LOGIKA A MATEMATIKA

1. *Předběžná úvaha.*

Logické myšlení je vždy a odedávna považováno za specifickou známku matematického myšlení. Ať již je vlastní tvůrčí proces matematikův jakýkoli, ať již je matematik podle známého dělení Poincaréova geometrem (typ fantasijní, s živou obrazotvorností názornou) nebo logikem — vždy nakonec musí jeho úvaha, napsaná nebo vyřčená, míti všechny znaky logického myšlení. Tak je běžný názor. K tomu, abychom viděli, do jaké míry je tento názor opodstatněný, musíme se seznámiti s logikou, kterou převzalo vědecké myšlení z dávných věků. To provedeme zcela stručně, přidáme však, co přinesla doba nová, lépe řečeno, jaký nástroj vytvořila soudobá logika a během těchto úvah se seznámíme s povahou matematického myšlení o základních problémech lépe, než kteroukoli jinou cestou.

Základní normy lidského myšlení byly ustaveny již v antické logice. Aristoteles považoval za nezbytné předpoklady našeho myšlení tyto tři, jak se říkalo, principy: princip identity, princip sporu a princip vyloučené třetí možnosti. Leibniz přidával k těmto principům ještě princip dostačujícího důvodu. Ponecháme pro tuto část výkladu tradiční označení „princip", ve formalisované logice budeme takové věty nazývati jinak, a přistoupíme k poznámkám o nich.

Princip identity říká zcela prostě: (Předmět) A jest A. Každý předmět je sobě sám roven (Leibniz). Skoro každý přepis tohoto principu nějak nedostačuje. Předposlední věta (Leibnizova formulace) užívá pojmu předmět. Předmět však je vázán výroky, jež jej charakterisují, určují. Ty musí býti, jako *předměty* myšlení také „rovny sobě samým". Již v předchozím mluvili jsme o podmínce předmětného myšlení, podmínce, jež umožní fixování útvarů, jimiž se naše mysl zabývá. Výrazem této podmínky je princip identity, ale vyřčen by měl býti někde mimo, v jiném vyjadřovacím systému, než je naše řeč, která je také předmětem, tedy už také princip identity předpokládá.

Jeden z nejlepších theoretiků moderní logiky, L. Wittgenstein*), kritisoval ostře princip identity, zde uvedený, a jeho kritika vyznívá asi tak: buďto tento princip vyslovuje něco *o dvou* předmětech (říkáme-li na př., že A jest identické s B). Pak je tento princip špatný, neboť *dva* předměty nemohou býti identické již proto, že je můžeme odlišiti. Říká-li však princip, tak jak jsme uvedli, že A je identické s A, pak neříká vůbec nic. (Kritika je v hlavním díle Wittgensteinově, Tractatus logico-philosophicus, věta 5,35 až 5,54.) Tato kritika je důsledná a správná.

Uvedený první princip by měl však býti pouze myšlen, každé jeho vyslovení už jej předpokládá, ba i Wittgensteinova kritika.**)

Na tomto místě bych rád upozornil na jinou formu „rovnosti", která nemá s principem identity vůbec nic společného a které se hojně užívá zejména u definice. Definice není ničím jiným, než novým pojmenováním

*) Tractatus logico-philosophicus, anglické vydání z r. 1922.

**) Přes kritické výhrady k principu identity užívá ho logistika také. Hraje důležitou roli v definici přirozených celých čísel. Kdyby se tohoto principu neužilo, je nutno založiti theorii celých přirozených čísel jinak, na podkladě jisté monotonní logické *operace*. Tato cesta je také možná. (Wittgenstein.)

svazku předmětů a vztahů, jak jsme již dříve poznamenali. Definitorická rovnost pak není identitou, nýbrž jen pokynem, že místo svazku pojmů a relací, jež patří jistým způsobem k sobě, můžeme užíti nového názvu pro nový pojem, definiční rovnicí stanovený.

Máme-li na př. nekonečnou řadu tvaru

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots$$

a jde-li o to, stručně vyjádřiti, že součet řady je funkcí ‚x', pak volíme pro označení součtu obvyklého znaku $s(x)$. Napíšeme-li pak

$$s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots,$$

pak tato rovnice nevyjadřuje identičnost pravé a levé strany, nýbrž je definiční rovnicí pro výraz $s(x)$. Moderní logistika vyjadřuje z opatrnosti u rovnic této povahy značku, vyjadřující, že pravou stranu lze nahraditi levou, tak, že opatří rovnítko ještě dole připsaným indexem Df ($=_D$). V matematice je ovšem rozdíl vyjádření rovnosti dvou výrazů a definitorické rovnosti dobře znám.

