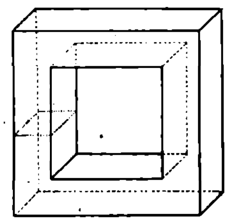
IV. MNOHOSTĚNY

26. Jednoduše souvislý uzavřený mnohostěn. a) Mnohostěnová plocha nazývá se *uzavřená*, dělí-li prostor na dvě části (odst. 23a).

b) Mnohostěnová uzavřená plocha je *jednoduše souvislá*, rozpadá-li se každým řezem, jenž má tvar uzavřené a neprotínající se čáry, na dvě části. Tak na př. všechny stěny krychle tvoří dohromady jednoduše souvislou plochu. Příkladem uzavřené plochy, která není jednoduše souvislá, je mnohostěnová plocha mající tvar rámu (obr. 29); prořízneme-li ji podél vytečkovaně naznačené čáry, nerozpadne se na dvě části.

c) Těleso omezené uzavřenou a jednoduše souvislou mnohostěnovou plochou nazveme *mnohostěn*; přesnější označení: uzavřený a jednoduše souvislý vynecháváme, poněvadž v dalším jednáme jen o mnohostěnech tohoto druhu.



Obr. 29.

Mnohostěn má určitý *počet stěn*, který označíme písmenem s; má-li s_3 stěn trojúhelníkových, s_4 čtyrúhelníkových atd, je

$$s = \sum s_n; \tag{1}$$

součet $\sum s_n$ má konečný počet sčítanců a index n probíhá všechny možné hodnoty počínaje hodnotou $n = 3$.

Mnohostěn má určitý *počet vrcholů*, který nazveme v. Je-li v_n počet těch vrcholů, v nichž se sbíhá vždy n hran, je

$$v = \sum v_n. \tag{2}$$

Je-li h *počet hran* mnohostěnu, je

$$\sum n s_n = 2h, \tag{3}$$

kde součet zase začíná s hodnotou $n = 3$ a vztahuje se ke všem možným hodnotám n. K odůvodnění rovnice (3) připomeneme, že její levá strana má tolik jednotek, kolik hran bychom dostali, kdybychom mnohostěn podél všech hran rozřezali na jednotlivé stěny (každá trojúhelníková stěna by dala tři hrany, každá čtyrúhelníková čtyři atd.). Při tom by se vyskytla každá hrana mnohostěnu dvakrát, neboť každá náleží dvěma stěnám; proto je napravo v rovnici (3) $2h$. Stejně se odůvodní rovnice

$$\sum n v_n = 2h. \tag{4}$$

d) Označme písmenem w součet všech *hranových úhlů* mnohostěnu, t. j. úhlů utvořených dvěma hranami sbíhajícími se v některém vrcholu mnohostěnu. Poněvadž součet úhlů v n-úhelníku činí $(n - 2)\pi$ (odst. 4c), je

$$w = \sum (n - 2)\pi s_n = \pi \sum n s_n - 2\pi \sum s_n,$$

nebo, užijeme-li rovnic (1) a (3):

$$w = 2(h - s)\pi. \tag{5}$$

Součet hranových úhlů rovná se rozdílu mezi počtem hran a stěn násobenému 2π.

e) Úhel, v němž se protínají dvě sousední stěny podél společné hrany, nazývá se *stěnový úhel* mnohostěnu příslušný té hraně.

27. Vypuklé mnohostěny. Mnohostěn je *vypuklý*, má-li každá jeho stěna tuto vlastnost: Rovina obsahující stěnu nemá mimo tuto stěnu žádný další bod společný s mnohostěnem. Vnitřek vypuklého mnohostěnu leží vždy celý po jedné straně roviny, která obsahuje kteroukoli jeho stěnu.

Každá stěna vypuklého mnohostěnu je vypuklý mnohoúhelník (srv. odst. 5). Každý mnohohran utvořený hranami vypuklého mnohostěnu, které se sbíhají v libovolném jeho vrcholu, je vypuklý (srv. odst. 19b).

Příklady vypuklých mnohostěnů jsou: kvádr, jehlan nebo hranol, jehož podstavou je vypuklý mnohoúhelník.

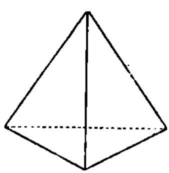
28. Pravidelné mnohostěny. Vypuklý mnohostěn nazývá se *pravidelný*, jsou-li všechny jeho hrany stejně dlouhé, všechny hranové úhly (odst. 26d) stejné a všechny stěnové úhly (odst. 26e) stejné. Takový mnohostěn je omezen vesměs shodnými pravidelnými mnohoúhelníky; mnohohrany při jeho vrcholech jsou stejné a pravidelné (každý má všechny úhly stejné i všechny strany stejné). Celkem *je pět pravidelných mnohostěnů*, jak poznáme touto úvahou:

a) V případě, že je mnohostěn omezen pravidelnými (t. j. rovnostrannými) trojúhelníky, sbíhají se v jednom vrcholu mnohostěnu buď tři stěny nebo čtyři nebo pět; šest nebo více stěn se nemůže v jednom vrcholu stýkati, neboť součet hranových úhlů u takového vrcholu by byl větší než 2π, což není možno (odst. 21b).

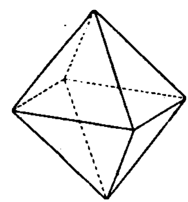
Sestrojme trojhran o vrcholu A ze tří shodných rovnostranných trojúhelníků ABC, ACD a ABD; doplníme-li jej stěnou BCD, která sama je trojúhelník shodný s předešlými třemi, dostaneme *pravidelný čtyrstěn* $ABCD$ (obr. 30).

