V.

KVADRIKY V SOUŘADNICÍCH ROVNOBĚŽKOVÝCH.

25. Středové kvadriky. Nesingulární kvadrika, která se nedótýká nevlastní roviny, nazývá se kvadrika středová.

Pól S nevlastní roviny vzhledem k středové kvadrice proto není bodem nevlastním a neleží na kvadrice. Protože s ním sdružené póly jsou vesměs nevlastní body, je kvadrika podle něho středově souměrná. Proto pól S nazýváme středem kvadriky a přímky (tětivy) resp. roviny jím procházející jsou průměry resp. průměrové (diametrální) roviny plochy. Kuželosečky ležící v rovinách diametrálních jsou diametrální (průměrové) řezy plochy.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby kvadrika f o rovnici (18,1) resp. (18,2) v souřadnicích rovnoběžkových homogenních resp. nehomogenních byla středová je, aby kromě $A \neq 0$ bylo též

$$A_{44} \neq 0, \tag{25,1}$$

kde, jak známo, A_{44} je k a_{44} příslušný minor v diskriminantu A.

Skutečně, jen je-li podmínka (25,1) splněna, nevlastní rovina není tečnou rovinou plochy f protínajíc ji v nesingulární kuželosečce f^* o rovnicích (19,5). Všechny body této kuželosečky jsou ovšem nevlastní; proto ji budeme nazývati nevlastní kuželosečkou plochy f. Minor A_{44} je zřejmě diskriminant kuželosečky f^* ve smyslu odst. 2, takže (25,1) skutečně vyjadřuje, že f^* není singulární kuželosečka.

K téže podmínce (25,1) bychom dospěli z rovnice (23,3) plochy f v souřadnicích rovinových; vyjadřuje pak, že souřadnice (0; 0; 0; 1) nevlastní roviny rovnici (23,3) nevyhovují, t. j. že nevlastní rovina není tečnou rovinou plochy f.

Souřadnice středu S kvadriky f o rovnici (18,1), nebo (18,2), vypočteme jako souřadnice pólu roviny (0; 0; 0; 1) podle (21,3) řešením soustavy rovnic

$$f_1(y) = 0, \quad f_2(y) = 0, \quad f_3(y) = 0, \tag{25,2}$$

z níž vyplývají souřadnice středu S

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = A_{14} : A_{24} : A_{34} : A_{44}. \tag{25,3}$$

Procházejíce pólem nevlastní roviny jsou roviny průměrové polárními rovinami nevlastních bodů. Je-li $(l; m; n; 0)$ jeden z nich, je

$$l\, f_1(x) + m\, f_2(x) + n\, f_3(x) = 0 \tag{25,4}$$

rovnice roviny průměrové, která je jeho polární rovinou ϱ. Směr o parametrech $(l; m; n)$ nazýváme sdružený se směrem roviny ϱ; průměr r tohoto směru je sdružen s průměrovou rovinou ϱ a obráceně.

Všeobecně lze definovati: směry dvou přímek, dvou rovin nebo přímky a roviny jsou sdružené vzhledem ke kvadrice f, jsou-li jejich nevlastní prvky polárně sdružené vzhledem k nevlastní kuželosečce f^* kvadriky f.

Tečné roviny v bodech diametrálního řezu, ležícího v ϱ, jsou vesměs rovnoběžny s r obalujíce válcovou plochu druhého stupně. Obráceně tečné roviny v průsečících průměru r s kvadrikou jsou rovnoběžny s ϱ.

