

Spojnicové nomogramy

Spojnicové nomogramy

In: Václav Pleskot (author): *Spojnicové nomogramy*. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1941. pp. 8–107.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402998>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

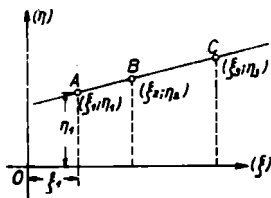
Nauka zabývající se teorií nomogramů se pak nazývá nomografie.

Podle způsobu uspořádání geometrických elementů, vzhledem k řešení vztahu, rozeznáváme různé druhy nomogramů.

Tak na příklad mluvíme o spojnicových nomogramech, jestliže body označené kotami x_0, y_0, z_0 , které řeší zobrazovaný vztah (F), leží na téže spojnici (přímce); o nomogramech průsečíkových, jestliže čáry kotované těmi hodnotami proměnných, které řeší vztah (F), se protínají v jednom bodě atp.³⁾

Princip spojnicových nomogramů.⁴⁾ Princip a konstrukce spojnicových nomogramů spočívá na platnosti známé věty z analytické geometrie o souřadnicích tří bodů, ležících v téže přímce, kterou vyslovme takto:

Cartesiovou souřadnicemi $(\xi_1; \eta_1), (\xi_2; \eta_2), (\xi_3; \eta_3)$ tří bodů A, B, C , které leží v přímce, splňují vztah



Obr. 1.

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (S)$$

Obr. 1. Na tuto větu se budeme odvolávat jako na větu (S).⁵⁾

³⁾ Při konstrukci nákresu se však nemusíme omezit jen na jeden kreslicí list, nýbrž lze použít listů více. V praxi se však normálně neužívá více listů než dvou. Zde pak nejen řešení, ale i vzájemná poloha obou listů je závislá na vzájemném seškupení obrazců zakreslených na obou listech, a proto je třeba, aby horní list byl průhledný, aby grafická vazba obou nákresů mohla být realizována. Těmto nomogramům říkáme nomogramy s transparentem čili s průsvitkou.

⁴⁾ Pro toho, kdo si potřebuje osvěžit potřebné věty z nauky o determinantech, se doporučuje přečíst si předem odst. Determinanty v dodatku, na který tu budou občas činěny odkazy. Srovnej též návod ke studiu této knížky v předmluvě.

⁵⁾ Větu S si potvrdíme celkem snadno. Podle věty e) na str. 113

Větu (S) aplikujeme na konstrukci spojnicových nomogramů takto: Mějme vztah mezi třemi proměnnými x, y, z

$$F(x, y, z) = 0 \quad (F)$$

a přepišme jej do tvaru determinantu

$$\begin{vmatrix} F_1 & G_1 & 1 \\ F_2 & G_2 & 1 \\ F_3 & G_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (J)$$

kde

F_1, G_1 jsou funkce pouze proměnné x ,

F_2, G_2 jsou funkce pouze proměnné y ,

F_3, G_3 jsou funkce pouze proměnné z .

Při tom zdůrazněme, že funkce F_1 není obecně tatáž jako

víme, že se hodnota determinantu nezmění, odečteme-li některou řadu od řady s ní rovnoběžné. Odečteme-li v determinantu (S) první řádek postupně od ostatních dvou, dostaneme (provedeme-li na to rozvedení podle posledního sloupce)

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 - \xi_1 & \eta_2 - \eta_1 & 0 \\ \xi_3 - \xi_1 & \eta_3 - \eta_1 & 0 \end{vmatrix} = 1. \quad \begin{vmatrix} \xi_2 - \xi_1 & \eta_2 - \eta_1 \\ \xi_3 - \xi_1 & \eta_3 - \eta_1 \end{vmatrix} = 0$$

Odtud po vynásobení

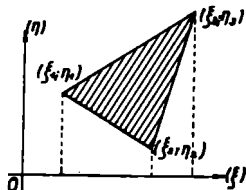
$$(\xi_2 - \xi_1)(\eta_3 - \eta_1) - (\eta_2 - \eta_1)(\xi_3 - \xi_1) = 0$$

čili

$$\eta_3 - \eta_1 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1} (\xi_3 - \xi_1),$$

což je známý tvar rovnice přímky jdoucí dvěma body $(\xi_1; \eta_1)$, $(\xi_2; \eta_2)$ a na níž leží bod $(\xi_3; \eta_3)$. Tím je uvedená věta potvrzena.

Někdo spíše vzpomene známějšího významu determinantu (S), který je vyjádřen ve větě: Není-li determinant (S) roven nule, udává dvojnásobný obsah trojúhelníka, jehož vrcholy jsou body o souřadnicích $(\xi_1; \eta_1)$, $(\xi_2; \eta_2)$, $(\xi_3; \eta_3)$. Je-li obsah trojúhelníka roven nule, znamená to, že všechny tři vrcholy trojúhelníka leží v přímce čili, že determinant (S) udává podmínku proto, aby 3 body ležely v přímce. (Obr. 2.)



Obr. 2.

funkce F_2 (přes to, že užíváme stejných písmen), podobně G_1 a G_2 , ani F_1 a F_3 atp.

Je-li takové přepsání vztahu (F) na determinant (J) možné, pak o trojici hodnot x_0, y_0, z_0 , která splňuje vztah (F), platí

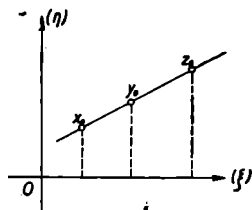
$$F(x_0, y_0, z_0) = \begin{vmatrix} F_1^0 & G_1^0 & 1 \\ F_2^0 & G_2^0 & 1 \\ F_3^0 & G_3^0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (J^0)$$

kde indexem nula u funkcí F a G je naznačeno, že do nich byly dosazeny hodnoty x_0, y_0, z_0 .

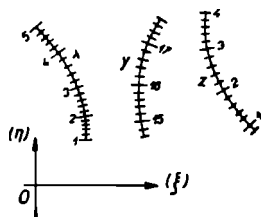
V determinantu (J^0) jsou tudíž první dva sloupce konstanty a lze mu připsat význam determinantu (S). To znamená, že můžeme položit

$$\begin{aligned} \xi_1 &= F_1^0, & \eta_1 &= G_1^0; \\ \xi_2 &= F_2^0, & \eta_2 &= G_2^0; \\ \xi_3 &= F_3^0, & \eta_3 &= G_3^0; \end{aligned}$$

a vynéstí hodnoty z determinantu (J^0) jako souřadnice bodů. Dostaneme tři body ležící v přímce (podle věty S). Přiřídíme k těmto bodům příslušné hodnoty proměnných. t. j. x_0, y_0, z_0 . Obr. 3.



Obr. 3.



Obr. 4.

Opakujeme-li vynášení bodů pro jiné trojice hodnot x, y, z , které splňují (řeší) vztah (F), dostaneme množství bodů kotovaných hodnotami proměnných x, y, z .

Spojme body kotované vždy touže proměnnou. Obr. 4. Dostaneme obrazec, na kterém jsou obecně zakresleny tři

křivky, zvané stupnice, o jejichž kotovaných bodech platí věta:

Spojíme-li přímkou body kotované kterýmikoli dvěma proměnnými, protne tato přímka třetí křivku v bodě, u něhož stojí kóta třetí proměnné, a tyto tři hodnoty splňují vztah (F).

Věta je zřejmá z konstrukce obrazce.

Obrazci takto sestrojenému říkáme spojnicový nomogram, protože hodnoty proměnných řešící vztah (F) leží na téže spojnici (rozumí se přímé) a obrazec vyhovuje ostatním požadavkům uvedeným v definici nomogramu v úvodě.⁶⁾

Z uvedeného plyne, že podstata spojnicových nomogramů spočívá v té okolnosti, že determinantu (J), na který byl vztah (F) přepsán, lze připsat geometrický význam determinantu (S), pro hodnoty řešící zobrazovaný vztah (F).

Postupu, kterého jsme použili k výkladu spojnicového nomogramu, užíváme skutečně při konstrukci nomogramu. To jest, daný vztah (F) převedeme na tvar determinantu (J) a z něho vypíšeme rovnice

$$\begin{aligned}\xi_1 &= F_1, & \eta_1 &= G_1; \\ \xi_2 &= F_2, & \eta_2 &= G_2; \\ \xi_3 &= F_3, & \eta_3 &= G_3.\end{aligned}\tag{Z}$$

kterým budeme říkati zobrazovací. Podle nich totiž nomogram přímo konstruujeme, zobrazujeme, dosazujeme do funkcí F a G hodnoty příslušných proměnných.

O konstruktivních podrobnostech, zvláště pak o obrazech, které nám usnadní kreslení stupnic, pojednáme v pozdějších odstavcích (zejména v odst. O stupnicích).

⁶⁾ Slovo nomogram je utvořeno z řeckých výrazů: nómos zákon, grafein píš; odtud plyne význam slova nomogram jako nákresu vyjadřujícího nějaký zákon čili vztah matematický.

O anamorfose. Úvaha předchozího odstavce spočívá na předpokladu, že vztah (F), který stručně budeme psát $F_{123} = 0$, lze přepsat do tvaru determinantu. Bylo by tedy nasnadě zabývat se podrobně otázkou, jak tomuto předpokladu vyhovíme. Pro potřebu našich výkladů však zcela postačí několik následujících poznámek.

Uveďme zprvu, že převedení vztahu mezi třemi proměnnými na tvar determinantu (J) obsahuje normálně dva kroky.

První záleží v tom, že vztah (F) nejdříve převedeme na determinant obecnějšího tvaru, než je (J), a který nazýváme determinantem Massauovým. Analyticky jej vyjádříme rovnicí

$$F(x, y, z) = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (M)$$

kde v prvním řádku funkce f_1, g_1, h_1 jsou funkce pouze první proměnné, podobně v druhém řádku f_2, g_2, h_2 jsou funkce pouze druhé proměnné a konečně v třetím řádku f_3, g_3, h_3 jsou funkce pouze třetí proměnné, a kde opět jako u (J) f_1 není obecně tatáž funkce jako f_2 , atp.⁷⁾

Druhý krok má pak za úkol upravit Massauův determinant zavedením vhodných konstant a eventuelně dalšími dovolenými změnami v determinantu, na tvar (J), v němž jsou v jednom sloupci jedničky.

O prvním kroku mluvíme také jako o rozloučení proměnných (v každém řádku jsou funkce vždy téže pro-

⁷⁾ Budeme vždy předpokládati, že v determinantu (M) nejsou v žádné řadě dva prvky nulové; kdyby tomu tak bylo, byl by výraz F_{123} součinem dvou funkcí, z nichž jedna závisí pouze na jedné proměnné a druhá na ostatních dvou. Potom by se vztah $F = 0$ rozpadl na dva vztahy $\Phi_1 = 0, \Phi_2 = 0$, z nichž jeden obsahuje jen jednu, druhý další zbylé dvě proměnné, t. j. neměli bychom vlastně vztah mezi třemi proměnnými a nemohli bychom sestrojiti nomogram (t. j. obrazec vyhovující požadavkům na str. 7).

měnné) a druhému kroku s vypsáním rovnic (Z) pak říkáme úprava vztahu (F) do zobrazovacích rovnic.

Nyní můžeme říci, že máme v podstatě zodpovědět otázku, jak rozhodnout či rozpoznat u dané rovnice, je-li ji možno převést na tvar determinantu (M) či nikoli, a v případě, kdy je to možné, jak lze nalézt funkce f_i, g_i, h_i ($i = 1, 2, 3$), stojící v (M).

Nazýváme anamorfosou převedení vztahu $F_{123} = 0$ na tvar determinantu (M). Tu je celkem pochopitelné, že každý vztah mezi třemi proměnnými není schopen anamorfosy. Obecné řešení této otázky, t. j. určení všech funkcí F_{123} o 3 proměnných, které lze napsati ve tvaru determinantu (M), není právě snadné. (Bylo úplně podáno T. H. Gronwallem v Journal des Mathématiques pures et appliquées, 6. série, t. VIII, 1912, str. 59 až 102.)

Pro praxi však téměř úplně postačí vytknouti si typy rovnic často se vyskytující, jimž říkáme kanonické tvary a u nichž je anamorfosa známá a snadná.

Uvedeme si některé kanonické tvary a jejich převedení jak na determinant Massauův, tak na zobrazovací rovnice.

Dané vztahy, které chceme nomogramy zobrazovati, pak ke kanonickým tvarům přirovnáme a shodně s nimi upravujeme.

Kanonické tvary, kterými se budeme zabývat, jsou tyto:

$$h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 = 0, \quad (K_1)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \varphi_3, \quad (K_2)$$

$$\psi_1 + \psi_2 = \psi_3, \quad (K_3)$$

$$g_1 g_2 f_3 + (g_1 + g_2) g_3 + h_3 = 0, \quad (K_4)$$

$$\frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} = f_3. \quad (K_5)$$

$$\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = \frac{f_3 - f_4}{g_3 - g_4} \quad (K_6)$$

Kanonický tvar (K_1): $h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 = 0$.

A) Jak pověděno, je kanonický tvar typ rovnice, který se v praxi často vyskytuje. Ukážeme-li proto obraty vedoucí k jeho zobrazení nomogramem v obecném případě, lze těchto obrátů použití u každé rovnice, která má uvažovaný tvar.

Uvedený kanonický tvar se ve svém složení funkcí vyznačuje tím, že funkce první proměnné h_1 je činitelem pouze u jednoho členu rovnice právě tak jako funkce druhé proměnné h_2 , při tom ale h_1 a h_2 jsou činiteli u různých členů rovnic. Výrazy f_3, g_3, h_3 , které jsou funkcemi třetí proměnné, jsou činiteli všech tří členů rovnice. Uvidíme později, že některé z funkcí f_3, g_3, h_3 mohou být rovny konstantě (h_3 speciálně nule), což nemůže platit ani pro h_1 , ani pro h_2 . (V takovém případě by totiž kanonický tvar nebyl vztahem mezi třemi proměnnými.)

V obecném výkladu budeme první proměnnou označovat x , druhou proměnnou y a třetí z .

První krok, který provedeme s rovnicí

$$h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 = 0, \quad (K_1)$$

záleží v tom, že ji přepíšeme do tvaru Massauova determinantu

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & h_1 \\ 0 & -1 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (M_1)$$

[O rovnosti (K_1) a (M_1) se přesvědčíme vyčíslením determinantu, nejlépe rozvedením podle posledního sloupce (srov. str. 110).]

Napsáním determinantu (M_1) bylo provedeno rozloučení proměnných, jak o tom bylo mluveno na str. 12.⁸⁾

⁸⁾ U rovnic tvaru

$$F_{12} f_3 + G_{12} g_3 + H_{12} h_3 = 0 \quad (a)$$

provádí se někdy s úspěchem rozloučení proměnných zavedením dvou nových parametrů ξ, η rovnicemi

$$\xi = F_{12} : H_{12}, \quad \eta = G_{12} : H_{12}. \quad (a')$$

Lze-li z rovnic (a') vyloučiti jednak proměnnou x a potom y , ale tak, aby výsledek vyloučení byly rovnice lineární v ξ a η , tedy

$$\xi f_1 + \eta g_1 + h_1 = 0$$

Z determinantu (M_1) provedeme pak snadno úpravu vztahu (K_1) na zobrazovací rovnice, podle nichž nomogram nakreslíme (druhý krok). Tato úprava záleží v podstatě v tom, jak víme z odst. O anamorfose, že provedeme Massauův determinant (M_1) na determinant (J), v němž v jednom sloupci jsou jedničky.

Z napsaného tvaru determinantu (M_1), kde pouze v třetím sloupci jsou všechny prvky nenulové, je nasnadě dělití tímto sloupcem celý determinant, takže dostaneme (násobíme současně při tom první, resp. druhý sloupec nenulovými konstantami α resp. β , jejichž význam bude z dalšího okamžité patrný)

$$a \quad \xi f_2 + \eta g_2 + h_2 = 0,$$

stačí připojit rovnici

$$\xi f_3 + \eta g_3 + h_3 = 0,$$

plynoucí z (a) a (a') a na to anulovati determinant sestavený z koeficientů u ξ , η , 1 v těchto třech rovnicích, totiž

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0,$$

abychom dostali požadovaný výsledek, to je determinant Massauův. (Determinant soustavy tří lineárních rovnic o dvou neznámých ξ , η udává vlastně podmínku řešitelnosti soustavy.) Tomuto způsobu rozloučení proměnných se říká metoda eliminací.

Užití u kanonického tvaru K_1 .

Rovnice

$$f_3 h_1 + g_3 h_2 + h_3 = 0$$

odpovídá rovnici (a),

$$\xi = h_1, \quad \eta = h_2$$

odpovídají rovnicím (a').

Dále obdobně k hořejšímu dostaneme

$$\xi + 0 - h_1 = 0$$

$$0 + \eta - h_2 = 0$$

$$\xi f_3 + \eta g_3 + h_3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -h_1 \\ 0 & 1 & -h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & h_1 \\ 0 & -1 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0,$$

což je výsledek v textu uvedený!

$$\begin{vmatrix} -\frac{\alpha}{h_1} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{h_2} & 1 \\ \frac{\alpha f_3}{h_3} & \frac{\beta g_3}{h_3} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (J_1)$$

Odtud potom plynou zobrazovací rovnice

$$\left. \begin{array}{l} \xi_1 = -\frac{\alpha}{h_1}, \quad \eta_1 = 0, \quad (x) \\ \xi_2 = 0, \quad \eta_2 = -\frac{\beta}{h_2}, \quad (y) \\ \xi_3 = \frac{\alpha f_3}{h_3}, \quad \eta_3 = \frac{\beta g_3}{h_3}, \quad (z) \end{array} \right\} \cdot \quad (1Z_1)$$

Jak již bylo v odst. Princip spojnicových nomogramů uvedeno, vyjadřují tyto parametrické rovnice body na stupnicích nomogramu. To znamená, že bod kotovaný na příklad hodnotou (x_0) , je určen souřadnicemi, jejichž velikost dostaneme, dosadíme-li hodnotu x_0 (parametr) do výrazů ξ_1 a η_1 .

Z rovnic (x) vyčteme, že stupnice proměnné x leží na ose souřadnic ξ , neboť pro všechny hodnoty x je stále souřadnice η_1 rovna nule. Při tom vidíme, že konstanta α je jednotkou délky a nazývá se *modul* pro souřadnice ξ . Podobně z rovnic (y) plyne, že stupnice y leží na souřadnicové ose η (β je modul pro souřadnice η); říkáme také, že stupnice x i y jsou přímé; stupnice proměnné z je obecně křivočará. Schematicky můžeme tedy nakreslit nomogram pro vztah tvaru (K_1) obecným náčrtem, který je v obr. 5.

Principiálně body na stupnicích x, y, z dostaneme dosazením hodnot za parametry x, y, z a vynášením příslušných souřadnic. Nasnadě je ovšem ihned otázka, lze-li

zkrátit nějakým obratem vynášení bodů na stupnicích, abychom nemusili počítat souřadnice každého bodu. Předně nás bude zajímati, na jaké čáře leží body kotované touže proměnnou čili jakou čarou je tak zvaná nositelka stupnice. Kdyby byla nositelkou jednoduchá čára, zakreslili bychom ji nejdříve a potom provedli okotování jejich bodů. K tomu by už stačilo uvažovat jen jednu souřadnici ze zobrazovacích rovnic. Rovnici nositelky dostaneme vyloučením parametru z výrazů pro ξ a η .

Různé výhody při vynášení bodů na stupnicích závisí na tvaru zobrazovaného vztahu. Někdy totiž pro speciální hodnoty některé proměnné lze získat výhodné souvislosti mezi zbývajícími proměnnými, kterých lze užít při konstrukci stupnic. Tyto souvislosti budeme nazývat relacemi.

Srovnej v dalším textu návrhů nomogramů.

Podrobněji o konstrukci stupnic, zvláště nejběžnějších typech, budeme uvažovati v odst. O stupnicích.

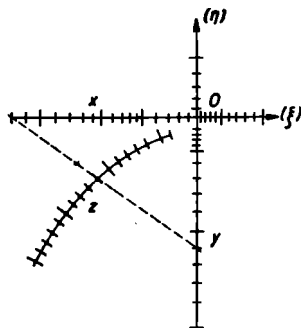
Příklady:

1. Pro výpočet největšího tlaku K (v tunách) kola jeřábového vozu platí vzorec Vianellův (přibližný)

$$K = 0,6P + \frac{l(P + 15)}{100 + 0,8P} \quad (K)$$

značí-li l rozpětí v m, P užitečné zatížení jeřábu v tunách.

Rozsahy proměnných: Rozpětí l se mění v mezích od 10 do 24 m, což stručně napíšeme $l \langle 10; 24 \rangle$ m nebo $10 \leq l \leq 24$ m, (úhlovými závorkami $\langle \rangle$ budeme tedy vyznačovat, že do daného rozmezí [intervalu] zahrnujeme i hodnoty krajní $l = 10$ a $l = 24$). Rozsah $P \langle 5; 50 \rangle$ v tunách; rozsah



Obr. 5.

K v tunách vypočteme ze vzorce (K) užitím daných hodnot l a P ; okrouhle je K v intervalu $\langle 5; 45 \rangle$.

Srovnání vzorce s kanonickým tvarem:

$$K - l \frac{P + 15}{100 + 0,8P} - 0,6P = 0,$$

$$h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 = 0,$$

$$h_1 = K, h_2 = -l;$$

$$f_3 = 1, g_3 = \frac{P + 15}{100 + 0,8P}, h_3 = -0,6P.$$

Přepsání na Massauův determinant a úprava na determinant Z :

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & K \\ 0 & -1 & -l \\ 1 & \frac{P + 15}{100 + 0,8P} & -0,6P \\ -\frac{\alpha}{K} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\beta}{l} & 1 \\ -\frac{\alpha}{0,6P} & -\frac{\beta(P + 15)}{0,6P(100 + 0,8P)} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Zobrazovací rovnice

$$\xi_1 = -\frac{\alpha}{K}, \quad \eta_1 = 0;$$

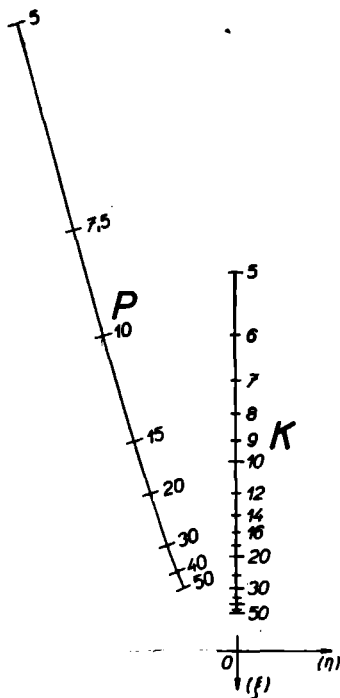
$$\xi_2 = 0, \quad \eta_2 = \frac{\beta}{l};$$

$$\xi_3 = -\frac{\alpha}{0,6P}, \quad \eta_3 = -\frac{\beta(P + 15)}{0,6P(100 + 0,8P)}.$$

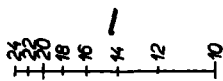
Volba modulů. Modul α zvolíme 25 cm. Nejmenší ξ je pak dlouhé 0,5 cm, totiž $\xi_1 = -\frac{25}{45}$ cm pro $K = 45$. Největší ξ je $\xi_3 = -8,3$ cm pro $P = 5$. Modul β zvolen 45 cm. Nejmenší pořadnice je $\eta_3 = -2,88$ cm, největší $\eta_2 = 4,5$ cm. Obr. 6. (Pozor na polohu os v obrázku!)

Relace. Položíme-li v rovnici (K) $l = 0$, dostaneme relaci

$$K = 0,6P,$$



které můžeme použítí jak pro kontrolu, tak při konstrukci nomogramu. Položíme-li v ní na př. $P = 10$, je $K = 6$; to znamená podle principu spojnicových nomogramů, že body kotované hodnotami $l = 0$, $P = 10$ a $K = 6$ leží na přímce. Protože všechny spojnice bodu $l = 0$ ($\xi_3 = 0$, $\lim \eta_3 \rightarrow \infty$) jsou rovnoběžné s osou η , leží body $P = 10$ a $K = 6$ na rovnoběžce s η . Užitím uvedené relace nám odpadá obtížnější počítání souřadnic ξ_3 !



Obr. 6.

2. Sestrojíme nomogram řešící kvadratické rovnice tvaru

$$x^2 + px + q = 0,$$

kde p a q se mění v rozmezí $\langle -10; 10 \rangle$!

a) Srovnání s kanonickým tvarem:

$$q + p x + x^2 = 0,$$

$$h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 = 0,$$

$$h_1 = q, \quad h_2 = p;$$

$$f_3 = 1, \quad g_3 = x, \quad h_3 = x^2.$$

b) Zobrazovací rovnice (podle 1Z_1):

$$\xi_1 = -\frac{\alpha}{q}, \quad \eta_1 = 0;$$

$$\xi_2 = 0, \quad \eta_2 = -\frac{\beta}{p};$$

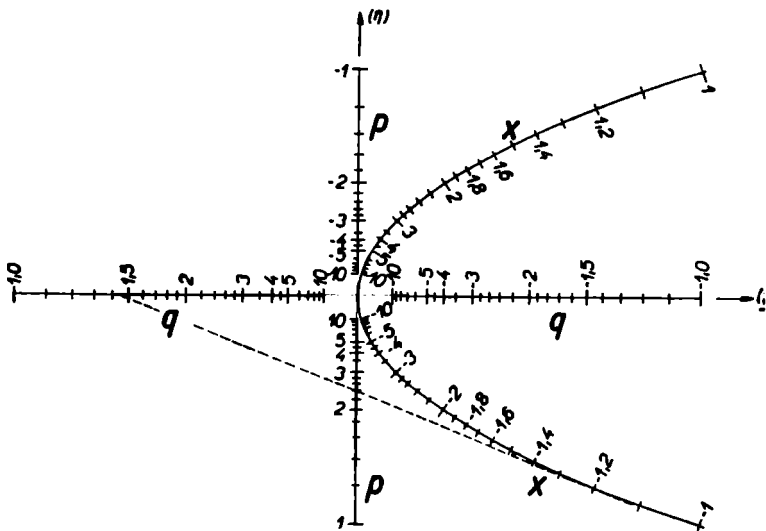
$$\xi_3 = \frac{\alpha}{x^2}, \quad \eta_3 = \frac{\beta}{x}.$$

Moduly: $\alpha = 9$ cm, $\beta = 6$ cm. (Obr. 7.)

Čára, na níž leží stupnice x , je parabola o rovnici $\eta^2 = 4\xi_3$.

Relace:

Pro speciální hodnoty proměnných plynou opět jako v předšlém příkladě jednoduché relace, kterých užíváme při kon-



Obr. 7.

strukci. Podle relace $p = -x$ platné při $q = 0$ leží na rovnoběžce s osou ξ body kotované stejnými hodnotami jak na stupnici p , tak x , lišícími se pouze znaménkem. Okolnost tu lze zjistit též ze zobrazovacích rovnic.