Sestrojme čtyrhran o vrcholu A ze čtyr shodných rovnostranných trojúhelníků; doplníme-li při vrcholech B, C, D, E další trojúhelníky shodné s předešlými, vznikne *pravidelný osmistěn* $ABCDEF$ (obr. 31).

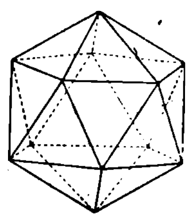
Sestrojme pětihran $ABCDEF$ o vrcholu A z pěti shodných rovnostranných trojúhelníků (obr. 32); doplňme jej dalšími desíti trojúhelníky shodnými s předešlými, které tvoří dohromady „pás" přiléhající k pětihranu, a konečně



Obr. 30.



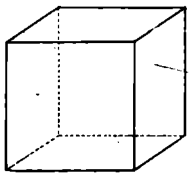
Obr. 31.



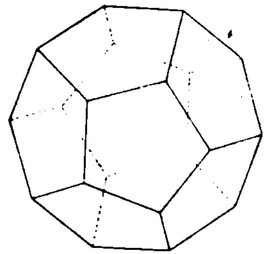
Obr. 32.

připojme k druhému kraji pásu pětihran shodný s původním. Tak obdržíme *pravidelný dvacítistěn* (obr. 32).

b) V případě, že stěny pravidelného mnohostěnu jsou čtverce, mohou se v jednom vrcholu stýkati jen tři stěny; dostaneme *pravidelný šestistěn* neboli *krychli* (obr. 33).



Obr. 33.



Obr. 34.

c) Zbývá případ, kdy pravidelný mnohostěn je omezen pětiúhelníky. V každém vrcholu se stýkají tři pravidelné pětiúhelníky; doplňujeme-li dále, dostaneme *pravidelný dvanáctistěn* (obr. 34).

Pravidelné mnohostěny omezené pravidelnými šestiúhelníky, nebo n-úhelníky pro $n > 6$ nejsou možné, neboť součet hranových úhlů při vrcholu (t. j. součet stran v m-hranu, $m \geqq 3$) takového mnohostěnu byl by větší (pro $n = 6$, $m = 3$ roven) úhlu 2π, což je ve sporu s odst. 21b. Vyčerpali jsme tedy všechny případy, které jsou možné.

Sestavme ještě tabulku, ve které jsou uvedena čísla s (počet stěn), v (počet vrcholů) a h (počet hran) pro pravidelné mnohostěny (viz tab. na str. 43).

29. Sférický obraz vypuklého mnohostěnu. Descartova věta. — a) Přímka kolmá ke stěně mnohostěnu a mířící z jeho vnitřka ven nazývá se *vnější normála* nebo zkrátka normála sestrojená k té stěně. Veďme poloměr ON v pomocné kulové ploše Σ_1 (opsané kolem O poloměrem 1) rovnoběžně k této nor-

	s	v	h
čtyrstěn	4	4	6
krychle	6	8	12
osmistěn	8	6	12
dvanáctistěn	12	20	30
dvacetistěn	20	12	30

mále. Bod N je *sférický obraz* stěny mnohostěnu (viz odst. 16a).

Má-li mnohostěn celkem s stěn, skládá se sférický obraz jeho stěn z s bodů na ploše Σ_1. Všimněme si zvláště toho, jak se zobrazí stěny, které se stýkají v daném vrcholu mnohostěnu. Prochází-li vrcholem O mnohostěnu celkem n stěn, označme je (v tom pořadí, jak jedna po druhé následuje v mnohohranu s vrcholem O) písmeny $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Příslušné sférické obrazy $N_1, N_2, \ldots, N_n$ tvoří sférický n-úhelník.

b) Předpokládejme nyní, že mnohostěn M je vypuklý. Podle odst. 27 tvoří ty jeho stěny $S_1, S_2, \ldots, S_n$, které procházejí některým jeho vrcholem O vypuklý n-hran T; příslušný sférický obraz $N_1, N_2, \ldots, N_n$ je vypuklý sférický n-úhelník a podle rovnice (1) odst. 22 má obsah

$$P' = 2\pi - \sum_{k=1}^{n} a_k, \tag{1}$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou strany n-hranu T (neboli hranové úhly mnohostěnu M při vrcholu O).

Napišme rovnici (1) pro každý z v vrcholů mnohostěnu M a sečtěme všechny tak vzniklé rovnice. Z názoru je patrno, že součet všech obsahů P' dá dohromady obsah celé kulové plochy Σ_1*), tedy 4π. Součet členů 2π dá $2\pi v$. Sečteme-li součty

$$\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

utvořené pro všechny vrcholy mnohostěnu M, dostaneme součet w všech jeho hranových úhlů (srv. odst. 26d). Bude tedy

$$4\pi = 2\pi v - w$$

nebo

$$w = 2\pi (v - 2). \tag{2}$$

Tato rovnice vyjadřuje Descartovu větu: *Součet hranových úhlů rovná se počtu vrcholů zmenšenému o dvě násobenému 2π.*

c) Sledujme, jaký výsledek dají předchozí úvahy pro krychli a pro pravidelný osmistěn.

V případě *krychle* tři stěny sbíhající se v jednom jejím vrcholu mají za sférické obrazy tři body, které tvoří rovnostranný sférický trojúhelník s třemi pravými úhly (oktant). Osm takových trojúhelníků, jež dostaneme po řadě pro osm vrcholů krychle, pokrývá celou kulovou plochu Σ_1. Součet hranových úhlů krychle je podle (2) roven (dosazujeme $v = 8$) 12π.

V případě *pravidelného osmistěnu* sférické obrazy čtyr stěn sbíhajících se v jednom jeho vrcholu tvoří sférický čtyrúhelník; celá plocha Σ_1 skládá se ze šesti takových čtyrúhelníků odpovídajících jednotlivým vrcholům osmistěnu. Součet hranových úhlů osmistěnu je ($v = 6$) podle (2) roven 8π.

