6. MNOŽINY A ZOBRAZENÍ

6·1. Pojem množiny. Množina je souhrn určitých objektů, myšlený jako celek. Tyto objekty nazýváme **prvky** množiny. Příklady množin: (1) Množina všech tužek, které teď leží na mém stole; (2) množina všech obyvatel Velké Prahy (určitého dne); (3) množina všech prvočísel; (4) množina všech bodů určité paraboly; (5) množina všech spojitých funkcí jedné reálné proměnné.

Všimneme si nyní těchto příkladů podrobněji.

1. Množina všech tužek, které leží v daném okamžiku na mém stole, t. j. souhrn všech těchto tužek, myšlený jako celek, tedy jako jakýsi jediný nový objekt.

Prvky této množiny jsou jednotlivé tužky. Je jich ovšem konečný počet — dejme tomu, šest; řekneme pak, že množina tužek má šest prvků. Některé z těchto tužek jsou ořezané, — dejme tomu čtyři. Množina ořezaných tužek, ležících na mém stole, má tedy čtyři prvky. Je **částí** množiny všech tužek, ležících na mém stole. Říkáme totiž, že množina A je částí množiny B, když každý prvek množiny A je také prvkem množiny B.

Dejme však tomu, že by všechny tužky na mém stole byly ořezané. Mělo by pak smysl mluvit o množině neořezaných tužek, ležících na mém stole? Řekli jsme, že „množina je souhrn určitých objektů . . ." Zde však není žádný objekt uvažovaného druhu, takže by se vlastně nedalo mluvit o jejich souhrnu čili množině. Se zřetelem k takovým případům zavádíme ještě množinu **prázdnou,** která nemá žádný prvek. To, že na mém stole neleží žádná neořezaná tužka, dá se tedy říci také takto: množina neořezaných tužek, ležících na mém stole, je prázdná.

2. Množina všech obyvatel Velké Prahy (určitého dne) má rovněž konečný počet prvků, čili je **konečná.** Tím chceme říci, že její prvky (t. j. obyvatelé Prahy) se dají očíslovat celými kladnými čísly od 1 do určitého n.

3. Množina všech prvočísel je **nekonečná,** t. j. není možné očíslovat její prvky přirozenými čísly od 1 do určitého n. Je však **spočetná,** t. j. můžeme její prvky očíslovat pomocí všech přirozených čísel; můžeme to provést třeba tak, že seřadíme prvočísla podle velikosti a pak je po řadě očíslujeme.

4. Množina všech bodů určité paraboly. Je-li A ohnisko a p řídicí přímka této paraboly, pak je tato množina totožná s množinou všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od bodu A a přímky p. Tatáž množina může tedy být dána různým způsobem; považujeme však množiny za různé pouze tehdy, když se liší svými prvky. Jinak řečeno, množina je úplně určena svými prvky.

5. Množina všech spojitých funkcí jedné reálné proměnné. Jejími prvky jsou na příklad goniometrické funkce (sin, cos atd.). Je zřejmé, že tato množina je nekonečná; na rozdíl od množiny v příkladě 3. není však ani spočetná. Dá se totiž dokázat, že nelze očíslovat všechny její prvky pomocí přirozených čísel: ať předepíšeme jakýkoli způsob číslování, zbude nám na konec množství prvků, na které se nedostalo, třebaže jsme spotřebovali všechna přirozená čísla.

Setkali jsme se v uvedených příkladech s řadou nových termínů. Objasníme nyní přesněji jejich význam a pokud možno je definujeme.

Čemu říkáme množina je jasné z našeho vysvětlení (jež však nelze považovat za skutečnou definici): množina je souhrn určitých objektů (jež nazýváme jejími prvky), myšlený jako celek. Mezi množiny počítáme také prázdnou množinu, která nemá žádný prvek. Ježto množina je zcela určena svými prvky, je jen jediná prázdná množina; označíme $\emptyset$.

Z příkladů je též jasný smysl výroku „a je prvkem množiny A" (nebo — což je totéž — „a patří do A", „a leží v množině A"), za nějž si zavedeme zkratku $a \varepsilon A$. Musíme si jen dobře uvědomit, že zde nejde o nějaký „organický" vztah prvků k celku, nýbrž pouze o vztah prvku k libovolně vytvořenému souhrnu. Prvky množiny mohou být zcela různorodé. Drastický příklad: Množina, která má 3 prvky: (1) číslo 5; (2) král Václav IV.; (3) spojitá funkce $\sin^2 x$.