Dva sdružené průměry středové kvadriky jsou sdruženy vzhledem k diametrálnímu řezu, ležícímu v jejich rovině. Existují též trojice průměrů navzájem sdružených. Označíme-li průměry takové trojice s jejich směrovými parametry $r\ (l; m; n)$, $r'\ (l'; m'; n')$, $r''\ (l''; m''; n'')$, jsou jejich nevlastní body vrcholy polárního trojúhelníka nevlastní kuželosečky f^* plochy f, což vyjadřuje rovnice

$$\begin{aligned} f^*(r, r') \equiv a_{11}ll' + a_{22}mm' + a_{33}nn' + a_{12}\,(lm' + l'm) + \\ + a_{13}\,(ln' + l'n) + a_{23}\,(mn' + n'm) = 0 \end{aligned} \tag{25,5}$$

a obdobné dvě rovnice

$$f^*(r, r'') = 0 \quad \text{a} \quad f^*(r', r'') = 0.$$

Dvojice stěn trojhranu r, r', r'' jsou sdružené roviny průměrové, t. j. prvá obsahuje průměr sdružený s druhou a obráceně.

Rovina nevlastní doplňuje trojhran r, r', r'' na polární čtyrstěn kvadriky f.

Takových čtyrstěnů existuje celé množství. Lze totiž prvý průměr r vésti středem S zcela libovolně, a průměr r' libovolně středem S v průměrové rovině ϱ sdružené s r, kdežto r'' je prvými dvěma jednoznačně určen.

Platí věta:

Rovnici středové kvadriky f v homogenních souřadnicích rovnoběžkových lze nekonečně mnoha způsoby redukovati na tvar (22,2), a to tím způsobem, že za souřadnicový čtyrstěn zvolíme jeden z polárních čtyrstěnů kvadriky f, jejichž jedna stěna je rovina nevlastní.

V nehomogenních souřadnicích rovnoběžkových tato redukovaná rovnice podle (5,2) zní

$$f(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0; \qquad (25,6)$$

z jejího tvaru je obráceně možno usouditi, že souřadnicový čtyrstěn je polární čtyrstěn středové kvadriky f, jehož jedna stěna je rovina nevlastní.

Kužel tečen středové kvadriky, procházejících jejím středem S, je t. zv. asymptotický kužel kvadriky f. Jeho tvořící přímky se dotýkají plochy f v bodech její nevlastní kuželosečky f^*, ve kterých tečné roviny kvadriky se ztotožňují stečnými rovinami kužele asymptotického.

Jeho rovnici obdržíme z (20,7), kam položme $z \equiv x$, $y_i = A_{i4}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ podle (25,3), takže tato rovnice zní

$$f^2(y, x) - f(y, y)\, f(x, x) = 0, \qquad (25,7)$$

kde

$$f(y, x) \equiv x_1 f_1(y) + x_2 f_2(y) + x_3 f_3(y) + x_4 f_4(y) \equiv x_4 f_4(y)$$

podle (20,3) a (25,2).

Stejným způsobem vychází

$$f(y, y) \equiv y_4 f_4(y),$$

kde ještě

$$f_4(y) \equiv a_{41}A_{14} + a_{42}A_{24} + a_{43}A_{34} + a_{44}A_{44} = A.$$

Rovnice asymptotického kužele (25,7) plochy f po krácení výrazem $-A \neq 0$ nabývá tvaru

$$A_{44} f(x, x) - A x_4^2 = 0,$$

čili v souřadnicích nehomogenních

$$A_{44} f(x, y, z) - A = 0. \tag{25,8}$$

Libovolná rovina ϱ protíná kvadriku a její asymptotický kužel v dvojici kuželoseček dotýkajících se navzájem ve společných bodech roviny ϱ a nevlastní kuželosečky f^* plochy f. Rovina diametrální protíná asymptotický kužel v asymptotách diametrálního řezu plochy f, který v ní leží.

Rovina ϱ seče plochu f v parabole jen tehdy, když její nevlastní přímka je tečnou nevlastní kuželosečky f^*, t. j. jen když je rovnoběžná s některou tečnou rovinou asymptotického kužele. Může ovšem nastati i ten případ (odst. 33), že průsečná kuželosečka takové roviny s plochou není parabola, nýbrž je složena ze dvou rovnoběžných přímek.