30. Eulerova věta. a) Rovnice (5) odst. 26 a rovnice (2) odst. 29 vyjadřují dvěma různými způsoby veličinu w, součet hranových úhlů na povrchu vypuklého mnohostěnu. Srovnáme-li oba způsoby, dostaneme

$$w = 2\pi (h - s) = 2\pi (v - 2)$$

a tedy

$$h = s + v - 2, \tag{1}$$

---

*) Tuto větu opírající se o názor považujeme za samozřejmou.

což je Eulerova věta: *Počet hran vypuklého mnohostěnu rovná se součtu počtu jeho stěn a vrcholů zmenšenému o dvě.*

Tato věta platí obecně pro každý jednoduše souvislý mnohostěn. — V případě pravidelných mnohostěnů se potvrzuje její platnost podle tabulky uvedené na konci odst. 28.

b) Označme jako v odst. 26 písmenem s_n počet těch stěn vypuklého mnohostěnu, které mají tvar n-úhelníka a v_n počet těch jeho vrcholů, v nichž hrany tvoří n-hran. Podle odst. 26c je

$$s = \sum s_n, \quad v = \sum v_n,$$
$$\sum n s_n = \sum n v_n = 2h;$$

všechny součty v těchto rovnicích začínají s hodnotou $n = 3$. Kombinujeme-li tyto rovnice s (1), dostáváme různé vztahy:

Pišme rovnici (1) ve tvaru

$$s + v = 2 + \tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{2}h$$

a dosaďme sem

$$s = s_3 + s_4 + \ldots, \quad v = v_3 + v_4 + \ldots,$$
$$\tfrac{1}{2}h = \tfrac{1}{4}(3s_3 + 4s_4 + \ldots), \quad \tfrac{1}{2}h = \tfrac{1}{4}(3v_3 + 4v_4 + \ldots);$$

vychází

$$s_3 + s_4 + \ldots + v_3 + v_4 + \ldots = 2 + \tfrac{1}{4}(3s_3 + 4s_4 + \ldots) + \\ + \tfrac{1}{4}(3v_3 + 4v_4 + \ldots)$$

nebo, násobíme-li po obou stranách čtyřmi a upravíme

$$s_3 + v_3 = 8 + s_5 + 2s_6 + \ldots + v_5 + 2v_6 + \ldots.$$

Číslo $s_3 + v_3$ je tedy rovno nejméně osmi; *pro každý vypuklý mnohostěn je počet jeho trojúhelníkových stěn zvětšený o počet trojhranových vrcholů roven aspoň osmi.*

Píšeme-li rovnici (1) ve tvaru

$$s + v = 2 + \tfrac{1}{3}h + \tfrac{2}{3}h,$$

dostaneme

$$s_3 + s_4 + \ldots + v_3 + v_4 + \ldots =$$
$$= 2 + \tfrac{1}{6}(3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + \ldots) + \tfrac{1}{3}(3v_3 + 4v_4 + 5v_5 + \ldots);$$

platí tedy rovnice

$$3s_3 + 2s_4 + s_5 = 12 + s_7 + 2s_8 + \ldots + 2v_4 + 4v_5 + \ldots$$

Z toho plyne, že není možno, aby

$$s_3 = 0, \quad s_4 = 0, \quad s_5 = 0,$$

neboť na pravé straně poslední rovnice je kladné číslo. Jinými slovy: *Vypuklý mnohostěn má aspoň jednu stěnu, která má pět hran nebo méně než pět.*

Podobně se dokáže, že

$$3v_3 + 2v_4 + v_5 = 12 + v_7 + 2v_8 + \ldots + 2s_4 + 4s_5 + \ldots;$$

vypuklý mnohostěn má aspoň jeden vrchol, ve kterém se sbíhá pět hran nebo méně než pět.

31. Zaoblený vypuklý mnohostěn. a) V každém bodě P některé stěny $ABCD\ldots$ vypuklého mnohostěnu sestrojíme vnější normálu (odst. 29a) a naneseme na ni délku $(\overline{PP'}) = k$. Koncové body P' takto sestrojených kolmic vytvoří mnohoúhelník $A'B'C'D'\ldots$ shodný s původní stěnou $ABCD\ldots$ mnohostěnu. Proveďme tuto konstrukci pro všechny stěny mnohostěnu. Dostaneme tak tolik nových stěn kolik stěn má daný mnohostěn. Nové stěny nemají společných bodů, lze je však doplniti na souvislou plochu, připojíme-li podél každé hrany mnohostěnu určitou válcovou plochu a u každého jeho vrcholu část kulové plochy takto:

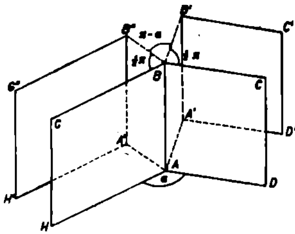
Podél hrany AB mnohostěnu stýkají se dvě jeho stěny ϱ a σ. Zmíněná konstrukce dá k první z těch stěn novou stěnu $A'B'C'D'\ldots$ shodnou a rovnoběžnou s ϱ a podobně dostaneme novou stěnu $A''B''G''H''\ldots$ shodnou a rovnoběžnou s σ (v obr. 35 je $\varrho \equiv ABCD$, $\sigma \equiv ABGH$). Při tom je

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} = \overline{A''B''}, \ldots,$$
$$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'} \parallel \overline{A''B''}, \ldots,$$
$$\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{AA''} = \overline{BB''} = k, \ldots.$$

Budiž α stěnový úhel mnohostěnu, v němž se protínají stěny ϱ a σ podél hrany AB. Pak je patrně (obr. 35)

$$\sphericalangle\, A''AA' = \sphericalangle\, B''BB' = \pi - \alpha. \qquad (1)$$

Považujme AB za osu rotační válcové plochy o poloměru $k = \overline{AA'} = \overline{AA''}$ a o výšce $\overline{AB}$; výseč té plochy příslušná středovému úhlu $\sphericalangle\, A''AA' = \pi - \alpha$ (omezená úsečkami $A'B'$, $A''B''$ a kruhovými oblouky $A'A''$, $B'B''$ o poloměru k) spojuje hranu $A'B'$ s hranou $A''B''$.