Podobně podle relace $x = \pm \sqrt{-q}$, platné při $p = 0$, leží na rovnoběžce s osou η body stupnic x a q kotované hodnotami splňujícími tuto relaci; na př. $q = -9$, $x = \pm 3$!

V obr. 7 je zakresleno řešení rovnice $x^2 + 2,4x + 1,44 = 0$ s dvojnásobným kořenem $-1,2$; spojnice bodů $p = 2,4$ a $q = 1,44$ je tečnou k parabole v bodě $x = -1,2$!

B) Uvedený způsob úpravy determinantu (M_1) na zobrazovací rovnice (1Z_1) není normálně vhodný pro zobrazení. Čtení v okolí počátku soustavy souřadnic je vždy nespolehlivé, protože spojnice dvou blízkých bodů je nepřesná. Stupnice funkcí h_1 a h_2 jsou vynášeny reciprokými hodnotami, což má za následek značně rozdílnou čitelnost hodnot lišících se řádově. V uvedeném příkladě rovnice (K) všimněme si rozdílné hustoty kot kolem 5 a 50 u stupnice K .

Proveďme proto úpravu determinantu (M_1) na jiné zobrazovací rovnice. Snažme se při tom dosáti, aby stupnice funkcí h_1 a h_2 byly na přímkách spolu rovnoběžných a byly vynášeny přímo. Provedení úpravy s těmito požadavky je celkem jednoduché. Stačí, abychom přičetli druhý sloupec k prvnímu a potom prvním sloupcem dělili celý determinant. (Že si tak máme počínat, poznáme ze zobrazovacích rovnic.) Jestliže zavedeme při úpravě ještě potřebné nenulové konstanty, jejichž význam bude ihned z dalšího patrný, lze provádění úpravy (speciálně zavedení konstant) vyznačit tímto postupem⁹⁾:

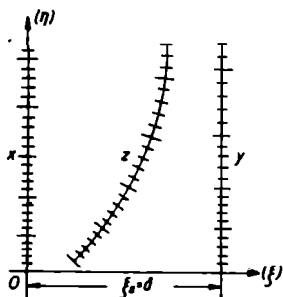
$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -1 & 0 & h_1 \\ 0 & -1 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & 0 & h_1 \\ 0 & \alpha & h_2 \\ \beta f_3 & \alpha g_3 & -h_3 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} \beta & 0 & \alpha\beta h_1 \\ \alpha & \alpha\delta & \alpha\beta h_2 \\ \beta f_3 + \alpha g_3 & \alpha\delta g_3 & -\alpha\beta h_3 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha h_1 \\ 1 & \delta & \beta h_2 \\ 1 & \frac{\alpha\delta g_3}{\beta f_3 + \alpha g_3} & \frac{\alpha\beta h_3}{\beta f_3 + \alpha g_3} \end{vmatrix} = 0.^{10)} \end{aligned}$$

⁹⁾ První sloupec násobíme β , druhý α ; potom přičteme druhý sloupec k prvnímu, druhý sloupec násobíme δ ; konečně prvky (takto upraveného) prvního sloupce dělíme příslušné řádky.

¹⁰⁾ Při úpravě bylo předpokládáno, že součet $\beta f_3 + \alpha g_3$ není roven nule. Dodejme, že obecně tomu tak není, aspoň ne pro

Z upraveného determinantu vypíšeme zobrazovací rovnice, které mají v nomografii velmi značné upotřebení:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 0, & \eta_1 &= \alpha h_1; \\ \xi_2 &= \delta, & \eta_2 &= \beta h_2; \\ \xi_3 &= \frac{\alpha \delta g_3}{\beta f_3 + \alpha g_3}, & \eta_3 &= -\frac{\alpha \beta h_3}{\beta f_3 + \alpha g_3}. \end{aligned} \right\} \quad (Z_1)$$



Obr. 8.

Z nich se dovídáme, že obecně nomogram lze vyznačit schématem patrným z obr. 8.

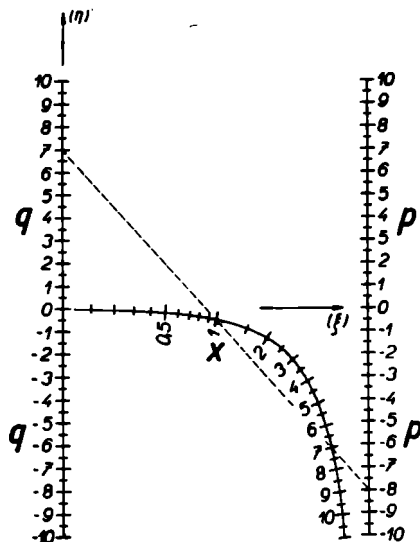
Kdykoli je zobrazovaný vztah kanonického tvaru (K_1), použijeme těchto zobrazovacích rovnic, a to přímo bez převádění na Massauův determinant (viz příklady); teprve mělo-li by toto zobrazení nějaké nedostatky, převedeme vztah na Massauův

všechny hodnoty proměnné z . Kdyby tomu tak bylo, pak by platilo $\lim_{\xi_3 \rightarrow \infty} \eta_3 \rightarrow \infty$, když $\beta f_3 + \alpha g_3$ se blíží nule, pro všechna z , čili body stupnice z by padly na úběžnou přímku nákrešny. Z poměru $\frac{\eta_3}{\xi_3} = -\frac{\beta h_3}{\delta g_3}$ bychom pak snadno stanovili směr udávající polohu bodu o kotě z na úběžné přímce. Když bychom okotovali paprsky jdoucí počátkem hodnotami z tak, aby paprsku byla připsána ta kóta, která dosazena do $-\frac{\beta f_3}{\delta g_3}$ určuje jeho směrnici, je způsob použití nomogramů vyjádřen ve větě:

K daným hodnotám x_0, y_0 přísluší ta hodnota z_0 , řešící s nimi vztah (K_1), která je připsána k paprsku rovnoběžnému se spojnicí bodů o kotách x_0, y_0 .

Případ, kdy nastane $\beta f_3 + \alpha g_3 = 0$ jen pro některou hodnotu z , další úvahy neomezuje, zvláště nastane-li pro z mimo používaný interval. Má-li být v nákrese bod, pro který je $\beta f_3 + \alpha g_3 = 0$, volíme jinou úpravu, eventuelně jiný kanonický tvar pro zobrazovaný vztah. Takový bod se vyskytuje v příkladě na str. 28' pro kotu $s = 100$.

determinant a hledáme jinou úpravu na zobrazovací rovnice. O tom více v odst. Kolineace nomogramu.



Obr. 9. Z nomogramu odečteme, že rovnice $x^2 - 8x + 7 = 0$ má kořeny 0;7.

Příklady.

Pro srovnání s předešlým zobrazením uvedme tytéž příklady.

1. Návrh nomogramu pro vztah

$$x^2 + px + q = 0, \quad p, q \in \langle -10; 10 \rangle.$$

a) Srovnání s kanonickým tvarem:

$$\begin{aligned} \sqrt{q} + px + x^2 &= 0, \\ h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 &= 0, \\ h_1 = q, \quad h_2 = p; \\ f_3 = 1, \quad g_3 = x, \quad h_3 = x^2. \end{aligned}$$

b) Zobrazovací rovnice:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0, & \eta_1 &= \alpha q; \\ \xi_2 &= \delta, & \eta_2 &= \beta p; \\ \xi_3 &= \frac{\alpha \delta x}{\beta + \alpha x}, & \eta_3 &= -\frac{\alpha \beta x^2}{\beta + \alpha x}. \end{aligned}$$

Moduly: $\alpha = 0,3$ cm, $\beta = 0,3$ cm, $\delta = 4$ cm. Obr. 9.

Relace: $p = -x$ při $q = 0$; $x = \pm \sqrt{-q}$ při $p = 0$.

V odst. O stupnicích poznáme, že souřadnice ξ_3 tvoří projek-
tivní stupnici, kterou snadno narýsuje užitím měřítka.
Vyloučením x z ξ_3 a η_3 se dovíme, že nositelka stupnice x je
hyperbola $3\xi^2 - 40\xi\eta + 160\eta = 0$; její střed je v bodě o kotě
 $p = 2$, jedna asymptota je nositelka stupnice p , druhá jde
bodem o kotě $q = 1$; mimo to prochází hyperbola počátkem
soustavy souřadnic (bodem o kotě $q = 0$).

Poznámka. Záporné kořeny kvadratické rovnice $x^2 +$
 $+ px + q = 0$ jsou kladnými kořeny rovnice $x^2 - px + q = 0$.
Stačí proto zakreslený nomogram k hledání kladných i zápor-
ných kořenů. Kořeny rovnice $x^2 - x - 2 = 0$ najdeme z no-
mogramu užitím spojnic ($p = -1$, $q = -2$) a ($p = 1$,
 $q = -2$); první spojnice dává kořen 2, druhá kořen -1 .

2. Návrh nomogramu pro vztah

$$K = 0,6P + \frac{l(P + 15)}{100 + 0,8P};$$

$$P \langle 5; 50 \rangle t; l \langle 10; 24 \rangle m \text{ a } \llcorner \langle 5; 45 \rangle t.$$

a) Srovnání s kanonickým tvarem:

$$K - l \frac{P + 15}{100 + 0,8P} - 0,6P = 0,$$

$$h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 = 0;$$

$$h_1 = K, \quad h_2 = l;$$

$$f_3 = 1, \quad g_3 = -\frac{P + 15}{100 + 0,8P}, \quad h_3 = -0,6P.$$

b) Zobrazovací rovnice:

$$\xi_1 = 0,$$

$$\xi_2 = \delta,$$

$$\eta_1 = \alpha K;$$

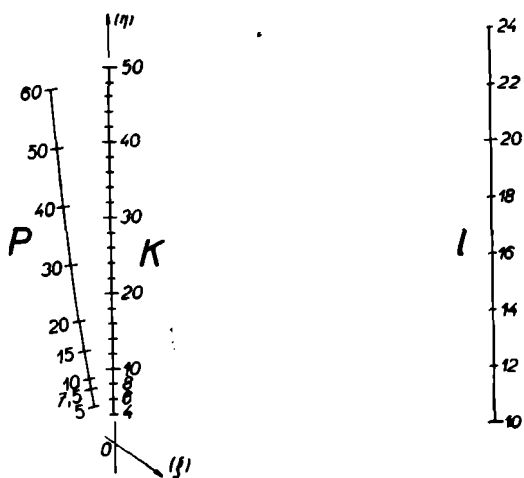
$$\eta_2 = \beta l;$$

$$\xi_3 = \frac{-\alpha\delta \frac{P + 15}{100 + 0,8P}}{\beta - \alpha \frac{P + 15}{100 + 0,8P}}, \quad \eta_3 = + \frac{\alpha\beta \cdot 0,6P}{\beta - \alpha \frac{P + 15}{100 + 0,8P}}$$

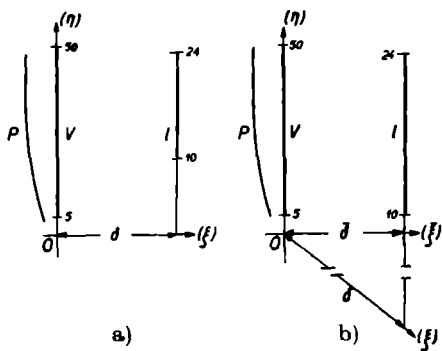
Moduly: $\alpha = 0,1 \text{ cm}$, $\beta = 0,375 \text{ cm}$, $\bar{\delta} = 5 \text{ cm}$ ($\delta = 6,2$).
Obr. 10.

V tomto příkladě máme příležitost poukázat na jednu
důležitou konstruktivní podrobnost, při které vysvitne
význam užití kosoúhlých souřadnic.

Vzhledem k daným rozsahům proměnných l a V , vidíme z ná-
črtku a) v obr. 11, že je výhodné užit k nákresu nomogramu

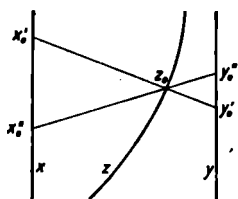


Obr. 10.



Obr. 11.

kosoúhlých souřadnic, aby užívané rozsahy stupnic byly „proti sobě“; volbou modulů dosáhneme, aby stupnice byly *asi* stejně dlouhé (*asi* říkáme proto, že okrouhlost modulu má přednost před stejnou délkou stupnic). Osa souřadnic ξ padne při tom částečně mimo nákresnu. V takovém případě, a zvláště tehdy, padne-li celá osa ξ mimo nákresnu, použijeme místo souřadnice $\xi_2 = \delta$ určující polohu stupnice y (v našem příkladě l) přímo vzdálenosti $\bar{\delta}$ stupnic x, y (K, l). Pro výpočet souřadnice ξ_3 vložíme do výrazu vyjadřujícího tuto souřadnici také $\bar{\delta}$, takže vlastně místo souřadnic ξ_3 počítáme vzdálenosti od osy η , značme je $\bar{\xi}_3$ (můžeme je nanášet na kolmici k η , kdekoli umístěnou). Souřadnic η_3 nemůžeme použít, nemajíc dostupnou osu ξ . Nahradíme je spojnicemi kot řešících daný vztah. Často takové koty lze počítat z jednoduché relace (existuje-li) plynoucí z daného vztahu pro vhodnou hodnotu některé z proměnných. V našem příkladě je pro $l = 0, K = 0,6P$. Dostaneme tudíž bod (křivě) stupnice P s kotou na př. 10 pomocí souřadnice $\bar{\xi}_3$ a spojnice $l = 0, K = 6$. Je-li i bod $l = 0$ nedostupný, nebo jestliže obecně i výraz ξ_3 je k výpočtu nepohodlný, uijeme k sestrojení stupnice z (u nás P) tak zvané metody promětné. Záleží v tom, že ke každému



Obr. 12.

bodu stupnice z vypočteme dvě dvojice x, y , jejichž spojnice jím procházejí. Máme-li tedy nalézt bod stupnice kotovaný hodnotou z_0 , vypočteme pro ni a pro dvě zvolené hodnoty $x = x'_0, x = x''_0$ příslušné hodnoty $y = y'_0$ a $y = y''_0$ z daného vztahu $F(x, y, z) = 0$, takže platí $F(x'_0, y'_0, z_0) = 0$ a $F(x''_0, y''_0, z_0) = 0$. V průsečíku spojnic $x'_0 y'_0$ a $x''_0 y''_0$ leží bod z_0 . Viz obr. 12. Pro bod

$$P = 10 \text{ platí z } (K) \quad K = 6 + \frac{25l}{108}. \quad \text{Volme } l = 10,8,$$

$l'' = 21,6$ a vypočteme $K' = 8,5$ a $K'' = 11$. Spojnice $l'K'$ a $l''K''$ se protínají v bodě stupnice P o kotě 10.

Umístění stupnice z mezi stupnicemi x a y .

Jestliže je proměnná z uvažována při řešení vztahu $F(x, y, z) = 0$ soustavně jako neznámá, uplatňujeme požadavek, aby její stupnice byla mezi stupnicemi x a y . Tomu tak bude, jestliže hodnoty ξ_3 budou v otevřeném intervalu $(0; \delta)$.¹¹⁾ Z nerovnosti $0 < \xi_3 < \delta$ vypočteme, že tehdy leží stupnice z mezi stupnicemi x, y , mají-li f_3 a g_3 totéž znamení.

$\left(0 < \frac{\alpha \delta g_3}{\beta f_3 + \alpha g_3} < \delta, \frac{\alpha g_3}{\beta f_3 + \alpha g_3} < 1, \text{ čili } \frac{\beta f_3}{\alpha g_3} + 1 > 1 \text{ a ko-} \right.$
 $\left. \text{nečně } \frac{\beta f_3}{\alpha g_3} > 0 \text{ je výsledek, který vyjadřuje předchozí věta.} \right)$

V příkladě 1. je $f_3 = 1, g_3 = x$ (x je zde ve významu proměnné obecně značené z) a poměr $\frac{f_3}{g_3} = \frac{1}{x} > 0$ jen pro kladná x . Stupnice x je pro kladné hodnoty x mezi stupnicemi p, q .

V příkladě 2. je $f_3 = 1, g_3 = -\frac{P + 15}{100 + 0,8P}$ a poměr $\frac{f_3}{g_3} = -\frac{100 + 0,8P}{P + 15} < 0$ pro $P > -15$. Stupnice P s kotami $\langle 5; 50 \rangle$ (potřebnými v příkladě) je mimo stupnice K, l . (Soustavně hledanou neznámou je hodnota proměnné K .)

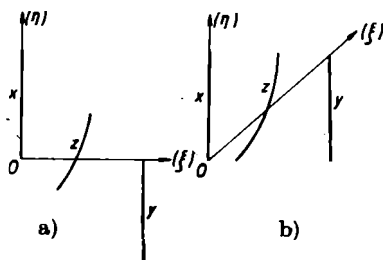
Podmínce $\frac{f_3}{g_3} > 0$, čili aby obě funkce měly totéž znamení, můžeme vždy vyhovět (pokud ovšem běží o vztahy graficky zobrazitelné). Při nesouhlasných znameních přičleníme totiž záporné znamení k některé z funkcí h_1 nebo h_2 . Tak jsou-li na př. ve vztahu znamení jako v rovnici

$$h_1 f_3 - h_2 g_3 + h_3 = 0,$$

připojíme znamení minus k funkci h_2 (předpokládejme při

¹¹⁾ Okrouhlými závorkami vyznačujeme, že proměnná ξ_3 nabývá všech hodnot intervalu mimo krajní jeho hodnoty. Tedy platí $0 < \xi_3 < \delta$.

tom, že výrazy f_3 a g_3 mají totéž znamení pro hodnoty z užitě v nomogramu). Ze zobrazovacích rovnic (2Z_1), v nichž



Obr. 13.

je nyní $\eta_2 = -\beta h_2$ plyne, že je třeba stupnici h_2 vynášeti v opačném smyslu než stupnici h_1 . Zakreslujeme tudíž nomogram podle schématu naznačeného v obr. 13a).

Aby stupnice x, y stály „proti sobě“, použijeme kosohlého systému souřadnic. Dostaneme uspořádání, jak

ukazuje schema na obr. 13 b).

Příklad:

Při konstrukci sdruženého nomogramu pro váhu železných obručí (str. 95) je třeba sestavit dílčí nomogram vztahu

$$Ds - s^2 = t.$$

$D < 200; 1000 >$ mm, $s < 5; 100 >$ mm; t (vypočteno) $< 1000; 90\,000 >$.

a) Srovnání s kanonickým tvarem:

$$\begin{aligned} Ds - t - s^2 &= 0; \\ h_1 f_s + h_2 g_s + h_3 &= 0; \\ h_1 = D, h_2 &= -t; \\ f_s = s, g_s = 1; h_3 &= -s^2 \end{aligned}$$

b) Zobrazovací rovnice:

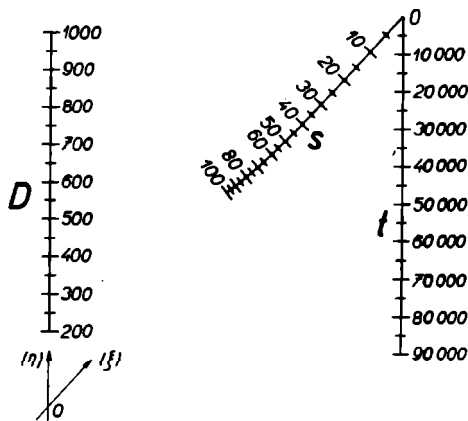
$$\begin{aligned} \xi_1 = 0, \quad \eta_1 &= \alpha D; \\ \xi_2 = \delta, \quad \eta_2 &= -\beta t; \\ \xi_3 = \frac{\alpha \delta}{\beta s + \alpha}, \quad \eta_3 &= +\frac{\alpha \beta s^2}{\beta s + \alpha} \end{aligned}$$

Moduly: $\alpha = 0,005$ cm; $\beta = 0,000\,05$ cm. $\delta = 7$ cm. Obr. 14.

Relace: $t = 0, D = s; D = 0, t = -s^2$. Vztahy tyto jsou sice velmi jednoduché, ale nelze jich spolehlivě užití v nákresu, protože průsečíky příslušných spojnic jsou značně nepřesné. Na př. pro $s = 10$. K sestavení stupnice užitíme souřadnic ξ_3 , které tvoří na ose ξ projektivní stupnici, jejíž zakreslení pomocí měřítka je snadné (viz odst. O stupnicích) a metody promětné (str. 26).

Aby stupnice s vyšla mezi stupnice D a t , vynášena stupnice t v opačném smyslu vzhledem ke stupnici D ; též užití kosohlého systému souřadnic. Provedeme-li srovnání s kano-

nickým tvarem tak, že znamení minus připojíme k funkci g_3 (rovné potom -1), zjistíme, že stupnice s vyjde mimo stupnice D a t , dokonce užijeme-li týchž modulů jako v zakresleném nomogramu, že bod $s = 100$ „uběhne do nekonečna“. V příkladě je sice soustavně hledanou neznámou hodnota t , ale z naznačeného výsledku bylo nutné umístit stupnici s mezi D a t .



Obr. 14.

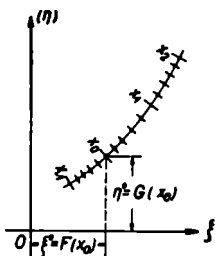
Kdyby nebyl splněn předpoklad, který činíme v tomto odstavci, že totiž pro všechny hodnoty proměnné z použité v nomogramu jsou funkce f_3 a g_3 téhož znamení, rozložili bychom interval proměnné z na dvě části; v jedné z nich ať mají f_3 a g_3 totéž znamení a v druhé nikoli. Každou část zobrazíme zvlášť nomogramem. V nomogramu části, kde $\frac{f_3}{g_3} > 0$ je stupnice z mezi stupnicemi x , y . V nomogramu druhé části dostaneme stupnici z mezi stupnicemi x , y , připojíme-li znamení minus (výrazu f_3 resp. g_3) jedné z funkcí h_1 , h_2 .

O stupnicích. Zopakujme, že stupnicí proměnné na př. x rozumíme soustavu bodů ležících na čáře a kotovaných hodnotami x . Stupnice je určena zobrazovacími rovnicemi, které vyjadřují souřadnice ξ, η bodů na stupnici pomocí parametru x .

Jsou-li obecně zobrazovací rovnice proměnné x

$$\xi = \alpha F(x), \quad \eta = \beta G(x),$$

(α, β moduly na osách souřadnic), dostaneme souřadnice ξ^0, η^0 bodu kotovaného hodnotou $x = x_0$ tak, že do výrazů pro ξ a η vložíme za x hodnotu x_0 . Viz obr. 15. Rovnici čáry, na níž stupnice leží, dostaneme vyloučením (eliminací) proměnné x ze zobrazovacích rovnic. Čáre té říkáme nositelka stupnice.



Obr. 15.

Vynášení bodů na stupnici podle vypočtených hodnot z výrazů pro souřadnice ξ a η bylo by značně pracné, kdybychom musili počítat bod za bodem. Hledáme proto možnosti, jak bychom si vynášení bodů na stupnici čili konstrukci stupnice, usnadnili. Tato konstrukce přirozeně závisí na výrazech určujících souřadnice bodů.

Prakticky je nejdůležitější případ, kdy stupnice leží v přímce a kdy říkáme, že běží o stupnici přímkou. Vezměme tuto přímku, v dalším výkladu o přímých stupnicích, za osu (η). Souřadnice η určující polohu bodů na stupnici jsou pak stanoveny rovnicí

$$\eta = \alpha f(x), \quad (\alpha \text{ modul})$$

(druhá zobrazovací rovnice je $\xi = 0$). Výraz $f(x)$, na němž závisí poloha kotovaných bodů tak charakterizuje uspořádání bodů na přímce, že zpravidla mluvíme přímo o „stupnici funkce $f(x)$ “, místo pouze o „stupnici proměnné x “.

Z funkcí $f(x)$ jsou nejdůležitější pro své časté upotřebení tyto:

A)
$$f(x) = x.$$

Stupnici této funkce říkáme měřítko. Na osu η bychom ji vynesli podle rovnice $\eta = \alpha x$, čímž dostaneme měřítko o modulu α . Grafická úprava měřítka je patrná z obr. 16, kde je zakresleno o modulu $\alpha = 1$ cm, při počátku O_1 .

B)
$$f(x) = ax + b.$$

Funkce tohoto tvaru se nazývá lineární a odtud pro její stupnici jméno: stupnice lineární funkce. Kota $x = 0$ je připsána k bodu o souřadnici $\eta = \alpha b$. Od tohoto bod můžeme pak stupnici lineární funkce vynést jako měřítko o modulu $\alpha' = \alpha \cdot a$. K počátku $\eta = 0$ je připsána kota

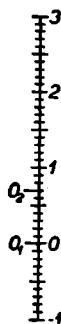
$x = -\frac{b}{a}$. V obr. 16, je zakreslena stupnice lineární funkce

$f(x) = 2x - 1,4$, při modulu $\alpha = 0,5$ cm ($\alpha' = 1$ cm) a počátku O_2 (označeném kotou 0,7).

Protože modul $\alpha' = 1$ cm je rovný modulu α měřítka v předchozím příkladě, byly obě stupnice v obr. 16 na sebe tak položeny, že jsou totožné, až na polohu počátků, od nichž jsou vynášeny.

Abychom předešli možnému nedorozumění, uvědomme si ihned dobře rozdíl mezi počátkem stupnice a počátkem souřadnic. Počátek stupnice je označen kotou 0 (nula), kdežto v počátku souřadnic je hodnota vynášené funkce rovna nule. V příkladě stupnice funkce lineární v obr. 16 je počátek souřadnic O_2 označen kotou 0,7, pro niž $\eta = 0$; počátek stupnice je od bodu O_2 vzdálen o délku $-0,7$ cm, a nese kotu 0.

Je nutné si dobře uvědomit, že při konstrukci stupnice vynášíme od počátku souřadnic délky $\alpha \cdot f(x)$ cm, tedy délky úměrné hodnotám funkce, kdežto ke koncovým bo-



Obr. 16.

dům těchto délek připisujeme hodnoty parametru (argumentu) x jako koty. V příkladě funkce lineární vyneseme na nositelku pro $x = 2$ od počátku souřadnic O_2 délku $\eta = 0,5 \cdot (2 \cdot 2 - 1,4) \text{ cm} = 1,3 \text{ cm}$ a k jejímu konci připišeme kotu 2!

$$C) \quad f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{při } ad - bc \neq 0^{12)}$$

Funkce projektivní; a odtud název pro její stupnici: stupnice funkce projektivní, nebo jednoduše stupnice projektivní.

Funkce projektivní se vyznačuje vlastností, které použijeme k její konstrukci. Platí totiž

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{f(x_3) - f(x_2)} : \frac{f(x_4) - f(x_1)}{f(x_4) - f(x_2)} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2},^{13)} \quad (P)$$

kde $f(x_1)$ značí, že do $\frac{ax + b}{cx + d}$ byla za x dosazena hodnota x_1 atp. pro x_2, x_3 a x_4 .