Z nehomogenního tvaru (25,8) rovnice asymptotického kužele vyplývá velmi důležitá vlastnost minoru A_{44} diskriminantu A. Předpokládejme, že jsme rovnoběžkové souřadnice x, y, z transformovali v jiné rovnoběžkové souřadnice x', y', z' podle soustavy rovnic (12,4), kde podle (12,5) jest $\delta \neq 0$. Rovnice (18,2) kvadriky f nechť se tak transformovala v rovnici

$$f'(x', y', z') \equiv a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' +$$
$$+ 2a'_{13}x'z' + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0.$$

Tvrdím, že jest

$$A'_{44} = \delta^2 A_{44}. \tag{25,9}$$

K důkazu stačí uvážiti, že soustava rovnic (12,4) je zvláštní případ soustavy (12,1) s determinantem

$$c = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \delta,$$

jak plyne rozvedením tohoto determinantu podle posledního řádku.

Při této transformaci je tedy podle (24,13)

$$A' = \delta^2 A. \tag{25,10}$$

Rovnice asymptotického kužele kvadriky v nových souřadnicích podle (25,8) zní

$$A'_{44} f'(x', y', z') - A' = 0, \tag{25,11}$$

odkud podle (25,10) a po dosazení $f'(x', y', z') \equiv f(x, y, z)$ vychází rovnice

$$A'_{44} f(x, y, z) - \delta^2 A = 0.$$

Jejím srovnáním s nehomogenním tvarem (25,8) vychází (25,9), což bylo dokázati.

Platí tedy věta:

Při transformaci rovnoběžkových souřadnic v jiné rovnoběžkové souřadnice násobí se minor A_{44} diskriminantu A rovnice kvadriky f čtvercem determinantu transformace.

26. Nestředové kvadriky. Nesingulární kvadrika, mající v nevlastní rovině tečnou rovinu, nazývá se kvadrikou nestředovou nebo paraboloidem.

Pól S_3 roviny nevlastní vzhledem k paraboloidu f je proto bod nevlastní.

Je to současně jediný existující singulární bod nevlastní kuželosečky f^* plochy f. Je tedy f^* složena ze dvou nevlastních přímek t_1, t_2, které jsou tvořícími přímkami paraboloidu a protínají se v S_3. Jsou vždy různé, a to buď reálné, nebo sdruženě imaginární. V prvém případě paraboloid se nazývá hyperbolický, v druhém eliptický.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby rovnice (18,1) nebo (18,2) byla rovnicí paraboloidu v souřadnicích rovnoběžkových je — jak z úvah předchozího odstavce vyplývá —

$$A_{44} = 0. \tag{26,1}$$

S ohledem na to pro souřadnice dotykového bodu S_3 nevlastní roviny vychází z (25,3)

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = A_{14} : A_{24} : A_{34} : 0. \tag{26,2}$$

Jsou tedy A_{14}, A_{24}, A_{34} parametry směru charakterisovaného nevlastním bodem S_3; přímky tohoto směru budeme nazývati průměry a roviny s ním rovnoběžné průměrové roviny paraboloidu f.

Jsou tedy všechny průměry paraboloidu navzájem rovnoběžné; každý z nich protíná paraboloid — nehledě k nevlastnímu bodu S_3 — jen v jediném bodě, který je vždy reálný a vlastní.

Rovnici každého paraboloidu v souřadnicích rovnoběžkových lze dáti tvar (24,1) resp. (24,2). Skutečně, protože $x_4 = 0$ je rovnice roviny nevlastní, která je tečnou rovinou paraboloidu, stačí ve shodě s odst. 24 zvoliti v nevlastním bodě S_3 vrchol (0; 0; 1; 0) souřadnicového čtyrstěnu, další vrchol V (0; 0; 0; 1) v jiném (lastním) bodě paraboloidu, neležícím ani na t_1 ani na t_2, stěnu $x_3 = 0$ v tečné rovině bodu V a konečně stěny $x_1 = 0$ a $x_2 = 0$ ve dvou polárně sdružených rovinách, procházejících hranou S_3V.