Obr. 35.

Sestrojme takovouto válcovou plochu (resp. výseč válcové plochy) pro každou hranu mnohostěnu. Všechny tyto plochy dohromady se stěnami dříve sestrojenými jako $A'B'C'D'$ ... atd. tvoří plochu, která není uzavřená, nýbrž je omezena tolika sférickými mnohoúhelníky, kolik má mnohostěn vrcholů. Abychom dostali uzavřenou jednoduše souvislou plochu (bez otvorů), připojíme ještě tyto sférické mnohoúhelníky.

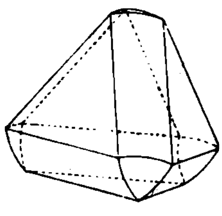
Každý z těchto mnohoúhelníků je na kulové ploše o poloměru k; první z nich je na kulové ploše opsané kolem prvního vrcholu mnohostěnu, druhý na kulové ploše opsané kolem druhého vrcholu mnohostěnu atd. Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ stěnové úhly mnohostěnu podél hran sbíhajících se ve vrcholu A, jsou strany příslušného sférického n-úhelníka

$$\pi - \alpha_1, \quad \pi - \alpha_2, \ldots, \quad \pi - \alpha_n.$$

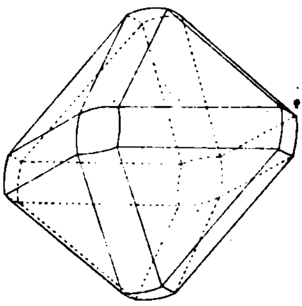
Všech těch n-úhelníků je v (v je počet vrcholů mnohostěnu). Zobrazme všech s stěn mnohostěnu na povrchu koule Σ_k o poloměru k. Dostaneme tak na Σ_k celkem s bodů, které jsou vrcholy sítě složené z v sférických mnohoúhelníků shodných s těmi, o kterých právě uvažujeme. Podle odst. 29b vyplňují tyto mnohoúhelníky celou kulovou plochu, takže mají součet obsahů rovný povrchu koule, t. j. $4\pi k^2$.

Shrneme takto: s stěn sestrojených ke stěnám daného mnohostěnu vždy rovnoběžně a ve vzdálenosti k, h válcových ploch (výsečí), jichž osami jsou jednotlivé hrany mnohostěnu, a v sférických mnohoúhelníků na kulových plochách opsaných kolem vrcholů mnohostěnu, tvoří dohromady uzavřenou plochu, která má název *zaoblený mnohostěn* sestrojený k danému rovnoběžně ve vzdálenosti k.

Na obr. 36 je zaoblený pravidelný čtyřstěn omezený čtyřmi rovnostrannými trojúhelníky, šesti válcovými plochami a čtyřmi sférickými trojúhelníky.



Obr. 36.



Obr. 37.

Na obr. 37 je zaoblený pravidelný osmistěn omezený osmi rovnostrannými trojúhelníky, dvanácti válcovými plochami a šesti sférickými čtyrúhelníky.

b) Zaoblený mnohostěn má v každém bodě P svého povrchu určitou normálu (vnější): Je-li bod P na rovinné stěně, je normálou kolmice k té stěně. Je-li P na některé z oněch válcových ploch, je normálou poloměr kružnice, která prochází bodem P a má za osu příslušnou hranu původního (nezaobleného) mnohostěnu. Je-li konečně bod P uvnitř některého ze sférických n-úhelníků, je normálou poloměr kulové plochy, na níž n-úhelník leží.

Zobrazme vnější normály zaobleného mnohostěnu na kulové ploše Σ_1. Sférické obrazy normál vyplní celou plochu. *Každému bodu kulové plochy Σ_1 odpovídá jediný směr normály zaobleného mnohostěnu.* Poznamenejme k tomu, že všem bodům rovinné stěny odpovídá ve sférickém obrazu jediný bod; všem bodům, jež leží na téže hraně válcové plochy, odpovídá též jediný bod ve sférickém obrazu.

32. Opěrné roviny vypuklého mnohostěnu. a) Budiž dán vypuklý mnohostěn a sestrojme k němu zaoblený rovnoběžný ve vzdálenosti k. Zvolme na povrchu zaobleného mnohostěnu bod P, sestrojme normálu v P a rovinu τ, která v bodě P kolmo protíná normálu; sledujme pak, jak se mění poloha roviny τ, blíží-li se k k nule.

Je-li P na rovinné části povrchu, je τ totožná s příslušnou rovinou a přechází pro $\lim k = 0$ v rovinu té stěny původního mnohostěnu, která je s τ rovnoběžná. Je-li P na válcové ploše, dotýká se jí rovina τ podél určité hrany; pro $\lim k = 0$ přechází τ v rovinu, která je s τ rovnoběžná a má s mnohostěnem společnou jen jednu hranu. Je-li konečně P uvnitř jednoho ze sférických mnohoúhelníků, dotýká se τ příslušné kulové plochy a pro $\lim k = 0$ přechází v rovinu, která má s mnohostěnem společný jen jeden bod, totiž jeden z jeho vrcholů.

b) *Opěrná rovina zaobleného vypuklého mnohostěnu* je název pro rovinu, která je buď rovinou některé jeho stěny nebo tečnou rovinou některé z jeho válcových ploch (dotýká se válcové plochy podél její hrany) nebo konečně tečnou rovinou ke kulové ploše, která obsahuje některý z jeho sférických mnohoúhelníků.