Slovy lze vyjádřit tuto vlastnost větou:

Dvojpoměr libovolných čtyř hodnot projektivní funkce rovná se dvojpoměru příslušných parametrů (argumentů) vzatých ve stejném pořadí. Nebo ve smyslu úvahy provedené v poznámce¹³⁾:

¹²⁾ $\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cx + d)}$ a při $ad - bc = 0$ by se funkce $f(x)$ redukovala na konstantu $\frac{a}{c}$!

¹³⁾ Poměrem bodu C vzhledem k základním bodům A, B nazýváme podíl $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ (obr. 17). Podíl dvou poměrů, na př. bodů C a D vzhledem k základním bodům A, B nazýváme dvojpoměrem čtyř bodů A, B, C, D (v tomto pořadí); tedy podíl v následujícím uspořádání

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$$

Dvojpoměry odpovídajících si bodů na měřítku a na stupnici projektivní jsou stejné.

Stupnice funkce $\frac{ax+b}{cx+d}$ je projektivní se stupnicí funkce x čili měřítkem. To znamená, jak víme z geometrie, že lze přímky, na kterých leží stupnice x a $\frac{ax+b}{cx+d}$ uvést do takové polohy v rovině, že spojnice odpovídajících bodů jdou jedním bodem; při tom odpovídajícími body jmenujeme ty, které mají na obou stupnicích společné koty. Poloha ta je charakterisována tím, že do průsečíku obou

Jsou-li na přímce při počátku O , souřadnice základních bodů A, B označeny η_1, η_2 a souřadnice bodů C, D η_3, η_4 , je dvojpoměr bodů C, D vzhledem k A, B udán výrazem

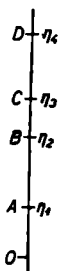
$$\frac{\eta_3 - \eta_1}{\eta_3 - \eta_2} : \frac{\eta_4 - \eta_1}{\eta_4 - \eta_2}$$

Vložíme-li za η_i ($i = 1, 2, 3, 4$), jednou x_i a potom $\frac{ax_i+b}{cx_i+d}$ [čili uvážíme-li jednou čtyři body na stupnici x (měřítku) a potom čtyři body na stupnici projektivní, kotované společnými hodnotami x_1, x_2, x_3 a x_4], potvrdíme si snadno platnost rovnice

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{f(x_3) - f(x_2)} : \frac{f(x_4) - f(x_1)}{f(x_4) - f(x_2)} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}, \quad \text{Obr. 17.}$$

kde $f(x_i) = \frac{ax_i+b}{cx_i+d}$. Přesvědčte se vložení výrazů za $f(x_i)$ a jednoduchou úpravou, při níž se uplatní dříve požadovaný předpoklad pro funkci projektivní $ad - bc \neq 0$. Výsledek vyslovíme takto: Dvojpoměry čtyř bodů, které jsou kotovány týmiž hodnotami x na měřítku a na stupnici projektivní, jsou si rovny.

Jmenujeme-li odpovídajícími body ty, které mají na obou stupnicích společné koty, zní předchozí věta: Dvojpoměry odpovídajících si bodů na měřítku a projektivní stupnici jsou rovné. Tím je dokázána věta v textu vyslovená.



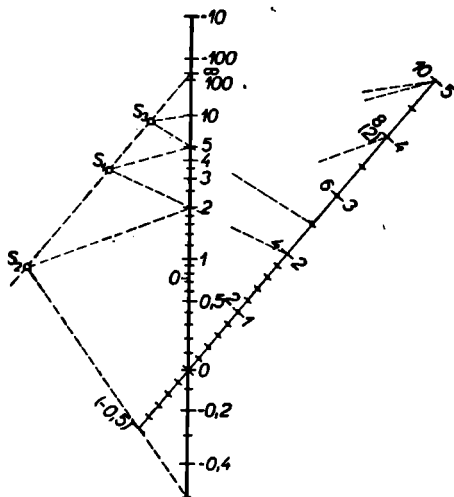
Z toho poznáváme, že k sestrojení projektivní stupnice stačí vynést na přímku tři hodnoty a pak použití měřítka položeného tak, aby stejné koty na obou stupnicích splynuly; spojnice druhých dvou kot určí bod (střed perspektivity), z kterého se promítá měřítko do stupnice projektivní.

Při konstrukci projektivní stupnice

$$f(x) = \frac{3,2x - 2,4}{0,6x + 1},$$

o modulu 0,5 cm a počátku O v obr. 19, bylo položeno měřítko bodem o kotě 0. Spojením kot 2 a 5 na obou stupnicích získán byl střed S_1 , z něhož se promítá měřítko do stupnice projektivní.

Při konstrukci si všimneme, že poloha kot menších než 1 a větších než 5 by byla nepřesná, protože promítající paprsky protínají nositelku projektivní stupnice pod příliš ostrým úhlem. Najdeme proto pro úsek o kotách $\langle -0,5; 1 \rangle$ nový střed perspektivity. V obr. 19 je označen S_2 a je sestrojen užitím bodů o kotách $-0,5; 0; 2$; předchozího měřítka použito tak, že jeho koty byly zmenšeny dvakrát čili užito měřítko o dvojnásobném modulu dřívějšího; v obr. 19 na něm vyznačena pouze kota $-0,5$ a 2 v závorkách. Pro úsek $\langle 5; 10 \rangle$ užito středu S_3 (získaného pomocí bodů $0; 5; 10$) a měřítka o modulu polovičním měřítka původního (jeho koty vyznačeny po druhé straně nositelky). Podobně si počínáme na jiných úsecích stupnice.

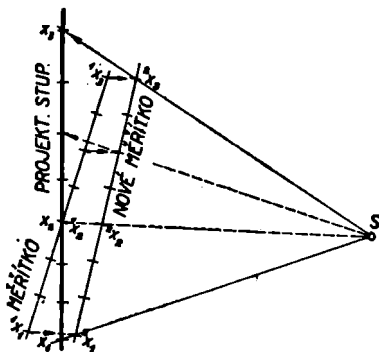


Obr. 19.

Při počítání 3 bodů na stupnici projektivní lze nalézt obvykle výhodné koty, pro které vypočteme hodnoty funkce bez zvláštní námahy z paměti. V našem příkladě jsou to koty 0; 1; ∞ (znak pro číslo rostoucí nade všechny meze); jim odpovídající

hodnoty funkce jsou — 2,4; 0,5; 5,67 $\left(= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3,2 - \frac{2,4}{x}}{0,6 + \frac{1}{x}} = \frac{3,2}{0,6} \right)$.

Spojnice bodů kotovaných na obou stupnicích kotou ∞ je rovnoběžná s nositelkou měřítka (na něm bod ∞ „leží v nekonečnu“).



Obr. 20.

Při hledání dalších středů perspektivity je v našem příkladě výhodné, podržet pro každou další trojici odpovídajících bodů koty 0 a ∞. Všechny nové středy budou pak ležet na uvedené rovnoběžce s měřítkem a stačí tedy pro ně vyhledávat už jen jednu spojnicí odpovídajících bodů, jak patrně z obr. 19.

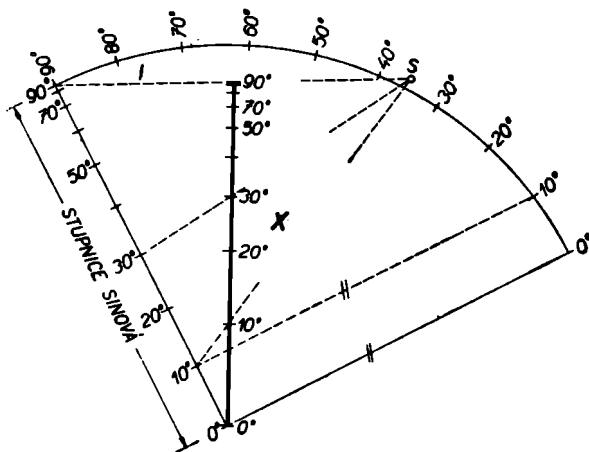
Aby střed perspektivity nepadl mimo náčrt, jak se často může stát, je třeba vhodně volit polohu (společnou kotu) i modul měřítka. Při tom s výhodou užíváme ob-

ratu, který je znázorněn na obr. 20. Na něm zakreslena projektivní stupnice s třemi kotami x_1, x_2, x_3 a měřítko s týmiž kotami. Spojnice stejných kot x_1 a x_3 jsou velmi nepřesné, protože spojené body leží příliš blízko u sebe a tím je správná poloha středu perspektivity nejistá, jindy se spojnice protínají mimo náčrt. Proto zvolen na náčrtě bod S za střed perspektivity a polohy příslušného (nového) měřítka nalezena tak, že body $^1x_1, ^1x_3$ původního měřítka byly vedeny rovnoběžky se spojnicí x_2S , až proťaly paprsky x_1S a x_3S v bodech 2x_1 a 2x_3 , které vzaty za body nového měřítka o kotách x_1 a x_3 . Dělení tohoto měřítka dostaneme jednoduše promítnutím měřítka původního ve směru x_2S . Body nového měřítka promítneme pak ze středu S v body na stupnici projektivní o stejných kotách.

Stupnice funkce

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

se nazývá stupnicí reciprokou a je zvláštním případem stupnice projektivní; z obecného tvaru vyplyne, položíme-li $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ a $d = 0$. Sestrojuje se proto stejně jako stupnice projektivní.



Obr. 21.

Podobně lze sestavit stupnici funkce

$$f(x) = \frac{a\varphi(x) + b}{c\varphi(x) + d} \text{ při } ad - bc \neq 0,$$

užitím projektivity se stupnicí funkce $\varphi(x)$. Mezi $f(x)$ a $\varphi(x)$ platí totiž také vztah (p) ze str. 32, kde však na pravé straně rovnice je vloženo $\varphi(x_i)$ za x_i .

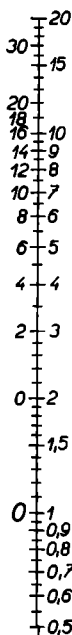
Na př. stupnici funkce

$$f(x) = \frac{18 \sin x}{1 + \sin x}$$

sestrojíme jako projektivní se stupnicí $\varphi(x) = \sin x$. V obr. 21 pro stupnici $f(x)$ vypočteny 3 hodnoty pro parametry $x = 0^\circ$; 30° a 90° (jsou to 0; 6 a 9) a stupnice $\varphi(x) = \sin x$ (o jejíž konstrukci viz poznámku na str. 39) položena tak, aby její bod 0° splynul s bodem 0° stupnice $f(x)$. Spojnice bodů označených na obou stupnicích kotami 30° a 90° se protnou ve středu perspektivity S , z něhož promítneme stupnici sinovou do stupnice $f(x) = \frac{18 \sin x}{1 + \sin x}$. Pro stupnici $\varphi(x)$ použít modul $\alpha = 5$ cm a stupnici $f(x)$ $\alpha' = 0,5$ cm.

Stupnici funkce ve tvaru

$$f(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$$



budeme nazývat reciprokou stupnicí funkce $\varphi(x)$ a můžeme ji konstruovat jako projektivní se stupnicí $\varphi(x)$.

$$(D) \quad f(x) = \log x;$$

funkce logaritmická; stupnice funkce logaritmické nebo stupnice logaritmická.

Vynáší se obvykle podle tabulek logaritmických. Počátek má kotu 1 ($\log 1 = 0$). Bod $x = 10$ je od počátku vzdálen právě o délku modulu, neboť $\eta = \alpha \log 10 = \alpha \cdot 1 = \alpha$. Důležitá vlastnost logaritmické stupnice při základu 10 je ta, že úsek stupnice mezi $x = 1$ a $x = 10$ je shodný s úsekem $x = 10$ a $x = 100$ s tím rozdílem, že koty v úseku $\langle 10; 100 \rangle$ mají hodnoty desetkrát větší. (V obr. 22 je stupnice $\log x$ zakreslena po pravé straně nositelky, při modulu $\alpha = 5$ cm.) Na př. rovnice

$$\log 20 = \log 10 \cdot 2 = \log 10 + \log 2$$

stanoví, že bod o kotě 20 je od bodu s kotou 10 stejně vzdálen jako bod o kotě 2 od bodu s kotou 1.

Obr. 22.

Podobně úsek stupnice mezi kotami 100 a 1000 (nebo 0,1 a 1) je shodný s úsekem mezi kotami 1 a 10 s rozdílem, že má kotování 100krát větší (10krát menší).

Obecně tato vlastnost pro celý rozsah stupnice logaritmické vyplývá z rovnice

$$\log x = \log 10^n \cdot x_1 = n + \log x_1,$$

kde n značí řád čísla x a x_1 číslo, které z x vzniklo posunutím desetinné čárky za nejvyšší číslici; je tedy číslo x_1 z intervalu $\langle 1; 10 \rangle$.

Stupnici funkce

$$f(x) = \log(ax + b), \text{ pokud } (ax + b) > 0,$$

lze sestrojít užitím stupnice $\log x$ tak, že proti kotám $(ax + b)$ stupnice $\log x$ zakreslíme koty x stupnice $\log(ax + b)$.

V obr. 22. po levé straně nositelky, je zobrazena stupnice $\log(0,5x + 2)$ v rozmezí $\langle 0; 30 \rangle$, při souřadnicovém počátku O , společném se stupnicí $\log x$ a též modulu $\alpha = 5$ cm. Souřadnicový počátek O by na stupnici $\log(0,5x + 2)$ nesl kotu -2 .

Při $b = 0$ dostaneme stupnici $\log ax$, která je shodná se stupnicí $\log x$ až na to, že je proti ní posunuta o $\log a$.

$$(E) \quad f(x) = \sin x;$$

funkce sinová; stupnice sinová. Sestrojuje se často z oblouku kruhového, neběží-li o zvláštní přesnost; jinak pomocí tabulek, v nichž jsou hodnoty sinu uvedeny. Konstrukce z oblouku kruhového je patrna z obr. 21, kde sestrojena při mod. $\alpha = 5$ cm.

Totéž platí o ostatních funkcích goniometrických.

Stupnice funkcí složitějších sestrojíme raději použitím vhodně uspořádaného výpočtu než složitými a tím nepřesnými konstrukcemi.

Výpočet modulu a délky stupnice. Vynášejíme stupnici $f(x)$ opět na osu η , tudíž podle rovnice

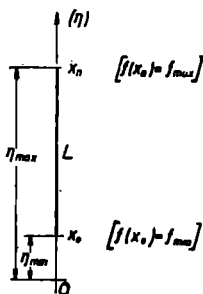
$$\eta = \alpha f(x).$$

Označme f_{\max} hodnotu funkce, pro kterou je η největší

(η_{\max}), a f_{\min} hodnotu funkce, pro kterou je η nejmenší (η_{\min}), délku stupnice označme $L (= \eta_{\max} - \eta_{\min})$.

Snadno nahlédneme platnost vzorce

$$L = \alpha (f_{\max} - f_{\min}).$$



Nabývá-li funkce $f(x)$ hodnoty f_{\max} pro argument x_n , tedy $f(x_n) = f_{\max}$ a hodnoty f_{\min} pro argument x_0 , tedy $f(x_0) = f_{\min}$ je souvislost veličin η_{\max} , η_{\min} , f_{\max} , f_{\min} , x_n a x_0 patrna z obr. 23.

Délku stupnice L voliváme kolem 10 cm, 15 cm, 20 cm, 50 cm atp. podle rozměrů nákresny. Netrváme ovšem na tom, aby délka stupnice L bylo číslo nutně okrouhlé, za to naopak je to požadavek pro modul α , takže zpravidla užíváme vzorce L pro výpočet modulu α .

Obr. 23.

Máme-li na př. užít logaritmické stupnice v rozsahu $x = 500$ až $x = 800$ a v délce asi 10 cm vypočteme modul α postupem

$$\alpha = \frac{L \text{ cm}}{\log 800 - \log 500} = \frac{L \text{ cm}}{2,903 - 2,699} = \frac{10,2 \text{ cm}}{0,204} = 50 \text{ cm}.$$

L jsme volili 10,2 cm (v okolí 10 cm) až podle výsledku ve jmenovateli, aby α bylo okrouhlé.

Jindy modul stupnice vyplyne z úvahy požadující, aby nejmenší dílek¹⁵⁾ na stupnici i byl dlouhý 1 mm (t. zv. grafický interval) vyznačoval určitý, předem zvolený (nejmenší) přírůstek funkce h . Z rovnice

$$i = 0,1 \text{ cm} = \alpha [f(x + h) - f(x)] \text{ cm}$$

dostaneme podmínku pro α

$$\alpha \text{ cm} = \frac{1}{10 [f(x + h) - f(x)]} \text{ cm}$$

a tím i délku stupnice pro daný rozsah x .

¹⁵⁾ Vzdálenost mezi dvěma po sobě jdoucími zakreslenými kotami.

Kdybychom chtěli mít u výše uvažované logaritmičné stupnice vyznačeny dílky postupující v celém rozsahu po 1, bylo by třeba volit α rovné 200 cm, jak plyne z rovnice

$$\alpha \text{ cm} = \frac{1}{10 (\log 800 - \log 799)} \text{ cm} \doteq 185 \text{ cm};$$

tomu by pak příslušela délka stupnice (vezmeme-li okrouhle $\alpha = 200$ cm)

$$L = 200 (\log 800 - \log 500) \text{ cm} \doteq 41 \text{ cm}.$$

Příslušné obrázky necht' si laskavý čtenář nakreslí za cvičení.

Kanonický tvar (K_2): $\varphi_1 = \varphi_2 \varphi_3$.

Převedení tvaru (K_2) na Massauův determinant a úprava jeho na zobrazovací rovnice je pro nás snadná proto, že jej můžeme považovati za zvláštní případ kanonického tvaru (K_1). Rovnici

$$\varphi_1 - \varphi_2 \varphi_3 = 0$$

lze totiž přirovnat k tvaru

$$h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 = 0,$$

rovnícemi

$$h_1 = \varphi_1, \quad h_2 = -\varphi_2;$$

$$f_3 = 1, \quad g_3 = \varphi_3, \quad h_3 = 0.$$

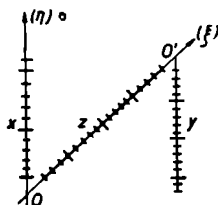
A proto úpravu na zobrazovací rovnice provádíme úplně shodně jako u kanonického tvaru (K_1). To znamená, že aplikujeme ihned zobrazovací rovnice (2Z_1) se str. 22 z důvodů, které tam po jejich užití byly uváženy. Jsou tedy rovnice, podle nichž kreslíme nomogram pro tvar (K_2) tyto:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 0, & \eta_1 &= \alpha h_1 &= \alpha \varphi_1; \\ \xi_2 &= \delta, & \eta_2 &= \beta h_2 &= -\beta \varphi_2; \\ \xi_3 &= \frac{\alpha \delta g_3}{\beta f_3 + \alpha g_3} = \frac{\alpha \delta \varphi_3}{\beta + \alpha \varphi_3}, & \eta_3 &= -\frac{\alpha \beta h_3}{\beta f_3 + \alpha g_3} = 0. \end{aligned} \right\} ({}^1Z_2)$$

Z těchto rovnic vyčteme, že všechny tři stupnice jsou přímé (vždycky jedna ze souřadnic pro body téže stupnice je stálá). Abychom vyhověli podmínce $\frac{f_3}{g_3} > 0$, při níž

stupnice proměnné z padne mezi stupnice x, y (str. 27), připsali jsme záporné znamení k funkci φ_2 .

Chceme-li ještě, aby stupnice x, y ležely „proti sobě“, musíme někdy užítí kosouhlého systému souřadnic, takže obecně lze pro tvar (K_2) načrtnout schema (v obr. 24):



Obr. 24.

U výrazu ξ_3 si povšimneme, že stupnice proměnné z je stupnice funkce, která je projektivní se stupnicí funkce φ_3 . Stačí tedy k jejímu sestrojení 3 body (viz odst. O stupnicích).

Často při konstrukci stupnice z , která se konstruuje nejobtížněji, postupujeme takto. Položíme za φ_2 vhodnou konstantu k (okrouhlé číslo) a na stupnici y najdeme bod $\eta_2 = -\beta k$; z něho se promítá stupnice φ_1 do stupnice φ_3 podle relace

$$\varphi_1 = k\varphi_3.$$

Je to způsob velmi výhodný, pokud relace vypadne jednoduše a promítající paprsky neprotínají stupnici z pod příliš ostrým úhlem.

Příklad. Návrh nomogramu pro vztah:

$$M_k = 716,2 \frac{N}{n}.$$

Vzorec pro točivý (krouticí) moment M_k v závislosti na výkonnosti N HP a otáčkách n za min. Rozsahy proměnných $N \langle 1; 120 \rangle$, $n \langle 50; 2500 \rangle$.

a) Srovnání s kanonickým tvarem:

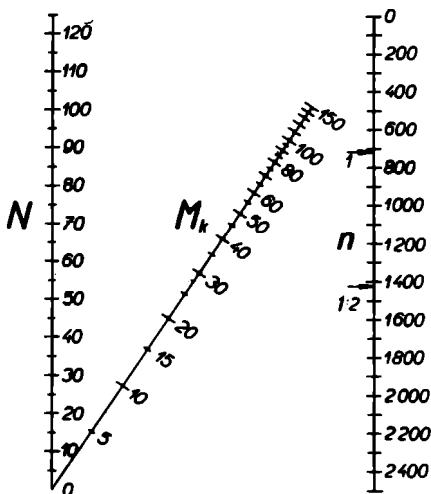
$$\begin{aligned} 716,2N - M_k n &= 0; \\ h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 &= 0; \\ h_1 = N, \quad h_2 = -n; \\ f_3 = 716,2, \quad g_3 = M_k, \quad h_3 = 0. \end{aligned}$$

b) Zobrazovací rovnice:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0, & \eta_1 &= \alpha N; \\ \xi_2 &= \delta, & \eta_2 &= -\beta n; \\ \xi_3 &= \frac{\alpha \delta M_k}{\beta 716,2 + \alpha M_k}, & \eta_3 &= 0. \end{aligned}$$

Moduly: $\alpha = 0,05$ cm, $\beta = 0,0025$ cm, $\delta = 7,5$ cm. Obr. 25.

Relace: Pro $n = 716,2$ je $M_k = N$; z bodu $n = 716,2$ lze tudíž promítnout stupnici N přímo do stupnice M_k , s dostatečnou přesností ovšem asi od hodnoty $N = 50$. Pro hodnoty menší zvolíme $n = 1432,4$, pro něž $M_k = \frac{N}{2}$ (nebo konečně $n = 2864,8$, pro něž $M_k = \frac{N}{4}$ a příslušný bod n najdeme na prodloužené stupnici). Kotování na stupnici M_k lze z těchto bodů vzájemně překontrolovati.



Obr. 25.

V obr. 25 bod $n = 716,2$ ($1432,4$) je označen šipkou a číslicí 1 (1 : 2). Posléze stupnici M_k lze sestavit jako projektivní s měřítkem podle odst. O stupnicích.

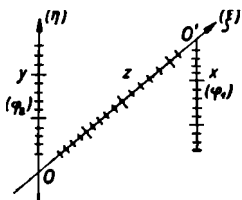
Poukažme ještě na jiné možné srovnání tvaru (K_2) s tvarem (K_1), které je vyjádřeno rovnicemi

$$\begin{aligned} \varphi_2 \varphi_3 - \varphi_1 &= 0; \\ h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 &= 0; \\ h_1 = \varphi_2, h_2 = -\varphi_1; \\ f_3 = \varphi_3, g_3 = 1, h_3 &= 0. \end{aligned}$$

Tomu příslušejí zobrazovací rovnice (podle 2Z_1) a schema (v obr. 26):

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 0, & \eta_1 &= \alpha \varphi_2; \\ \xi_2 &= \delta, & \eta_2 &= -\beta \varphi_1; \\ \xi_3 &= \frac{\alpha \delta}{\beta \varphi_3 + \alpha}, & \eta_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad ({}^2Z_2)$$

Výsledek, který dostáváme, poskytuje nomogram, jež lze ztotožnit s prve uvedeným, volíme-li v něm tytéž moduly α, β a souřadnici δ , a zaměníme-li v jednom z nich spolu moduly α, β . Položíme-li oba nákresy na sebe tak, aby splynuly osy souřadnic i co do smyslu, lze oba nomogramy ztotožnit otočením kolem bodu



Obr. 26.

$\left(\frac{\delta}{2}; 0\right)$ o 180° .

Význam této možnosti srovnání se ukáže při řazení nomogramů vedle sebe při sdružování nomogramů.

Cvičení: Stanovte, kdy zobrazovací rovnice třetí proměnné v 1Z_2 a 2Z_2 dávají shodnou stupnici! $\left(\delta - \frac{\alpha \delta \varphi_3}{\beta + \alpha \varphi_3} = \frac{\beta \delta}{\alpha + \beta \varphi_3}\right)$.

Padnou-li v nomogramu souřadnicové počátky rovnoběžných stupnic O, O' mimo nákresnu, nemůžeme jich použít k zakreslení osy ξ , kterou zde potřebujeme jako nositelku stupnice z . Viz obr. 24 i 26. Její polohu pak nejlépe najdeme zakreslením dvou libovolných bodů o kotách z_0, z_1 , podle metody promětné (str. 26). Viz schema v obr. 27.

Příklad. Návrh nomogramu pro vztah:

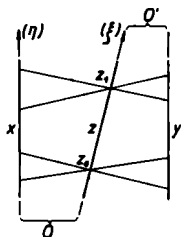
$$r = 0,000\ 163b \cdot t; \quad b \langle 600; 800 \rangle, t \langle 0; 50 \rangle.$$

Vzorec pro redukcí odečtení tlakoměru na 0° C; b je barometrický tlak v mm.

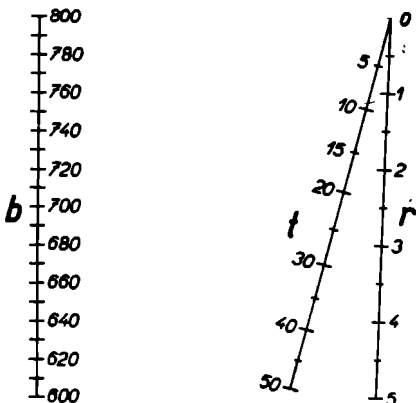
a) Srovnání s kanonickým tvarem: b) Zobrazovací rovnice:

$$\begin{array}{l} 0,000\ 163b \cdot t - r = 0; \\ h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 = 0; \\ h_1 = b, \quad h_2 = -r; \\ f_3 = 0,000\ 163t, \quad g_3 = 1, \quad h_3 = 0. \end{array} \left| \begin{array}{l} \xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \alpha b; \\ \xi_2 = \delta, \quad \eta_2 = -\beta r; \\ \xi_3 = \frac{\alpha \delta}{\beta \cdot 0,000\ 163t + \alpha}, \\ \eta_3 = 0. \end{array} \right.$$

Moduly: $\alpha = 0,025$ cm, $\beta = 1$ cm, δ neurčeno; $\bar{\delta} = 4,5$ cm.
Obr. 28.



Obr. 27.