Jak budeme chápati obvykle míněnou identitu ve smyslu ekvivalence dvou výrazů, poznáme při formalisaci logické soustavy. Prozatím je možno říci, že to, co se obyčejně nazývá identitou, na př.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

není než vyjádření této logické možnosti: použijeme-li smluvených pravidel o výkonech vzhledem k předmětům ‚a' i ‚b', pak pravá strana je *důsledkem* strany levé, ale také naopak. Proto jsou ekvivalentní.

Je známa ještě jedna zajímavá formulace principu identity, Leibnizova „identitas indiscernibilium". Dva předměty jsou tehdy identické, platí-li jakýkoli predikát vzhledem k prvnímu předmětu také vždy o druhém předmětu. Formální vyjádření tohoto principu nepovažuji obecně vůbec za možné. Musilo by jednak zahrnouti všechny typy výroků, jež je možno o předmětu učiniti, to již naráží na obtíže. Za druhé, není nikterak zaručeno, že máme objeveny všechny predikáty, jež se k danému předmětu hodí. Avšak i bez tohoto vyjádření principu identity se obejdeme.

Princip vyloučené třetí možnosti (principium exclusi tertii) říká: A jest B nebo non B — třetí možnosti není.

Tento princip jest jedním z nejdůležitějších pracovních nástrojů matematických. Jeho význam spočívá v tom: podaří-li se na př. dokázati, že možnost, aby předmět byl non B je vyloučena, pak nutně je předmětem B. Stačí-li nám tento závěr, nemusíme se ani o skutečnou konstrukci toho předmětu starati. Tak na př. se podaří o nějaké reálné funkci dokázati, že nemůže nabýti záporných hodnot. Užitím principu o vyloučené třetí možnosti máme tak ihned výsledek, že hodnoty té funkce mohou ležeti v oboru kladých čísel včetně nuly. Při tom o skutečném průběhu hodnot té funkce nemusíme nic podrobněji věděti a také v důsledku principu nic podrobněji nevíme. Princip nás s takovou funkcí blíže neseznámí a to je právě moment, jenž vadí intuicionistům, kteří jej považují za *prázdný*.

Protože však i z té okolnosti, že funkce je v důsledku principu nezáporná, *lze* v matematické praxi podle povahy případu činiti další pozoruhodné důsledky, nemůžeme se na něj dívati jako na princip prázdný. — Umožní první hrubé opracování, uložíme si předmět alespoň do jedné poloviny pracovní plochy a to již je nesporný zisk.

Užití tohoto principu je podmíněno asi takto: patří-li předmět A pod pojem B nebo non B, se zdá býti snadno rozhodnutelná otázka. Někdy není však možno takové rozhodnutí učiniti. Logik bude trvati na tom, že je to praktická záležitost, protože věří, že každý problém je zásadně rozhodnutelný. Intuicionista nevěří, nemáme-li prostředků (logik by řekl: náhodou *teď* ještě) rozhodnouti, *kam* předmět patří, jestli pod B nebo non B (což je *všechno* ostatní s výjimkou B). Příklady, jež intuicionisté uvádějí, uvedeme později, abychom nerušili chod tohoto přehledu dědictví staré logiky. K pochopení situace, do které dostali svojí kritikou matematiku intuicionisté, uvedu toto přirovnání: ‚B' nechť zaujímá v obyčejném euklidovském prostoru jistou oblast, ohraničenou uzavřeným tělesem. Pak ‚non B' je celý zbývající prostor. Předmět ‚A' musí padnouti buď do tělesa ‚B' nebo mimo, nic jiného nezbývá. Alternativa buď anebo se v tomto způsobu chápání vnucuje. Nebylo by však těžké, úvahu nepatrně pozměnit a dojíti k jinému výsledku. Budiž ‚non B' oblast vně oblasti ‚B', ale sama také ohraničená v konečnu ležící. Což kdyby náš předmět ‚A' padl vně ‚non B'? Přirovnání, jež jsme uvedli, by bylo možno učiniti sugestivnější, kdybychom použili dvou druhů prostoru, z nichž jeden by byl vložen do druhého. Pak by v tomto *vloženém* prostoru platila alternativa buď ‚B' nebo ‚non B' přesně. Ale předmět by se vůbec v tom vloženém prostoru nemusel vyskytovati.