Opěrná rovina vypuklého mnohostěnu (nezaobleného) je název pro rovinu, která je buď rovinou některé jeho stěny, nebo má s ním společné všechny body některé jeho hrany (a žádný jiný bod), nebo konečně prochází některým jeho vrcholem a nemá s mnohostěnem žádný další bod společný.

c) Ve smyslu odst. 16a a 20a má každá opěrná rovina zaobleného nebo nezaobleného vypuklého mnohostěnu určitý sférický obraz. Větu vyslovenou v odst. 31b vyjádříme takto: *Sférické obrazy všech opěrných rovin vypuklého mnohostěnu* (zaobleného nebo nezaobleného) *vyplňují celou kulovou plochu Σ_1; každá opěrná rovina má za obraz určitý bod na Σ_1 a naopak každý bod na Σ_1 je obrazem jediné opěrné roviny.*

33. Jak se dělí kulová plocha na části o stejném obsahu. a) Podle známé věty*) rovná se obsah P kulového pásu, který vytínají dvě rovnoběžné roviny z kulové plochy, součinu z obvodu hlavní kružnice a ze vzdálenosti obou rovin, tedy

$$P = 2\pi rz,$$

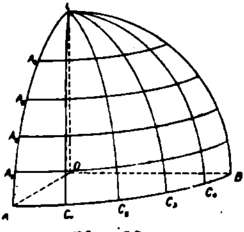
kde r značí poloměr koule a z vzdálenost obou rovin (neboli výšku pásu).

Rozdělíme-li tedy průměr koule na určitý počet stejných dílů a vedeme-li dělícími body roviny kolmé na ten průměr, rozdělí se jimi kulová plocha na stejné části. Sestrojme mimo to několik hlavních kružnic, které mají za společný průměr onen průměr koule; předpokládáme, že rovina první hlavní kružnice svírá s rovinou druhé stejný úhel jako rovina druhé s rovinou třetí atd. Těmito rovnoběžnými rovinami a hlavními kružnicemi rozdělí se povrch koule na stejnoploché části, jednak na křivočaré čtyrúhelníky, jednak na křivočaré trojúhelníky u koncových bodů průměru.

V obr. 38 je naznačeno rozdělení kulového oktantu ABC (O je střed koule; $OB \perp OA$, $OC \perp OA$) na 25 stejnoplochých dílů. Poloměr koule OC je rozdělen čtyřmi dělícími body na pět stejných dílů. Dělícími body jsou vedeny roviny

*) Viz *J. Vojtěch:* Geometrie pro V. tř. r., 1935, str. 121.

kolmé k OC, které protínají kulovou plochu v rovnoběžkách (rovnoběžných kružnicích); v obr. 38 jsou A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 kvadranty (čtvrtkruhy) těchto rovnoběžek. Čtyři kvadranty hlavních kružnic CC_1, CC_2, CC_3, CC_4 dělí pravý úhel sférického trojúhelníka ABC při C na pět stejných dílů. Tak je rozdělen kulový oktant na 25 stejných dílů; kdybychom obdobně rozdělili dalších sedm oktantů, rozdělila by se celá kulová plocha na 200 stejnoplochých dílů.



Obr. 38.

Kdybychom rozdělili poloměr OC ne na pět, nýbrž na n stejných dílů a kdybychom rozdělili pravý úhel při C také na n dílů, rozdělil by se oktant na n^2 a obdobně celá kulová plocha na $8n^2$ stejnoplochých dílů.

Kulová plocha by se dala ovšem i jinými způsoby děliti na části o stejném obsahu; ale uvedený způsob je zvláště jednoduchý a hodí se nám v dalších úvahách.

b) Z $8n^2$ obrazců, na které se dělí kulová plocha právě uvedeným způsobem, jsou některé křivočaré čtyrúhelníky, ostatní křivočaré trojúhelníky. Vrcholy každého z těch čtyrúhelníků jsou zároveň vrcholy rovinného rovnoramenného lichoběžníka, který nazveme *vepsaným* do onoho čtyrúhelníka; vrcholy křivočarého trojúhelníka jsou zároveň vrcholy vepsaného rovinného trojúhelníka. Všechny tyto vepsané lichoběžníky a trojúhelníky tvoří dohromady *vypuklý mnohostěn M o $8n^2$ stěnách vepsaný do kulové plochy.* Mnohostěn M má tyto vlastnosti:

1. Všechny rozměry každé stěny mnohostěnu M se blíží nule, roste-li n do nekonečna.

2. Rovina každé stěny přechází spojitě v tečnou rovinu kulové plochy, roste-li n do nekonečna.

3. Je-li σ plošný obsah kterékoli stěny mnohostěnu a P povrch koule, je

$$\lim_{n\to\infty} (8n^2\sigma : P) = 1;$$

roste-li n do nekonečna, přechází povrch mnohostěnu v povrch koule.

Obsahy jednotlivých stěn mnohostěnu M nejsou stejné, ale (vlastnost 3) čím je n větší, tím přesněji platí, že obsah σ kterékoli stěny rovná se přibližně $P : 8n^2$, totiž obsahu příslušného křivočarého čtyrúhelníka nebo trojúhelníka.

c) Budiž dána část F kulové plochy a bod S ležící mimo F. Spojíme-li každý bod ležící na F s bodem S, vyplní spojnice těleso J, které nazveme *jehlan s křivoplochou podstavou* F a vrcholem S. Abychom vypočetli objem tělesa J, užijeme věty*), že objem (obyčejného) jehlanu, jehož podstavou je rovinný mnohoúhelník o obsahu z a jehož vrchol má od podstavy vzdálenost p, je $\frac{1}{3}zp$.