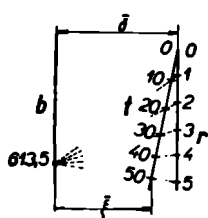
Obr. 28.

Relace: Zvolíme-li b tak, aby platilo $0,000\ 163b = 0,1$ t. j. $b = 613,5$, dostaneme ze zobrazovaného vztahu relaci: $r = 0,1t$. To znamená, že z bodu $b = 613,5$ se promítá stupnice r do stupnice t hodnotami 10krát většími. Bod $r = 5$ se promítá do $t = 50$.

Modul $\alpha = 0,025$ cm stupnice b je zvolen tak, aby potřebný rozsah $\langle 600; 800 \rangle$ vypadal na nákrese co nejčitelněji. Souřadnicový počátek stupnice b vyběhne při tom z nákresey a nemůžeme ho použít k zakreslení osy ξ , nositelky stupnice t .

Osa ξ prochází souřadnicovým počátkem O' stupnice $r (= 0)$ a stačí proto pro ni nalézt ještě jeden bod. V obr. 28 jsme zakreslili bod $t = 50$, který leží na spojnici $b = 613,5$; $r = 5$ a jeho souřadnice $\bar{\xi}_3$ se rovná

$$\bar{\xi}_3 = \frac{\alpha \bar{\delta}}{\beta \cdot 0,000\ 163t + \alpha} \text{ cm} \doteq 3,39 \text{ cm},$$



Obr. 29.

kde $\bar{\delta} = 4,5$ cm je vzdálenost obou rovnoběžných stupnic a $\bar{\xi}_3$ vzdálenost bodu $t = 50$ od stupnice b ! Viz schematický náčrtek v obr. 29.

Kanonický tvar $\varphi_1 = \varphi_2 \varphi_3$ vyjadřuje rovnost funkce jedné proměnné (x) a součinu funkce druhé (y) s funkcí třetí proměnné (z). Vztahy, které jsou v podstatě téhož tvaru jako (K_2) , lze na tento tvar převést obvykle snadnou úpravou. Uvedme několik případů.

Přepíšeme-li rovnici

$$1. \quad f_1 f_2 f_3 = k \quad (= \text{konst.}) \text{ na } \frac{k}{f_1} - f_2 f_3 = 0,$$

dostáváme přesně kanonický tvar (K_2)

$$\varphi_1 - \varphi_2 \varphi_3 = 0.$$

Stejný výsledek dostáváme po úpravě z rovnic

$$2. \quad \begin{aligned} f_1 + f_1 f_3 - f_2 f_3 &= 0; \\ f_1 (1 + f_3) - f_2 f_3 &= 0; \end{aligned}$$

$$f_1 - f_2 \frac{f_3}{1 + f_3} = 0.$$

$$3. \quad \begin{aligned} f_1 f_2 f_3 + f_2 f_3 - f_1 &= 0; \\ f_2 f_3 (f_1 + 1) - f_1 &= 0; \end{aligned}$$

$$\frac{f_1}{1 + f_1} - f_2 f_3 = 0.$$

4. Má-li rovnice tvar

$$f_1 = f_2 f_3,$$

lze ji logaritmovat a získat (K_2):

$$\log f_1 = f_3 \log f_2.$$

O zobrazení kanonického tvaru (K_2) jiným způsobem viz str. 63 a str. 68.

Kanonický tvar (K_3): $\psi_1 + \psi_2 = \psi_3$.

Podobně jako u kanonického tvaru (K_2) můžeme kanonický tvar (K_3) pokládati za zvláštní případ tvaru (K_1).

Ze srovnání tvaru (K_3) a (K_1)

$$\begin{aligned}\psi_1 + \psi_2 - \psi_3 &= 0, \\ f_3 h_1 + g_3 h_2 + h_3 &= 0,\end{aligned}$$

totiž vyplyne, že tvar (K_1) přejde na tvar (K_3), položíme-li

$$\begin{aligned}h_1 &= \psi_1, & h_2 &= \psi_2; \\ f_3 &= 1, & g_3 &= 1, & h_3 &= -\psi_3.\end{aligned}$$

Počínali bychom si proto při převádění tvaru (K_3) na Massauův determinant a úpravě na zobrazovací rovnice právě tak jako u kanonického tvaru (K_1). Podle návodu se str. 22 však stačí hned použít zobrazovacích rovnic (2Z_1), takže dostáváme:

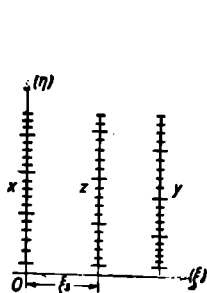
$$\begin{aligned}\xi_1 &= 0, & \eta_1 &= \alpha h_1 = \alpha \psi_1; \\ \xi_2 &= \delta, & \eta_2 &= \beta h_2 = \beta \psi_2; \\ \xi_3 &= \frac{\alpha \delta g_3}{\beta f_3 + \alpha g_3} = \frac{\alpha \delta}{\beta + \alpha}, & \eta_3 &= -\frac{\alpha \beta h_3}{\beta f_3 + \alpha g_3} = +\frac{\alpha \beta}{\beta + \alpha} \cdot \psi_3.\end{aligned}$$

Z těchto rovnic čteme, že nomogram se skládá z tří rovnoběžných přímých stupnic, neboť pro všechny hodnoty proměnných jsou souřadnice ξ_i ($i = 1, 2, 3$) stálé. Při tom stupnice proměnné x , resp. y je přímo stupnice funkce ψ_1 , resp. ψ_2 (str. 30). Ale i stupnice třetí proměnné je přímo stupnicí funkce ψ_3 ; a je na příslušnou nositelku vynášena s modulem $\frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta}$, který je utvořen z modulů stupnice x a y .

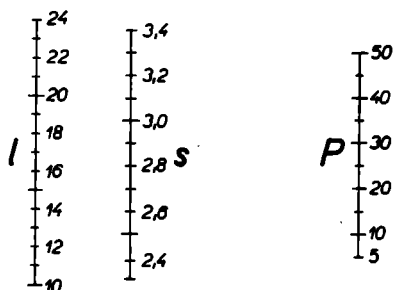
Obecně naznačíme schema tohoto nomogramu obr. 30.
Příklad. Návrh nomogramu pro vzorec Vianellův

$$s = 1,7 + \frac{l + 0,1P}{17}$$

užívaný k výpočtu rozvoru s v m u jeřábového vozu, l rozpětí v m, P užitečné zatížení jeřábu v t.



Obr. 30.



Obr. 31.

Rozsahy proměnných: $l \langle 10; 24 \rangle$ [na stupnici stačí vyznačit intervaly dvoumetrové], $P \langle 5; 50 \rangle$ na stupnici stačí vynést jen ty hodnoty, které jsou zakresleny v připojeném nomogramu.

a) Srovnání s kanonickým tvarem:

$$\begin{aligned} l + \frac{P + 289}{10} - 17s &= 0; \\ h_1 f_1 + h_2 g_1 + h_3 &= 0; \\ h_1 = l, \quad h_2 &= \frac{P + 289}{10}; \\ f_1 = 1, \quad g_1 = 1, \quad h_3 &= -17s. \end{aligned}$$

b) Zobrazovací rovnice:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0, & \eta_1 &= \alpha l; \\ \xi_2 &= \delta, & \eta_2 &= \beta \frac{P + 289}{10}; \\ \xi_3 &= \frac{\alpha \delta}{\alpha + \beta}, & \eta_3 &= + \frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} 17s. \end{aligned}$$

Moduly: $\alpha = 0,25 \text{ cm}$, $\beta = 0,6 \text{ cm}$, $\bar{\delta} = 4,25 \text{ cm}$, $(\bar{\xi}_3 = 1,25 \text{ cm}$, $\frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} = \frac{3}{17} \text{ cm}$; $\eta_3 = \frac{3}{17} 17s \text{ cm} = 3s \text{ cm}$). Obr. 31.

Relace: $P = 11, l = 17s - 30$. (Odtud pro $s = 2,5$ je $l = 12,5$, t. j. body s kotami $P = 11, s = 2,5$ a $l = 12,5$ leží na téže přímce; atp.)

Při srovnání jsme za h_2 položili celý výraz $\frac{P + 289}{10}$. Mohli jsme však také položit $h_2 = P + 289$, pak by $g_3 = \frac{1}{10}$ a souřadnice ξ_3 by byla rovna $\frac{\alpha\delta}{\alpha + 10\beta}$, nikoli pouze $\frac{\alpha\delta}{\alpha + \beta}$! Je proto třeba provádět srovnání s kanonickým tvarem velmi pečlivě! Konstantu 28,9 lze ostatně připojit i k funkci l (pak by $f_3 h_1 = l + 28,9$; tudíž $h_1 = l + 28,9$; $f_3 = 1$), jako k funkci — 17s. Výsledný náčrt by se tím nijak nepozměnil, jestliže bychom volili vhodně moduly!

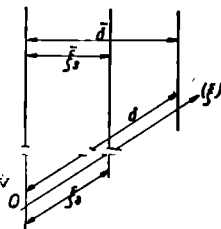
Kdyby osa ξ padla mimo náčrt, nelze vynést souřadnici ξ_3 , určující polohu stupnice z. Označíme-li však $\bar{\delta}$ vzdálenost rovnoběžek, na nichž leží stupnice ψ_1 a ψ_2 , je poloha stupnice z určena vzdáleností

$$\bar{\xi}_3 = \frac{\alpha\bar{\delta}}{\alpha + \beta}$$

od stupnice x (jejíž znamení je shodné se znaméním souřadnice ξ_3). Metodou promětnou určíme pak na stupnici z jeden bod, od něhož vy-

neseme stupnici ψ_3 při modulu $\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}$.

Viz schema na obr. 32 a použití v nom. gramu na obr. 31.



Obr. 32.

Příklad. Návrh nomogramu pro vťah

$$x = R \frac{a}{1000 - a},$$

užívaný při měření odporu x Wheatstoneovou metodou. R je známý odpor, a vzdálenost posuvného dotyku.

Rozsahy: Ježto metoda je nejcitlivější kolem hodnoty $a = 500$, zakreslena stupnice v rozmezí $\langle 400; 600 \rangle$; $R \langle 1; 10 \rangle$.

Abychom mohli uvedený vztah uvažovat jako kanonický tvar (K_3) logaritmujeeme jej!

a) Srovnání s kanonickým tvarem:

$$\log \frac{\alpha}{1000 - \alpha} - \log R - \log x = 0;$$

$$h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 = 0;$$

$$h_1 = \log \frac{\alpha}{1000 - \alpha}, \quad h_2 = \log R;$$

$$f_3 = 1, \quad g_3 = 1, \quad h_3 = -\log x.$$

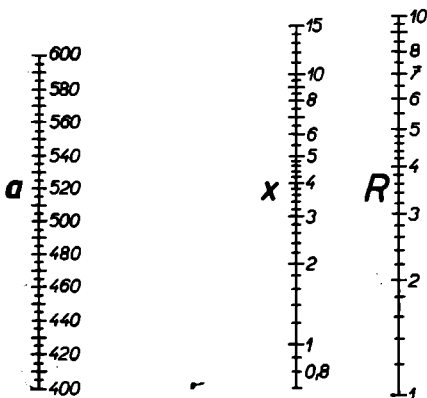
b) Zobrazovací rovnice:

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \alpha \cdot \log \frac{\alpha}{1000 - \alpha};$$

$$\xi_2 = \delta, \quad \eta_2 = \beta \log R;$$

$$\xi_3 = \frac{\alpha \delta}{\alpha + \beta}, \quad \eta_3 = + \frac{\alpha \beta \log x}{\alpha + \beta}.$$

Moduly: $\alpha = 12,5$ cm, $\beta = 5$ cm, $\delta = 5,25$ cm. Obr. 33.
[Osa (ξ) jde body $\alpha = 500$, $x = 1$ a $R = 1$].



Obr. 33.

Relace: Pro $a = 500$ je $x = R$. (Z bodu 500 stupnice a promítá se stupnice R do stupnice x !)

Poznámka: Z nomogramu lze vyhledávat hodnoty x i pro hodnoty R z jiného rozmezí než pouze $\langle 1; 10 \rangle$. Hledáme-li x pro známý odpor $R = 50$, stačí hodnotu R zmenšit desetkrát, abychom dostali hodnotu $R = 5$ v nomogramu zakreslenou. Odečtené x je ovšem také desetkrát menší a třeba je zvětšit

desetkrát, abychom dostali x příslušné k hodnotě $R = 50!$ Je to patrné z rovnice

$$10x = 10R \frac{a}{1000 - a}, \quad (*)$$

kteřá stanoví, že hodnotám R desetkrát větším přísluší x desetinásobné. Také můžeme říci, že jsme na stupnici R četli hodnotu desetkrát větší, než je tam připsaná a té pak přísluší hodnota x desetinásobná, než je na stupnici x .

Obecněji platí: Odečítáme-li na stupnici R hodnoty k -násobné, musíme současně na stupnici x čísti hodnoty k -krát větší, než jsou na stupnicích vepsány. Zjistíme to na první pohled z rovnice (*), jestliže v ní číslo 10 nahradíme konstantou k .

Tvar součtu funkcí, jakým je kanonický tvar (K_3),

$$\psi_1 + \psi_2 - \psi_3 = 0$$

vyskytuje se v praxi právě tak často, jako kanonický tvar (K_2). K tomu ještě tvar (K_2) lze logaritmováním převést na tvar (K_3), jak jsme viděli v předchozím příkladě; a potom samozřejmě lze převést na tvar (K_3) všechny rovnice vedoucí na tvar (K_2), viz str. 46.

Obráceně je také možný přechod od rovnic tvaru (K_3) k rovnicím (K_2), ale výsledek nemá celkem praktického významu. Myslíme-li si rovnici $\psi_1 + \psi_2 = \psi_3$ jako rovnici mezi mocnители téhož základu (na př. 10), můžeme ji přepsat na

$$10^{\psi_1 + \psi_2} = 10^{\psi_3} \quad \text{čili} \quad 10^{\psi_1} \cdot 10^{\psi_2} = 10^{\psi_3},$$

což je tvar (K_2).

Cvičení. Užijte k převedení tvaru (K_3) na (K_2) vlastností logaritmů.

Některé rovnice, které lze jednoduchou úpravou převést na kanonický tvar (K_3):

$$1. \quad f_1 f_3 + f_2 f_3 - k = 0 \quad (k \text{ konst.}) \quad \text{dělme } f_3$$

$$f_1 + f_2 - \frac{k}{f_3} = 0.$$

2. $f_2 + f_1 - f_1 f_2 f_3 = 0$ děleme součinem $f_1 f_2$

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - f_3 = 0.$$
3. $f_2 f_3 + f_1 f_3 - f_1 f_2 = 0$ děleme $f_1 f_2 f_3$

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_3} = 0.$$

Kolineace nomogramu. V dalších dvou příkladech ukážeme, že k dobrému zobrazení vztahu nestačí v každém případě pouze možnost srovnati jej s kanonickým tvarem (K_1) a pak už jen použít zobrazovacích rovnic (2Z_1), ale že ještě velmi záleží na tvaru funkcí f, g, h , z kterých se vztah skládá.

Příklad. Sestrojme nomogram pro vztah

$$\gamma = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}, \quad (\gamma)$$

který udává souvislost mezi moduly α, β stupnic x, y a modulem γ stupnice z u nomogramu tvaru (K_3).

Přepišme jej na

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} = 0$$

a srovnějme s kanonickým tvarem K_1

$$h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 = 0;$$

$$h_1 = \frac{1}{\alpha}, \quad h_2 = \frac{1}{\beta};$$

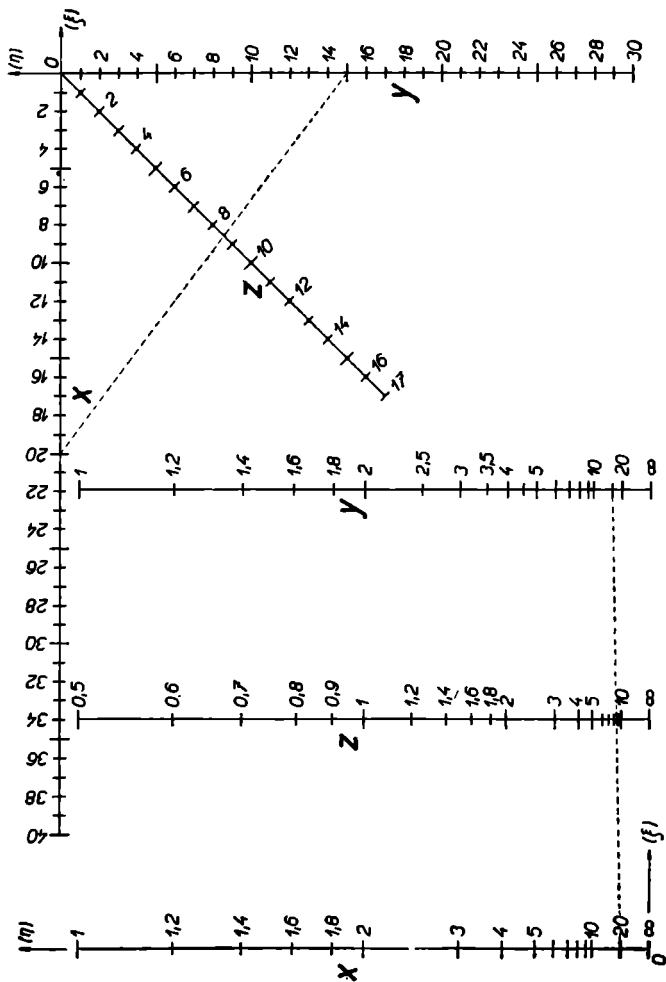
$$f_3 = 1, \quad g_3 = 1, \quad h_3 = -\frac{1}{\gamma}.$$

Aplikujeme-li zobrazovací rovnice (2Z_1), dostaneme

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = m \frac{1}{\alpha};$$

$$\xi_2 = \delta, \quad \eta_2 = n \frac{1}{\beta};$$

$$\xi_3 = \frac{m\delta}{m+n}, \quad \eta_3 = + \frac{mn}{m+n} \cdot \frac{1}{\gamma}.$$



a) Obr. 34. b)

V nomogramu vztahu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ zakresleno řešení pro $x = 20$, $y = 15$; $z = 8,5$.

Moduly: $m = 7,5$ cm, $n = 7,5$ cm, $\delta = 6$ cm. Obr. 34 a).
(V obr. 34 označeny proměnné x, y, z místo α, β, γ !)

Z nákresu vidíme, že odčítání kot pro hodnoty proměnných větší než 10 je velmi nepřesné, zejména na stupnici γ , a pro hodnoty větší než 20 je prakticky bezcenné, ne-li nemožné.

Podívejme se jaký výsledek nám poskytnou zobrazovací rovnice (1Z_1) ze str. 16.

$$\begin{array}{ll} \xi_1 = -mx, & \eta_1 = 0; \\ \xi_2 = 0, & \eta_2 = -n\beta; \\ \xi_3 = -m\gamma, & \eta_3 = -n\gamma. \end{array}$$

Moduly: $m = 0,25$ cm, $n = 0,25$ cm.

Z obr. 34 b) je vidět, že dostaneme nomogram, který je prost nedostatků dříve uvedených.

Nomogramu pro vztah (γ) užíváme při konstrukci nomogramů podle kanonického tvaru (K_3) k usnadnění takové volby modulů α, β, γ , aby to byly hodnoty vesměs okrouhlé. V předposledním příkladě pro $\alpha = m = 7,5$ cm, $\beta = n = 7,5$ cm, zjistíme pomocí nomogramu

vztahu (γ), že $\gamma = \frac{mn}{m+n} = 3,75$ cm. (Přesněji vyšetříme γ uvážíme-li při čtení v nomogramu hodnoty dvojnásobné t. j. $2\alpha = 15$, $2\beta = 15$, pak $2\gamma = 7,5$ a tedy $\gamma = 3,75$!)

Jiný význam vztahu (γ), je-li psán ve tvaru $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\gamma}$. Podle Kirchhoffova zákona pro rozvětvení elektrického proudu (při spojení vodičů za sebou) je celková vodivost rovna součtu vodivostí jednotlivých větví

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Vrcholová rovnice kulového dutého zrcadla [a vzdálenost bodu na optické ose, b vzdálenost jeho obrazu od vrcholu zrcadla, f ohnisková délka zrcadla ($= \frac{r}{2}$, r poloměr zrcadla)]:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Obdobný vztah mezi předmětem a jeho obrazem platí u čočky spojné.

Dotýkají-li se čočky ohniskových dalek $\pm f_1$ a $\pm f_2$ má tato soustava ohniskovou délku f danou rovnicí

$$\frac{1}{f} = \pm \frac{1}{f_1} \pm \frac{1}{f_2}.$$

Ze všech dosud uvedených příkladů je zjevné, že normálně není třeba převádět zobrazovaný vztah na tvar determinantu, ale že stačí po jeho srovnání s kanonickým tvarem užít přímo zobrazovacích rovnic (2Z_1), nebo (1Z_1).

Užití determinantu má však podstatný význam tehdy, jestliže se v nákrese sestrojeném podle rovnic (2Z_1) nebo (1Z_1) objeví následující závady, které by mohly zmařit praktickou cenu nomogramu:

Kotování stupnice v části, které nejčastěji používáme, je nezřetelné (koty jsou tak zhuštěné, že nelze potřebné hodnoty odečíst; zvětšením modulu by se sice mohla čitelnost v určitém rozsahu zvětšit, nikoli však v celém, a při tom by současně jiná část stupnice padla mimo užitou nákretnu).

Některé potřebné koty uběhnou do nekonečna.

Spojnice se protínají v příliš malém úhlu, průsečíky se stupnicemi jsou pak nepřesné a tím trpí odčítání kot.

Tyto závady lze odstranit tak zvanou klineací nomogramu; tu v podstatě provádíme tím, že Massauův determinant dovolenými úkony pozměníme (proto je nutné převést vztah na tvar determinantu).

Uvedme příklad. Návrh nomogramu pro vztah

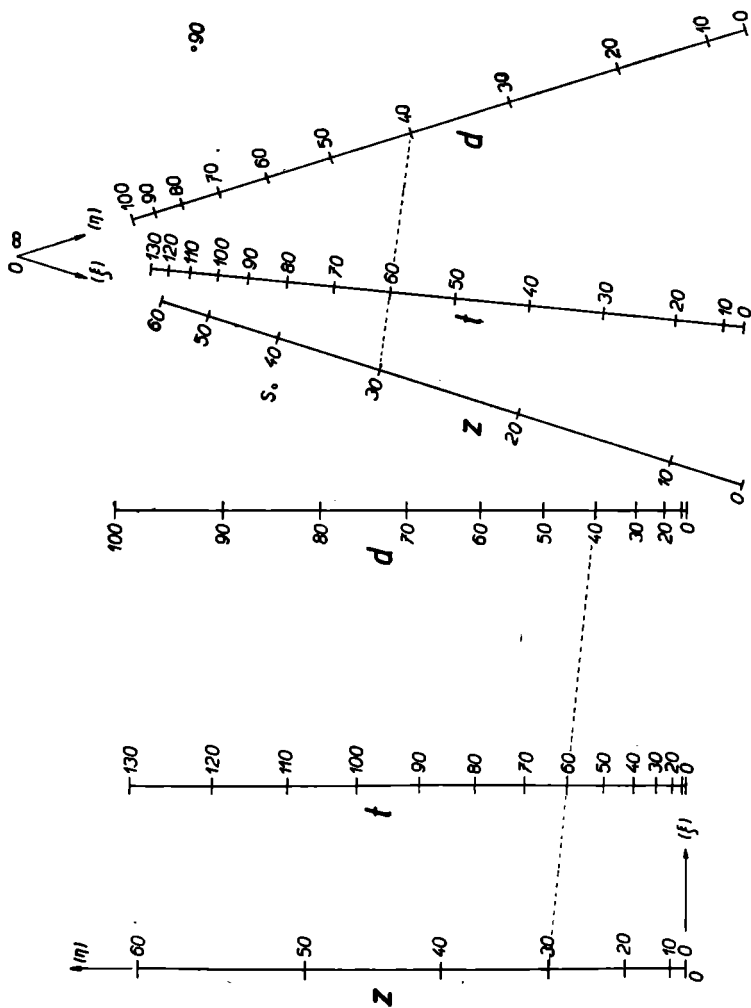
$$z = \frac{1}{2}\sqrt{(1,2t)^2 - d^2}.$$

Rozsahy proměnných: $z \langle 0; 60 \rangle$, $d \langle 0; 100 \rangle$. Na nákrese nomogramu se klade požadavek, aby čtení bylo nejpřesnější pro hodnoty uprostřed intervalů, v nichž se proměnné mění. Na okraji intervalů může být čtení méně přesné, protože tam je užívání vztahu méně časté.

Srovnajme vztah s kanonickým tvarem (K_1) a sestrojme nejprve podle zobrazovacích rovnic (2Z_1)!

a) Srovnání s kanonickým tvarem:

$$\begin{aligned} 4z^2 + d^2 - 1,44t^2 &= 0; \\ h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 &= 0; \\ h_1 = 4z^2, h_2 = d^2; \\ f_3 = 1, g_3 = 1, h_3 &= -1,44t^2. \end{aligned}$$



a)

Obr. 35.

b)

V nomogramu vztahu $z = \frac{1}{3} \sqrt{(1.2t)^2 - d^2}$ zakresleno řešení pro $t = 60$, $d = 40$; $z \approx 30$.

b) Zobrazovací rovnice (podle 2Z_1):

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0, & \eta_1 &= \alpha 4z^2; \\ \xi_2 &= \delta, & \eta_2 &= \beta d^2; \\ \xi_3 &= \frac{\alpha \delta}{\alpha + \beta}, & \eta_3 &= + \frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} 1,44t^2. \end{aligned}$$

Moduly: $\alpha = 0,000\ 5$ cm, $\beta = 0,000\ 75$ cm, $\delta = 6$ cm. $\xi_3 = 2,4$ cm; $\frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} \cdot 1,44 = 0,000\ 3 \cdot 1,44 = 4,32$ cm (modul stupnice t).

Relace: $d = 0$, $z = 0,6t$.

Nákres v obr. 35 a) nám ukazuje, že odčítání hodnot t a d menších než 10 je prakticky nemožné; že přesnost odčítání stoupá k hořejšímu okraji intervalu. A že tedy není výhodno podmínce nejlepší čitelnosti uprostřed intervalu, kterou od nákreš požadujeme.

Presvědčte se, že užití zobrazovacích rovnic (1Z_1) by dávalo mnohem horší výsledek, protože bychom dostávali reciproké stupnice kvadratických funkcí. Body kotované hodnotami kolem nuly by ubíhaly do nekonečna a body s kotami většimi než 10 by byly naprosto nečitelné, při užití normální nákrešny.

Nezbývá nám tudíž jiná možnost, jak zlepšit nákreš nomogramu, než přepsat vztah na tvar determinantu a zjistit, lze-li jej upravit na takové zobrazovací rovnice, které by poskytl požadovaný výsledek.