Vraťme se ještě k „definici" množiny: „Množina je souhrn určitých objektů..." Míníme tím toto: množina je dána tehdy, když je pro každý objekt určeno, zda je jejím prvkem či nikoliv. To neznamená, že bychom museli dovést skutečně rozhodnout o každém daném objektu, zda do množiny patří. (Příklad: Množina transcendentních čísel; nevíme, zda π^π je transcendentní nebo algebraické číslo.) Znamená to pouze, že množina je určena teprve tehdy, když se stanoví: patří k ní objekty, které mají tu a tu vlastnost, a žádné jiné objekty. Na druhé straně, množina je úplně určena svými prvky; to znamená: když každý prvek množiny A patří do množiny B, a také naopak každý prvek množiny B patří do množiny A, když tedy množiny A a B mají tytéž prvky — pak jsou totožné — je to tatáž množina, rozdíl je jenom v označení, případně v definici. Příklad: Množina všech řešení rovnice $\sin \frac{1}{4}\pi\ (x + 1) = 1$ a množina všech celých čísel dělitelných 4, jsou totožné.

Podle toho, co jsme řekli, stačí k určení (definici) nějaké množiny A říci: x patří do A, když a jen když má vlastnost P (na příklad: x patří do A, když a jen když x je celé číslo, dělitelné 4). Množinu, kterou takto určujeme, označíme

$$\underset{x}{E}\,[x \text{ má vlastnost } P].$$

Příklady: (1) $\underset{x}{E}\,[x^2 + x - 2 = 0]$ je množina všech řešení rovnice $x^2 + x - 2 = 0$; má tedy dva prvky: 1 a -2; (2) $\underset{x}{E}\,[0 \leqq x \leqq 1]$ je množina všech bodů uzavřeného intervalu $\langle 0, 1 \rangle$; (3) $\underset{x}{E}\,[2 < x < 1] = \emptyset$, neboť žádné číslo není větší než 2 a při tom menší než 1; (4) $\underset{n}{E}\,[n \text{ celé}, n > 4, 2^{2^n} + 1 \text{ je prvočíslo}]$; o této množině nevíme, zda je prázdná či nikoli.

Když každý prvek množiny A je také prvkem množiny B (jinak řečeno, když neexistuje žádný objekt, který by byl prvkem množiny A, ale nebyl při tom prvkem množiny B), říkáme, že množina A je **částí** čili **podmnožinou** množiny B a píšeme $A \subset B$ nebo $B \supset A$.

Příklady: (1) Množina všech čísel, dělitelných 6, je částí množiny všech čísel dělitelných 3; (2) $\underset{x}{E}\,[0 \leqq x \leqq 1] \subset \underset{x}{E}\,[0 \leqq x^2 \leqq 1]$. Podle naší definice je prázdná množina částí každé množiny, a každá množina je částí sama sebe, t. j. pro každou množinu A je

$$\emptyset \subset A,$$

$$A \subset A.$$

Opakujeme ještě, jaké množiny nazýváme konečnými a jaké spočetnými. Říkáme, že množina je **konečná**, když má konečný počet prvků, t. j. když lze očíslovati její prvky přirozenými čísly od 1 do určitého n. Konečnou množinu, jež má prvky $a, b, \ldots, p$, budeme značit $\{a, b, \ldots, p\}$. Na příklad $\{1, 2, 3, 4\}$ je množina jež má za prvky čísla 1, 2, 3, 4 a žádná jiná. Prázdnou množinu počítáme rovněž mezi množiny konečné. Všechny ostatní množiny nazýváme **nekonečnými**.

Z nekonečných množin jsou „nejméně obsažné" spočetné množiny. Nazýváme množinu **spočetnou,** když je možno očíslovat všechny její prvky beze zbytku pomocí přirozených čísel — přesněji řečeno, když je možné udat předpis, podle kterého je každému přirozenému číslu přiřazen určitý prvek uvažované množiny, a sice tak, že jsou tím vyčerpány všechny její prvky (t. j. každý je přiřazen některému číslu). Uvedeme příklad: Uspořádáme všechna kladná racionální čísla následujícím způsobem: vyjádříme každé kladné racionální číslo jako podíl dvou nesoudělných kladných celých čísel (to je možné a při tom jediným způsobem), a potom je uspořádáme především podle velikosti součtu čitatele a jmenovatele a pak uvnitř takto vzniklých skupin (každá obsahuje konečný počet čísel) podle velikosti racionálního čísla samého. Vznikne následující uspořádání:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \ldots$$

Přiřadíme nyní každému přirozenému číslu n to racionální číslo, které stojí na n-tém místě. Každé racionální číslo je pak na základě tohoto předpisu přiřazeno některému přirozenému číslu. Tedy podle naší definice množina všech racionálních čísel je spočetná.

Množina je souhrn určitých prvků. Tyto prvky mohou být zase samy množinami. Zde jsou dva takové příklady: (1) Množina všech intervalů; (2) množina všech částí množiny $\{a, b\}$; jejími prvky jsou tyto množiny: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$. Takovým množinám, jejichž prvky jsou zase množiny, budeme říkat **systémy,** abychom se vyhnuli nejasným výrazům jako množina množin a pod. Tak místo o množině všech částí dané množiny mluvíme o systému všech částí množiny.