Je-li takto zvolen souřadnicový čtyrstěn — což je zřejmě možno nekonečně mnoha způsoby — vyhovuje všem nutným a postačujícím podmínkám pro to, aby rovnice paraboloidu v rovnoběžkových souřadnicích měla tvar (24,1) resp. (24,2).

Nikoliv průměrová rovina ϱ je sdružena s průměrem r, když nevlastní přímka roviny ϱ a průměr r tvoří dvojici sdružených polár paraboloidu f.

Podle vět odstavců 23 a 24 paraboloid je hyperbolický, nebo eliptický, podle toho, je-li diskriminant jeho rovnice

$$A > 0 \text{ nebo } A < 0.$$

V prvém případě, t. j. na hyperbolickém paraboloidu, existují dva reguly přímek, z nichž prvý obsahuje nevlastní přímku t_1, druhý t_2. Odtud je, připomeneme-li si, že přímky různých regulů jsou incidentní, patrna věta:

Každý z obou regulů hyperbolického paraboloidu má řídící rovinu průměrovou, s níž jsou jeho přímky rovnoběžné. Obě řídící roviny jsou vždy různé.

Na eliptickém paraboloidu není žádných reálných přímek.

27. Roztřídění kvadrik podle reálnosti a podle druhu nevlastní kuželosečky. Nyní můžeme provésti roztřídění nesingulárních kvadrik podle těchto znaků:

1. Nevlastní kuželosečka f^* je nesingulární, nebo singulární (čili kvadrika f je středová, nebo paraboloid).

2. Nevlastní kuželosečka f^* je reálná, nebo imaginární.

3. Na kvadrice f existují, nebo neexistují reálné body (čili f je reálná, nebo imaginární kvadrika).

4. Na kvadrice f existují nebo neexistují reálné přímky (čili stručně kvadrika f je, nebo není přímková).

Tyto čtyři znaky nejsou ovšem navzájem zcela nezávislé. Tak na př. kvadrika přímková je též reálná, nebo na př. kvadrika se singulární reálnou kuželosečkou (hyperbolický paraboloid) je přímková i reálná a t. p. Neexistuje proto 16, nýbrž pouze 6 podle těchto znaků různých druhů nesingulárních kvadrik, a to:

1. Jednodílný hyperboloid je reálná přímková středová kvadrika s reálnou nevlastní kuželosečkou. Je zde $A > 0$, $A_{44} \neq 0$ a rovnici plochy v rovnoběžkových souřadnicích lze redukovati na tvar (25,6) se dvěma koeficienty kladnými a dvěma zápornými.

2. Dvojdílný hyperboloid je reálná středová kvadrika, nikoliv přímková, s reálnou nevlastní kuželosečkou.

Pro tento druh kvadrik je $A < 0$, $A_{44} \neq 0$ a rovnici plochy v rovnoběžkových souřadnicích lze dáti tvar (25,6) s koeficientem a_{11} kladným a ostatními zápornými.

3. Elipsoid je reálná středová kvadrika, nikoliv přímková, s imaginární nevlastní kuželosečkou. Je tedy $A < 0$, $A_{44} \neq 0$ a rovnice plochy v souřadnicích rovnoběžkových je redukovatelna na tvar (25,6) s jediným koeficientem a_{44} záporným.

4. Imaginární elipsoid je středová, nikoliv přímková, kvadrika, jejíž nevlastní kuželosečka je imaginární, což je ovšem obsaženo v tom, že celá kvadrika je imaginární.

V tomto případě je $A > 0$, $A_{44} \neq 0$ a v rovnoběžkových souřadnicích rovnici plochy je možno uvésti na tvar (25,6) s koeficienty vesměs kladnými.