Celý postup návrhu nomogramu je vypsán rovnicemi:

1. Přepsání na tvar determinantu (M) (srovnání s kanonickým tvarem (K_1)) je provedeno výše, takže můžeme hned napsat rovnici)

$$4z^2 + d^2 - 1,44t^2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 4z^2 \\ 0 & -1 & d^2 \\ 1 & 1 & -1,44t^2 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Úprava determinantu (M) (1. sloupec násoben $-k$, druhý $-l$ a třetí řádek -1 ; potom 1. a 2. sloupec přičten k sloupci poslednímu; upraveným třetím sloupcem dělen celý determinant, mimo to 1. sloupec násoben α a 2. β):

$$\begin{vmatrix} k & 0 & 4z^2 \\ 0 & l & d^2 \\ k & l & 1,44t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 & k + 4z^2 \\ 0 & l & l + d^2 \\ k & l & k + l + 1,44t^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\alpha k}{k + 4z^2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\beta l}{l + d^2} & 1 \\ \frac{\alpha k}{k + l + 1,44t^2} & \frac{\beta l}{k + l + 1,44t^2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

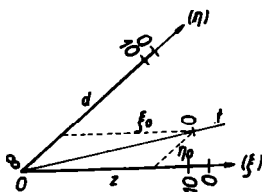
3. Zobrazovací rovnice:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\alpha k}{k + 4z^2}, & \eta_1 &= 0; \\ \xi_2 &= 0, & \eta_2 &= \frac{\beta l}{l + d^2}; \\ \xi_3 &= \frac{\alpha k}{k + l + 1,44t^2}, & \eta_3 &= \frac{\beta l}{k + l + 1,44t^2}. \end{aligned}$$

4. Volba modulů α, β a konstant k, l .

Pro $z = 0$ je $\xi_1 = \alpha$ cm. Volme $\alpha = 10$ cm, protože celá stupnice se rozkládá na úseku osy ξ od počátku až k bodu o kotě $z = 0$, jak je patrné z výrazu pro souřadnice ξ_1 , jestliže volíme k kladné. Viz schema v obr. 36.

Pro $z = 10$ je $\xi_1 = \frac{10k}{k + 400}$ cm. Zvolíme-li tuto souřadnici $\xi_1 = 9$ cm vyjde $k = 3600$. Volbou délky této souřadnice je



Obr. 36.

dáno uspořádání kot na stupnici z . (Přesvědčte se volbou jiné délky a najdete polohu ostatních kot!) Vzhledem k výrazu, jímž je vyjádřena souřadnice ξ_1 , najdeme polohu ostatních kot na stupnici z , zejména podrobnější dělení, užitím projektivnosti stupnice z se stupnicí funkce z^2 . (Podle odst. O stupnicích.) Jeden z trojice bodů potřebných k určení projektivnosti obou stupnic volíme s výhodou bod o kotě ∞ , který na stupnici z leží v počátku soustavy souřadnic.

Podobně pro stupnici d dostáváme:

Pro $d = 0$ je $\eta_2 = \beta$ cm. Volme $\beta = 10$ cm. Pro $d = 10$ je $\eta_2 = \frac{10l}{l + 100}$ cm, zvolíme-li toto $\eta_2 = 9,5$ cm vychází $l = 1900$. Ostatní body na stupnici najdeme jednak výpočtem, jednak užitím projektivnosti se stupnicí d^2 !

Znajíce velikost modulů α , β a konstant k , l můžeme napsat pro stupnici t souřadnice

$$\xi_3 = \frac{10 \cdot 3600}{5500 + 1,44t^2} \text{ cm} = \frac{360}{55 + 0,0144t^2} \text{ cm},$$

$$\eta_3 = \frac{10 \cdot 1900}{5500 + 1,44t^2} \text{ cm} = \frac{190}{55 + 0,0144t^2} \text{ cm}.$$

Tím je tvar náčrtu úplně určen.

Nositelkou stupnice t je přímka o rovnici $\eta_3 = (\frac{19}{36})\xi_3$. Kotování na stupnici t dostaneme jednak výpočtem a potom užitím projektivnosti stupnice t se stupnicí kvadratické funkce t^2 . V obr. 35 b) stupnice funkce t^2 protíná stupnici t v bodě 0. Ze stupnice t^2 vyznačen v obrázku pouze bod 90 a pro zjištění příslušné perspektivní polohy obou stupnic bod S .

Názorněji postřehněme možnosti, které jsou dány uvedenou úpravou determinantu, volíme-li jinak velikost souřadnic ξ_1 (pro $z = 10$), η_2 (pro $d = 10$) a zakreslíme příslušné stupnice. Uvažte, jaký bychom dostali výsledek při volbě souřadnic $\xi_1 = 22$ cm místo $\xi_1 = 18$ cm v uvedeném příkladě!

Nejobecnější úpravu či transformaci determinantu (M) (str. 12) si můžeme představit tak, že jej vynásobíme nenulovým determinantem sestaveným z devíti čísel tudíž

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \\ k_3 & l_3 & m_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (n)$$

Po vynásobení podle věty (g) ze str. 114 obdržíme

$$\begin{vmatrix} k_1 f_1 + l_1 g_1 + m_1 h_1 & k_2 f_1 + l_2 g_1 + m_2 h_1 & k_3 f_1 + l_3 g_1 + m_3 h_1 \\ k_1 f_2 + l_1 g_2 + m_1 h_2 & k_2 f_2 + l_2 g_2 + m_2 h_2 & k_3 f_2 + l_3 g_2 + m_3 h_2 \\ k_1 f_3 + l_1 g_3 + m_1 h_3 & k_2 f_3 + l_2 g_3 + m_2 h_3 & k_3 f_3 + l_3 g_3 + m_3 h_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (N)$$

Konstanty k_i , l_i , m_i , $i = 1, 2, 3$ můžeme volit do té míry libovolně, aby z nich sestavený determinant, uvedený v rovnici (n), byl nenulový.

Jaký je praktický důsledek této obecné úpravy?

Z determinantu (M) lze vypsát, po dělení posledním sloupcem, zobrazovací rovnice

$$\xi_i = \frac{f_i}{h_i}, \quad \eta_i = \frac{g_i}{h_i}, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (z)$$

Podobně z determinantu (N) vypíšeme, po dělení třetím sloupcem, zobrazovací rovnice

$$\xi_i = \frac{k_1 f_i + l_1 g_i + m_1 h_i}{k_3 f_i + l_3 g_i + m_3 h_i}, \quad \eta_i = \frac{k_2 f_i + l_2 g_i + m_2 h_i}{k_3 f_i + l_3 g_i + m_3 h_i}. \quad (z')$$

Takže pro tentýž zobrazovaný vztah (F), přepsaný jednou na determinant (M) a po druhé na determinant (N), dostáváme dva rozdílné nákresy. Při tom však v nomogramu sestrojeném podle rovnic (z) i v nomogramu sestrojeném podle rovnic (z') platí, že body kotované těmi hodnotami, které splňují zobrazovaný vztah, leží v přímce, čili vlastnost charakterisující nákras spojnicových nomogramů se uvažovanou úpravou neboli transformací determinantu nemění.

Snadno bychom ukázali, že i dvojpoměry si odpovídajících bodů v obou nákresech jsou zachovány (odpovídající body mají v obou nákresech tytéž koty). Této úpravě determinantu i nákrasu říkáme kolineace. Všechny dovolené změny, které jsme prováděli s determinanem (M), byly kolineacemi.

V nomografii má kolineace, jak je patrné z uvedených příkladů, velký význam. Kolineace umožňuje vhodně upravit nákras nomogramu, zejména pokud běží o zvětšení čitelnosti na stupnicích. Kolineace nám dovoluje, abychom si předem v nomogramu zvolili čtyři body a tím dali nomogramu požadovaný tvar. Čtyřmi body jsou totiž v rovnicích (z') určeny konstanty k_i, l_i, m_i ($i = 1, 2, 3$) (vlastně jejich poměr). Proto jsme mohli v příkladě na str. 58 zvoliti polohu bodů o kotách $z = 0, z = 10$ a $d = 0, d = 10$!

Zachování dvojpoměru nám umožňuje podle odst. O stupnicích snadné zakreslení přímých stupnic v nomogramu (z') užitím stupnic z nomogramu (z). V příkladě na str. 59 stupnice proměnné t sestrojena jako projektivní se stupnicí t^2 .

Kanonický tvar (K_4): $g_1 g_2 f_3 + (g_1 + g_2) g_3 + h_3 = 0$,
 vyznačuje se tím, že u jednoho členu je faktorem součin
 funkcí g_1, g_2 a u druhého členu je faktorem součet těchto
 funkcí.

Rozloučení proměnných (str. 12) provede se Massauovým
 determinantem tvaru

$$\begin{vmatrix} 1 & -g_1 & g_1^2 \\ 1 & -g_2 & g_2^2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (M_4)$$

Potom upravíme determinant do zobrazovacích rovnic.
 Zběžný pohled na determinant nás vede k tomu, abychom
 dělili prvním sloupcem, protože dělíme pouze jednou funkcí.
 Násobíme-li při tom druhý, resp. třetí sloupec konstanta-
 mi α , resp. β , dostaneme tyto zobrazovací rovnice:

$$\left. \begin{array}{ll} \xi_1 = -\alpha g_1, & \eta_1 = \beta g_1^2; \\ \xi_2 = -\alpha g_2, & \eta_2 = \beta g_2^2; \\ \xi_3 = \alpha \frac{g_3}{f_3}, & \eta_3 = \beta \frac{h_3}{f_3}. \end{array} \right\} \quad (1Z_4)$$

Vidíme z nich, že všechny tři stupnice jsou obecně na
 křivkách. Žádná ze souřadnic ξ, η není totiž konstantní

¹⁶⁾ Po vyčíslení dostaneme

$$(g_1 - g_2) [g_1 g_2 f_3 + (g_1 + g_2) g_3 + h_3] = 0,$$

čili rovnici tvaru K_4 , násobenou faktorem $(g_1 - g_2)$. Význam
 faktoru vysvětlíme si o něco později.

¹⁷⁾ Podle metody eliminační (str. 14) položíme

$$\xi = g_1 g_2, \quad \eta = g_1 + g_2;$$

odtud plyne

$$\begin{array}{l} \xi - \eta g_1 + g_1^2 = 0, \\ \xi - \eta g_2 + g_2^2 = 0; \\ \xi f_3 + \eta g_3 + h_3 = 0. \end{array}$$

rovnici

dostaneme z rovnice (K_4) po vložení ξ, η za dosazované vý-
 razy. Anulovaný determinant soustavy posledních tří rovnic je
 výše uvažovaný determinant, jímž jsme provedli rozloučení
 proměnných.

pro všechny hodnoty téže proměnné; ani nelze vyloučit v obecném případě z rovnic žádnou z proměnných tak, aby výsledek vyloučení byla rovnice lineární v ξ , η , což by znamenalo, že stupnice vyloučené proměnné leží na přímce. Vylučujeme-li proměnnou x nebo y , zjistíme zajímavou zvláštnost tohoto kanonického tvaru:

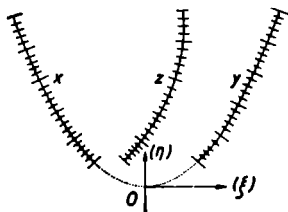
Stupnice proměnné x a y leží na téže nositelce, která je dokonce kuželosečkou.

Provedeme-li vyloučení x nebo y , dostaneme rovnici nositelky ve tvaru

$$\eta = \frac{\beta}{\alpha^2} \xi^2,$$

což je rovnice paraboly.

Odpovídá tudíž obecně napsaným zobrazovacím rovnicím ($1Z_4$) schéma v obr. 37.



Obr. 37.

x_0, y_0 dostaneme na stupnici tentýž bod! Výjimečně je možné, aby při rovnosti výrazů g_1, g_2 platila i rovnost příslušných argumentů x, y , tedy $x_0 = y_0$, a to buď pro několik dvojic, nebo i v celém rozsahu.¹⁸⁾

¹⁸⁾ Význam faktoru $(g_1 - g_2)$. Upozornili jsme na str. 61, že po vyčíslení determinantu (M_4) objeví se v rovnici faktor $(g_1 - g_2)$. Rovnice (M_4) je tudíž splněna jednak tím, že je splněna rovnice (K_4) a potom ještě, když $g_1 - g_2 = 0$, neboli $g_1 = g_2$ bez ohledu na velikost proměnné z . To znamená, že determinanem je ještě vyjádřena okolnost, zřejmá ze zobrazovacích rovnic, že v nomogramu bod na společné stupnici

Dodejme k tomu ještě, že v nomogramu na téže spojnici leží body o kotách x_0, y_0, z_0 a x'_0, y'_0, z'_0 , při čemž mezi kotami x a y platí

$$g_1(x_0) = g_2(y'_0), \quad g_2(y_0) = g_1(x'_0).$$

Příklady na použití kanonického tvaru (K_4) jsou velmi časté. Zjistíme totiž, že také kanonické tvary (K_2) a (K_3) jsou zvláštními případy tvaru (K_4).

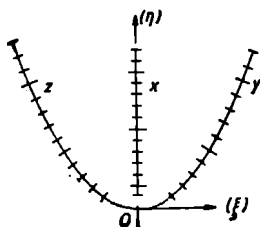
Tak kanonický tvar (K_2) srovnáme s tvarem (K_4) rovnicemi:

$$\begin{aligned} -\varphi_2\varphi_3 + \varphi_1 &= 0, \\ g_1g_2f_3 + (g_1 + g_2)g_3 + h_3 &= 0, \\ g_1 &= -\varphi_2, \quad g_2 = \varphi_3, \\ f_3 &= 1, \quad g_3 = 0, \quad h_3 = \varphi_1. \end{aligned}$$

Napíšeme-li příslušný Massauův determinant (M_4) a z něho zobrazovací rovnice (po vynásobení konstantou α v druhém a konstantou β v třetím sloupci) dostáváme:

$$\left. \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} 1 + \varphi_2 \varphi_2^2 & & \\ 1 - \varphi_3 \varphi_3^2 & & \\ 1 & 0 & \varphi_1 \end{array} \right| = 0 \\ \left. \begin{array}{l} \xi_1 = \alpha\varphi_2, \quad \eta_1 = \beta\varphi_2^2; \\ \xi_2 = -\alpha\varphi_3, \quad \eta_2 = \beta\varphi_3^2; \\ \xi_3 = 0, \quad \eta_3 = \beta\varphi_1. \end{array} \right\} \quad ({}^2Z_4) \end{array} \right.$$

Ze zobrazovacích rovnic poznáváme, že stupnice proměnné x leží na přímce, souřadnicové ose η (souřadnice $\xi_3 = 0$ pro všechny hodnoty první proměnné!). Schema nomografického zobrazení kanonického tvaru (K_2), uvažujeme-li jej jako tvar (K_4), ukazuje obr. 38.



Obr. 38.

má dvě koty, jednak x a potom y , splňující rovnici $g_1 = g_2$, což ovšem nemá nic společného s řešením rovnice (K_4). Neboť stanovíme-li z rovnice (K_4) kotu z , příslušnou ke kotám x, y , pro něž platí $g_1 = g_2$, najdeme ji na tečně ke kuželosečce (nebo řečeno podrobněji v průsečíku tečny kuželosečky sestrojené v bodě společném pro koty x, y se stupnicí z).

Příklad. Návrh nomogramu pro vztah

$$x = R \frac{a}{1000 - a},$$

porovnej str. 49.

Srovnání s kanonickým tvarem (K_4):

$$\begin{aligned} -R \frac{a}{1000 - a} + x &= 0 \\ g_1 g_2 f_3 + (g_1 + g_2) g_3 + h_3 &= 0 \\ g_1 &= -R, \quad g_2 = \frac{a}{1000 - a}, \\ f_3 &= 1, \quad g_3 = 0, \quad h_3 = x. \end{aligned}$$

Zobrazovací rovnice (podle 1Z_4)¹⁹):

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= +\alpha R, & \eta_1 &= \beta R^2; \\ \xi_2 &= -\alpha \frac{a}{1000 - a}, & \eta_2 &= \beta \frac{a^2}{(1000 - a)^2}; \\ \xi_3 &= 0, & \eta_3 &= \beta x. \end{aligned} \right\} (z)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 2,5 \cdot \frac{R}{10} \text{ cm}, & \eta_1 &= 3 \frac{R^2}{10^2} \text{ cm}; \\ \xi_2 &= -2,5 \cdot \frac{a}{1000 - a} \text{ cm}, & \eta_2 &= 3 \frac{a^2}{(1000 - a)^2} \text{ cm}; \\ \xi_3 &= 0, & \eta_3 &= 3 \frac{x}{10} \text{ cm}. \end{aligned} \right\} (z')$$

Moduly: $\alpha = 2,5 \text{ cm}$, $\beta = 3 \text{ cm}$.

Relace: $a = 500$, $x = R$.

Stupnice proměnné a a R leží na parabole o rovnici $\xi^2 = \frac{\alpha^2}{\beta} \eta = \frac{6,25}{3} \eta$ a parametru $p = 1,041\bar{6}$.

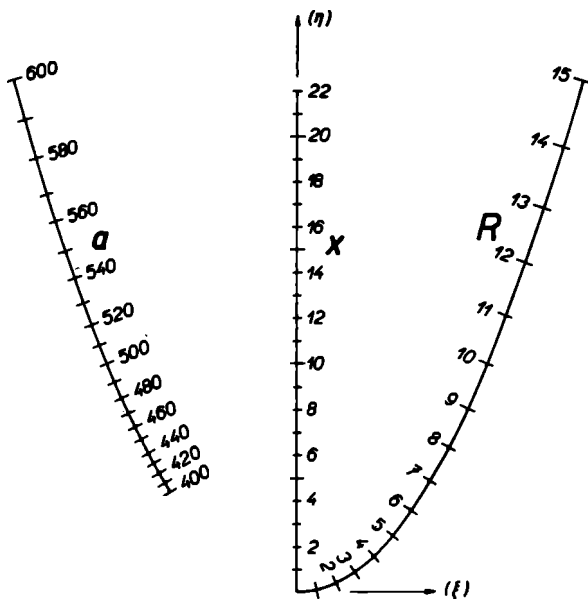
Při užitých modulech $\alpha = 2,5 \text{ cm}$, $\beta = 2,5 \text{ cm}$, při nichž nositelkou stupnice a a R vychází parabola vhodného tvaru pro zakreslení nomogramu, výběhne většina kot z náčrsky. Aby se tak nestalo, stačí upravit daný vztah na tvar

$$\frac{x}{10} = \frac{R}{10} \cdot \frac{a}{1000 - a}$$

¹⁹) Nebo můžeme přirovnat vztah přímo k tvaru (K_3) $[\varphi_1 = R, \varphi_2 = \frac{a}{1000 - a}, \varphi_3 = x]$ a použít rovnic (2Z_4); výsledek je tentýž.

a ten zobrazovat. Jak se tím změní zobrazovací rovnice, je vidět z porovnání zobrazovacích rovnic (z) s rovnicemi (z') (v těchto dosazený i moduly). Obr. 39.

Cvičení. Uvažte a porovnejte s předchozím výsledek, který bychom dostali v původním vztahu při volbě $\alpha = 0,25$ cm, $\beta = 0,03$ cm, při nichž nositelkou stupnic a a R je tatáž parabola.



Obr. 39.

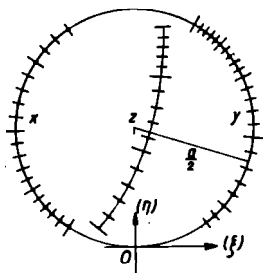
Z geometrie víme, že útvary v rovině lze podrobit transformaci, t. zv. kolineaci, při níž přejde parabola v kružnici. Bude nás patrně zajímat, jak použít kolineace na nomogram, aby nositelka stupnic x a y přešla v kružnici, zvláště z důvodu přesného rýsování nomogramu.

Transformaci tu provedeme vhodnou úpravou Massauova determinantu (viz str. 59). Úprava záleží v tom, že přičteme k prvnímu sloupci v (M_4) sloupec poslední a potom dělíme prvním sloupcem celý determinant; mimo to položíme $\alpha = \beta$. Tak z upraveného determinantu Massauova dostaneme zobrazovací rovnice:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= -\alpha \frac{g_1}{1+g_1^2}, & \eta_1 &= \alpha \frac{g_1^2}{1+g_1^2}; \\ \xi_2 &= -\alpha \frac{g_2}{1+g_2^2}, & \eta_2 &= \alpha \frac{g_2^2}{1+g_2^2}; \\ \xi_3 &= \alpha \frac{g_3}{f_3+h_3}, & \eta_3 &= \alpha \frac{h_3}{f_3+h_3}. \end{aligned} \right\} \quad (3Z_4)$$

Vyloučíme-li proměnnou x , resp. y z příslušných zobrazovacích rovnic, dostaneme rovnici společné nositelky

$$\begin{aligned} \xi_i^2 + \eta_i^2 &= \frac{\alpha^2 g_i^2}{(1+g_i^2)^2} + \frac{\alpha^2 g_i^4}{(1+g_i^2)^2} = \frac{\alpha^2 g_i^2 (1+g_i^2)}{(1+g_i^2)^2} = \\ &= \frac{\alpha^2 g_i^2}{1+g_i^2} = \alpha \cdot \eta_i, \quad (i = 1; 2) \\ \xi^2 + \left(\eta - \frac{\alpha}{2}\right)^2 &= \frac{\alpha^2}{4}, \end{aligned}$$



Obr. 40.

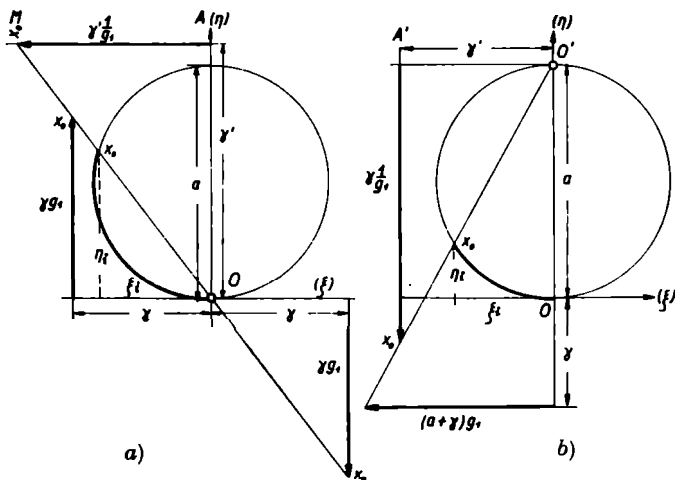
což je rovnice kružnice v pravouhlé soustavě souřadnic, se středem na ose η , ve vzdálenosti $\frac{\alpha}{2}$ a o polooměru $\frac{\alpha}{2}$. Tomuto výsledku odpovídá schema v obr. 40.

Při vynášení kot na kružnici používáme jednak přímo souřadnic a potom následujících konstrukcí:

Na rovnoběžku s osou η ve vzdálenosti γ cm vyneseme stupnici funkce g_1 při modulu γ cm, od osy ξ počínajíce, jak naznačeno v obr. 41a. Promítneme-li z počátku souřadnic O

body stupnice g_1 na kružnici, dostaneme stupnici proměnné x na kružnici. Ze zobrazovacích rovnic totiž plyne, že podíl souřadnic bodů na kružnici je roven $-g_1$, t. j.

$$\frac{\eta_1}{\xi_1} = \frac{\alpha \frac{g_1^2}{1+g_1^2}}{\alpha \frac{-g_1}{1+g_1^2}} = -g_1, \text{ neboli } \eta_1 = -g_1 \xi_1.$$



Obr. 41.

Podíl určuje také směrnici spojnic bodů $(\xi_1; \eta_1)$ s počátkem O a ta je pro tytéž hodnoty proměnné x tatáž jako směrnice spojnic počátku s body na stupnici g_1 , totiž přímek $\eta = -g_1 \xi$.

Totéž platí pro vynášení stupnice proměnné y na kružnici; jen místo stupnice funkce g_1 vyneseme stupnici funkce g_2 .

Vyneseme-li na rovnoběžku s osou ξ vzdálené od ní γ' cm stupnici funkce $\frac{1}{g_1}$ při modulu γ' cm, od osy η počínajíce, zjistíme, že se tato promítá z bodu O na kružnici také do stupnice proměnné x (resp. y , vynášíme-li $\frac{1}{g_2}$).

Z obr. 41a se přesvědčíme, že také $\frac{\eta_i}{\xi_i} = \frac{\overline{OA}}{AM} = \frac{\gamma'}{-\gamma' \frac{1}{g_i}} =$

$= -g_i$ ($i = 1$, nebo 2).

Stejně lze ukázat, že z bodu $O' (0; \alpha)$ se promítá stupnice g_i ($i = 1$, nebo 2), vynesena při modulu $(\alpha + \gamma)$ cm na rovnoběžce s osou ξ ve vzdálenosti γ cm, do stupnice téže proměnné na kružnici. Viz obr. 41b.

Právě tak stupnice funkce $\frac{1}{g_i}$, vynesena od bodu $A' (-\gamma'; \alpha)$ při modulu γ' cm na rovnoběžce η ve vzdálenosti γ' cm, se z O' promítá do stupnice téže proměnné na kružnici. Viz obr. 41b (v němž třeba doplniti akcent u písmene γ !).

V které části kružnice je výhodné užití té či oné konstrukce, je patrné z obrázků.

Kanonický tvar (K_2) $\varphi_1 = \varphi_2 \varphi_3$ zobrazíme nomogramem s kružnicí jako společnou nositelkou stupnic y, z podle zobrazovacích rovnic:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= +\alpha \frac{\varphi_2}{1 + \varphi_2^2}, & \eta_1 &= \alpha \frac{\varphi_2^2}{1 + \varphi_2^2}; \\ \xi_2 &= -\alpha \frac{\varphi_3}{1 + \varphi_3^2}, & \eta_2 &= \alpha \frac{\varphi_3^2}{1 + \varphi_3^2}; & ({}^4Z_4) \\ \xi_3 &= 0, & \eta_3 &= \alpha \frac{\varphi_1}{1 + \varphi_1}. \end{aligned}$$

Užili jsme při tom srovnání kanonického tvaru (K_2) s tvarem (K_4) podle rovnic se str. 63.

