body v klidu, totiž nevlastní body přímek $y = \pm ix$. Říkáme jim **absolutní** nebo **kruhové** body roviny.

K těmto kruhovým bodům lze také přijíti touto úvahou: Hledejme průsečíky kružnice s přímkou nevlastní. Obecná rovnice kružnice jest

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0.$$

Chceme-li uvažovati o bodech nevlastních, zavádíme homogenní souřadnice, kladouce $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}$ místo x, y. Rovnice kružnice jest pak

$$x^2 + y^2 - 2(ax + by)t + (a^2 + b^2 - r^2)t^2 = 0.$$

Pro přímku nevlastní jest $t = 0$ a dostaneme tedy pro nevlastní body na kružnici rovnici $x^2 + y^2 = 0$ čili $(x + iy)(x - iy) = 0$. Tyto body jsou nezávislé na veličinách a, b, r, leží tedy na všech kružnicích. Všechny kružnice v rovině protínají nevlastní přímku v týchž dvou bodech; odtud název kruhové body. Ukažte, že vzdálenost jakéhokoli bodu v rovině (v konečnu) od absolutního bodu je neurčitá! [Nutno psáti vzdálenost také ve tvaru homogenním, na př. vzdálenost od počátku O jest $d = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{t}$].

4. Jsou-li $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ dva body v rovině, jest parametrické vyjádření bodů na přímce

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda},$$

při čem λ má význam dělicího poměru bodu $(x; y)$ k základním bodům A, B. Buďte A, B dva imaginární nesdružené body a λ ať proběhne všechny reálné hodnoty. Tak dostaneme řadu imag. bodů, jež má tu vlastnost, že dvojpoměr kterýchkoli čtyř z nich je reálný (na př. $(ABP_1P_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$). Napište rovnici reálné nositelky bodu (λ) (jako spojnici s bodem sdruženým) a volte pak za λ zvláštní hodnoty, na př. 0; 1; -1; ∞; ...!

Lze ukázati, že tyto nositelky obalují kuželosečku.

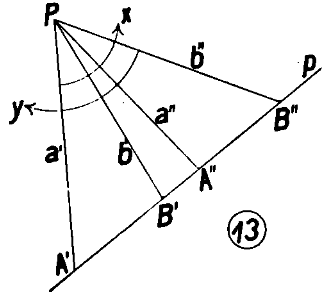
Jak je tomu v případě, když bod A je reálný? (Volte $x_1 = y_1 = 0$.)

6. Jednoduché konstrukce s imaginárními elementy.

Ukážeme, jak lze s imaginárními elementy provésti konstrukce, kde jde o spojování a protínání, tedy konstrukce z geometrie polohy. Jsou to úlohy:

a) spojiti reálný bod s bodem imaginárním;
b) spojiti dva imaginární body;
c) sestrojiti průsečík reálné a imaginární přímky;
d) sestrojiti průsečík dvou imaginárních přímek.

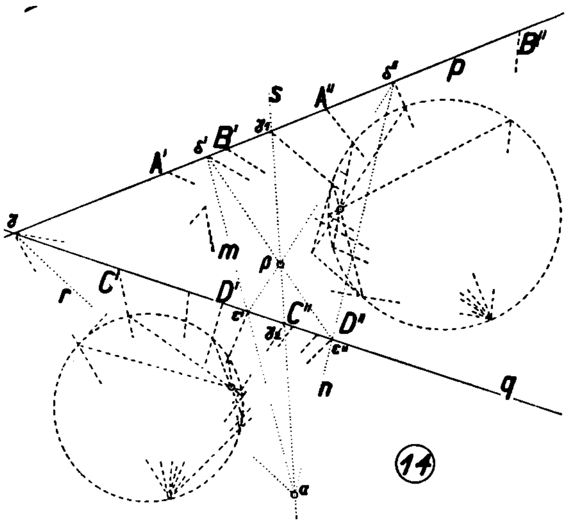
Řešení: a) Reálný bod buď P, imaginární $X = \begin{pmatrix} A' B' \\ A'' B'' \end{pmatrix}$. Nejlépe je sledovati hned také druhou imaginární přímku, která jde bodem P a bodem imaginárním sdruženým $Y = \begin{pmatrix} B' A' \\ B'' A'' \end{pmatrix}$.



Při tom předpokládejme, že body $A' A'' B' B''$ (obr. 13) tvoří harmonickou čtveřinu; toto lze vždy dosíci na přímce p (str. 32). Bod P s body $A' A'' B' B''$ určuje paprskovou involuci $a' a''$, $b' b''$ s vrcholem P a její dvojné elementy jsou imag. přímky $x \equiv PX$, $y \equiv PY$. Prvá je dána involucí $a' a''$, $b' b''$ a smyslem otáčení, který odpovídá smyslu $A' B' A''$, druhá touž involucí a smyslem $B' A' B''$.

b) Buď dán imaginární bod $X = \begin{pmatrix} A' B' \\ A'' B'' \end{pmatrix}$ na reálné nositelce p a jiný $Z = \begin{pmatrix} C' D' \\ C'' D'' \end{pmatrix}$ na reálné nositelce q (obr. 14). Nejlépe je opět vzíti v úvahu i body imaginární sdružené $Y = \begin{pmatrix} B' A' \\ B'' A'' \end{pmatrix}$ na p a $T = \begin{pmatrix} D' C' \\ D'' C'' \end{pmatrix}$ na q.