6·2. Množinové operace: spojení, průnik, rozdíl. Když vyjdeme ze dvou daných množin A a B, můžeme vytvořit různým způsobem nové množiny: 1. **Spojení**

množin A a B, jež značíme $A + B$; to je množina všech prvků, které patří buď do A nebo do B, případně také do obou; 2. **průnik** množin A a B, který značíme $A . B$ nebo AB; to je množina všech prvků, které patří jak do A, tak do B; 3. **rozdíl** množin A a B, který značíme $A - B$; je to množina všech prvků, které patří do A, ale nepatří do B; obdobně označíme $B - A$ rozdíl množin B a A, t. j. množinu všech prvků, které patří do B, ale nepatří do A (množina $B - A$ je tedy zpravidla různá od $A - B$ a dokonce nemá s ní ani jeden společný prvek).

Uvedeme nyní příklady: 1. Budiž A množina všech obdélníků, B množina všech kosočtverců. Potom průnik $A . B$ je množina všech čtverců, rozdíl $A - B$ je množina všech obdélníků, které nejsou současně čtverci, $B - A$ je množina všech kosočtverců, které nejsou současně čtverci. 2. Mám dva protínající se kruhy; množinu všech bodů prvního kruhu označíme A, množinu všech bodů druhého kruhu označíme B. Společná část obou kruhů představuje pak jejich průnik, zbytky kruhů představují rozdíly $A - B$ a $B - A$; spojení množin A a B je representováno plochou obou kruhů dohromady.

Může se stát, že průnik dvou množin je prázdný. Říkáme pak, že tyto množiny jsou **disjunktní.**

Příklad: Množina všech řešení rovnice $\cos x = 0$ a množina všech řešení rovnice $\sin x = 0$ mají prázdný průnik, čili jsou disjunktní, neboť žádné x není současně řešením obou rovnic.

Je zřejmé, co nazýváme spojení nebo průnikem jakéhokoliv konečného počtu množin. Tak spojení $A + B + C$ množin A, B, C je množina všech prvků, které patří aspoň do jedné z těchto množin. Lze však také definovat spojení a průnik nekonečného počtu množin.

Nechť je dán nějaký systém množin $\mathfrak{A}$ (předpokládáme, že není prázdný). Množinu všech prvků, které patří aspoň do jedné množiny systému $\mathfrak{A}$, nazveme **spojením**, množinu všech prvků, které patří do každé množiny tohoto systému, nazveme **průnikem** tohoto systému. Je zřejmé, že tato definice souhlasí s definicí spojení a průniku konečného počtu množin. Uvedeme nyní příklady: 1. Nechť A_n je množina všech spojitých funkcí f takových, že je stále $|f(x)| \leq n$, spojení těchto množin je pak množina všech omezených spojitých funkcí. 2. Nechť B_x, kde x probíhá všechna reálná čísla, je množina všech funkcí, definovaných na celé ose číselné a spojitých v bodě x. Potom průnik všech B_x je množina všech funkcí, které jsou všude spojité.

6'3. Množina a výrokový vzorec. Jak víme, stačí k definici množiny A říci: x patří do A, když a jen když x má vlastnost P. Podle toho odpovídá každé vlastnosti určitá množina (totiž množina všech objektů s touto vlastností). Podle odst. 2'1 (str. 16) můžeme však místo o vlastnosti mluvit o výrokovém vzorci; každému výrokovému vzorci odpovídá tedy určitá množina, totiž množina všech prvků, které **splňují** tento výrokový vzorec, t. j. prvků, jejichž dosazením*) za neurčitou vznikne správný výrok. Každému výrokovému vzorci odpovídá tedy určitá množina; ovšem tatáž množina může odpovídat různým výrokovým vzorcům. Tak výrokovým vzorcům (1) číslo x je celé; (1) $\sin \pi x = 0$ odpovídá tatáž množina, neboť každé x, které splňuje první vzorec, splňuje také druhý vzorec a naopak. Nastává to zřejmě v tom a jen v tom případě, že uvažované výrokové vzorce jsou ekvivalentní.

*) Chceme-li se vyjadřovat logicky správně, musíme ovšem mluvit o dosazení označení prvku, neboť na př. do výrokového vzorce „x leží na mém stole" dosazujeme za x slovo „tužka" a nikoli tužku.

Ekvivalenci výrokových vzorců odpovídá tedy totožnost příslušných množin. Obdobně si odpovídají také jiné vlastnosti výrokových vzorců a logické operace na jedné, a vlastnosti množin a množinové operace na druhé straně. Tak výrokový vzorec je splnitelný tehdy a jen tehdy, když příslušná množina je neprázdná. Konjunkci dvou výrokových vzorců odpovídá průnik příslušných množin; jejich disjunkci odpovídá spojení.

