Vektory a tensory

Dodatek. Determinanty

In: Vladimír Ryšavý (author): Vektory a tensory. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1944. pp. 110–114.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403070

DODATEK.

DETERMINANTY.

1. Permutace n prvků 1, 2, 3, ..., n jsou, jak známo, skupiny utvořené ze všech n prvků lišící se jen pořádkem prvků. Jest jich $n! = 1 . 2 . \ldots . n$. Předchází-li v permutaci (1, 3, 4, 2) vyšší prvek před nižším (32, 42), nastává inverse. Permutace o sudém počtu inversí jmenují se sudé (1, 3, 4, 2), s lichým počtem inversí pak liché (1, 3, 2, 4). Obojích je stejně mnoho $\frac{1}{2}n!$.

2. Determinant n-tého stupně je vytvořen z n^2 čísel a_{ik} sestavených ve čtvercovém schematu

$$\begin{array}{llll} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}, \end{array}$$

kde v čísle a_{ik} značí prvý index řádek, druhý sloupec. Determinant lze definovati jako součet $n!$ součinů

$$\Sigma \pm a_{1i}a_{2j}a_{3k} \ldots a_{ns}, \tag{1}$$

v němž $i, j, k, \ldots, s$ značí všechny permutace čísel 1, 2, ..., n, a v němž znamení $+$ náleží permutacím sudým, $-$ lichým. Determinant označujeme stručně $|a_{ik}|$ nebo podrobněji dvěma svislými čarami kolem čtvercového schematu:

$$D_n = |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

Determinant třetího stupně má tedy hodnotu:

$$D_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{3}$$

Zavedeme-li symbol $\varepsilon^{ijk\ldots s}$, který se rovná $+1$ pro sudé permutace čísel $1, 2, \ldots, n$, -1 pro permutace liché a 0, jsou-li aspoň dva indexy stejné, lze psáti determinant

$$D_n = \Sigma \varepsilon^{ijk\ldots s} a_{1i} a_{2j} \ldots a_{ns}, \tag{4}$$

nebo podle úmluvy o stejných indexech jednodušeji

$$\begin{aligned} D_n &= \varepsilon^{ijk\ldots s} a_{1i} a_{2j} \ldots a_{ns} \\ &= \varepsilon^{ijk\ldots s} a_{i1} a_{j2} \ldots a_{sn} \\ &= \frac{1}{n!} \varepsilon^{ijk\ldots s} \varepsilon^{\alpha\beta\ldots\sigma} a_{i\alpha} a_{j\beta} \ldots a_{s\sigma}. \end{aligned} \tag{4$_1$}$$

Z vlastnosti symbolu ε plyne, že determinant, jehož dva řádky nebo sloupce jsou shodné, má hodnotu nulovou.

3. Minor A_{ik} prvku a_{ik} v determinantu D_n je determinant, který vznikne z D_n vynecháním i-tého řádku a k-tého sloupce, opatřený znaménkem $(-1)^{i+k}$. Je tedy stupně $(n-1)$. Vytkneme-li na př. v D_3 prvky jednoho řádku, máme

$$D_3 = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

jinak

$$D_3 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \tag{5}$$

Totéž platí o determinantech stupně n-tého:

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}. \tag{6}$$

Protože determinant se dvěma stejnými řádky (sloupci) jest nulou, jest pro $i \neq k$ $(p \neq q)$

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0 = \sum_i a_{ip}A_{iq}. \tag{7}$$

4. Znásobíme-li prvky libovolného sloupce (řádku) týmž číslem ϱ, vznikne determinant o hodnotě ϱD_n, neboť

$$\varrho a_{i1}A_{i1} + \varrho a_{i2}A_{i2} + \ldots + \varrho a_{in}A_{in} = \varrho D_n. \tag{8}$$

5. Přičteme-li v determinantu k prvkům jednoho sloupce (řádku) prvky ostatních sloupců (řádků) násobené vždy stejnými čísly $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$, nezmění se hodnota determinantu D_n, neboť

$\varrho_1 = 1$

$$\left| \begin{matrix} a_{11} + \varrho_2 a_{12} + \ldots + \varrho_n a_{1n}, \ a_{12}, \ \ldots, \ a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix} \right| =$$

$$= \sum_i (a_{i1} + \varrho_2 a_{i2} + \ldots) A_{i1} =$$

$$= \sum_i a_{i1} A_{i1} + \varrho_2 \sum_i a_{i2} A_{i1} + \ldots + \varrho_n \sum_i a_{in} A_{i1} = \sum_i a_{i1} A_{i1} = D_n,$$

neboť všechny ostatní členy jsou nuly podle (7).