Příklad:

$$\begin{aligned} -R \frac{a}{1000 - a} + x &= 0 \quad (\text{srovnej str. 64}) \\ -\varphi_2 \varphi_3 + \varphi_1 &= 0, \\ \varphi_2 &= R, \quad \varphi_3 = \frac{a}{1000 - a}, \quad \varphi_1 = x. \end{aligned}$$

Zobrazovací rovnice (podle 4Z_4):

$$\xi_1 = +\alpha \frac{R}{1 + R^2}, \quad \eta_1 = \alpha \frac{R^2}{1 + R^2};$$

$$\xi_2 = -\alpha \frac{\frac{a}{1000-a}}{1 + \frac{a^2}{(1000-a)^2}}, \quad \eta_2 = \alpha \frac{\frac{a^2}{(1000-a)^2}}{1 + \frac{a^2}{(1000-a)^2}};$$

$$\xi_3 = 0, \quad \eta_3 = \alpha \frac{x}{1+x}.$$

Abychom dostali výhodnější uspořádání kot na stupnicích x a R , zobrazujeme opět jako na str. 64 vztah upravený na

$$\frac{x}{10} = \frac{R}{10} \cdot \frac{a}{1000-a},$$

pro něž zobrazovací rovnice (s dosazeným modulem) jsou:

$$\xi_1 = 7,5 \frac{\frac{R}{10}}{1 + \left(\frac{R}{10}\right)^2} \text{ cm}, \quad \eta_1 = 7,5 \frac{\left(\frac{R}{10}\right)^2}{1 + \left(\frac{R}{10}\right)^2} \text{ cm};$$

$$\xi_2 = -7,5 \frac{\frac{a}{1000-a}}{1 + \frac{a^2}{(1000-a)^2}} \text{ cm}, \quad \eta_2 = 7,5 \frac{\frac{(1000-a)^2}{a^2}}{1 + \frac{a^2}{(1000-a)^2}} \text{ cm};$$

$$\xi_3 = 0, \quad \eta_3 = 7,5 \frac{\frac{x}{10}}{1 + \frac{x}{10}} \text{ cm}.$$

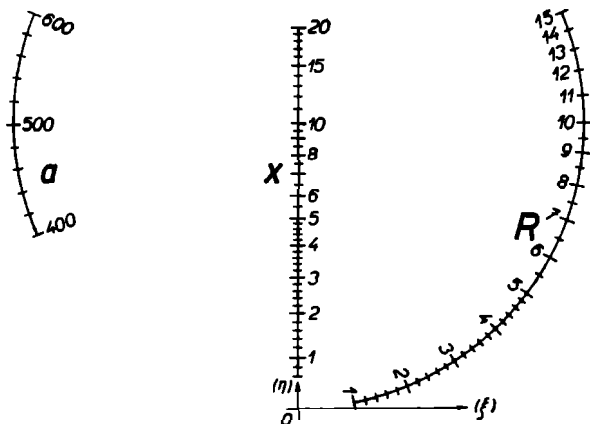
Modul: $\alpha = 7,5$ cm.

Relace: $a = 500$, $x = R$. Obr. 42.

Stupnice x ležící na ose η je stupnicí projektivní a sestrojí se z tří bodů použitím měřítka (viz odst. O stupnicích).

Vynesení stupnice a na kružnici. Ve vzdálenosti $\frac{\alpha}{2}$ na záporné části osy ξ vedena rovnoběžka s η a vynesena na ní od osy ξ stupnice funkce $\frac{a}{1000-a}$ při mod. $\frac{\alpha}{2}$ (je to stupnice projektivní; vypočteme pro ni 3 body, na př. pro $a = 400$; 500 a 600 a ostatní koty sestrojíme použitím měřítka, viz odst. O stupnicích). Vynesenou stupnici $\frac{a}{1000-a}$ promítneme z bodu O (počátku soustavy souřadnic) do stupnice proměnné a na kružnici. Viz obr. 41a.

Podobně vyneseme stupnici proměnné R na kružnici. Ve vzdálenosti $\frac{\alpha}{2}$ na kladné části osy ξ vedeme rovnoběžku s η a na ni vyneseme od osy ξ stupnici $\frac{R}{10}$ při mod. $\frac{\alpha}{2}$ a tu z bodu O promítneme na kružnici do stupnice proměnné $R \left(g_1 = -\frac{R}{10} \right)$. (Uvažte, jaký bychom dostali výsledek při zobrazování vztahu v původním znění.)



Obr. 42.

Kanonický tvar (K_3) zobrazíme nomogramem s kružnicí po srovnání s kanonickým tvarem (K_4) takto:

$$\begin{aligned} \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 &= 0; \\ g_1 g_2 f_3 + (g_1 + g_2) g_3 + h_3 &= 0; \\ g_1 = \psi_1, \quad g_2 = \psi_2; \\ f_3 = 0, \quad g_3 = 1, \quad h_3 = -\psi_3. \end{aligned}$$

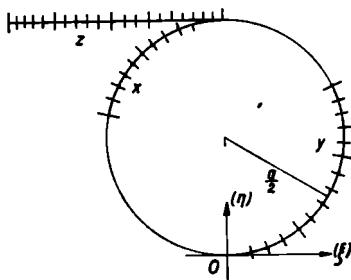
Tomuto srovnání odpovídají zobrazovací rovnice (napsané podle 3Z_4 ze str. 65):

$$\xi_1 = -\frac{\alpha \psi_1}{1 + \psi_1^2}, \quad \eta_1 = \frac{\alpha \psi_1^2}{1 + \psi_1^2}$$

$$\xi_2 = -\frac{\alpha\psi_2}{1 + \psi_2^2}, \quad \eta_2 = \frac{\alpha\psi_2^2}{1 + \psi_2^2};$$

$$\xi_3 = -\frac{\alpha}{\psi_3}, \quad \eta_3 = \alpha$$

a jím schema v obr. 43.



Obr. 43.

Kanonický tvar (K_3):

$$\frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} = f_3.$$

Výraz ten si snadno zapamatujeme, všimneme-li si, že funkce téže proměnné stojí ve zlomku pod sebou.

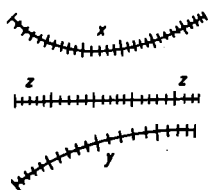
Rovnici pro nomografické zobrazení upravujeme obvyklými dvěma kroky. První je rozloučení proměnných (str. 12) přepsáním do tvaru Massauova determinantu; druhý je úprava determinantu na tvar, v němž v jednom sloupci jsou jedničky; z něho vypisujeme zobrazovací rovnice.

Uvedený postup je udán rovnicemi

$$1. \quad \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} = f_3 \equiv \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & -1 \\ f_3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (M_5)$$

2. Děleme determinant druhým sloupcem,²⁰⁾ první sloupec násobíme α , třetí β ; (α, β nenulové konstanty):

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{f_1}{g_1} \quad 1 \quad \beta \frac{1}{g_1} \\ \alpha \frac{f_2}{g_2} \quad 1 \quad -\beta \frac{1}{g_2} \\ \alpha f_3 \quad 1 \quad 0 \end{array} \right. = 0; \quad \left. \begin{array}{l} \xi_1 = \alpha \frac{f_1}{g_1}, \quad \eta_1 = \frac{\beta}{g_1}; \\ \xi_2 = \alpha \frac{f_2}{g_2}, \quad \eta_2 = -\frac{\beta}{g_2}; \\ \xi_3 = \alpha f_3, \quad \eta_3 = 0. \end{array} \right\} \quad (Z_5)$$



Obr: 44.

Kanonický tvar (K_5) vede tudíž obecně ke zobrazení vztahu nomogramem o dvou křivých stupnicích a jedné přímé. Viz schema v obr. 44.

Nositelky stupnic x, y obecně nesplynou. Jestliže však výsledek vyloučení proměnné x z rovnic ξ_1, η_1 a proměnné y z rovnic ξ_2, η_2 je rovnice téže křivky, dostaneme jedinou nositelku. Viz příklad na str. 119.

Mnemotechnická pomůcka, jak si snadno zapamatujeme sled funkcí v Massauově determinantu u kanonického tvaru (K_5), je tato: K rovnici (K_5) psané

$$\frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} = \frac{f_3}{1}$$

připíšme rovnici

$$1 - 1 = 0.$$

Čteme-li tyto rovnice po řádcích bez ohledu na rovnítko, zjistíme, že v nich sled členů je stejný jako v Massauově determinantu (M_5), čteme-li v něm elementy po sloupcích.

²⁰⁾ V determinantu dělíme proto druhým sloupcem, abychom v nomogramu dostali přímo stupnici funkce f_3 (viz v zobr. rov. výrazy ξ_3, η_3) a nikoli stupnici její převrácené hodnoty, jak by vyšlo při dělení determinantu prvním sloupcem; při jiné úpravě, na př. přičtení prvního sloupce k druhému a dělení determinantu upraveným druhým sloupcem, dostaneme obecně projektivní stupnici funkce f_3 (viz odst. O stupnicích).

Příklad. Návrh nomogramu pro vztah

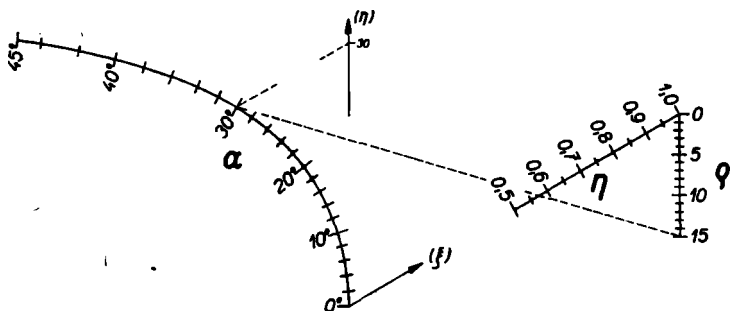
$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varrho)},$$

kde η značí účinnost šroubu o stoupání α a úhlu třecím ϱ .

Rozsahy proměnných: $\eta \langle 0,5; 1 \rangle$, $\alpha^\circ \langle 0; 45 \rangle$, $\varrho^\circ \langle 0; 15 \rangle$.

Upravme zprvu rovnici vztahu, aby bylo zjevno, že běží o kanonický tvar (K_3).

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varrho)}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varrho} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \varrho}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varrho} = \\ &= \frac{\operatorname{cotg} \varrho - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \alpha} = \eta. \end{aligned}$$



Obr. 45.

V nomogramu zakresleno řešení pro hodnoty $\alpha = 30^\circ$; $\varrho = 15^\circ$;
 $\eta \doteq 0,58$.

Převedení na determinant a jeho úprava na zobrazovací rovnice:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{cotg} \varrho & \operatorname{cotg} \varrho & 1 \\ -\operatorname{tg} \alpha & \operatorname{cotg} \alpha & -1 \\ \eta & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -\operatorname{tg} \varrho \\ -\operatorname{tg}^2 \alpha & 1 & \operatorname{tg} \alpha \\ \eta & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Násobme první sloupec konstantou γ , třetí sloupec konstantou δ a pak vypišme zobrazovací rovnice

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \gamma, & \eta_1 &= -\delta \operatorname{tg} \varrho; \\ \xi_2 &= -\gamma \operatorname{tg}^2 \alpha, & \eta_2 &= \delta \operatorname{tg} \alpha; \\ \xi_3 &= \gamma \eta, & \eta_3 &= 0. \end{aligned}$$

Moduly: $\gamma = 5$ cm, $\delta = 6$ cm. Obr. 45.

Stupnice α leží na parabole o rovnici $\eta_3^2 = -\frac{\delta^2}{\gamma} \xi_3$.

Poznámka. Kanonický tvar (K_5) lze napsat také rovnicí

$$f_1 = \frac{f_2 + f_3}{g_2 + g_3}, \quad (K'_5)$$

kteřou přepisujeme na determinant

$$\begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 \\ f_2 & g_2 & -1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Zobrazení vztahů o více než třech proměnných. A. Binární stupnice.

Zobrazení vztahů o více než 3 proměnných závisí předně na tvaru těchto vztahů. Ukážeme tři typické způsoby zobrazování vztahů o více proměnných.

První způsob spočívá na možnosti užití tak zvané binární stupnice. Binární stupnicí rozumíme obecně souhrn bodů v rovině, kde každý bod má dvě koty (odtud název binární; francouzsky réseau à deux cotes; najdete proto někde v českých pracích doslovný překlad: soustava bodů dvojkotovaných).²¹⁾

Tvary vztahů připouštějících nomografické zobrazení s binární stupnicí jsou v podstatě tytéž, o kterých jsme právě uvažovali v odstavcích předešlých. Musíme je pouze vhodně rozšířit o index další proměnné.

Uvažujme o vztahu mezi 4 proměnnými $F(x, y, z, t) = 0$, který má tvar

$$h_1 f_{34} + h_2 g_{34} + h_{34} = 0.$$

Na první pohled vidíme, že se liší od kanonického tvaru (K_1) pouze v tom, že místo funkcí proměnné z (které odpovídá index 3), tedy funkcí značených f_3, g_3 a h_3 máme

²¹⁾ Kdežto obyčejná stupnice proměnné x je souhrn bodů na čáře, kde každý bod má jednu kotu a jen výjimečně dvě nebo více.

zde funkce o dvou proměnných z, t v rovnici značených f_{34}, g_{34} a h_{34} (index 4 odpovídá nově zavedené proměnné, kterou budeme v obecném výkladu značit t).

Zacházejme proto s tímto tvarem shodně jako s kano-
nickým tvarem (K_1). Aplikujme tudíž ihned zobrazovací
rovnice (2Z_1) (str. 22) a uvažujme o tom, jak se projeví zave-
dení další proměnné.

Příslušné zobrazovací rovnice jsou

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0, & \eta_1 &= \alpha h_1; \\ \xi_2 &= \delta, & \eta_2 &= \beta h_2; \\ \xi_3 &= \frac{\alpha \delta g_{34}}{\beta f_{34} + \alpha g_{34}}, & \eta_3 &= -\frac{\alpha \beta h_{34}}{\beta f_{34} + \alpha g_{34}}. \end{aligned}$$

Pro první dvě proměnné (x , resp. y) dostáváme v nomo-
gramu jako dříve přímé stupnice, a to stupnici funkce h_1
a stupnici funkce h_2 . Obr. 46a.

Zakreslení bodů o souřadnicích ξ_3, η_3 , které závisí na dvou
parametrech, totiž proměnných z a t , provedeme podle
následující úvahy:

Položme za jednu z těchto proměnných určitou hodnotu,
na př. $z = z_0$. Tím se výrazy ξ_3, η_3 stanou závislé pouze na
jednom parametru, v tomto případě na proměnné t . A je
proto možné zakresliti stupnici proměnné t , jak jsme se
dříve naučili (str. 22). Výsledek je nomogram se stupni-
cemi x, y, t . S jeho pomocí lze řešiti zobrazovaný vztah
 $F(x, y, z, t) = 0$ jen tehdy, když $z = z_0$. V nákrese na to
upozorníme připsáním koty z_0 ke stupnici t .

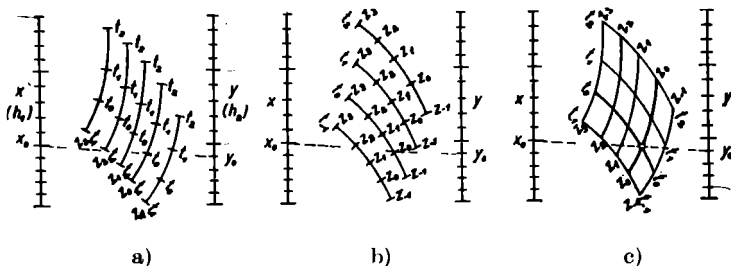
Abychom mohli řešit vztah $F(x, y, z, t) = 0$ také pro
jiné hodnoty než $z = z_0$, vkládáme do ξ_3, η_3 za z postupně
další hodnoty z_1, z_2, z_3, \dots ²²⁾ a zakreslíme k nim podobně
jako při $z = z_0$ příslušné stupnice t , které pak označíme
kotami z_1, z_2, z_3, \dots . Po zakreslení dostatečného množství

²²⁾ Obvykle aritmetickou posloupnost $z_1 = z_0 + h, z_2 = z_0 + 2h, z_3 = z_0 + 3h, \dots$ atp. a při tom, aby hodnoty $z_0, z_1, z_2, z_3, \dots$ byly okrouhlé, na př. $z_0 = 1.0; z_1 = 1.1; z_2 = 1.2; z_3 = 1.3; \dots$

stupnic t dostaneme nákres (obr. 46a), kterého lze užítí k řešení vztahu $F(x, y, z, t) = 0$ podle návodu:

K daným hodnotám x_0, y_0, z_0 hledáme hodnotu t_0 , pro niž platí $F(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0$ tak, že spojíme body o kotách x_0, y_0 a v průsečíku této spojnice se stupnicí označenou z_0 odečteme kotu t_0 .

Kdyby náhodou pro danou hodnotu z_0 nebyla v nomogramu zakreslena stupnice t , odhadneme její polohu přibližně od oka mezi zakreslenými stupnicemi a z polohy sousedních kot odhadneme velikost koty t_0 . (Způsob čtení zvaný interpolací.)



Obr. 46.

Jak bychom si počínali při odčítání hodnoty jiné proměnné, jsou-li dány hodnoty ostatních tří proměnných, je snadně (a patrně též z nákresu). Abychom v dalším nemuseli obšírně popisovat „stupnici t kotovanou hodnotou z_0 “, užíváme stručného názvu isopleta z_0 (isos = 00 000 pletos = 000 0000), t. j. asi čára, na níž je hodnota z stálá a okrouhlá.

Je zřejmé, že bychom při konstrukci mohli postupovat také tak, že bychom v rovnicích ξ_3, η_3 kladli hodnoty za t místo za z . Dostávali bychom stupnice kotované hodnotami z a každá stupnice by řešila zobrazovaný vztah jen pro určité t , připsané u každé zakreslené stupnice (isoplety t). Postup při řešení vztahu z nákresu je podobný jako v případě předchozím. Viz obr. 46b.

Srovnáme-li oba postupy při zakreslování nomogramu, zjistíme, že na př. nositelka stupnice t označená v obr. 46a kotou z_0 , t. j. isopleta z_0 , je totožná s čarou, kterou bychom v obr. 46b dostali spojením bodů o kotě z_0 . Vzhledem k přehlednosti nákresu jeví se výhodné spojit vůbec body o společných kotách téže proměnné (v obr. 46a body o společných kotách t , v obr. 46b o kotách z) a okotovat tyto spojnice, jak naznačuje schematicky obr. 46c, takže v nákresu budeme mít koty pouze u isoplet. Na každé isopletě je vytínána stupnice druhé proměnné isoplety stejnojmennými. Na isopletě z je vytínána stupnice t isoplety t a obráceně.

V nomogramu odčítáme podle návodu:

K daným hodnotám x_0, y_0, z_0 najdeme hodnotu t_0 , která s nimi řeší vztah $F(x, y, z, t) = 0$, t. j. pro niž platí, $F(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0$, tak, že spojíme body o kotách x_0, y_0 najdeme průsečík této spojnice s isopleťou z_0 a u isoplety t , procházející průsečíkem, odečteme připsanou kotu t_0 .

Při konstrukci nomogramu nás bude samozřejmě zajímat, jaký tvar mají isoplety, čili jakého druhu jsou čáry, na nichž leží stupnice z , resp. t . Hlavně proto, abychom na př. nestrojovali přímé isoplety z z několika bodů, jejichž souřadnice jsme vypočetli z výrazů ξ_3, η_3 , podle návodu daného obecným výkladem, když k jejich sestrojení stačí po každé dva body.

Počítáme proto vždy předem rovnice isoplet z i t , abychom se přesvědčili, nejsou-li to přímky, eventuálně kuželosečky, které lze také někdy zakreslit s výhodou proti metodě početní.

Rovnici isoplety z (nositelky stupnice t) vypočteme vyloučením proměnné t z výrazů pro ξ_3, η_3 . Výsledek vyloučení je rovnice mezi ξ_3, η_3 a z . Z ní pro určitou hodnotu z , na př. $z = z_0$, dostaneme rovnici mezi ξ_3, η_3 čili rovnici čáry (isoplety z_0). Je-li nyní tato rovnice lineární v ξ_3, η_3 , jsou isoplety přímky; je-li kvadratická, jsou isoplety kuželosečky.

Příklad. Návrh nomogramu pro vztah

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

udávající kapitál K_n , na který vzroste počáteční kapitál K_0 za n let, při p procentním složeném úrokování.

Rozsahy proměnných $K_0 < 1; 10 \rangle$, $p < 1; 5 \rangle$, $n < 0; 60 \rangle$.

Srovnání s kanonickým tvarem:

(po logaritmování daného vztahu)

$$\log K_0 + n \log \left(1 + \frac{p}{100}\right) - \log K_n = 0;$$

$$h_1 f_{34} + h_2 g_{34} + h_{34} = 0;$$

$$h_1 = \log K_0, h_2 = n;$$

$$f_{34} = 1, g_{34} = \log \left(1 + \frac{p}{100}\right), h_{34} = -\log K_n.$$

Zobrazovací rovnice:

$$\xi_1 = 0,$$

$$\eta_1 = \alpha \log K_0;$$

$$\xi_2 = \delta,$$

$$\eta_2 = \beta n;$$

$$\xi_3 = \frac{\alpha \delta \log \left(1 + \frac{p}{100}\right)}{\beta + \alpha \log \left(1 + \frac{p}{100}\right)}, \quad \eta_3 = + \frac{\alpha \beta \log K_n}{\beta + \alpha \log \left(1 + \frac{p}{100}\right)}.$$

Moduly: $\alpha = 6$ cm, $\beta = 0,1$ cm, $\delta = 8$ cm. Obr. 47.

Relace: Isoplety p jsou rovnoběžky s osou η , protože souřadnice ξ_3 závisí jen na proměnné p (pro určitou hodnotu p dostáváme rovnici $\xi_3 = k$, k konstanta, tedy rovnoběžku s η).

Souřadnice ξ_3 jsou projektivní s funkcí $\log \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ podle str. 37.

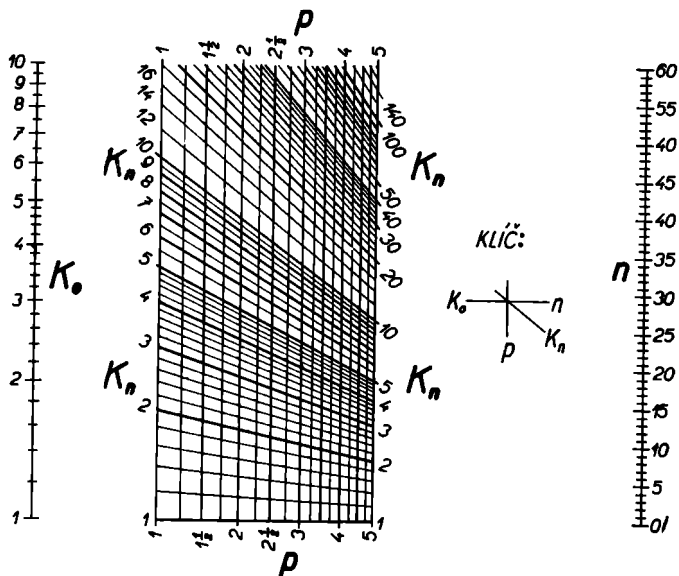
Vypočteme-li z ξ_3 výraz $\log \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ a dosadíme do η_3 , dostaneme rovnici isopleť K_n

$$\alpha \log K_n \cdot \xi_3 + \delta \cdot \eta_3 - \alpha \delta \cdot \log K_n = 0.$$

Je to rovnice přímek (jak poznáme na první pohled, jestliže si myslíme za K_n vloženu určitou hodnotu; dostaneme totiž lineární vztah mezi souřadnicemi ξ_3, η_3). Vložíme-li do rovnice za ξ_3 nulu, obdržíme relaci $\eta_3 = \alpha \log K_n$, to znamená, že

osa η (pro její body je $\xi = 0$) protíná isoplety K_n ve stupnici $\alpha \log K_n$ (což je stupnice shodná se stupnicí $\log K_0$, která je již na ose η vynesena při témž modulu α).

Položíme-li za ξ_3 hodnotu δ , dostáváme $\eta_3 = 0$, což znamená, všechny isoplety K_n procházejí bodem $(\delta; 0)$. Zakreslíme je,



Obr. 47.

spojujeme-li body stupnice K_0 s bodem $(\delta; 0)$ a kotujeme hodnotami příslušujícími bodům na stupnici K_0 , kterými procházejí. V obr. 47 je zakreslen t. zv. klíč, což je schematický návod ke čtení nomogramu.

† V obecném případě, kdy isoplety tvořící binární stupnici nevycházejí tak jednoduše jako v uvedeném příkladě (kde jsou obě soustavy přímky), konstruujeme jejich body tak, že na rovnoběžkách s osou η , nebo s osou ξ vyhledáváme průsečíky (stupnice), v nichž jsou protínány isoplety.

Jiný příklad. V něm se ukazuje, že lze někdy s výhodou umístit binární stupnici mimo stupnice h_1 a h_2 !

Návrh nomogramu pro vztah

$$H = 18\,400 (1 + 0,003\,67t) (\log b_1 - \log b_2),^{23)}$$

z něhož se počítá nadmořský výškový rozdíl dvou míst, jejichž barometrické tlaky jsou b_1 a b_2 a t průměrná teplota z teplot obou míst.

Rozsahy proměnných:

$$H \langle 0; 4000 \rangle \text{ v m; } b_1, b_2 \langle 500; 800 \rangle \text{ v mm Hg; } t \langle -20; 40 \rangle \text{ v } ^\circ\text{C.}$$

Srovnání s kanonickým tvarem:

$$\begin{aligned} H & - \log b_1 \cdot 18\,400 (1 + 0,003\,67t) + \\ & + 18\,400 (1 + 0,003\,67t) \log b_2 = 0; \\ h_1 f_{34} + h_2 \cdot g_{34} & + h_{34} = 0; \\ h_1 = H, \quad h_2 = \log b_1; \\ f_{34} = 1, \quad g_{34} = -18\,400 (1 + 0,003\,67t); \\ & h_{34} = 18\,400 (1 + 0,003\,67t) \log b_2. \end{aligned}$$

Zobrazovací rovnice

$$\begin{aligned} \xi_1 & = 0, & \eta_1 & = \alpha H; \\ \xi_2 & = \delta, & \eta_2 & = \beta \log b_1; \\ \xi_3 & = -\frac{\alpha \delta 18\,400 (1 + 0,003\,67t)}{\beta - \alpha 18\,400 (1 + 0,003\,67t)}, \\ \eta_3 & = -\frac{\alpha \beta 18\,400 (1 + 0,003\,67t) \log b_2}{\beta - \alpha 18\,400 (1 + 0,003\,67t)}. \end{aligned}$$

Moduly: $\alpha = 0,000\,75 \text{ cm}$, $\beta = 25 \text{ cm}$, $\delta = 4,25 \text{ cm}$. Obr. 48.

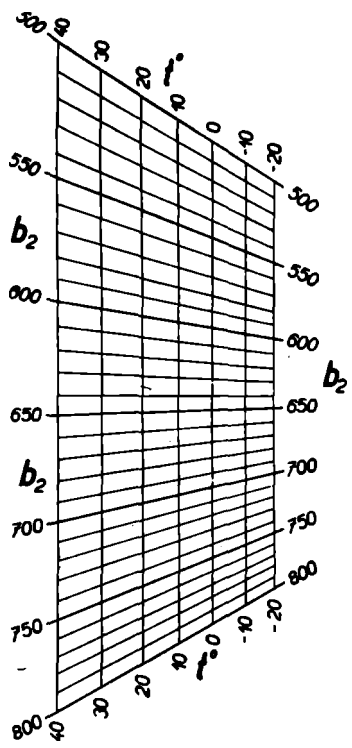
Relace: $H = 0$, $b_1 = b_2$.