Imaginární elipsoid zakončuje skupinu kvadrik středových. Přesto, že to je plocha imaginární, nelze ji pominouti již z toho důvodu, že s ní spojené geometrické útvary nejsou vesměs imaginární. Reálná je na př. polarita vzhledem k ní. Reálnost koeficientů rovnice kvadriky nemá totiž vždy za následek reálnost plochy, ale zaručuje reálnost polarity vzhledem k ní (při tom reálnou polaritou rozumějme takovou, ve které reálným bodům korespondují reálné roviny a obráceně). V důsledku toho je střed imaginárního elipsoidu reálný.

Do skupiny nestředových nesingulárních kvadrik náleží pouze dva nám již známé druhy kvadrik, a to:

5. Hyperbolický paraboloid, reálná přímková kvadrika s reálnou singulární kuželosečkou nevlastní. Je zde $A > 0$, $A_{44} = 0$ a rovnici plochy v souřadnicích rovnoběžkových lze redukovati na rovnici (24,2) s $a_{11}a_{22} < 0$.

6. Eliptický paraboloid, reálná nikoliv přímková kvadrika se singulární nevlastní kuželosečkou, složenou ze dvou sdruženě imaginárních nevlastních přímek. Pro ni jest $A < 0$, $A_{44} = 0$ a její rovnici lze redukovati na tvar (24,2) s $a_{11}a_{22} > 0$.

Tím je t. zv. afinní roztřídění nesingulárních kvadrik ukončeno. Doplňme jej stejným roztříděním kuželů a válců druhého stupně.

7. Kvadratický kužel reálný má reálný vlastní singulární bod, t. zv. vrchol, kterým procházejí všechny jeho tvořící přímky, vesměs reálné. Spojují vrchol kužele s nevlastními body jeho nevlastní kuželosečky, která je nesingulární a reálná. V jeho rovnici v souřadnicích rovnoběžkových je $A = 0$, $A_{44} \neq 0$ a lze ji redukovati na (25,6), kde $a_{44} = 0$ a zbývající tři koeficienty nemají vesměs stejná znaménka.

8. Kvadratický kužel imaginární má jediný bod reálný, který je vlastní a singulární a nazývá se opět vrchol kužele. Přímky tvořící jsou ovšem imaginární stejně jako nevlastní kuželosečka plochy, která je nesingulární. Koeficienty jeho rovnice v rovnoběžkových souřadnicích splňují vztahy $A = 0$, $A_{44} \neq 0$. Táž rovnice je redukovatelna na tvar (25,6) s $a_{44} = 0$ a se zbývajícími koeficienty vesměs kladnými.

9. Kvadratický válec hyperbolický má nevlastní kuželosečku singulární a reálnou, složenou ze dvou reálných nevlastních přímek. Jejich společným nevlastním bodem procházejí všechny tvořící přímky plochy, které jsou tedy rovnoběžné a reálné. Jeho rovnici lze redukovati na (25,6) s $a_{33} = 0$, $a_{11}a_{22} < 0$, takže je $A = A_{44} = 0$, což platí i u všech dalších druhů.

10. Kvadratický válec eliptický se od hyperbolického liší jen tím, že jeho singulární nevlastní kuželosečka je složena ze dvou sdruženě imaginárních přímek nevlastních, majících společný reálný bod nevlastní, jímž pro-

cházejí všechny tvořící přímky válce. Jeho rovnici lze redukovati na (25,6), kde $a_{33} = 0$, $a_{11}a_{44} < 0$, $a_{22}a_{44} < 0$.

11. Kvadratický válec imaginární má stejně jako předchozí druh nevlastní kuželosečku složenu ze dvou sdruženě imaginárních přímek nevlastních, jejichž společný nevlastní bod S je jediný reálný bod plochy. Je to ovšem bod singulární a procházejí jím všechny ostatní tvořící přímky kužele, které jsou ovšem též imaginární. V reálných rovinách procházejících bodem S leží dvojice těchto tvořících přímek, které jsou sdruženě imaginární a mají společný reálný bod S. Rovnici plochy lze opět redukovati na (25,6), kde $a_{33} = 0$, $a_{11}a_{44} > 0$, $a_{22}a_{44} > 0$.