Vůbec, pokud jde o úvahy, v nichž je dovoleno nahradit každý výrokový vzorec kterýmkoliv vzorcem, který je s ním ekvivalentní, je lhostejné, zda budeme mluvit o výrokových vzorcích nebo o množinách. Každé vlastnosti výrokových vzorců odpovídá pak určitá vlastnost množin a naopak.

6·4. Princip výběru. Začneme zase příkladem. Položíme si otázku, zda existuje množina reálných čísel, která by měla tyto dvě vlastnosti: 1. Rozdíl libovolných dvou různých čísel, které do ní patří, je iracionální; 2. k libovolnému reálnému číslu x, které do ní nepatří, existuje číslo y z této množiny takové, že rozdíl $x - y$ je racionální číslo.

Tyto vlastnosti vypadají sice dosti podivně a komplikovaně, avšak takovou množinu skutečně potřebujeme v jednom oboru matematiky (v theorii míry).

Dokážeme nyní, že taková množina existuje. Pro každé reálné číslo z budiž A_z množina všech čísel $z + r$, kde r je racionální. Potom dvě množiny A_z a $A_{z'}$, jsou buď totožné (když $z - z'$ je racionální číslo) nebo disjunktní (když $z - z'$ je iracionální číslo). Zřejmě můžeme vybrat po jednom prvku z každé množiny A_z; přesněji řečeno, existuje množina, která má právě jeden společný prvek s každou množinou A_z. Nechť B je taková „výběrová" množina. Dokážeme, že množina B má požadované vlastnosti. Když $x \varepsilon B$, $y \varepsilon B$, $x \neq y$, pak číslo $x - y$ je iracionální, neboť jinak by bylo $x = y + (x - y) \varepsilon A_y$ a současně $y \varepsilon A_y$, tedy množina B by měla s A aspoň dva společné prvky. To však je spor. Dále, když z je nějaké reálné číslo, pak nechť x je jediný společný prvek množin B a A_y. Potom $x \varepsilon A_z$, tedy $x - z$ je racionální. Tím je důkaz proveden.

Všimněme si nyní jádra tohoto důkazu, které zřejmě spočívá v zavedení množiny B. Toto zavedení je zase založeno na předpokladu existence „výběrové množiny", t. j. množiny, která má právě jeden společný prvek s každou danou množinou A_z. Existenci takové množiny jsme nedokazovali, nýbrž prostě řekli, že je zřejmá, neboť se zdá vskutku naprosto samozřejmé, že si můžeme zvolit po jednom prvku v každé množině A_z.

O existenci podobné „výběrové množiny" se opírá řada důkazů, především ovšem v theorii množin, ale také v jiných oborech matematiky. Zásady existence takové množiny se dlouho užívalo, aniž by byla výslovně formulována; vlastně se ani neuvědomovalo, že zde jde o nějaký zvláštní princip — tak samozřejmou se zdá existence „výběrové množiny". Teprve později byla tato zásada formulována jako **princip (axiom) výběru:** Ke každému (neprázdnému) systému navzájem disjunktních neprázdných množin existuje množina, která má právě jeden společný prvek s každou z těchto daných množin.

Všimněme si nyní některých otázek týkajících se principu výběru. Především je nutné říci, že princip výběru netvrdí, že se výběrová množina dá sestrojit, nýbrž pouze tvrdí, že existuje. Říká tedy jen toto: Není pravda, že by každá množina, která má aspoň jeden společný prvek s každou množinou daného systému (předpokládáme ovšem, že tyto množiny jsou navzájem disjunktní), musela nutně mít s některou z nich několik společných prvků. S intuicionistického hlediska (viz odst. 3·4) nemá tedy princip výběru vůbec smysl.

Další otázka je tato: proč se zdá princip výběru tak samozřejmý (aspoň na prvý pohled; uvažujeme-li o něm hlouběji, nemusí se vůbec zdát evidentní). Pokud jde o konečný systém množin, je princip výběru skutečně samozřejmý. Jde-li o konečný systém konečných množin, můžeme výběr skutečně provést, tedy sestrojit výběrovou množinu; jde-li o konečný systém nekonečných množin, pak můžeme aspoň bezvadně logicky dokázat existenci takové množiny. Když pak jde o nekonečný systém množin, považujeme princip výběru za samozřejmý prostě proto, že si myslíme neomezené pokračování výběru nebo existenčního důkazu, který se dá skutečně provést pro konečný systém; nedovedeme si představit žádný důvod, pro který by se toto pokračování muselo někde zastavit. Jinak řečeno, princip výběru se nám zdá evidentní proto, že je nám vlastní — třeba že si to neuvědomujeme — přesvědčení o možnosti takových aktů jako je současný výběr (volba) „representanta" v nekonečně mnoha množinách. Celá theorie množin — aspoň jak byla původně vybudována — spočívá vlastně na takovém přesvědčení. — Zabíháme zde však již do filosofických a psychologických otázek. Vraťme se nyní zase k theorii množin.