Jde celkem o čtyři imaginárné přímky po dvou sdružené: XZ, YT; XT, YZ. Reálný průsečík prvých buď α, druhých β. α, β jsou středy paprskových involucí perspektivních současně s oběma involucemi na p, q. Odtud vyplývá konstrukce bodů α, β. Buď γ průsečík přímek p, q. V involuci na p ať mu odpovídá γ_1 a sestrojme další pár této involuce δ', δ'', který odděluje harmonicky $\gamma\gamma_1$ (viz str. 32). Podobně v involuci na q ať odpovídá bodu γ bod γ_2 a $\varepsilon'\varepsilon''$ ať odděluje tento pár harmonicky. Tyto harmonické čtveřiny jsou perspektivní

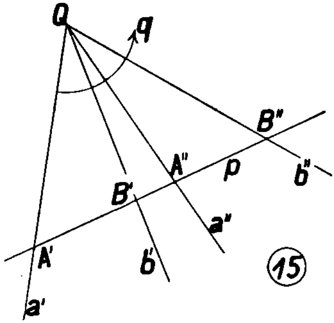


dvojím způsobem (viz str. 16, úl. 6) podle středů α, β. Při tom jest, hledíme-li ke stanovenému smyslu $X = \begin{pmatrix} \gamma & \delta' \\ \gamma_1 & \delta'' \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} \gamma & \varepsilon' \\ \gamma_2 & \varepsilon'' \end{pmatrix}$; hledaná přímka má tedy reálný bod α a lze jí označiti $\begin{pmatrix} r & m \\ s & n \end{pmatrix}$. Označte podobně zbývající tři přímky!*)

---

*) Zde používáme pravítka i kružítka k pomocné konstrukci sestrojení harmonických bodů. Úloha sestrojiti spojnici dvou bodů je však lineární a dá se provésti jen pravítkem. Skutečně i tato konstrukce s imaginárními elementy dá se malou obměnou upraviti na konstrukci jen pravítkem, jak ukázal Grünnwald (Zeitschrift f. Math. u. Phys., Bd. 45, 1900).

c) Reálná přímka buď p, imaginární $q = \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix}$. Příslušná involuce $a'a''$, $b'b''$ má vrchol Q (obr. 15). Tato involuce seče přímku p v bodové involuci $A'A''$, $B'B''$ a její dvojný bod $X = \begin{pmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \end{pmatrix}$ je hledaný průsečík (obr. 15).

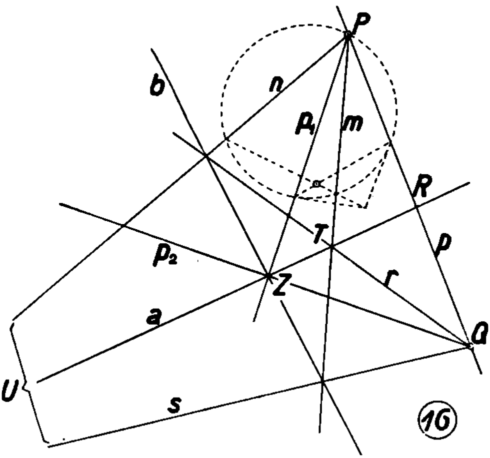


15

d) Sestrojiti jest průsečík dvou imaginárních přímek $x = \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} c' & d' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$. Úloha je duální k úloze b). Nahraďme opět čtveřinu definující involuci čtveřinou harmonickou, takže jest (obr. 16) $x = \begin{pmatrix} p & m \\ p_1 & n \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} p & r \\ p_2 & s \end{pmatrix}$. Harmonické svazky s vrcholy P, Q jsou perspektivní dvojím způsobem s osami a, b (úl. 6, str. 16). Hledaný průsečík je na přímce a; lze jej vyznačiti $\begin{pmatrix} R & T \\ Z & U \end{pmatrix}$. Vyznačte podobně ostatní tři průsečíky!

Cvičení. 1. Imaginární bod na nevlastní přímce (v nekonečnu) lze určiti paprskovou involucí o středu S, která je perspektivní s involucí na nevlastní přímce, s připojeným smyslem otáčení. Kruhové body jsou určeny pravoúhlou involucí. Jest dán imaginární bod X^∞; spojte jej a) s reálným bodem P, b) s imaginárním bodem Q daným involucí na nositelce q.

2. Jsou dány reálné body P, Q. Ukažte, že se isotropické přímky jdoucí těmito body protínají na jejich ose symetrie. Je-li střed této úsečky O, vzdálenost $\overline{PQ} = 2d$, jest vzdálenost imag. bodů hledaných od středu O rovna $\pm\ di$.



3. Dva imaginární sdružené body X, Y na nositelce p spojte s kruhovými body I_1, I_2. [Bodu nevlastnímu P^∞ na p je v involuci přiřaděn střed O; buď $A'A''$ pár involuce, který odděluje harmonicky P, P^∞, t. j. symetrický podle O a označme $\overline{OA'} =$ $= -\overline{OA''} = a$, pak průsečíky $\alpha \equiv (XI_1, YI_2)$, $\beta \equiv (XI_2, YI_1)$ jsou reálné na kolmici vztyčené v O ku p a ve vzdálenosti a.]

4. Dány jsou přímky p, q a bod M mimo ně. Sestrojte průsečíky přímek p, q s isotropickými přímkami jdoucími bodem M a pak spojnice těchto bodů (t. j. jejich reálné průsečíky).

7. Jiné imaginární útvary v rovině.

Imaginární kružnicí rozumíme křivku danou rovnicí

$$x^2 + y^2 - 2\,(a_1 + ia_2)\,x - 2\,(b_1 + ib_2)\,y + p_1 + ip_2 = 0;$$

imaginární bod $S\,(a_1 + ia_2;\ b_1 + ib_2)$ jmenujeme jejím stře-