. ppp
3. kkB	8. ppB
4. kpp	9. pBB
5. kpB	10. BBB.

B. Podmínky protnutí orthogonálního, diametrálního a podmínka daného poloměru. Podmínku (k) můžeme nahraditi též jinou: Určíme-li, že hledaná kružnice má danou kružnici

a) protínati orthogonálně, dostaneme podmínku (k^o),

b) má-li ji protínati diametrálně čili půliti ji, bude nová podmínka (k^d).

c) Zaveďme mimo to v naše úlohy ještě podmínku, že hledaná kružnice má míti daný poloměr, t. j. podmínku (r).

Poznáme později, že podmínky (k^o) a (k^d) jsou s podmínkou dotyku ú. A. v těsné souvislosti, ba dokonce, že lze podmínku (k) ú. A. jimi vhodně nahraditi. Zavedení podmínky (r) je odůvodněno tím, že se vyskytuje při některém řešení ú. A. jako důsledek zvoleného postupu.

Spojíme-li nyní podmínky (k, k^o, k^d a r) v kombinace po třech s opakováním (podmínka (r) se však nemůže opakovati), vzniknou nové úlohy, jež rozřešíme v kap. 4 v tomto pořadí:

α) $k^ok^ok^o$	β) kk^ok^o	γ) kkk^o	δ) k^ok^or
$k^ok^ok^d$	kk^ok^d	kkk^d	k^ok^dr
$k^ok^dk^d$	kk^dk^d		k^dk^dr
$k^dk^dk^d$			kk^or
			kk^dr
			kkr.

Dostaneme tak nových 15 úloh.

C. Zvláštní úlohy s podmínkami předcházejícími. Můžeme je dále rozmnožiti specialisací takto: Podmínku dotyku (k) nahradíme podmínkou (p) anebo (B); podmínku (k^o) můžeme nahraditi jedinou novou speciální (p^o), aby kružnice hledaná protínala danou přímku orthogonálně, neboli měla střed na této přímce. Podmínku (k^d) a ovšem ani (r) nelze pak již specialisovati k získání nových úloh. Dostaneme úlohy:

Z úlohy na př. $k^ok^ok^o$: $k^ok^op^o$, $k^op^op^o$, t. j. dvě nové úlohy a pod. Dospějeme tak k 51 novým úlohám, z nichž mnohé jsou zcela jednoduché. Ukáže se, jak podmínka (r) je též organicky spjata s ostatními; dojdeme totiž od ú. A. zpět k úlohám základním, jako jest na př. úloha $(p^o p^o r)$, značící sestrojiti kružnici danou středem (průsečíkem dvou přímek) a poloměrem.

D. Podmínka dotykového bodu. K těmto úlohám se pak přidružují ještě takové úlohy, v nichž daný bod jest dotykovým bodem na dané kružnici, podmínka (k_B), nebo na dané přímce, podmínka (p_B). Jsou obdobou šesti známých úloh Pappových, jež naznačeným způsobem vznikají z příslušných ú. A. takto:

Z ú. A.	3. kkB	vznikne:	kk_B
	5. kpB	„	k_Bp; kp_B
	6. kBB	„	k_BB
	8. ppB	„	pp_B
a	9. pBB	„	p_BB.

Když také uvážíme, že daný bod může ležeti na dané kružnici, kterou má výsledná kružnice protínati orthogonálně nebo diametrálně, anebo na přímce dané podmínkou (p^o), dospějeme k novým 35 úlohám. Konečně také oba dané body, pokud se vyskytují, mohou ležeti na kružnici (přímce), která má být proťata orthogonálně. Vzniknou tím ještě dvě nové úlohy: $(k^o{}_{B+B})$ a $(p^o{}_{B+B})$; tedy celkem nových 37 úloh, většinou zcela jednoduchých.

E. Podmínky protnutí v daném úhlu. Místo podmínky dotyku ú. A. můžeme dále zavésti obecnější podmínku, aby výsledná kružnice protínala kružnice dané k_i, $i = 1, 2, 3$, v daných úhlech φ_i, ježto dotyk je zvláštním případem protnutí, totiž v úhlu nulovém.

Označíme-li takovouto podmínku (k^φ), přejde obecná ú. A. v úlohu $(k^\varphi k^\varphi k^\varphi)$. Ze všech ú. A. kromě úlohy poslední dostaneme tak 9 úloh nových, zobecněných, a to:

1. $k^\varphi k^\varphi k^\varphi$	6. $k^\varphi BB$
2. $k^\varphi k^\varphi p^\varphi$	7. $p^\varphi p^\varphi p^\varphi$
3. $k^\varphi k^\varphi B$	8. $p^\varphi p^\varphi B$
4. $k^\varphi p^\varphi p^\varphi$	9. $p^\varphi BB$.
5. $k^\varphi p^\varphi B$	

Kdybychom ponechali vedle podmínky k^φ a p^φ jednu nebo dvě podmínky dotyku, rozmnožil by se počet úloh na 25 a ve spojení s ostatními podmínkami, o něco výše uvedenými, na veliký počet dalších. Také rovnost úhlů $\varphi_1 = \varphi_2$, resp. $= \varphi_3$, by vedla k dalším speciálním úkolům.

Všecky tyto úlohy, které souvisí s ú. A. a jež jsme v přehledu uvedli, lze řešiti pravítkem a kružítkem, tedy elementárně; řešení úlohy nejobecnější ($k^\varphi k^\varphi k^\varphi$) provedeme až v (5B).

Poznámka. K jiným úlohám o sestrojení kružnice bychom dospěli zavedením ještě jiných podmínek, na př. aby hledaná kružnice určovala na dané přímce nebo na dané kružnici svými průsečíky tětivy dané délky, nebo aby byla danou kružnicí proťata diametrálně a j. Tyto podmínky však ve svých výkladech pomineme.

Zvláštní postavení mezi úlohami o sestrojení kružnice zaujímá úloha Malfattiho, nazvaná tak podle italského matematika, který ji po prvé vyslovil a algebraicky řešil r. 1803:

Do daného trojúhelníka vepište tři kružnice tak, aby se každá z nich dotýkala dvou stran trojúhelníka a obou kružnic ostatních. Ryze geometrické její řešení podal J. Steiner (1827), který tuto úlohu ještě zobecnil tím, že nahradil strany daného trojúhelníka kružnicemi. Touto úlohou se zabývati však nebudeme.[3]) —

[3]) Řešení viz na př. Lit. č. I, str. 192 a n. nebo v pojednání V. Rychlíka: „O Malfattiho problému" v Příloze k ČMF, roč. XIX, 1911, str. 1 a 69.