Naše úvahy o důvodech samozřejmosti principu výběru nebyly ovšem zdaleka ani nástinem důkazu. Klademe si nyní otázku: Dá se princip výběru vůbec dokázat, nebo jej máme považovat za nedokazatelný axiom theorie množin. Kdyby se dal dokázat, pak by byl obyčejnou větou, a naše úvahy o jeho samozřejmosti by byly zbytečné. Ukazuje se však, že skutečně musíme považovat tento princip za zvláštní axiom. Je sice možné dokázat princip výběru pro některé velmi speciální případy (na příklad když jde o systém množin přirozených čísel), selhávají však všechny pokusy dokázat jej obecně. Kdykoli byl takový důkaz zdánlivě proveden, ukázalo se, že spočívá na předpokladu, který již obsahoval tento princip. Na druhé straně, princip výběru vede sice často k důsledkům paradoxního rázu, nevedl však dosud nikdy ke sporu. Je proto, jak jsme řekli, považován za nezávislý axiom theorie množin. Má však při tom poněkud zvláštní postavení; tak je zvykem udávat, zda se v určitém důkaze použilo tohoto axiomu a kde, a podle možností se jemu vyhýbat.

Do podrobnějšího rozboru všech těchto otázek se zde nemůžeme pouštět. Spokojíme se s tím, co jsme řekli a poznamenáme ještě, že principu výběru se zřídka kdy užívá v obvyklých partiích matematiky, které jsou nutné pro aplikace, naproti tomu však je nezbytný pro vybudování theorie množin a založených na ní abstraktnějších oborů matematiky.

6·5. Antinomie theorie množin. Nedefinovali jsme vlastně vůbec, co nazýváme množinou, a naše tak zvaná definice „množina je souhrn určitých věcí . . .“ je velmi neurčitá. Dá se proto očekávat, že se vyskytnou množiny s překvapujícími a paradoxními vlastnostmi. Ukazuje se dokonce, že neomezená volnost v tvoření množin podle naší „definice“ vede nakonec ke sporům.

Uvedeme nyní dva příklady:

1. Všimněme si množiny (označíme ji třeba A) všech přirozených čísel, která se dají definovat tak, že užíváme pouze známých českých slov a při tom použijeme nejvýše 1000 písmen. Do této množiny patří na příklad čísla 1, 2, 3, 1 000 000, 9^9, $(9^9)!$, neboť se dají zřejmě definovat tímto způsobem (na příklad „součin všech celých čísel od jedné do devíti na devátou“).

Je zřejmé, že naše množina A obsahuje pouze konečný počet čísel, neboť s použitím nejvýše 1000 písmen můžeme vytvořit vůbec pouze konečný počet definicí. Ježto je konečná, existuje nejmenší přirozené číslo (označíme je třeba m), které do ní nepatří. Toto číslo lze však zřejmě definovat také takto: „nejmenší číslo, které se nedá definovat tak, že užíváme pouze známých českých slov a při tom použijeme nejvýše tisíce písmen". Zde již máme spor. Podařilo se nám totiž právě definovat číslo m tak, že jsme užívali pouze známých českých slov a při tom použili méně než 1000 písmen. To právě znamená, že číslo m p a t ř í do množiny A; je však definováno jako nejmenší číslo, které tam n e p a t ř í.

2. Může být množina prvkem sama sebe, může tedy někdy platit $A \varepsilon A$? Se žádnou takovou množinou jsme se dosud nesetkali, nemůžeme však tuto možnost předem vyloučit.

Budiž nyní N množina všech „normálních" množin, t. j. všech množin, které nejsou prvky sama sebe. Do N patří všechny množiny, s nimiž jsme se dosud setkali: zda jsou nějaké množiny, které by nepatřily do N, ještě nevíme.

Ptáme se nyní: Je množina N sama „normální", — jinak řečeno, je N non εN nebo $N \varepsilon N$? Uvidíme teď, že obě možnosti vedou ke sporu. Když totiž předpokládáme, že N non εN, pak to znamená, že N je „normální", tedy podle definice množiny N (A patří do N, když A non εA) je $N \varepsilon N$, což je spor s předokladem. Když naopak předpokládáme, že $N \varepsilon N$, pak to znamená, že N není „normální", tedy podle definice množiny N platí N non εN, což je zase spor.

Máme zde dva příklady množin, jejichž zavedením dospíváme nutně k logickému sporu, a mohli bychom uvést celou řadu podobných příkladů. Skutečnost, že při neomezené volnosti v tvoření množin se mohou vyskytnout takové případy, vede k revisi theorie množin a v důsledku toho také k revisi tradiční „naivní" logiky. Je totiž nutné korigovat pojem množiny tak, aby se vyloučily všechny „sporné" množiny; ježto však ke zcela obdobným sporům mohou vést — jak uvidíme dále — také obvyklé logické pojmy (pojem vlastnosti a pod.), je nutná také revise logiky. — Tímto okruhem problémů se zde nemůžeme zabývat; odpovíme jenom na některé otázky, které se asi samy vnucují čtenáři.