Rozdělme *celou* kulovou plochu, jejíž částí je F, na $8n^2$ stejných dílů a vezměme v úvahu jen ty plošky (křivočaré čtyrúhelníky nebo trojúhelníky), které leží celé uvnitř F. Do každé z nich vepišme příslušný rovinný lichoběžník nebo trojúhelník a označme obsahy těchto rovinných obrazců $z_1, z_2, \ldots, z_m$; píšeme m místo $8n^2$. p_i budiž vzdálenost roviny obrazce z_i od bodu S. Hledaný objem V tělesa J bude roven limitě součtu, který dostaneme sečtouce objemy všech obyčejných jehlanů o podstavách $z_1, z_2, \ldots z_m$ a o výškách $p_1, p_2, \ldots, p_m$, je tedy

$$V = \lim_{m\to\infty} \tfrac{1}{3} \sum_{i=1}^{m} z_i p_i.$$

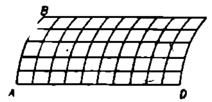
Vzhledem k vlastnosti 3 nahradíme v tomto vzorci veličinu z_i obsahem σ_i příslušného křivočarého obrazce a p_i budeme považovati za vzdálenost tečné roviny (sestrojené ke kulové ploše v některém bodě plošky z_i) od bodu S. Tak dostaneme vzorec

*) Viz *J. Vojtěch:* Geometrie pro V. tř. r., 1935, str. 113.

$$V = \lim_{m \to \infty} \tfrac{1}{3} \sum_{i=1}^{m} \sigma_i p_i. \qquad (1)$$

d) Platnost vzorce (1) je obecná; lze ho užíti pro případ, že křivočará podstava F tělesa J, jehož objem V hledáme, není částí kulové plochy, nýbrž jakékoli jiné plochy. $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ $\ldots, \sigma_m$ značí pak obsahy plošek, které vznikají dělením plochy F na m stejnoplochých dílů (při čemž se zachovávají vlastnosti 1, 2, 3 obdobné shora uvedeným vlastnostem při dělení kulové plochy; vždy je $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_m = \sigma$); p_i jest pak vzdálenost bodu S od tečné roviny sestrojené k ploše F v některém bodě plošky σ_i.

V dalším užijeme vzorce (1) pro případ, že F je částí (výsečí) kolmé válcové plochy. V obr. 39 je naznačeno dělení takové plochy (omezené shodnými kruhovými oblouky AB a CD ležícími ve dvou rovnoběžných rovinách a hranami AD a BC kolmými k těm rovinám) na 50 stejných dílů jednak přímkami rovnoběžnými s AD jednak kruhovými oblouky shodnými s AB.



Obr. 39.

34. Steinerovy vzorce. Výpočet povrchu a objemu zaobleného mnohostěnu. Steiner odvodil vzorce pro povrch zaoblené mnohostěnové plochy rovnoběžné k dané a pro objem části prostoru omezené oběma plochami (po případě neuzavřenými). Uvedeme zde důkaz Steinerových vzorců pro případ vypuklého uzavřeného mnohostěnu.

a) Budiž dán vypuklý mnohostěn M_0 o povrchu P_0 a objemu V_0; v, s, h mají význam jako v odst. 26. Sestrojme zaoblený mnohostěn M rovnoběžný k M_0 ve vzdálenosti k (odst. 31); jeho povrch budiž P, objem V.

Povrch P skládá se jednak z s stěn po řadě shodných se stěnami mnohostěnu M_0, které mají součet obsahů P_0, jednak z částí U_j válcových ploch ($j = 1, 2, \ldots, h$), jež mají za osy hrany mnohostěnu M_0, a konečně z částí kulových ploch

K_j (sférických mnohoúhelníků) opsaných kolem jeho vrcholů ($j = 1, 2, \ldots, v$).

Je-li l_j délka j-té hrany na M_0 ($j = 1, 2, \ldots, h$) a α_j příslušný stěnový úhel, má U_j poloměr podstavy k, středový úhel $\pi - \alpha_j$ [viz rovnici (1) odst. 31] a výšku l_j; rozvinuta do roviny má tvar obdélníka o stranách $(\pi - \alpha_j)\, k$ a l_j, takže její obsah je

$$kl_j\,(\pi - \alpha_j).$$

Součet všech K_j rovná se povrchu koule o poloměru k (viz odst. 31a), totiž

$$4\pi k^2.$$

Hledaný vzorec pro P má tedy tvar

$$P = P_0 + k \sum_{j=1}^{h} l_j(\pi - \alpha_j) + 4\pi k^2. \qquad (1)$$

b) Objem V skládá se ze *čtyr částí*: Z objemu V_0, z objemů kolmých hranolů, jichž podstavami jsou stěny mnohostěnu M_0 a jež mají všechny výšku k, z objemů válcových výsečí omezených plochami U_j a z objemů kulových výsečí příslušných sférickým mnohoúhelníkům K_j.

