Aritmetické hry a zábavy

1. Doplnění naznačených výkonů

In: Karel Čupr (author): Aritmetické hry a zábavy. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1942. pp. 5–9.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403029

1.
DOPLNĚNÍ NAZNAČENÝCH VÝKONŮ.

Znalosti nejjednodušších vlastností celých čísel je třeba při řešení úloh tohoto druhu: *Nahraďte vhodnými číslicemi písmena A, B, C, D v tomto schematě:* $AB \,.\, AB = CDDD$. Zato jest tu třeba více postřehu, důvtipnosti a přesného myšlení.

1. Jedná se vlastně o druhou mocninu dvojciferného čísla, poněvadž žádná druhá mocnina nekončí na 2, 3, 7, 8, jest D nejvýše rovno 0, 1, 4, 5, 6, 9. Žádný čtverec není však tvaru .000 nebo .555 (v posledním případě by dvojciferné číslo musilo končiti 5, druhá mocnina pak 25), proto D jest nejvýše rovno 1, 4, 6, 9. Avšak 6 to nemůže býti, jelikož původní číslo by musilo býti sudé, tedy jeho čtverec by musel býti dělitelný 4 a tomu tak není. Číslicí 1 končí druhé mocniny čísel tvaru $10\nu \pm 1$; jest však $(10\nu \pm 1)^2 - 1$ dělitelno dvaceti, kdežto číslo $.111 - 1$ dvaceti dělitelno není. Právě tak ukážeme, že číslo nemůže končiti 9, dvojciferné číslo by musilo býti tvaru $10\nu \pm 3$ a číslo $(10\nu \pm 3)^2 - 9$ jest dělitelno dvaceti, kdežto $.999 - 9$ jest dělitelno pouze desíti. Jest tedy nejvýše $D = 4$, tedy nutno vyšetřiti čísla: 1444, 2444, 3444, 4444, 5444, 6444, 7444, 8444, 9444. Čtverci pak musí býti i čtvrtiny těchto čísel: 361, 611, 861, 1111, 1361, 1611, 1861, 2111, 2361; jednalo by se tedy o druhou mocninu čísla tvaru $10\nu \pm 1$. Týmž způsobem jako dříve zjistíme, že se nejvýše může jednati o některé z čísel 361, 861, 1361, 1861, 2361, z nichž pouze první jest úplný čtverec $= 19^2$. Jest tedy hledané číslo 38 a jeho čtverec 1444.

2. Řešme ještě tuto úlohu: *Doplňte vhodnými číslicemi toto schema*:

$$
\begin{array}{cccccl}
A & B & 7 & 7 & C & : \alpha\, 2\, 5 = \beta\, \gamma\, \delta \\
a & b & c & & & \\
\hline
D & E & F & 7 & & \\
d & 3 & Z & G & & \\
\hline
 & K & L & M & N & \\
 & K & L & M & N & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Dělenec musí býti dělitelen 5, proto $C = 5$, dále $N = 5$, $G = 7$; δ musí býti liché: 1; 3; 5; 7; 9; ale jen $.25 \times 3 = .75$ a $.25 \times 7 = .75$, proto $\delta = 3; 7$. Pak jest $M = 7$, takže $G = 0$, jest tedy γ číslo sudé (0 nemůže býti, jelikož by v druhém částečném součinu nemohla býti 3). f jest rovno buď 0 nebo 5; dále všimněme si toho, že α nemůže býti rovno 1 nebo 6; dělitel by byl dělitelen 125, kterýmžto číslem dělenec dělitelen není. Máme nyní toto schema:

$$
\begin{array}{llllll}
A & B & 7 & 7 & 5 & :\alpha 2 5 = \beta\gamma\,{}^{3}_{7} \\
a & b & c & & & \\
\hline
D & E & F & 7 & & \\
d & 3 & Z & 0 & & \\
\hline
 & K & L & 7 & 5 & \\
 & K & l & 7 & 5 & \\
\hline
 & & & 0 & & \\
\end{array}
$$

Provedeme-li nyní násobení čísel 225; 325; 425; 525; 725; 825; 925 čísly 2; 4; 6; 8, zjistíme, že tvaru $d300$ jsou součiny 325×4, 825×4, tvaru $d350$ pak součiny 225×6, 725×6. Zkusme nyní dělitele 725 a 825: vzhledem k prvnímu částečnému součinu musilo by býti $\alpha = 1$, což odporuje předchozímu tvrzení. Proto jest dělenec roven některému ze součinů $325 \times .4{}^{3}_{7}$ nebo $225 \times .6{}^{3}_{7}$; avšak δ nemůže býti rovno 3, poněvadž třetí částečný součin jest čtyřciferný. Dělenec jest pěticiferný, proto jest roven některému ze součinu 325×147, 325×247, 225×167, 225×267, 225×367, z nichž pouze první má na místě set 7; je tedy hledaný výsledek $47775 : 325 = 147$.