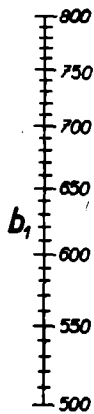
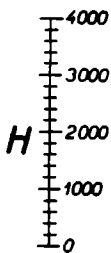
Souřadnice ξ_3 závisí pouze na proměnné t , jsou tedy isoplety t rovnoběžky s osou η [vytínající na ose ξ ($i \bar{\xi} \perp \eta$) stupnici projektivní s měřítkem].

Isoplety t narýsuje nejlépe užitím souřadnic $\bar{\xi}_3$ (vzdálenosti od osy η). O rozdílu ξ a $\bar{\xi}$ resp. ξ_3 a $\bar{\xi}_3$ i δ a $\bar{\delta}$ viz str. 26.

Vyloučíme-li z ξ_3 a η_3 proměnnou t , dostaneme rovnici isoplet b_2 , a to $\eta_3 = \frac{\beta}{\delta} \log b_2 \cdot \xi_3$, což jsou přímky jdoucí po-

²³⁾ Podle Nachtikala, Technická fyzika, II. vyd. 1937) str. 167.





Obr. 48.

čátkem soustavy souřadnicové a vytínající na přímce $\xi = \delta$ stupnici $\log b_2$ při modulu β (na této přímce je již vynesena stupnice $\log b_1$ při též modulu β , takže isoplety b_2 dostaneme spojováním bodu $H = 0$ a bodů na stupnici b_1 , označující je týmiž kotami).

U kanonického tvaru (K_4) dostaneme binární stupnici tehdy, jestliže jej lze napsat

$$g_1 g_2 f_{34} + (g_1 + g_2) g_{34} + h_{34} = 0.$$

Zobrazovací rovnice vypíšeme podle rovnic 3Z_4 , str. 66.

$$\xi_1 = -\alpha \frac{g_1}{1 + g_1^2}, \quad \eta_1 = \alpha \frac{g_1^2}{1 + g_1^2};$$

$$\xi_2 = -\alpha \frac{g_2}{1 + g_2^2}, \quad \eta_2 = \alpha \frac{g_2^2}{1 + g_2^2};$$

$$\xi_3 = \alpha \frac{g_{34}}{f_{34} + h_{34}}, \quad \eta_3 = \alpha \frac{h_{34}}{f_{34} + h_{34}}.$$

Jim odpovídá schema v obr. 49.

Poznámka. Kanonické tvary (K_3) resp. (K_4) nepřipouštějí možnosti zobrazení s binární stupnicí, jak snadno nahlédneme ze zobraz. rovnic pro tyto tvary.

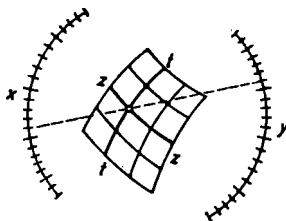
Kanonický tvar (K_5) můžeme dokonce rozšířit o další dvě proměnné

$$\frac{f_{12} + f_{34}}{g_{12} + g_{34}} = f_5$$

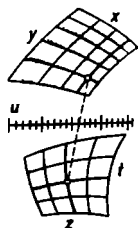
a získat zobrazení s dvěma binárními stupnicemi.

Podle rovnic (Z_5) ze str. 72 dostaneme zobrazovací rovnice

$$\xi_1 = \alpha \frac{f_{12}}{g_{12}}, \quad \eta_1 = \frac{\beta}{g_{12}};$$



Obr. 49.



Obr. 50.

$$\xi_2 = \alpha \frac{f_{34}}{g_{34}}, \quad \eta_2 = -\frac{\beta}{g_{34}};$$

$$\xi_3 = \alpha f_5, \quad \eta_3 = 0.$$

Schema v obr. 50.

Příklad. Návrh nomogramu pro vztah

$$Z = \frac{1-x}{\pm \frac{1}{f_r} - y}.$$

Rozsahy proměnných:

$$Z \langle -1,7; 1,7 \rangle, \quad x \langle 0,3; 0,7 \rangle, \quad f_r \langle 0; 3,4 \rangle, \quad y \langle 0,15; 0,5 \rangle.$$

Význam tohoto i následujícího vzorce je podrobně popsán v knize J. Šrejtr, Příspěvek k mechanice automobilu, Praha 1935.

Srovnání s kanonickým tvarem [podle (K'_6), str. 74]:

$$Z = \frac{1-x}{\pm \frac{1}{f_r} - y}; \quad f_1 = \frac{f_2 + f_{34}}{g_2 + g_{34}}$$

$$f_1 = Z; \quad f_2 = 1, \quad g_2 = \pm \frac{1}{f_r}; \quad f_{34} = -x, \quad g_{34} = -y.$$

Převedení na determinant a úprava na zobrazovací rovnice:

$$\begin{vmatrix} Z & 1 & 0 \\ 1 & \pm \frac{1}{f_r} & -1 \\ -x & -y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta Z & 1 & \alpha Z \\ \pm \beta f_r & 1 & 0 \\ \beta \frac{x}{y} & 1 & \alpha \frac{x-1}{y} \end{vmatrix} = 0.$$

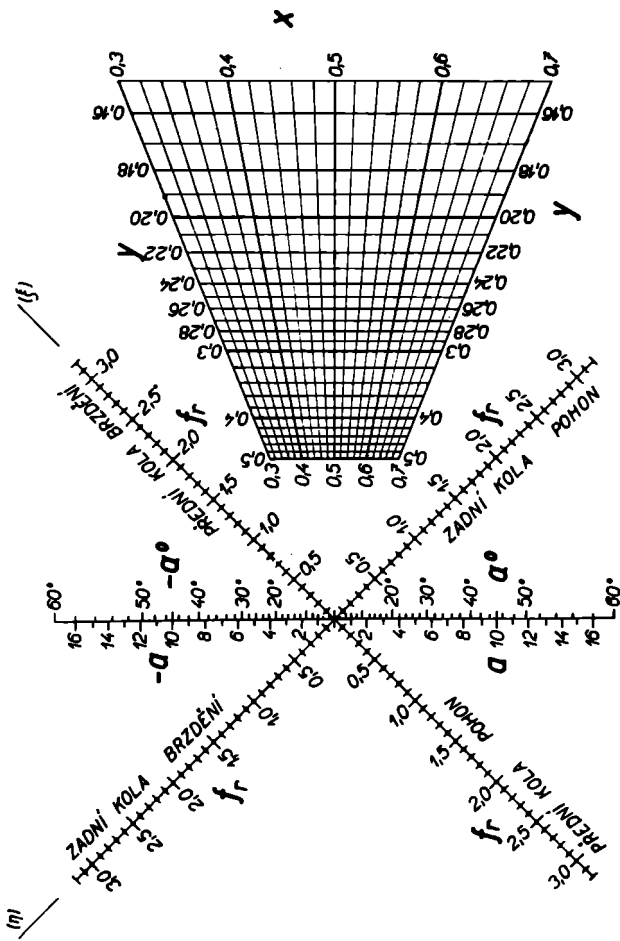
(Úprava původního determinantu provedena tak, že první sloupec přičten k poslednímu, potom determinant dělen druhým sloupcem, konečně první sloupec násoben β , třetí α .)

$$\xi_1 = \alpha Z, \quad \eta_1 = \beta Z;$$

$$\xi_2 = 0, \quad \eta_2 = \pm \beta f_r;$$

$$\xi_3 = \alpha \frac{x-1}{y}, \quad \eta_3 = \beta \frac{x}{y}.$$

Moduly: $\alpha = \beta = 1,5$ cm. Obr. 51.



Obr. 51.

Relace: Z podílu souřadnic η_3 a ξ_3 dostaneme rovnici (je-li $\alpha = \beta$)

$$\eta_3 = \frac{x}{x-1} \cdot \xi_3$$

čili, že isoplety x jsou přímky jdoucí počátkem soustavy souřadnic.

Protneme-li tyto isoplety přímkou $\eta = \xi + q$ (q konstanta, kterou vhodně zvolíme) vypočteme, že průsečíky mají souřadnici $\eta = qx$. Narýsujeme tedy přímku $\eta = \xi + q$, na osu η narýsujeme měřítko o modulu q a promítneme je na zakreslenou přímku. Spojíme-li body promítnutého měřítka na uvažované přímce s počátkem, dostáváme isoplety x !

Vyloučíme-li x z rovnic ξ_3, η_3 (z ξ_3 vypočteme x a dosadíme je do η_3), obdržíme rovnici isoplet y (při $\alpha = \beta$)

$$\eta = \xi + \frac{\alpha}{y}.$$

Jsou to rovnoběžky (o směrnici 1 čili svírající úhel 45° s pravouhlými osami souřadnic) vytínající na ose η reciprokou stupnici $+\frac{1}{y}$ při modulu α .

Vzhledem k významu proměnné Z číslována stupnice Z po jedné straně hodnotami a (zrychlení) podle rovnice $Z \doteq 0,1a$, a po druhé hodnotami α° (úhel stoupání, klesání svahu) podle rovnice $Z = \text{tg } \alpha$.

Stupnice f_r v nomogramu je označena nápisem „Zadní kola pohcn“ (+ f_r , kladný smysl osy η), „zadní kola brzdění“ (– f_r).

Na tento nomogram můžeme připojit nomogram vztahu

$$P = \frac{x}{\pm \frac{1}{f_r} + y}$$

pro něž dostáváme zobrazovací rovnice z úpravy

$$\begin{vmatrix} P & 1 & 0 \\ 0 & \pm \frac{1}{f_r} & 1 \\ x & y & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta P & 1 & \alpha P \\ 0 & 1 & \pm \alpha f_r \\ \beta \frac{x}{y} & 1 & \alpha \frac{x-1}{y} \end{vmatrix} = 0.$$

$$\xi_1 = \alpha P,$$

$$\eta_1 = \beta P;$$

$$\xi_2 = \pm \alpha f_r,$$

$$\eta_2 = 0;$$

$$\xi_3 = \alpha \frac{x-1}{y},$$

$$\eta_3 = \beta \frac{x}{y}.$$

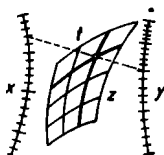
Volíme-li $\alpha = \beta = 1,5$ cm, je patrné ze zobrazovacích rovnic, že nomogram předchozího vztahu je shodný s nomogramem tohoto vztahu s tím rozdílem, že stupnice proměnné f_r leží místo na ose ξ na ose η . V obr. 51 je to stupnice f_r , u níž je připsáno „Přední kola pohon“ ($+f_r$) a „Přední kola brzdění“.

Pro úplnost představy o možnostech, které připouští zavedení binární stupnice u spojnicových nomogramů, připojme několik stručných poznámek.

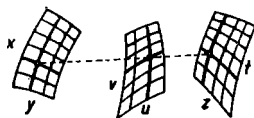
Když jsme přepsali kanonický tvar (K_1) na Massauův determinant, dostali jsme po úpravě v determinantu (J) některé prvky konstantní nebo nulové. V nákresu se tato okolnost projevila tím, že jsme dostali dvě stupnice přímé. Kdybychom však měli rovnici, kterou by bylo možno přepsati do determinantu

$$F(x, y, z, t) \equiv \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_{34} & g_{34} & h_{34} \end{vmatrix} = 0,$$

kde obecně mezi prvky determinantu neexistuje žádný vztah, ani žádný z prvků není konstantní či nulový, pak její nomogram se skládá z dvou křivých stupnic a jedné binární. Viz schema v obr. 52.



Obr. 52.



Obr. 53.

Je konečně snadné si představit, že je možný případ, kdy vztah mezi šesti proměnnými lze napsat do determinantu

$$F_{123456} \equiv \begin{vmatrix} f_{12} & g_{12} & h_{12} \\ f_{34} & g_{34} & h_{34} \\ f_{56} & g_{56} & h_{56} \end{vmatrix} = 0,$$

jemuž odpovídá nomogram se třemi binárními stupnicemi. Schema v obr. 53.

B. Sdružování nomogramů (kombinování).

Jiný způsob nomografického zobrazení vztahu mezi více než třemi proměnnými spočívá na možnosti rozkladu vztahu zavedením pomocných proměnných na dílčí vztahy, které samy o sobě lze zobrazit spojnicovými nomogramy, a to takovými, o nichž byla řeč v předešlých odstavcích a které v dalším budeme nazývat jednoduchými (díličmi). Obecnou myšlenku rozkladu vztahu postřehneme snadno z případu a příkladu vztahu o čtyřech proměnných.

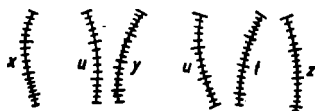
Vztah mezi čtyřmi proměnnými. Budiž vztah o čtyřech proměnných

$$F(x, y, z, t) = 0 \quad (F)$$

takový, že jej lze rozložit zavedením pomocné proměnné u na dva dílčí vztahy

$$F^I(x, y, u) = 0 \quad F^{II}(z, t, u) = 0.$$

Má-li při tom vztah F^I tvar některého z dříve uvažovaných kanonických tvarů²⁴⁾ lze jej zobrazit jednoduchým nomogramem (díličím); podobně,



Obr. 54.

má-li vztah F^{II} tvar některého z uvedených kanonických tvarů,²⁴⁾ je zobrazitelný také spojnicovým nomogramem (díličím). Viz schema v obr. 54. Zobra-

zením dílčích nomogramů pro F^I a F^{II} jednak nomograficky zobrazen i vztah původní (F); neboť užívající dílčích nomogramů, řešíme vztah (F) tímto postupem:

Pro dané hodnoty x_0, y_0, z_0 najdeme hodnotu čtvrté proměnné t_0 , která s nimi splňuje vztah (F), tak, že najdeme v nomogramu vztahu F^I k hodnotám x_0, y_0 příslušnou hodnotu pomocné proměnné u_0 , potom v nomogramu vztahu F^{II} k hodnotě u_0 a z_0 odečteme hodnotu t_0 .

Poznámka. Rozklad pochopitelně nutno tak provést, aby

²⁴⁾ Obecně, je-li schopný anamorfosy (viz str. 12).

Rozsah pomocné proměnné u vypočteme z rovnic

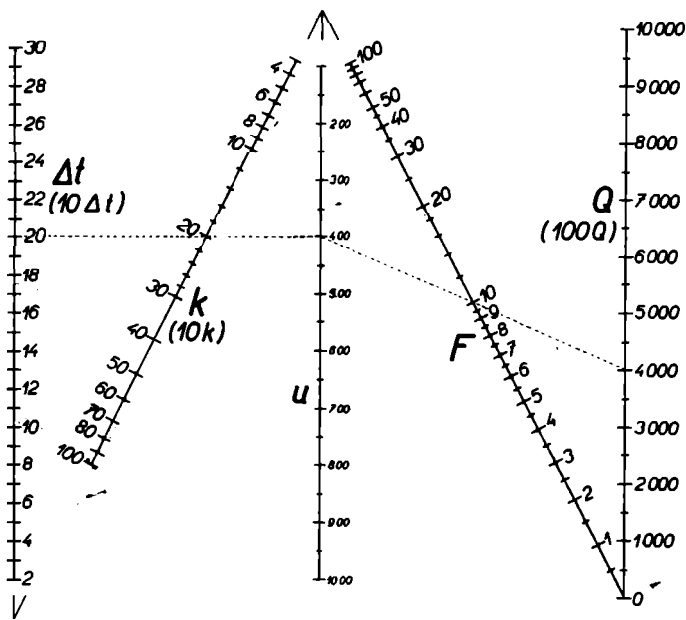
$$u_{\min} = k_{\min} \cdot \Delta t_{\min} = 3 \cdot 2 = 6$$

$$u_{\max} = k_{\max} \cdot \Delta t_{\max} = 35 \cdot 30 \doteq 1000$$

Moduly:

$$\alpha = 0,25 \text{ cm}, \left(\alpha = \frac{L}{t_{\max} - t_{\min}} = \frac{L}{30 - 2} = \frac{7 \text{ cm}}{28} = 0,25 \text{ cm} \right);$$

$$\beta = 0,0075 \text{ cm}, \left(\beta = \frac{L}{u_{\max} - u_{\min}} = \frac{7,5 \text{ cm}}{1000} = 0,0075 \text{ cm} \right).^{25)}$$



Obr. 55. Zakresleno řešení pro hodnoty $k = 20$, $\Delta t = 20$,
($u = 400$), $Q = 4\,000$; $F = 10$!

²⁵⁾ Hodnota $u_{\min} = 6$ zanedbána, jako nepatrná proti $u_{\max} = 1000$.

Nomogram lze sestrojiti jen užitím těchto relací, proto nás nezajímá velikost $\bar{\delta}$!

Při řešení vztahu Q z nomogramu nezáleží vůbec na velikosti proměnné u , stačí znáti pouze průsečky, kde příslušné spojnice protínají nositelku u . Mohli bychom proto stupnici u očíslovat jako měřítko o libovolném modulu. V obr. 55 bylo k vůli výkladu ponecháno kotování, které odpovídá hodnotám vypočteným z částečných vztahů.

Abychom zvětšili přesnost čtení na nomogramu v částech, kde spojnice se protínají se stupnicemi pod malým úhlem [na př. při $\Delta t = 2$, $k = 5$, $Q = 100$; $F = 10$] hledáme řešení vztahu Q z upraveného tvaru

$$(100 \cdot Q) = (10 \cdot k) \cdot (10 \cdot \Delta t) \cdot F. \quad (Q')$$

V nomogramu se nám tato úprava projeví tak, že hodnotu $k = 2$ odčítáme na stupnici Δt u koty 20, hodnotu $k = 5$ u koty $k = 50$ a $Q = 100$ u koty $Q = 10\,000$. Takže spojnice $k = 2$, $\Delta t = 5$, jejíž poloha je velmi nespolehlivá, je nahrazena spojnicí $\Delta t = 20$, $k = 50$. Viz obr. 55. Vyjádřeno slovně znamená úprava možnost řešení vztah z nomogramu, jestliže současně odčítáme:

na stupnici k hodnoty 10krát menší, než jsou tam připsány, na stupnici Δt taktéž hodnoty 10krát menší, než jsou připsány, a

na stupnici Q hodnoty 100krát menší, než jsou vepsány v nákrese.

Obecně lze úpravu rovnice Q provést konstantami m , n , p , q

$$mQ = (nk) \cdot (p \Delta t) \cdot qF,$$

mezi nimiž existuje relace $m = npq$. Konstanty volíme ovšem okrouhle, abychom jimi mohli paměti násobit nebo dělit koty v nomogramu.

Uvažované úpravy lze využít i k tomu, abychom zvýšili přesnost nákresu. Všimněme si, že proměnná k se mění v rozsahu $\langle 2; 35 \rangle$ a potom $\langle 100; 1000 \rangle$. Nomogram stačí zakreslit pro k v rozsahu $\langle 2; 35 \rangle$ a v něm pak můžeme hledat řešení vztahu i pro k v rozsahu $\langle 100; 1000 \rangle$, uijeme-li úpravy

$$\frac{1}{10}Q = \frac{1}{10}k \cdot \Delta t \cdot F.$$

Nebylo by příliš pohodlné, kdybychom musili koty $\langle 2; 35 \rangle$ násobiti vždy třiceti a k nim nalezená Q násobiti taktéž třiceti (nevyvarovali bychom se i možného omylu, že zapomeneme Q násobit). Je proto výhodné stupnici k a Q opatřit kotami

příslušnými rozsahu $k < 100; 1000$. Číslice přiřepíme třeba červeně po druhé straně stupnice (v obr. 55 toto kotování nevyznačeno.)

Vzhledem k tvaru částečných vztahů byl aplikován při zobrazení vzorce Q kanonický tvar (K_2). Víme však podle str. 51, že vztahy mající tvar součinů můžeme logaritmovat a jejich zobrazení provést podle kanonického tvaru (K_3). Provedme pro srovnání s předchozím výsledkem zobrazení vzorce (Q) také po logaritmování.

Návrh nomogramu pro vztah $\log k + \log \Delta t + \log F - \log Q = 0$.

Rozložení vztahu

$$\log k + \log \Delta t - \log u = 0. \quad (1)$$

$$\log u + \log F - \log Q = 0. \quad (2)$$

Srovnání a zobrazení vztahu (1) podle kanonického tvaru (K_3) str. 47.

$$\log k + \log \Delta t - \log u = 0,$$

$$\psi_1 + \psi_2 - \psi_3 = 0.$$

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \alpha \psi_1 = \alpha \log k;$$

$$\xi_2 = \delta, \quad \eta_2 = \beta \psi_2 = \beta \log \Delta t;$$

$$\xi_3 = \frac{\alpha \delta}{\beta + \alpha}, \quad \eta_3 = + \frac{\alpha \beta}{\beta + \alpha}, \quad \psi_3 = \frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} \log u,$$

po dosazení modulů

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = 5 \log k \text{ cm};$$

$$\xi_2 = 4 \text{ cm}, \quad \eta_2 = 5 \log \Delta t \text{ cm};$$

$$\xi_3 = 2 \text{ cm}, \quad \eta_3 = 2,5 \log u \text{ cm}.$$

Moduly: $\alpha = 5 \text{ cm}$, $\beta = 5 \text{ cm}$; $\delta = 4 \text{ cm}$. Obr. 56.

Relace: $k = 10$, $u = 10t$.

Srovnání a zobrazení vztahu (2) podle kanonického tvaru (K_3)

$$\log u - \log Q + \log F = 0,$$

$$\psi_1 + \psi_2 - \psi_3 = 0.$$

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \alpha' \log u;$$

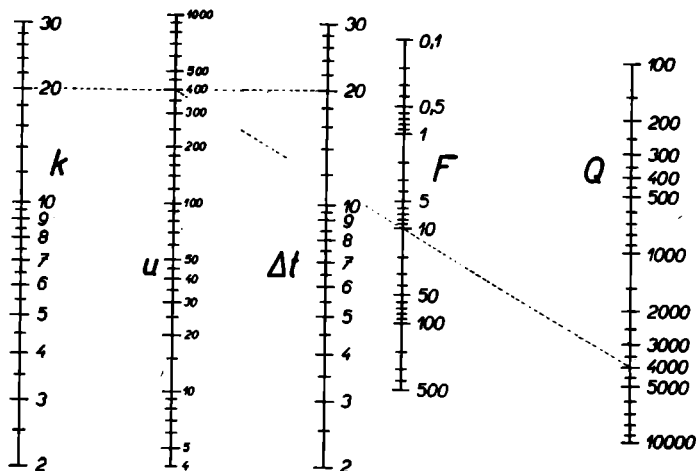
$$\xi_2 = \delta', \quad \eta_2 = -\beta' \log Q;$$

$$\xi_3 = \frac{\alpha' \delta'}{\alpha' + \beta'}, \quad \eta_3 = -\frac{\alpha' \beta'}{\alpha' + \beta'} \log F;$$

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = 2,5 \log u \text{ cm};$$

$$\xi_2 = 6 \text{ cm}, \quad \eta_2 = -2,5 \log Q \text{ cm};$$

$$\xi_3 = 3 \text{ cm}, \quad \eta_3 = -1,25 \log F \text{ cm}.$$



Obr. 56. Zakresleno řešení pro hodnoty $k = 20$, $\Delta t = 20$,
 $(n = 400)$, $Q = 4000$; $F = 10$.

⁷ Moduly: $\alpha' = 2,5$ cm, $\beta' = 2,5$ cm. $\delta' = 6$ cm.

Relace: $u = 10$, $Q = 10F$; $u = 100$, $Q = 100F$ atp.

Srovnání částečných vztahů s kanonickým tvarem (K_3) bylo provedeno tak, aby stupnice proměnných u a F , jejichž hodnoty jsou soustavně vyhledávány, byly mezi stupnicemi ostatních proměnných, jejichž hodnoty jsou dány. V nomogramu 1 byla stupnice u umístěna mezi stupnicemi k a Δt a v nomogramu 2 stupnice F mezi u a Q .

Zvětší-li se počet proměnných ve vztahu, který má tvar součinu, provádí se rozklad úplně stejným postupem. Ukažme to na příkladě

$$f_5 = f_1 f_2 f_3 f_4.$$

Užijeme parametrů u , v a rozložíme na tři částečné vztahy

$$f_1 f_2 = u, \quad \text{I}$$

$$f_3 f_4 = \frac{1}{v}, \quad \text{II}$$

$$f_5 = \frac{u}{v}$$

III

(III vyjde po vložení u, v z I a II do vztahu původního). Všechny částečné vztahy zobrazíme pak podle vývodů ze str. 41 a násl. Ve vztahu II jsme položili $\frac{1}{v}$ proto, aby stupnice

páté proměnné vyšla mezi stupnice proměnné u, v , jak ukazuje schema v obr. 57. (Vztah II zobrazujeme z upravené rovnice $vf_3 - \frac{1}{f_4} = 0$

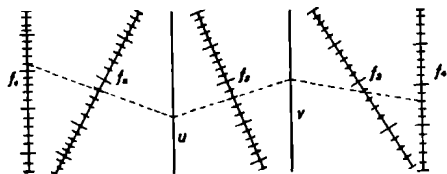
a vztah III z rovnice $vf_5 - u = 0$, aby bylo možné v nomogramu II a III ztotožnit stupnici v .)

Jestliže logaritmujeeme vztah f_5 , lze provést rozklad třeba tak, jak následuje

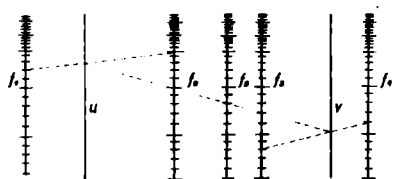
$$\begin{aligned} \log f_5 &= \log f_1 + \log f_2 + \log f_3 + \log f_4, \\ \log f_1 + \log f_2 &= u, \\ \log f_3 + \log f_4 &= v, \\ \log f_5 &= u + v. \end{aligned}$$

K tomu připojíme schema v obr. 58.

Při rozkladu daného vztahu na dílčí vztahy máme k dispozici určitou volnost vzájemného přiřazování funkcí po dvou do dílčího vztahu, čehož často využíváme, abychom zlepšili zobrazení; dbáme při tom, aby stupnice nejčastěji hledané neznámé byla nejzřetelnější.



Obr. 57.



Obr. 58.

Jiný příklad na sdružování nomogramů.

Návrh nomogramu pro vzorec

$$G = \gamma \cdot B \cdot (Ds - s^2) \frac{\pi}{10^6}$$

udávající váhu kruhových obručí G v kg, je-li γ specif. váha, D průměr v mm, s síla v mm.

Rozsahy proměnných

$$\begin{array}{ll} G \text{ kg } \langle 0; 900 \rangle; & D \text{ mm } \langle 200; 1000 \rangle; \\ \gamma \text{ kg/dm}^3 \langle 7; 9 \rangle; & s \text{ mm } \langle 5; 100 \rangle; \\ B \text{ mm } \langle 0; 400 \rangle. & \end{array}$$

Rozklad na dílčí vztahy:

$$(I) Ds - s^2 = t; \quad (II) B \cdot t \cdot \frac{1}{10^6} = u; \quad (III) G = \gamma \pi u.$$

Dílčí vztah (I) je zobrazen podle kanonického tvaru (K_1) (podrobně o zobrazení tohoto příkladu je pojednáno na str. 28) a vztahy (II) a (III) podle kanonického tvaru (K_2) a to užitím (2Z_3) a (1Z_3).