Princip sporu.

Jeho nejjednodušší vyjádření je: A není non A. Tento princip doplňuje do jisté míry princip vyloučené třetí možnosti. Tímto principem se budeme ve formalisované logice podrobněji zabývati, proto o něm nebudeme v této souvislosti ztráceti slov.

Princip dostačujícího důvodu.

V historickém již pojetí Leibnizově vyjadřuje se princip asi takto: Nic se neděje bez příčiny, anebo alespoň bez dostatečného důvodu. Pro logiku i matematiku nám postačí užší vyjádření tohoto principu. Uvedeme je v novodobém vyjádření, pro pozdější úvahy výhodném. Vyjdeme od platných vět, jimiž předměty a vztahy mezi nimi jsou určeny. Pak jen takové věty jsou platné *(dostatečně odůvodněné)*, jež jsou buďto těmito platnými základními větami, anebo *důsledky* z nich, získanými logickou cestou.

Budova antické logiky byla opřena o první tři jmenované principy; princip dostačujícího důvodu přistoupil později jako rovnoprávný princip další. Již antická logika dovedla vypracovati velmi důslednou nauku o soudech a závěrových schematech usuzování. Tu již byl učiněn první počátek formalisace, shrnutí řady zvláštních úsudků pod společný model, *typ*. Tu byl také dán počátek studia struktury, v tomto případě struktury logické. Krásné výsledky přinesla pokračující formalisace ve středověku, kdy byla formální logika hojně pěstována k racionálním rozborům náboženských spekulací. Cenné výsledky tohoto odboru uveřejnil po prvé s hlediska moderní logiky přední polský logistik Lukasiewicz.*)

*) Lukasiewicz uveřejnil hlavní práci o tomto thematu v časopise Erkenntnis, roč. 1934, str. 111—131. (Časopis přestal před druhou svět. válkou v Lipsku vycházeti z politických důvodů.)

Nicméně čas na úplné vybudování logického formalismu tehdy ještě neuzrál. K tomu bylo právě zapotřebí velikého rozvoje matematiky, podstatně umožněného pokrokem Galileiho programu. Tento rozvoj matematiky přinesl s sebou nová hlediska a nové otázky, jež na první pohled nebylo možno po staru zvládnouti.

Moderní formální logika vznikla v Anglii, v první polovině minulého století a jejím zakladatelem je Boole. Myšlenku logického počtu pojal po prvé Leibniz, který si byl dobře vědom potřebnosti nového logického nástroje, nepoložil však ani základů, na nichž by se bylo mohlo stavěti dále.

Formalisovaná logika, kterou se budeme nyní zabývati, nás zavede hloub do problémů matematického myšlení, než by bylo možno obsahovým výkladem. Uvidíme, jak jasně a přesně je možno touto logikou vyjádřiti mnoho problémů, jež bez její pomoci nejsou než povrchně nebo neurčitě vyslovenými dohady.

Jaké úkoly si klade tato logika? Již první, čeho dosáhla, si zaslouží naší pozornosti. Odpoutala totiž obsahovou stránku od stránky ryze formální, umí ji odpreparovati — ne však nějak neživotně, nýbrž tak, že to prospěje oběma stranám. Zabývá se, když dosáhla takového oddělení, pouze strukturou myšlení, nebo strukturou vyjadřování, vztahovou sítí, aniž by se starala o materielní význam předmětů, jež odpovídají značkám soustavy. Předměty pak přijdou k platnosti až při interpretaci výsledků, odvozených formulí. Pokud jsou ve hře (abychom užili srovnání pro tento způsob mechanického odvozování), nestaráme se o význam symbolů vůbec.

Důvody, proč se tak ostře odlišila formální stránka logiky od materielní, obsahové, jsou několikeré. V první řadě: v povaze logiky samé je obsažen formální prvek již velmi silně v nejstarších logických úvahách. Již od dob antických se užívá shrnování jednotlivých, konkrétních soudů a závěrových řetězů ve schemata. Takové schema je pak typem, jenž zahrnuje všechny možné individuální soudy, jež spadají pod jeho schema. Zrovna tak shrne složitější úsudkové řetězce. Počátek formalisování logiky byl učiněn právě u typů soudů. Teprve později, mnohem později, zmohlo formální pojetí a dozrálá logistická technika i jemnou strukturu dorozumívací řeči, kterou uvedlo v takovou neselhávající soustavu, jak ji které odvětví matematiky potřebuje.