Součet objemů hranolů je roven

$$P_0 \,.\, k.$$

Objem výseče omezené plochou U_j je roven součinu z obsahu podstavy (kruhové výseče o středovém úhlu $\pi - \alpha_j$ a poloměru k) rovného $\frac{1}{2}\,(\pi - \alpha_j)\, k^2$ a výšky l_j; součet těchto objemů je

$$\tfrac{1}{2}k^2 \sum_{j=1}^{h} l_j\,(\pi - \alpha_j).$$

Součet všech kulových výsečí dává objem koule o poloměru k, tedy

$$\tfrac{4}{3}\pi k^3.$$

Sečtouce všechny čtyři části dostaneme hledaný vzorec pro V:

$$V = V_0 + P_0 \, . \, k + \tfrac{1}{2}k^2 \sum_{j=1}^{h} (\pi - \alpha_j)\, l_j + \tfrac{4}{3}\pi k^3. \qquad (2)$$

(1) a (2) jsou *Steinerovy vzorce*. P je mnohočlen 2. stupně vzhledem ke k, V je mnohočlen 3. stupně.

c) Objem V lze vypočítati ještě jiným způsobem. Budiž S bod uvnitř M_0, r_j jeho vzdálenost od j-té stěny mnohostěnu M_0 ($j = 1, 2, \ldots, s$), f_j obsah této stěny, p_i jeho vzdálenost od některé opěrné roviny mnohostěnu M_0, která má s M_0 jen jeden vrchol společný, a q_i jeho vzdálenost od některé opěrné roviny mnohostěnu M_0, která má s M_0 společné body podél jediné hrany.

j-tá rovinná stěna mnohostěnu M má od bodu S vzdálenost

$$r_j + k.$$

Část válcové plochy, která je omezena při podstavách kruhovými oblouky o poloměru 1 se středovým úhlem $(\pi - \alpha_j)$ a která má výšku l_j, rozdělíme na velký počet stejnoplochých dílů (viz odst. 33d a obr. 39) o velikosti ϱ; plocha V_j, jež má poloměr k, rozdělí se podobným dělením na stejný počet dílů o velikosti $k\varrho$. Očíslujme jednotlivé plošky indexy; velikosti plošek tu tou $k\varrho_1, k\varrho_2, \ldots$ $(\varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = \varrho)$; tečná rovina v některém bodě plošky ϱk_i je opěrnou rovinou mnohostěnu M, je tedy rovnoběžná s určitou opěrnou rovinou mnohostěnu M_0 (obsahující jeho hranu) a má proto od bodu S vzdálenost

$$q_i + k.$$

Kulovou plochu o poloměru 1 rozdělme na velký počet malých stejnoplochých dílů způsobem vyloženým v odst. 33; budiž σ obsah jednoho dílu. Kulová plocha o poloměru k rozdělí se podobným dělením na stejný počet dílů o velikosti $k^2\sigma$. Očíslujme jednotlivé plošky indexy $k^2\sigma_1, k^2\sigma_2, \ldots$ $(\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma)$; tak se rozdělí současně všechny sférické mnohoúhelníky K_j na plošky o velikosti $k^2\sigma$, neboť všechny K_j dohromady vzaty tvoří povrch celé koule. Tečná rovina sestrojená k příslušné kulové ploše v některém bodě plošky $k^2\sigma_i$ je opěrnou rovinou mnohostěnu M, je tedy rovnoběžná s určitou opěrnou rovinou mnohostěnu M_0 (obsahující jediný jeho vrchol) a má proto od bodu S vzdálenost

$$p_i + k.$$

Objem V skládá se ze tří částí: Ze součtu objemů jehlanů, které mají za podstavy rovinné stěny mnohostěnu M, ze součtu objemů jehlanů, které mají křivoploché podstavy U_j a konečně ze součtu objemů jehlanů s křivoplochými podstavami K_j; vrcholy jehlanů všech tří druhů jsou v bodě S.

První část objemu V má hodnotu

$$\tfrac{1}{3}\sum_{j=1}^{s}(r_j + k)\,f_j = V_0 + \tfrac{1}{3}P_0k,$$

neboť $\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{s} r_jf_j$ je objem V_0 původního mnohostěnu a $\sum_{j=1}^{s} f_j$ jeho povrch P_0.

Druhá část má hodnotu

$$\tfrac{1}{3}\lim\sum(q_i + k)\,k\varrho_i = \tfrac{1}{3}k\lim\sum q_i\varrho_i + \tfrac{1}{3}k^2\sum\varrho_i;$$

každý součet se vztahuje ke všem ploškám $k\varrho_i$, na něž se dělí všechny plochy U_j dohromady, a znamení lim značí limitu pro případ, že rozměry všech plošek se blíží nule. Poslední součet

$$\sum\varrho_i = \lim\sum\varrho_i = \sum_{j=1}^{h}(\pi - \alpha_i)\,l_j$$

je součet všech obsahů ploch U_j za předpokladu, že $k = 1$.

Třetí část má hodnotu

$$\tfrac{1}{3}\lim\sum(p_i + k)\,k^2\sigma_i = \tfrac{1}{3}k^2\lim\sum p_i\sigma_i + \tfrac{1}{3}k^3\sum\sigma_i;$$

součty se vztahují ke všem ploškám σ_i, na něž se dělí všechny mnohoúhelníky K_i a lim má obdobný význam jako dříve. Poslední člen

$$\sum \sigma_i = \lim \sum \sigma_i = 4\pi$$

je roven povrchu jednotkové koule.