Příslušné zobrazovací rovnice jsou:

a) Pro dílčí vztah

$$\begin{array}{l} Ds - t - s^2 = 0, \\ h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 = 0. \\ \xi_1 = 0, \quad \eta_1 = 0,005 D \text{ cm}; \\ \xi_2 = 7 \text{ cm}, \quad \eta_2 = -0,000 05 t \text{ cm}; \\ \xi_3 = \frac{7}{0,01s + 1} \text{ cm}, \quad \eta_3 = \frac{0,000 05 s^2}{0,01s + 1} \text{ cm}. \end{array}$$

Moduly: $\alpha_1 = 0,005 \text{ cm}$, $\beta_1 = 0,000 05 \text{ cm}$ a $\delta_1 = 7 \text{ cm}$.
Srovnej obr. 14, str. 29 a obr. 60, kde stupnice t kotována hodnotami 100 krát menšími!

b) Pro dílčí vztah

$$\begin{array}{l} -tB + u \cdot 10^6 = 0, \\ \varphi_2 \varphi_3 + \varphi_1 = 0. \\ \xi_1 = 0, \quad \eta_1 = -0,000 05 t \text{ cm}; \\ \xi_2 = 6 \text{ cm}, \quad \eta_2 = 0,15 \cdot 10^{-6} u \cdot 10^6 \text{ cm} = 0,15 u \text{ cm}; \\ \xi_3 = \frac{6}{0,003B + 1} \text{ cm}, \quad \eta_3 = 0. \end{array}$$

Moduly: $\alpha_2 = 0,000 05 \text{ cm}$, $\beta_2 = 0,15 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$ ($\beta'_2 = 0,15 \text{ cm}$; viz zobrazovací rovnici η_2) a $\delta_2 = 6 \text{ cm}$. Obr. 60.

c) Pro dílčí vztah

$$-G + u\gamma\pi = 0,$$

$$\varphi_1 - \varphi_2\varphi_3 = 0.$$

$$\xi_1 = 0,$$

$$\xi_2 = 6 \text{ cm},$$

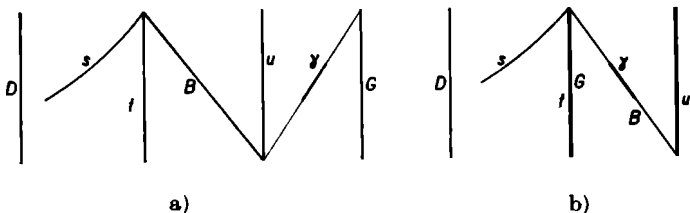
$$\xi_3 = \frac{0,005 \cdot 6 \cdot \pi\gamma}{0,15 + 0,005\pi\gamma} \text{ cm} = \frac{6\pi\gamma}{30 + \pi\gamma} \text{ cm},$$

$$\eta_1 = -0,005G \text{ cm};$$

$$\eta_2 = 0,15u \text{ cm};$$

$$\eta_3 = 0.$$

Moduly: $\alpha_3 = 0,005 \text{ cm}$, $\beta_3 = 0,15 \text{ cm}$ a $\delta_3 = 6 \text{ cm}$. Obr. 60.



Obr. 59.

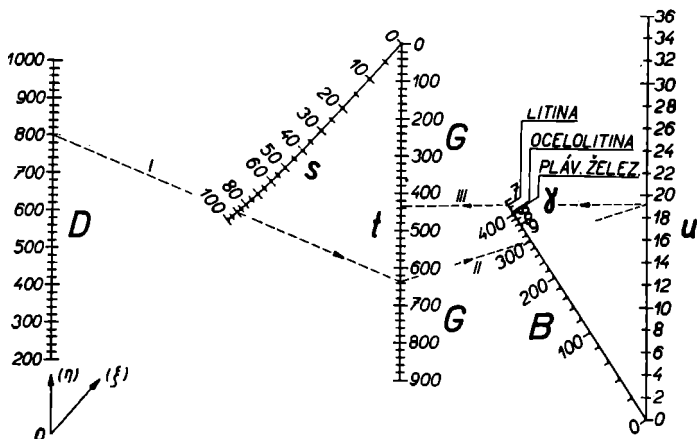
Schematicky můžeme načrtnout uspořádání nomogramů, jak ukazuje obr. 59a. Pro úsporu místa a potom se zřetelem na to, že dělení pomocných stupnic t a u lze provést zcela libovolně (normálně měřítkem o libovolném modulu), položeny nomogramy (II) a (III) na sebe. Při tom systémy souřadnic a δ_2 , δ_3 byly zvoleny tak, aby nositelky stupnic G a t se ztotožnily, právě tak jako nositelky stupnic B a γ (ztotožnění nositelek stupnic B a γ není nutné!). Jak se projeví požadovaná úprava grafu nákresu ve výpočtu souřadnic příslušných stupnic, je zřejmé z napsaných zobrazovacích rovnic. Schematicky lze dotčené uspořádání naznačit tak, jak ukazuje obr. 59b, kde silnými čarami vyznačena poloha nomogramu vztahu (III).

Je možné, aby některý z dílčích vztahů se zobrazoval nomogramem s binárními stupnicemi, nebo konečně i všechny dílčí vztahy mohou obsahovat binární stupnice.

Nevýhody sdružování nomogramů.

a) Odčítáme jednu, popřípadě i další nepotřebnou proměnnou.

b) Jistá nepřesnost, která pramení z toho, že odčítáme pomocnou proměnnou, jejíž nepřesné odečtení má za následek chybu při čtení v další části nomogramu.



Obr. 60. Zakresleno řešení $D = 800$, $s = 90$, (t , u neurčeny), $B = 300$, $\gamma = 7,25$; $G \doteq 436$.

Snažíme se proto vyhnouti se sdruženým nomogramům a nahraditi je jinými. (Viz nomogramy o rovnoběžných, resp. kolmých indexech.)

C. Nomogramy o rovnoběžných i kolmých indexech.

Zvláštní pozornosti si zaslouží prakticky velmi cenná skupina nomogramů, zvaných nomogramy o rovnoběžných indexech, resp. nomogramy o kolmých indexech.

Můžeme na ně pohlížeti jako na zvláštní případ nomogramů sdružených, které právě nahrazují. Vyložíme si však jejich princip bez navázání na předchozí výklad.

Mysleme si čtyři body A, B, C, D o souřadnicích resp. $(\xi_1; \eta_1)$, $(\xi_2; \eta_2)$, $(\xi_3; \eta_3)$ a $(\xi_4; \eta_4)$ tak položené, že spojnice AB je rovnoběžná se spojnicí CD (obr. 61). Mezi těmito

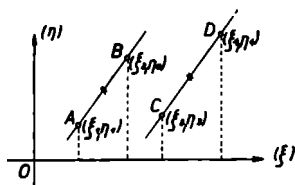
souřadnicemi platí vztah vyjadřující rovnost směrnic obou rovnoběžných spojnic $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$ čili

$$\frac{\eta_1 - \eta_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{\eta_3 - \eta_4}{\xi_3 - \xi_4}. \quad (S)$$

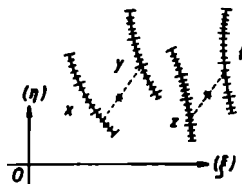
Měníme-li polohu bodu A a můžeme-li jeho nové souřadnice v každé poloze vyjádřit jako hodnoty funkcí, které závisí na témž parametru x , čili můžeme-li souřadnice bodu A vyjádřit obecně rovnicemi

$$\xi_1 = g_1(x), \quad \eta_1 = f_1(x), \quad (s_1)$$

vytvoří nové polohy bodu A pro různá x čáru [za předpokladu, že $g_1(x)$ a $f_1(x)$ jsou zobrazitelné funkce para-



Obr. 61.



Obr. 62.

metru x .] V nomogramu čáru upravíme jako stupnici, jestliže ke každému bodu připsáme příslušnou hodnotu x jako kotu²⁶⁾ (v obr. 62 stupnice označená x); říkáme také, že poloha bodu A závisí na parametru x .

Podobně buď poloha bodu B závislá na parametru y a jeho souřadnice vyjádřeny výrazy

$$\xi_2 = g_2(y), \quad \eta_2 = f_2(y). \quad (s_2)$$

Nové polohy bodu B vytvoří další (obecně křivou) stupnici, jestliže ke každému bodu připsáme příslušející kotu y .

²⁶⁾ Na čáře označujeme samozřejmě jenom body pro okrouhlé hodnoty x ; ostatně viz odst. O stupnicích.

V obr. 62 stupnice y . Bude-li platit totéž, co bylo řečeno pro body A, B , i pro body C, D , dostaneme ještě rovnice

$$\xi_3 = g_3(z), \quad \eta_3 = f_3(z), \quad (s_3)$$

vyjadřující body stupnice proměnné z a

$$\xi_4 = g_4(t), \quad \eta_4 = f_4(t) \quad (s_4)$$

vyjadřující body stupnice proměnné t .

Úhrnem dostaneme čtyři stupnice, a to stupnice proměnných x, y, z, t , které nomograficky zobrazují vztah

$$\frac{f_1(x) - f_2(x)}{g_1(x) - g_2(y)} = \frac{f_3(z) - f_4(t)}{g_3(z) - g_4(t)},$$

který píšeme stručně

$$\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = \frac{f_3 - f_4}{g_3 - g_4}, \quad (K_*)$$

jehož tvar jsme dostali tak, že jsme dosadili do rovnice (S) výrazy f_i, g_i za souřadnice ξ_i, η_i z rovnic s_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Z konstrukce stupnic vyplývá, že hodnoty x_0, y_0, z_0, t_0 , splňující vztah F , dosazený do rovnic s_i pro souřadnice, dávají právě souřadnice těch čtyř bodů A, B, C, D , které leží na rovnoběžných přímkách (a to přímka AB je rovnoběžná s přímkou CD).

Takže užitím nákresu, kterému říkáme nomogram o rovnoběžných indexech, řešíme vztah (K_*) podle návodu:

Jsou-li dány hodnoty x_0, y_0, z_0 , najdeme k nim hodnotu t_0 , která s nimi splňuje vztah (K_*) tak, že spojíme body kotované hodnotami x_0, y_0 a s touto spojnicí vedeme bodem z_0 rovnoběžku, která protne stupnici t v bodě t_0 .

Rovnoběžné spojnice užívané k řešení vztahu nazýváme indexy.

Z této věty, jakož i z konstrukce je patrné, proč nákres nazýváme nomogramem o rovnoběžných indexech.

Schematicky naznačíme postup řešení v nákresu klíčem.²⁷⁾

Příklad. Návrh nomogramu pro vztah

$$p = \frac{100k}{W \cdot T} \quad (p)$$

udávající výpočet procent p z celkové zkušební doby T hodin, kdy byla lednička na zkušebně v automatickém provozu. W příkon v kilowattech. K spotřeba proudu v kilowattech.

Rozsahy proměnných

$$\begin{array}{ll} p\% < 1; 100 >; & W \text{ (kWh)} < 0,1; 0,8 >; \\ k \text{ (kWh)} < 0,3; 10 >; & T \text{ (hod.)} < 3; 150 >. \end{array}$$

Předně přepíšeme vztah p na tvar (K_0)

$$\frac{p}{k} = \frac{100}{T} \quad \text{nebo} \quad \frac{p - 0}{0 - (-k)} = \frac{\frac{100}{T} - 0}{0 - (-T)}$$

Potom zavedme do poslední rovnice ještě nenulové konstanty α, β, γ , jejichž význam ihned vysvětlíme z dalšího, a to tak, že celou rovnici násobíme β , dělíme α a zlomek na pravé straně rozšíříme γ . Tím je vztah p na konec upraven na

$$\frac{\beta p - 0}{0 - (-\alpha k)} = \frac{\beta \gamma \frac{100}{T} - 0}{0 - (-\alpha \gamma T)}$$

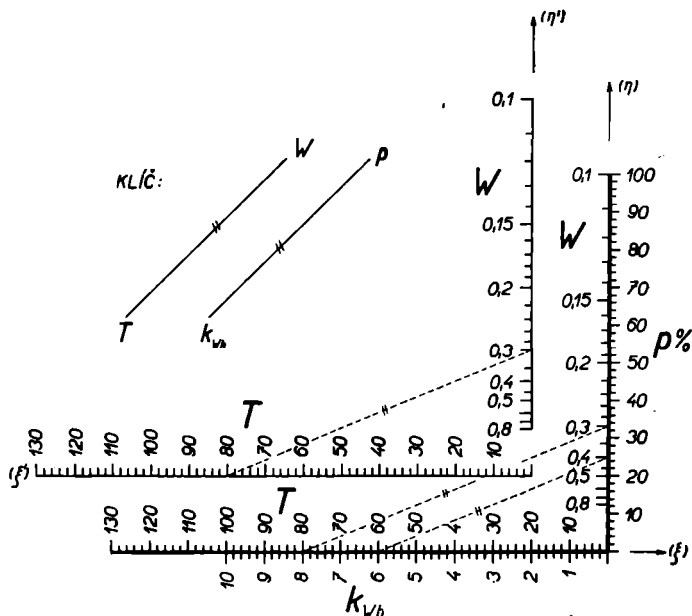
Srovnáme-li takto upravený vztah s rovnicí (S), můžeme napsat pro zakreslení nomogramu zobrazovací rovnice (které v obecném výkladu odpovídají rovnicím s_i):

$$\left. \begin{array}{ll} \xi_1 = 0, & \eta_1 = \beta p; \\ \xi_2 = -\alpha k, & \eta_2 = 0; \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \xi_3 = 0, & \eta_3 = \beta \gamma \frac{100}{T}; \\ \xi_4 = -\alpha \gamma T, & \eta_4 = 0. \end{array}$$

Z těchto rovnic vidíme, že konstanty $\alpha, \beta, \alpha\gamma, \beta\gamma$ jsou moduly souřadnic, a to těch, ke kterým jsou připsány.

²⁷⁾ Abychom nemuseli po každé při řešení nomogramu zakreslovat rovnoběžky, je dobře si zakreslit předem na průhledný papír osnovu rovnoběžek a tu při řešení položit na nomogram ve směru spojnice AB ; na rovnoběžce bodem C odečteme u bodu D na příslušné stupnici hledanou kotu.

Pro rozměry naší náčrtovny zvoleny $\alpha = 0,5$ cm, $\beta = 0,05$ cm, $\gamma = 0,1$ a tudíž $\alpha\gamma = 0,05$ cm, $\beta\gamma = 0,005$ cm. Nomogram vztahu p v obr. 63 je zakreslen stupnicemi na pravém úhlu silně vytaženém. Aby nedošlo k možné záměně proměnných při spojování kot, na př. abychom nespojili koty proměnných



Obr. 63. Zakresleno řešení $W = 0,3$, $T = 80$, $k = 6$; $p = 25$.

k a W místo T a W , bylo by výhodnější, kdyby nositelky stupnic nesplyvaly. Toho dosáhneme snadno, jestliže zakreslíme jednu dvojici stupnic k sobě příslušných v soustavě souřadnic posunutě. Tím se na rovnoběžnosti spojnic AB a CD nic nezmění. Tato obměna náčrtovny je v obr. 63 zakreslena s osami souřadnic ξ' , η' .

Analyticky vyjádříme možnost takového uspořádání náčrtovny následující úpravou vztahu (uvažujeme obecný případ):

$$\frac{\beta f_1 + m - (\beta f_2 + m)}{\alpha g_1 + n - (\alpha g_2 + n)} = \frac{\beta \gamma f_3 + p - (\beta \gamma f_4 + p)}{\alpha \gamma g_3 + q - (\alpha \gamma g_4 + q)}$$

Konstanty α, β, γ musí být nenulové, kdežto konstanty m, n, p, q mohou být jakákoliv čísla, nuly nevyjímaje.

Význam konstanty γ je patrný už z uvedeného příkladu. Jestliže totiž α, β jsou vhodné moduly pro levou stranu rovnice, nemusí se hodit ještě pro stranu pravou, a proto jejich velikost upravujeme konstantou γ . Na volbě konstant m, n záleží velikost posunutí stupnic proměnných x, y v souřadnicové soustavě ξ, η ; na volbě konstant p, q záleží velikost posunutí soustavy souřadnicové ξ', η' , v níž kreslíme pravou stranu rovnice, t. j. stupnice proměnných z, t . V uvedeném příkladě je voleno $m = 0, n = 0, p = 1 \text{ cm}$ a $q = -1 \text{ cm}$.

Úloha. Napište konečnou úpravu vztahu p pro udané posunutí soustavy souřadnic.

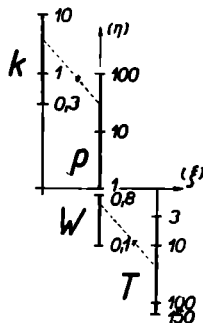
Zobrazovaný vztah (p) má tvar součinu funkcí, který jsme dříve zobrazovali sdruženými nomogramy. Je důležité, že i po logaritmování lze takové vztahy zobrazit nomogramem o rovnoběžných indexech.

Ukažme to na vztahu (p), který po logaritmování upravíme na

$$\frac{\log p - \log 100k}{0 + 1} = \frac{\log W - (-\log T)}{0 - 1}$$

čili na tvar (K_6).

Kdybychom zakreslili nomogram této rovnice bez vzájemného posunování soustav souřadnicových ξ, η a ξ', η' , v nichž kreslíme jednotlivé strany rovnic, dostali bychom náčrt, jehož uspořádání je naznačeno schematicky v obr. 64. Ale i po posunutí soustav souřadnicových můžeme být s náčrtem nespokojeni. Stupnice k a p i W a T neleží „proti sobě“, což má za následek, že indexy se protínají pod dosti ostrým úhlem. Posuňme proto ještě současně ve stejném smyslu stupnice k a W (také to mohly být stupnice p a T). Početně toto posunutí vyjádříme tím, že na obě strany rovnice



Obr. 64.

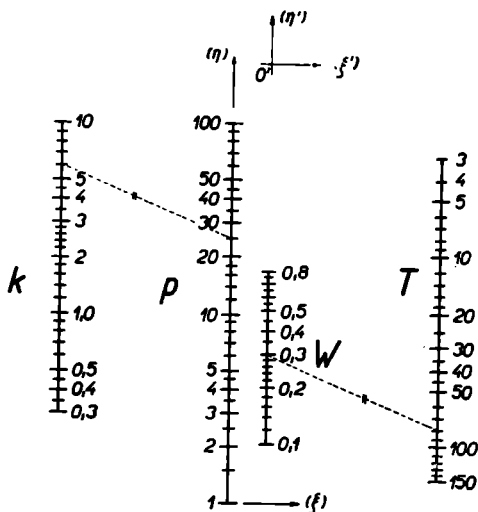
přičteme tutéž konstantu, kterou spojíme s proměnnou k a W , v příkladě rovnou 1 (při zavedení modulů α, β rovnou $\frac{\alpha}{\beta}$). Takže na konec zobrazujeme upravenou rovnici

$$\frac{\alpha [\log p - (\log 100k - 1)]}{0 + \beta} = \frac{\alpha [(\log W - 1) - (-\log T)]}{0 - \beta}$$

podle zobrazovacích rovnic vypsanych srovnáním s (S):

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0, & \eta_1 &= \alpha \log p; \\ \xi_2 &= -\beta, & \eta_2 &= \alpha (\log 100k - 1); \\ \xi_3 &= 0, & \eta_3 &= \alpha (\log W - 1); \\ \xi_4 &= \beta, & \eta_4 &= -\alpha \log T. \end{aligned}$$

Moduly: $\alpha = 2,5$ cm, $\beta = 2,25$ cm. Obr. 65.



Obr. 65. Zakreslené řešení $W = 0,2$, $T = 80$, $k = 6$; $p = 25$.

Pravou stranu rovnice zobrazujeme v posunutě soustavě souřadnic s počátkem $O' (0,5; 5,8)$ (posunutí vzhledem k soustavě ξ, η , v níž nakreslena levá strana rovnice). V upravené

rovnici není vyjádřeno posunutí soustavy souřadnic zavedením konstant p, q , abychem rovnici nekomplikovali. Stačí si uvědomit, že vnitřní souvislost stupnic vzhledem k řešení vztahu se neporuší, kreslíme-li pravou stranu rovnice v soustavě souřadnicové libovolně posunutě vzhledem k soustavě, v níž je kreslena strana levá.

Nejobecnější úpravu vztahu (K_4) dostaneme, jestliže jej přepíšeme na tvar

$$\frac{(\alpha f_1 + \beta g_1) - (\alpha f_2 + \beta g_2)}{(\gamma f_1 + \delta g_1) - (\gamma f_2 + \delta g_2)} = \frac{(\alpha f_3 + \beta g_3) - (\alpha f_4 + \beta g_4)}{(\gamma f_3 + \delta g_3) - (\gamma f_4 + \delta g_4)},$$

ten dostaneme, jestliže rovnici (F) napsanou ve tvaru

$$\begin{vmatrix} f_1 - f_2 & g_1 - g_2 \\ f_3 - f_4 & g_3 - g_4 \end{vmatrix} = 0$$

násobíme nenulovým determinantem z konstant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}!$$

Nomogramy s kolmými indexy.

Myslíme-li si, že v obr. 61 body CD jsou kresleny v jiné soustavě souřadnic než body AB , a otočíme-li soustavy vzájemně o 90° , dostaneme místo rovnoběžnosti spojnic AB a CD jejich kolmost. V tom případě mluvíme o nomogramech s kolmými indexy.

Při návrhu nomogramu vypíšeme zobrazovací rovnice úplně shodně, jak jsme to prováděli dříve a jenom při konstrukci nákresu vynášíme stupnice jedné strany zobrazeného vztahu v soustavě otočené o 90° .

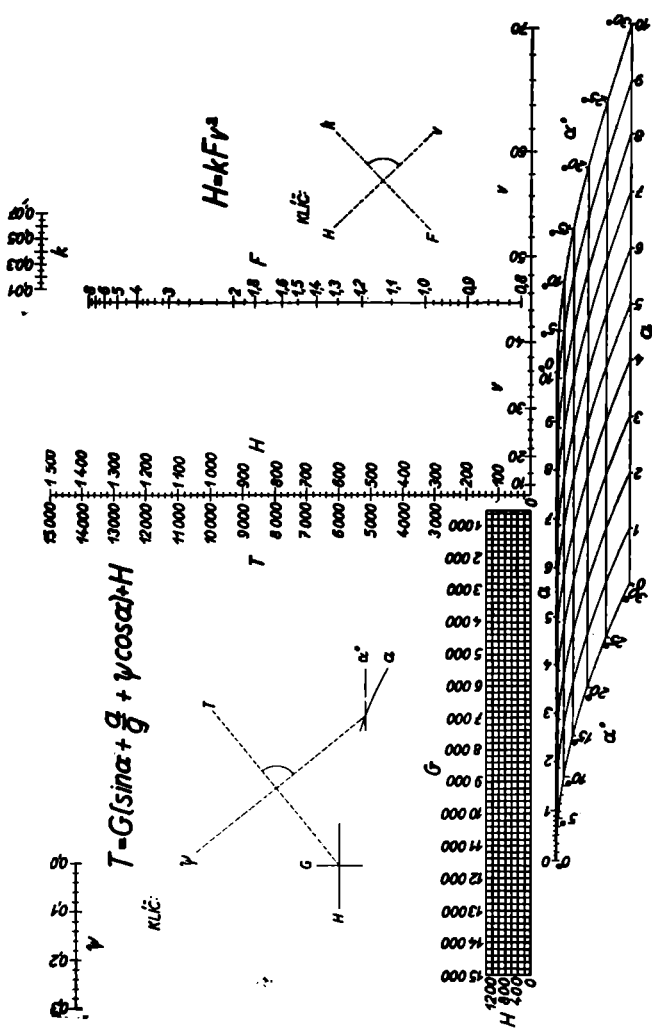
Příklad. Návrh nomogramu pro vztah

$$H = kFv^2$$

určující u automobilu odpor vzduchu H v kg z plochy největšího příčného řezu F v m^2 a rychlosti v v m/sec; k je konstanta závislá na tvaru karoserie.

Rozsahy proměnných: $H < 0; 1500 \rangle$, $F < 0,8; 8 \rangle$, $v < 0; 70 \rangle$, $k < 0,01; 0,07 \rangle$.

Přepíšeme rovnici vztahu na tvar



Obr. 66.

$$\frac{mH + 0}{0 - nv^2} = \frac{mpk + 0}{0 - np \frac{1}{F}}$$

m, n, p jsou nenulové konstanty, které zvolíme později. Srovnávající tuto rovnici s rovnicí (K_6), dostáváme zobrazovací rovnice:

(v I. soustavě souřadnic)

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0, & \eta_1 &= mH; \\ \xi_2 &= +nv^2, & \eta_2 &= 0; \end{aligned}$$

(v II. soustavě souřadnic otočené o 90° vzhledem k soustavě I.)

$$\begin{aligned} \xi_3 &= 0, & \eta_3 &= mpk; \\ \xi_4 &= +np \frac{1}{F}, & \eta_4 &= 0. \end{aligned}$$

Moduly: $m = 0,0042$ cm, $n = 0,00125$ cm, $p = 4000$; $mp = 16,8$ cm, $np = 5$ cm. Obr. 66. (vpravo).

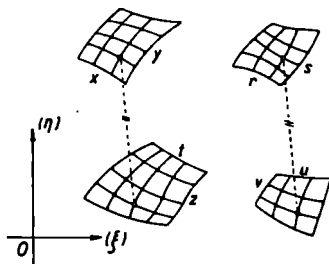
Užijeme-li při těchto nomogramech také binární stupnice (srov. str. 74), můžeme jimi zobrazit vztah až o osmi proměnných. Neboť lze-li vztah o osmi proměnných uvést na tvar

$$\frac{f_{12} - f_{34}}{g_{12} - g_{34}} = \frac{f_{56} - f_{78}}{g_{56} - g_{78}},$$

můžeme jej zobrazit nomogramem podle rovnic [plynoucích srovnáním s rovnicí (S)]

$$\begin{aligned} \xi_1 &= g_{12}, & \eta_1 &= f_{12}; \\ \xi_2 &= g_{34}, & \eta_2 &= f_{34}; \\ \xi_3 &= g_{56}, & \eta_3 &= f_{56}; \\ \xi_4 &= g_{78}, & \eta_4 &= f_{78}. \end{aligned}$$

Těmto zobrazovacím rovnicím odpovídá schema v obr. 67.



Obr. 67.

Příklad. Návrh nomogramu pro vztah

$$T = G \left(\sin \alpha + \frac{a}{g} + \psi \cos \alpha \right) + H$$

udávající obvodovou sílu T v závislosti na váze vozu G v kg, úhlu svahu α° , zrychlení a , koeficientu drsnosti vozovky ψ a odporu vzduchu H , (g zemské zrychlení).