1. Jaká je „příčina" zmíněných sporů — řečeno poněkud přesněji, čím se vyznačují podobné „sporné" množiny?

Ve dvou příkladech, které jsme uvedli, a také v jiných podobných případech obsahuje „definice" uvažované množiny jakýsi logický kruh; to je právě charakteristické pro takové „sporné" množiny.

Tento kruh spočívá, jak se čtenář může přesvědčit na našich příkladech, zhruba řečeno v tomto: Abychom zjistili, zda určitý prvek a patří do takové „sporné" množiny, musíme nejdříve vědět, jaké prvky tato množina obsahuje, tedy mimo jiné, zda obsahuje tento prvek a.

2. Je theorie množin „odpovědná" za tyto spory, t. j. vyskytují se podobné spory pouze v theorii množin anebo také tehdy, když užíváme pouze tradičních pojmů, jako vlastnost a pod.?

Odpověď je vlastně jasná a vyplývá již z toho, že můžeme (viz odstavec 6·1) vždy mluvit o vlastnosti místo o množině a naopak.

Uvedeme příklad vlastnosti, která odpovídá „sporné" množině „normálních" množin. Budeme říkat, že nějaká vlastnost je i m p r e d i k a b i l n í, když se nevztahuje sama na sebe. Tak na příklad vlastnost „abstraktní" není impredikabilní, neboť je sama abstraktní, kdežto vlastnost „červený" je impredikabilní, protože sama není červená. Ptáme se nyní, je-li vlastnost „impredikabilní" sama impredikabilní. Předpokládejme, že jest; pak se vztahuje sama na sebe, tedy není impredikabilní. Předpokládejme tedy, že impredikabilní není; pak se nevztahuje sama na sebe, tedy jest impredikabilní. Tak nebo tak, dospíváme vždy nutně ke sporu.

3. Jakým způsobem se dají vyloučit „sporné" množiny a jaké důsledky to má?

Nejdříve musíme odpovědět na případnou námitku: jak můžeme vylučovat nějaké množiny jen proto, že se nám nehodí? — Ve skutečnosti vylučujeme pouze n e k o r e k t n í   d e f i n i c e, lépe řečeno „pseudo-definice", které nic nedefinují, neboť samy obsahují spor. Takové pseudo-definice jsou definice množin v obou našich příkladech z tohoto odstavce, jakož i definice vlastnosti „impredikabilní".

Jak tedy můžeme vyloučit takové pseudo-definice? Jsou zde dvě cesty. Především lze vybudovat theorii množin axiomaticky, právě tak, jako kterýkoliv matematický obor, na příklad elementární geometrii. Vyloučíme tím „sporné" množiny, avšak — jak se ukázalo, když taková axiomatická výstavba byla skutečně provedena — spolu s nimi musíme vyloučit také některé nezávadné množiny. Mimo to nejsou tímto postupem dotčeny „sporné" vlastnosti jako „impredikabilní" a pod.

Zásadně se odstraní podobné spory teprve revisí tradiční logiky. Tato revise spočívá mimo jiné v tom, že se některé zdánlivě korektní výroky prohlásí za nepřípustné, t. j. nemající smysl; spadají mezi ně na příklad výroky, ve kterých je nějaká vlastnost vztahována na sebe samu. „Definice" impredikability nemá potom vůbec smyslu a všechny analogické spory a paradoxy odpadnou.

Obrátíme se nyní k pojmům r e l a c e (vztahu), f u n k c e (obecněji zobrazení) a p r o m ě n n é. Nejdříve si zavedeme jeden velmi důležitý pomocný pojem.

6·6. Kartézský součin. Nechť jsou dány množiny A a B. Množinu všech dvojic (a, b), kde a je prvek množiny A, b je prvek množiny B, nazveme **kartézským součinem** množin A a B a označíme $A \times B$. Při tom u dvojic záleží na pořadí, takže (a, b) a (b, a) jsou různé dvojice, oba členy dvojice mohou však být totožné, t. j. (a, a) považujeme rovněž za dvojici, při čemž ovšem (a, a) leží v $A \times B$ tehdy a jen tehdy, když $a \varepsilon A$, a $a \varepsilon B$.

Příklady kartézského součinu: 1. Nechť A má dva prvky: a_1, a_2, B má rovněž 2 prvky: b_1, b_2. Potom $A \times B$ má čtyři prvky: (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2). Kartézský součin $A \times A$ má rovněž čtyři prvky: (a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2).