12. Kvadratický válec parabolický je jediná plocha mezi nesingulárními kvadrikami, kuželi a válci, která má za nevlastní kuželosečku dvakráte počítanou reálnou nevlastní přímku u. Jinak řečeno, nevlastní rovina se parabolického válce podél u dotýká. Plocha je vždy reálná, neboť roviny obsahující u ji protínají po druhé v reálné vlastní přímce. Rovnici parabolického válce v rovnoběžkových souřadnicích lze dáti tvar (24,2) s $a_{22} = 0$.

Nevlastní kuželovečka středové kvadriky a její asymptotický kužel jsou vždy současně reálné, nebo imaginární; střed kvadriky je tudíž podle odst. **21** vnitřním bodem reálného elipsoidu, ale vnějším bodem obou hyperboloidů. Tím je dáno rozdělení bodů prostoru těmito plochami na vnitřní a vnější.

Příklady k cvičení.

97. Určete druh kvadriky dané rovnicí v souřadnicích rovnoběžkových (event. určete střed, směr průměrů, vrchol, nebo směr tvořících přímek):

a) $x^2 + y^2 + 5xy - 2xz - 16x - 9y + 2z + 9 = 0$, b) $2x^2 - 3y^2 - z^2 + 4xy - 8yz + 6xz + 2x - 8y - 11z - 2 = 0$, c) $3x^2 + 8y^2 + 6z^2 - 6x + 8y - 12z - 24 = 0$, d) $x_1{}^2 + x_3{}^2 - 2x_1x_4 - 2x_3x_4 - 2x_4{}^2 = 0$, e) $45x^2 + 116y^2 + 96yz + 144z^2 - 30x + 92y - 24z - 689 = 0$, f) $7x_1{}^2 + 100x_2{}^2 - 48x_1x_3 - 7x_3{}^2 + 62x_1x_4 - 100x_2x_4 - 34x_3x_4 + 98x_4{}^2 = 0$, g) $315x^2 + 216xy + 66y^2 + 24xz + 240yz + 464z^2 - 216x + 882y - 578z - 441 = 0$, h) $xy + z = 0$, i) $64x^2 + 75y^2 + 96xz +$

$+ 36z^2 + 30y - 297 = 0$, j) $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 4xz - 2yz + z^2 - 8x + 6y + 2z = 0$, k) $16x^2 - 96xy + 144y^2 + 24xz - 72yz + 9z^2 - 133x - 108y - 480z + 20\frac{1}{4} = 0$. [Nejdříve určete hodnotu diskriminantu A, načež řešte soustavu tří rovnic $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, čímž určíte souřadnice středu, nebo vrcholu kvadriky, popř. směr průměrů, nebo tvořících přímek kvadriky, nebo nevlastní přímku kvadriky, válce parabolického (po zavedení homog. souřadnic)].

Výsledky.

a) Jednodílný hyperboloid o středu $(1; 2; -2)$. b) Dvojdílný hyperboloid o středu $(\frac{1}{2}; -1; 0)$. c) Elipsoid o středu $(1; -\frac{1}{2}; 1)$; směry os $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ tvoří trojici směrů navzájem sdružených. d) Eliptický válec s osou v rovinách $x - 1 = 0$ a $z - 1 = 0$. e) Elipsoid o středu $(\frac{1}{8}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$. f) Dvojdílný hyperboloid o středu $(-1; \frac{1}{2}; 1)$. g) Eliptický paraboloid o směrových parametrech průměru $(4; -12; 3)$. h) Hyperbolický paraboloid dotýkající se v počátku roviny $(\vec{x}\ \vec{y})$, s průměrem v ose $\vec{z}$. i) Elipt. válec s osou o parametr. rovnicích $x = 3t$, $y = -\frac{1}{8}$, $z = -4t$. j) Hyperbolický válec s osou o parametr. rovnicích $x = 2t$, $y = 1 + t$, $z = 5t$. k) Parabolický válec s nevlastní tvořící přímkou v rovině $4x - 12y + 3z = 0$. Tvořící přímky jsou rovnoběžny též s rovinou $f_4 = 0$, t. j. s rovinou $133x + 108y + 480z = 0$.]