6. Jsou-li prvky k-tého sloupce (řádku) součty m sčítanců, tedy

$$a_{1k} = b_{1k} + c_{1k} + \ldots + m_{1k}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{nk} = b_{nk} + c_{nk} + \ldots + m_{nk},$$

jest determinant

$$D_n = \sum_i a_{ik} A_{ik} + \sum_i b_{ik} A_{ik} + \ldots + \sum_i m_{ik} A_{ik},$$

neboli rovná se součtu m determinantů, které dostaneme z daného, nahradíme-li sloupec k-tý postupně jednoduchými sloupci $b, c, \ldots, m$. Na př.:

$$\left| \begin{matrix} b_{11} + c_{11}, & a_{12} \\ b_{21} + c_{21}, & a_{22} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} b_{11}, & a_{12} \\ b_{21}, & a_{22} \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} c_{11}, & a_{12} \\ c_{21}, & a_{22} \end{matrix} \right|.$$

7. Násobení determinantů téhož stupně provádí se podle vzorce

$$| a_{ik} | \, . \, | b_{ik} | = | c_{ik} |,$$

kde

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \ldots + a_{in} b_{kn} = \sum_r a_{ir} b_{kr}, \qquad (9)$$

nebo také

$$| a_{ik} | \, . \, | b_{ik} | = | d_{ik} |,$$

kde

$$d_{ik} = \sum_r a_{ir} b_{rk}. \qquad (10)$$

Každý sloupec determinantu $|c_{ik}|$ se skládá totiž z n částečných sloupců, takže se celý determinant rovná součtu n^n determinantů tvaru

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{1k_1}b_{1k_1}, \ldots, a_{1k_n}b_{1k_n} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{nk_1}b_{nk_1}, \ldots, a_{nk_n}b_{nk_n} \end{vmatrix} = b_{1k_1}b_{2k_2}\ldots b_{nk_n} \begin{vmatrix} a_{1k_1}, \ldots, a_{1k_n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{nk_1}, \ldots, a_{nk_n} \end{vmatrix}.$$

Skupiny $k_1, \ldots, k_n$ jsou variace čísel $1, 2, \ldots, n$ s opakováním, a jest jich n^n. Jsou-li všechna k ve variaci různá, je to permutace, a příslušný determinant označíme Δ_k^p. Značíme-li $A = |a_{ik}|$, jest

$$\Delta_k^p = \varepsilon^{k_1k_2\ldots k_n} b_{1k_1}b_{2k_2} \ldots b_{nk_n}A,$$

takže součet těchto determinantů dává podle (4)

$$\Sigma\Delta_k^p = B \,.\, A = A \,.\, B.$$

Determinanty Δ_k^v, kde aspoň dvě k jsou stejná, jsou rovny nule, protože jejich determinant $|a_{1k_1} \ldots a_{1k_n}|$ má aspoň dva sloupce stejné. Je tedy opravdu

$$C = A \,.\, B.$$

8. Determinant sestavený z minorů A_{ik} prvků a_{ik} determinantu D slove determinant **sdružený** Δ. Násobením obou dostáváme

$$D \,.\, \Delta = |B_{ik}|,$$

kde

$$B_{ik} = \sum_j a_{ij}A_{kj},$$

avšak podle (7) je $B_{ik} = 0$ pro $i \neq k$, kdežto pro $i = k$ máme $B_{ii} = D$. Proto jest

$$D \,.\, \Delta = D^n, \; \Delta = D^{n-1}. \tag{11}$$

9. Budiž $\alpha = |\alpha_k^i|$ determinant n-tého stupně a definujme podle (44) prvky $\beta_i^k = A_k^i : \alpha$, kde A_k^i jsou minory prvků α_k^i

v determinantu α. Pak je podle (11)

$$\beta = | \beta_i^k | = \frac{1}{\alpha^n} \; | A_k^i | = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n} = \frac{1}{\alpha},$$

neboli

$$\alpha\beta = 1. \tag{12}$$

10. Řešení lineárních rovnic determinanty zakládá se na větách (6, 7). Mějme n rovnic lineárních o n neznámých x_i:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \;\; (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Násobíme-li prvou rovnici minorem A_{1k}, druhou A_{2k}, atd. a vzniklé rovnice sečteme, obdržíme podle (6, 7)

$$x_k \, . \, D_n = D'_k,$$

kdež D'_k značí determinant D_n, v němž k-tý sloupec je nahrazen sloupcem čísel b na pravé straně. Odtud máme pro neznámé

$$x_k = D'_k : D_n. \tag{13}$$