2. Budiž E množina všech reálných čísel. Pak $E \times E$ je množina všech dvojic reálných čísel. Ježto každý bod roviny je určen dvojicí reálných čísel (totiž svými kartézskými souřadnicemi) a obráceně každá dvojice reálných čísel určuje bod roviny, můžeme interpretovat $E \times E$ jako rovinu a považovat rovinu za kartézský součin přímka $\times$ přímka.

Podobně jako kartézský součin dvou množin, lze definovat také kartézský součin libovolného konečného počtu množin. Tak $A \times B \times C$ je kartézský součin množin A, B, C, t. j. množina všech trojic (a, b, c), kde $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$, $c \varepsilon C$. Obdobně jako jsme interpretovali rovinu, můžeme také interpretovat obvyklý trojrozměrný prostor jako kartézský součin — přímka $\times$ $\times$ přímka $\times$ přímka.

6'7. Relace. Nechť je dán určitý vztah mezi prvky množin A a B. (Příklad: $A = B$ je množina reálných čísel; jde o vztah „... větší, než ...", t. j. vztah $x > y$.) To znamená: je dán určitý vztah, který má smysl (je definován) pro libovolné prvky $x \varepsilon A$, $y \varepsilon B$; splněn může být pro všechny, pro některé nebo pro žádnou dvojici x, y. Potom množina všech dvojic (a, b), kde $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$, takových, že a a b jsou v uvažovaném vztahu, je částí kartézského součinu $A \times B$. Naopak, je-li dána množina $M \subset A \times B$, je tím dán vztah mezi prvky množin A a B; totiž vztah $(x, y) \varepsilon M$. Každému vztahu mezi prvky dvou množin je tedy přiřazena část jejich kartézského součinu a naopak.

Příklady: 1. Vztah $x^2 < y$ (za x a y se dosazují reálná čísla). Odpovídá mu, interpretujeme-li čísla jako body roviny, vnitřek jisté paraboly. 2. Vztah $x^2 + y^2 \geqq 2xy$. Tento vztah je splněn pro libovolná reálná čísla x, y. Příslušná množina je tedy totožná s celou rovinou. 3. Vztah $x^2 + y^2 < 2xy$ (za x a y se dosazují reálná čísla). Příslušná množina je zřejmě prázdná.

V odstavci 2·1 (str. 16) jsme řekli, že každý vztah je vyjádřen výrokovým vzorcem (s několika neurčitými), na příklad vztah „>" je vyjádřen výrokovým vzorcem „x je větší než y". Je však zřejmé, že tentýž vztah může být vyjádřen různými výrokovými vzorci. Tak vztah „větší" je vyjádřen také výrokovými vzorci „$x - y > 0$", „$2^x > 2^y$" atd., jež jsou ovšem všechny navzájem ekvivalentní. Ovšem, nebylo dosud řečeno, čemu vlastně říkáme „vztah", takže není ani jasné, co znamená „tentýž vztah". Nyní však již můžeme definovat termín „vztah" na základě pojmu množiny a kartézského součinu, a to tak, že nebude záležet na tom, jakým výrokovým vzorcem je vyjádřen, nýbrž jen na tom, které prvky jsou v daném vztahu.

Řekli jsme totiž, že každému vztahu mezi prvky množin A a B odpovídá vzájemně jednoznačně určitá množina dvojic (a, b), kde $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$. Nyní však přímo definujeme: Vztah (relace) mezi prvky množin A a B je určitá množina dvojic (a, b), kde $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$. Dva vztahy považujeme podle toho za totožné, když jsou totožné jako množiny. Touto definicí nezavádíme ovšem nic podstatně nového, redukujeme však pojem vztahu na jednodušší pojem množiny.

6·8. Zobrazení a funkce. Když každé hodnotě veličiny x odpovídá určitá hodnota veličiny y, pak říkáme, že y je funkcí x. Touto „definicí" je dobře vystižena podstata funkce (obecněji zobrazení) — totiž to, že přiřazujeme každému prvku jedné množiny určitý prvek druhé množiny. Při tom jde o čistě logické přiřazení podle předem daného pevného, jinak však libovolného předpisu; není vůbec nutné, aby se zobrazení dalo vyjádřit nějak „přirozeně". Tak není nutné, aby se funkce dala vyjádřit pomocí základních aritmetických operací a případně limitního přechodu; stačí, aby byl dán předpis, podle kterého je každému číslu přiřazeno určité číslo. Můžeme tedy říci: jsou-li dány množiny A a B a předpis, podle kterého je každému prvku množiny A přiřazen jeden určitý prvek množiny B, pak je tím dáno **zobrazení množiny A do množiny B**. Prvek množiny B, který je při tom přiřazen prvku $x \in A$, nazýváme **obrazem** prvku x. Ve speciálním případě, když B se skládá z reálných, resp. komplexních čísel, mluvíme místo o zobrazení o **funkci** (reálné případně komplexní).