Sečteme-li všechny tři části, obdržíme hledanou formuli:

$$V = V_0 + [P_0 + \lim \sum q_i \varrho_i] \tfrac{1}{3}k +$$
$$+ [\sum_{j=1}^{h} (\pi - \alpha_j) l_j + \lim \sum p_i \sigma_i] \tfrac{1}{3}k^2 + \tfrac{4}{3}\pi k^3,$$

$\sum p_i \sigma_i$ je součet všech součinů, které dostaneme násobíce část σ_i kulové plochy o poloměru 1 vzdáleností p_i, kterou má bod S od té opěrné roviny mnohostěnu M_0, která má sférický obraz v některém bodě plošky σ_i. Je-li m počet všech částí, na které se dělí povrch jednotkové koule (užíváme způsobu dělení vyloženého v odst. 33; $m = 8n^2$), je

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_m = \sigma = \frac{4\pi}{m},$$

takže

$$\sum p_i \sigma_i = 4\pi \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{m}$$

a máme

$$V = V_0 + [P_0 + \lim \sum q_i \varrho_i] \tfrac{1}{3}k +$$
$$+ \left[\sum_{j=1}^{h} (\pi - \alpha_j) l_j + 4\pi \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{m}\right] \tfrac{1}{3}k^2 + \tfrac{4}{3}\pi k^3. \qquad (3)$$

35. Tloušťka vypuklého mnohostěnu a její střední hodnota. — a) Budiž γ opěrná rovina vypuklého mnohostěnu M_0 a C její sférický obraz na pomocné kulové ploše Σ_1. Bod C' protilehlý k C je obrazem opěrné roviny γ', která je s γ rovnoběžná. Vzdálenost rovnoběžných rovin γ a γ' se nazývá *tloušťka mnohostěnu* M_0 ve směru CC' nebo $C'C$.

Budiž S bod uvnitř M_0, p jeho vzdálenost od γ a p' jeho vzdálenost od γ' ($p > 0$, $p' > 0$). Pak je tloušťka t rovna součtu $p + p'$:

$$t = p + p'.$$

b) Střední hodnotu tloušťky vypočteme takto: Rozdělíme kulovou plochu Σ_1 na m stejnoplochých dílů $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m$ (užijeme postupu podle odst. 33, takže bude $m = 8\eta^2$) o velikosti σ; platí, že $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_m = \sigma = \frac{4\pi}{m}$.

Uvnitř každé plošky σ_i volíme určitý bod, jenž je sférickým obrazem určité opěrné roviny γ_i mnohostěnu M_0 (odst. 32c). Vzdálenost roviny γ od S budiž p_i.

Střední hodnota vzdálenosti p bodu S od opěrné roviny mnohostěnu je

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} p_i. \tag{1}$$

Táž střední hodnota vyjadřuje se také vzorcem

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} p'_i, \tag{2}$$

kde p'_i je vzdálenost bodu S od opěrné roviny, která má sférický obraz v bodě protilehlém k obrazu roviny γ_i. Sečtením rovnic (1) a (2) dostaneme pro *střední hodnotu t^* tloušťky t* vzorec

$$t^* = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (p_i + p'_i)$$

nebo

$$t^* = 2 \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} p_i. \tag{3}$$

Hodnotu pravé strany v rovnici (3) určíme srovnajíce vzorce (2) a (3) odst. 34 pro objem V. V je totiž mnohočlen 3. stupně vzhledem ke k. Pravé strany vzorců (2) a (3) odst. 34 musí býti totožné; koeficient při t^2 v jednom vzorci musí se rovnati koeficientu při t^2 ve druhém. Rovnost obou koeficientů dává vztah

$$\tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{h} l_j (\pi - \alpha_j) = \tfrac{1}{3} \left[\sum_{j=1}^{h} l_j (\pi - \alpha_j) + \lim_{m\to\infty} \frac{4\pi}{m} \sum_{i=1}^{m} p_i \right].$$

Z toho plyne

$$2 \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} p_i = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{h} l_j (\pi - \alpha_j)$$

a tedy vzhledem k (3)

$$t^* = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{h} l_j (\pi - \alpha_j). \tag{4}$$

Tím je dokázána věta o střední hodnotě tloušťky: *Střední hodnotu tloušťky vypuklého mnohostěnu vypočteme, násobíme-li délku každé jeho hrany příslušným vnějším stěnovým úhlem, všechny tyto součiny sečteme a dělíme číslem* 4π; vnějším stěnovým úhlem nazýváme úhel, jenž se s (vnitřním) stěnovým úhlem α_j vyplňuje na úhel přímý.

Rovnice (4) je rovnocenná s rovnicí

$$p^* = \frac{1}{8\pi} \sum_{j=1}^{h} l_j (\pi - \alpha_j),$$

kde p^* značí střední hodnotu vzdálenosti bodu S (voleného libovolně uvnitř mnohostěnu) od opěrných rovin.

c) Příklady:

Pravoúhlý rovnoběžnostěn o rozměrech a, b, c; zde jest $h = 12$, všechny úhly α_j jsou rovny $\frac{1}{2}\pi$; z čísel l_j jsou čtyři rovna a, čtyři rovna b a čtyři rovna c, takže podle (4)

$$t^* = \tfrac{1}{2} (a + b + c).$$

Vypočtěme *střední tloušťky pravidelných mnohostěnů*. Je-li l délka hrany, h počet hran a α vnitřní stěnový úhel pravidelného mnohostěnu, je střední jeho tloušťka dána rovnicí

$$t^* = \frac{h (\pi - \alpha)}{4\pi} \,.\, l.$$

Úhel α je určen rovnicí*)

*) Viz *J. Vojtěch:* Geometrie pro VI. třídu reálek, 1935, str. 119.

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\cos \dfrac{\pi}{n}}{\sin \dfrac{\pi}{m}},$$

kde m značí počet hran v jedné stěně a n počet hran sbíhajících se v jednom vrcholu.

Pro jednotlivé pravidelné mnohostěny dostáváme tyto výsledky (α čítáme ve stupních):

Mnohostěn	n	m	$\frac{1}{2}\alpha$	h	$\frac{t^*}{l}$
čtyrstěn	3	3	35 15′53″	6	0,912
krychle	3	4	45	12	1,500
osmistěn	4	3	54°43′15″	12	1,175
dvanáctistěn	3	5	58 16′53″	30	2,643
dvacetistěn	5	3	69°5′48″	30	1,742