Nejsložitější z těchto úloh jest úloha o „sedmi sedmičkách“, jest to malá detektivní historie, v níž neznáme ani zavražděného (dělence) ani vraha (dělitele) ani důvody zločinu; po zlém činu zůstalo jen několik málo indicií (sedm sedmiček), jak patrno z tohoto schematu:

$$
\begin{array}{lllr}
 & & A\,B\,7\;C\,D\,E\,L\,Q\,W\,z : \alpha\beta\gamma\delta 7\varepsilon = \varkappa\lambda 7\mu\nu & \\
2.\ ř. & \ldots\ldots & \underline{a\;b\;\Delta\;c\;d\;e} & \ldots\ldots \times\varkappa \\
3.\ ř. & \ldots\ldots & F\,G\,H\,J\,K\,7\,L & \\
4.\ ř. & \ldots\ldots & \underline{f\;g\;h\;i\;k\;\Xi\;l} & \ldots\ldots \times\lambda \\
5.\ ř. & \ldots\ldots & \quad M\,7\,N\,O\,P\,Q & \\
6.\ ř. & \ldots\ldots & \quad \underline{m\;7\;n\;o\;p\;q} & \ldots\ldots \times 7 \\
7.\ ř. & \ldots\ldots & \quad R\,S\,T\,U\,\Sigma\,V\,W & \\
8.\ ř. & \ldots\ldots & \quad \underline{r\;s\;t\;u\;7\;v\;\nu} & \ldots\ldots \times\mu \\
9.\ ř. & \ldots\ldots & \qquad X\,Y\,Z\,x\,y\,z & \\
10.\ ř. & \ldots\ldots & \qquad \underline{X\,Y\,Z\,x\,y\,z} & \ldots\ldots \times\nu \\
 & & \qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Vyšetřování provedeme pomocí dvojího pozorování: Některé předpoklady povedou nás k rozporům v počtu míst té které řádky. Znak $V \gtreqless \check{r}$ nám bude značiti, že výsledek má stejně nebo více nebo méně míst než dotyčný řádek; jiné předpoklady nám dají výsledky, jež budou v rozporu s předepsaným nebo již vyšetřeným tvarem, což budeme značiti $V \not\equiv \check{r}$; $V \equiv \check{r}$ značí shodu.

a) α musí býti rovno 1, kdyby $\alpha > 1$, byl by sedminásobek dělitele větší než $\check{r}_6$. Dále jest patrno, že $F = f = 1$, $R = r = 1$. Nyní určíme s. Dělitel jest nejvýše roven číslu 199979, takže částečný součin nejvýše jest $9 \times 199979 = 1799811$, jest tedy $s \leqq 7$; pod dvěma sedmičkami stojící S jest buď 0 nebo 9; poněvadž ve sloupci pod S a s není ničeho, jest $S = s = 0$. Poněvadž $R = 1$, $S = 0$, jest $M = m + 1$, tedy $m \leqq 8$, takže $\check{r}_6$ jest nejvýše $87nopq$.

b) $\beta < 3$, sice by $13\gamma\delta 7\varepsilon \times 7 > \check{r}_6$; může tedy býti $\beta = 0, 1, 2$. Rozhodně jest $\beta \neq 0$, poněvadž ani $109\delta 7\varepsilon \times$ $\times\ 9 \sim \check{r}_4$. Zkusme nyní $\beta = 1$. Tvrdím, že pak musí býti i $\gamma = 1$, jinak by $7.11\gamma\delta 7\varepsilon \not\equiv \check{r}_6$. Číslice δ, ε, μ nyní jest nutno voliti tak, aby součin $11\gamma\delta\varepsilon \times \mu$ byl sedmimístný a tvaru $rstu7vw$; nutně musí býti $\mu = 9$; avšak součin $\delta 7\varepsilon . 9$ musí míti na třetím místě zprava po vzetí opravy z násobení druhého místa 7, t. j. jednotky ve výrazech $9\delta + 6$, $9\delta + 7$ musí býti 7; to lze jen pro $\delta = 0$ nebo 9. Avšak $11197\varepsilon \times 7 > \check{r}_6$, proto ani β ani γ není rovno 1, jest tudíž $\beta = 2$; dále $m = 8$ a tudíž i $M = 9$. Dělitel d jest nyní v intervalu:

$$\frac{870000}{7} < d < \frac{879999}{7}$$

a s ohledem na tvar dělitele jest

$$124375 < d < 125674, \quad 870625 < \check{r}_6 < 879718.$$

c. Jest tedy γ buď rovno 4 nebo 5. Stanovme nejprve μ; $\check{r}_8 = 10tu7vw$, poněvadž $124375 . \mu < \check{r}_8 < 125674\mu$, jest

$$\frac{\check{r}_8}{125674} < u < \frac{\check{r}_8}{124375},$$

takže $\mu = 8$.

d) Trojčlenná nerovnice o $\check{r}_8$ zní $995000 < \check{r}_8 < 1005392$, tedy dle počtu míst v $\check{r}_8$ jest $\gamma = 5$, takže $d = 125\partial 7\varepsilon$, podíl $p = \varkappa\lambda 78\nu$; d jest nyní v intervalu $125070 < d < 125679$. Z poslední nerovnice plyne $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, avšak jen $125447\varepsilon . 8 \equiv \check{r}_8$, jest tedy $\delta = 4$, a dále $f = 0$, $\mu = 3$. Poněvadž $12547\varepsilon . \lambda$ jest sedmimístné, $\lambda \geqq 8$, poněvadž $12547\varepsilon \times \times 7 < \check{r}_4$.

Napišme si nyní posledních 6 řádků dosadíce získané hodnoty:

$$\begin{array}{llllllll}
9 & 7 & N & O & P & Q & & \\
8 & 7 & 8 & o & p & q & & \\
\hline
1 & 0 & T & U & \Sigma & V & W & \\
1 & 0 & 0 & 3 & 7 & v & w & \\
\hline
 & & X & Y & Z & x & y & z \\
 & & X & Y & Z & x & y & z \\
\hline
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Sloupci pod N po úvaze o prvních dvou sloupcích nelze učiniti jinak zadost, než když $N = 9$, $T = 1$, ale pak $X = x = 1$. Poněvadž $2d > 200000$, jest nutně $\nu = 1$, načež plyne $Y = 2$, $Z = 5$, $x = 4$, $y = 7$, $z = \varepsilon$.

Naše detektivní historie blíží se ke konci. Vraha (dělitele 12547ε) jsme již téměř dopadli, známe velmi přibližně i motivy vraždy ($\varkappa\lambda 781$, $\lambda = 8, 9$); nejméně víme o oběti (zde jsme jen zjistili, že $z = \varepsilon$), za to k původním indiciím jsme připojili velmi mnoho jiných.

Další postup jen naznačíme. Poněvadž $12547\varepsilon \times 8 > \check{r}_6$, jakmile $\varepsilon \geqq 5$, jest ε rovno některé z hodnot 0, 1, 2, 3, 4. Tak pro skupinu vw obdržíme 5 hodnot, pro skupinu opq rovněž 5 hodnot; pro skupinu $\Xi 1$ pak dvakráte pět hodnot. Kombinujeme-li první dvě skupiny s jednou skupinou třetí, obdržíme celkem 10 případů, z nichž našemu (již doplněnému) schematu hoví pouze $\varepsilon = 3$, $\lambda = 8$, takže $d = 125473$, $p = \varkappa 8781$, indicie se však na tolik rozmnožily, že z rovnice

$$AB7CDE = 125473\varkappa + ab\Delta cde$$

stanovíme $k = 5$, takže $p = 58781$, načež dělenec jest $58781 \times 125473 = 7375428413$.

Příklady: 1. Doplňte správnými číslicemi součet:

$ABCDE + abcde = dadCed$ (96327 + 85104 = 181341).

Pozn.: číslice 5 a 6 lze zaměniti.

2.
```
 6.8... : ..9 = .5.
 ...2
 ----
  .9..
  ..4.
 -----
  ...4.
  .....
 -----
      0
```
(63897 : 749 = 853).

3. A nyní jeden velmi „nesnadný“ úkol:

$KOBYLAMALYBOK : KKKKKKK = KKKKKKK$.

(Ihned jest zřejmo, že $K = 1$, dělitel = podíl = 1111111, dělenec 1111111^2.)