Zobrazení můžeme zřejmě považovat za zvláštní případ vztahu. Je-li totiž dáno určité zobrazení, pak je tím dán také vztah „y je obrazem x". Je-li naopak dán vztah R takový, že ke každému $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$, které je k němu v relaci R, pak je tím dáno určité zobrazení — totiž zobrazení, které přiřazuje každému x právě toto jediné y.

Tato okolnost vede přímo k definici zobrazení jako určité podmnožiny kartézského součinu. Definujeme totiž: **zobrazení** množiny A do množiny B je část F kartézského součinu $A \times B$ taková, že ke každému $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$, pro něž $(x, y) \in F$. Podle této definice budeme tedy nazývat zobrazením (příp. funkcí) právě to, čemu se v případě reálné funkce říká graf funkce.

Uveďme dva příklady: 1. Nechť A je množina reálných čísel, F je zobrazení A do A (t. j. reálná funkce) a obrazem $F(x)$ čísla x je jeho čtverec x^2. Pak podle nové definice F je množina bodů se souřadnicemi x, x^2. 2. F je zobrazení množiny $\{a, b\}$ do množiny $\{c, d\}$; obrazem prvku a je c, obrazem prvku b je d. Pak F je množina $\{(a, c), (b, d)\}$.

Opakujeme ještě stručně: funkce je speciální případ zobrazení. Zobrazení je — řečeno nepřesně — předpis, kterým je každému prvku z množiny A přiřazen prvek z množiny B. Řečeno přesněji, zobrazení je množina dvojic (prvek; přiřažený jemu prvek).

6·9. Proměnné veličiny. V matematice a fysice mluvíme často o proměnných veličinách. Příklad: Teplota je v uvažovaném tělese proměnnou veličinou. Znamená to zde toto: v každém bodě tělesa je v každém okamžiku zcela určitá teplota (jež však je obecně různá pro různé body a okamžiky). Když mluvíme o **proměnné veličině,** myslíme tím právě souhrn uvažovaných bodů a okamžiků s příslušnými k nim hodnotami. Podle toho je tedy proměnná veličina speciálním případem zobrazení: každému prvku určité základní množiny (v našem příkladě bodům v prostoru a čase) je přiřazeno číslo (v našem příkladě teplota v tomto bodě), případně skupina čísel, vektor a pod. Další dva příklady: 1. Potenciál (v dané oblasti) je proměnnou veličinou. To znamená: v každém bodě má potenciál určitou hodnotu (obecně od bodu k bodu různou). 2. Obsah průmětu trojúhelníku o dané délce stran na danou rovinu je proměnný. To znamená: pro každou polohu trojúhelníka má průmět určitý obsah. Totéž můžeme říci jinými slovy ještě takto: obsah průmětu trojúhelníku s danými stranami je funkcí jeho polohy.

Speciálním mezním případem proměnné veličiny je konstanta, tedy proměnná veličina, jež má všude stejnou hodnotu. Na příklad podíl obvodu a poloměru kruhu je konstanta, t. j. má určitou hodnotu pro každý kruh a při tom je to hodnota pro všechny kruhy tatáž.

V matematice se o proměnných mluví v různém smyslu. Tak na příklad, když mluvíme o „funkci dvou proměnných" nebo o „funkci komplexní proměnné", pak jde jednoduše o funkci, která přiřazuje určité číslo každé dvojici čísel (z určité množiny), resp. každému komplexnímu číslu (z určité množiny). V tomto případě nejde o žádné proměnné v tom smyslu, jak jsme si je právě charakterisovali. Jiný případ máme, když říkáme „na ploše P je proměnná z funkcí proměnných x a y". Zde jsou x, y, z souřadnice bodu v prostoru (v určitém souřadnicovém systému). Jsou to tedy skutečně proměnné, t. j. funkce, které přiřazují určité číslo (zde souřadnici), každému prvku základní množiny — zde každému bodu prostoru. Když říkáme „na ploše P je proměnná z funkcí proměnných x a y", pak to znamená toto: existuje „funkce dvou proměnných", t. j. funkce, definovaná pro dvojice čísel — označíme ji f — tak, že pro libovolný bod A plochy P je $z(A) = f[x(A), y(A)]$; $x(A)$, $y(A)$, $z(A)$ značí zde souřadnice bodu A — jinak řečeno, hodnoty proměnných x, y, z v bodě A.

Připomínáme ještě, že mezi **proměnnou a neurčitou,** tak jak jsme si je zavedli (sr. odst. 2·1), je zásadní logický rozdíl.

„Proměnnou" jsme si zavedli jako zvláštní případ zobrazení; je to tedy čistě matematický pojem. Naproti tomu „neurčitá" je pojem z logiky, totiž z t. zv. theorie řeči (logické) a znamená značku, za níž se mohou podle určitých pravidel dosazovat jiné značky (v. odst. 2·2). Rozlišování těchto termínů se sice nedodržuje (v logice i v matematice se mluví o proměnné), pojmy jsou však podstatně různé.