98. Jaký je význam rovnice (25,8) v případech $A = 0$, $A_{44} \neq 0$ resp. $A \neq 0$, $A_{44} = 0$ resp. $A = 0$, $A_{44} = 0$? [Je-li kvadrika kužel, asymptotický kužel se s ní ztotožňuje. Je-li kvadrika paraboloid, rovnice (25,8) dává nevlastní rovinu dvakrát počítanou. Pro parab. válec rovnice je splněna identicky.]

99. Jakým podmínkám vyhovují koeficienty rovnice plochy v souř. rovnoběžkových, leží-li její střed a) v některé rovině souřadnic, b) na některé souřadnicové ose, c) v počátku? [a) Jeden, b) dva, c) všechny tři z minorů A_{14}, A_{24}, A_{34} jsou nuly (podle (25,4)).]

100. Jsou-li (x_0, y_0, z_0) souřadnice středu kvadriky f, lze rovnici jejího asymptotického kužele psáti ve tvaru

$$a_{11}(x-x_0)^2 + a_{22}(y-y_0)^2 + a_{33}(z-z_0)^2 + 2a_{12}(x-x_0)(y-y_0) + 2a_{13}(x-x_0)(z-z_0) + 2a_{23}(y-y_0)(z-z_0) = 0. \quad (27,1)$$

Dokažte! [Buď dokažte, že (27,1) je kužel o vrcholu $(x_0; y_0; z_0)$ a o nevlastní kuželosečce totožné s nevlastní kuželosečkou kvadriky f, nebo dokažte totožnost kužele (27,1) s kuželem (25,8) dosadivše za souřadnice středu podle (25,3)!]

101. Podle rovnice (27,1) příkladu **100** napište rovnice asymptotických kuželů kvadrik o rovnicích v příkl. **97** a), b), c), e), f). [a) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 5(x - 1)(y - 2) - 2(x - 1) \cdot (z + 2) = 0$. b) $2(x - \frac{1}{2})^2 - 3(y + 1)^2 - z^2 + 4(x - \frac{1}{2}) \cdot (y + 1) - 8(y + 1)z + 6(x - \frac{1}{2})z = 0$. c) $3(x - 1)^2 + 8(y + \frac{1}{2})^2 + 6(z - 1)^2 = 0$. e) $45(x - \frac{1}{3})^2 + 116(y + \frac{1}{2})^2 + 144(z - \frac{1}{4})^2 + 96(y + \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4}) = 0$. f) $7(x + 1)^2 + 100(y - \frac{1}{2})^2 - 7(z - 1)^2 - 48(x + 1)(z - 1) = 0$.]

102. Určete bod půlící tětivu elipsoidu úlohy c) příkladu **97**, která leží na přímce o směrových parametrech (2; 3; 4) a jde bodem (1; 1; 1) aniž určíte průsečíky přímky plochou. [Hledaný bod leží v průměrové rovině (25,4), sdružené s daným směrem tětivy, jejíž rovnice je $x + 4y + 4z - 3 = 0$, a má souřadnice $(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}; \frac{1}{5})$.]

103. Určete rovnice průměrů sdružených se směry souřadnicových rovin! [Z (25,4) plyne, že směr. parametry průměru sdruženého s rovinou $x_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) vyhovují dvěma rovnicím

$$l_i a_{1r} + m_i a_{2r} + n_i a_{3r} = 0,$$
$$l_i a_{1s} + m_i a_{2s} + n_i a_{3s} = 0,$$

kde r, s jsou ona z čísel 1, 2, 3, která jsou od i různá. Odtud plyne

$$l_i : m_i : n_i = \left\| \begin{matrix} a_{1r} & a_{2r} & a_{3r} \\ a_{1s} & a_{2s} & a_{3s} \end{matrix} \right\|.]$$