Druhý důvod je, jak již jsme o tom mluvili dříve, stupňování požadavku přesnosti. Právě v předchozích úvahách jsme se přesvědčili na různých paradoxech, že dorozumívací historická řeč není přesná. Kolik jen významů může míti výraz „číslo" nebo „přímka". Nikdy nejde o to, co které slovo znamená *samo o sobě,* nýbrž, v jaké souvislosti se vyskytuje, jak je zapojeno na celé okolí vět, jež tohoto slova užívají. Teprve tato souvislost s okolím určuje význam pojmu, jenž odpovídá nějakému užitému slovu. Jakékoli spekulace o slově jakožto výrazu osamoceném jsou zcela neplodné. A tento mechanismus souvislostí, jenž dal pojmům přesný význam, vytvořila logistika. Vztahy a souvislosti odkrývá logistika neúprosně, protože nikdy nám nevrátí více, než jsme do ní vložili, a není tedy možno jakoukoli nekontrolovatelnou eskamotáží něco vykouzliti, co by nepodléhalo kontrole. V tomto smyslu se osvědčila znamenitě pro bádání o základech matematiky, daných několika větami, na nichž vše spočívá. Je-li tu dole zjednáno jasno, nemůže celý strom na nejasnosti churavěti, Logistika tu vykonala pro základy matematiky dobrý kus chirurgické práce.

Je tu ještě další okolnost, již jsme už naznačili, a která byla snad své doby přeceněna. Leibniz zamýšlel vytvořiti logistikou takový mechanismus „ars inveniendi", jenž by umožnil hledání nových pravd počtem. Velmi zajímavě popisuje svoji myšlenku takto: „Jestliže by vznikly spory, nebude již zapotřebí disputací mezi dvěma filosofy více než mezi dvěma matematiky. Postačí, aby vzali do ruky pera a posadili se ke svým stolům a řekli si: počítejme!"

Leibniz se domníval, že k novým poznatkům i k rozhodnutí sporů by se došlo počtem. Taková že by byla nosnost jeho „ars inveniendi". V tomto rozsahu se nemohla logistika dosud uplatniti a je nejisté, bude-li někdy tak zjednodušena, aby mohla býti náhradou za intuici. Určité odvětví matematiky, je-li již systémem, má ovšem povahu deduktivní vědy — to je však již *výsledek* celého procesu. Objevy, v nichž se uplatní tvořivý element matematikovy individuality, nepřicházejí však touto cestou. Leibniz si představoval, že bude možno užíti logického počtu pro všechny vědy vůbec jako základu. Pro vědy, jež nejsou jen deduktivní, by to byla pomůcka ceny velmi problematické. Nicméně i tak, role, která připadá logistice ve zpevnění stavby deduktivních věd, a role, kterou má pro opracování pojmů, je velmi čestná a užitečná. Ovšem, lze jí užíti ponejvíce tam, kde vědní soustava je již vypracována natolik, že je známo, kterými zřetelnými předměty se zabývá. V tomto stadiu se však mohou objeviti nesrovnalosti, jak se již mnohokráte stalo v dějinách matematiky. A to je vhodný okamžik pro zásah logistickou analysou. V tomto užším pracovním vymezení našla již a řešila logistika tolik problémů, že opravdu moderní matematiku si bez její pomoci nelze představiti.

Takové úlohy, jako je třeba úplnost nebo bezespornošt axiomatické soustavy pro nějaké odvětví matematiky, osvětlení povahy axiomů, o nichž filosofie se tolik napřemýšlela, vymýcení logických a slovních antinomií anebo třeba objev, že matematika potřebuje ke své výstavbě věty, jež nejsou důsledkem základních vět logiky (jak později uvidíme, na př. axiom výběru), to jsou úlohy, jež často byly vyvolány v život logistickými rozbory a podstatnou pomocí logického formalismu také řešeny.

Úvod do logického formalismu je možno provésti různými způsoby. Své doby se neobešel takový úvod bez slovného doprovodu, jímž se význam symbolů a operací vykládal a odůvodňoval. Ba i později byl počet sám promísen obsahovým výkladem anebo vysvětlivkami. Hlavní snahou při stavbě takového logického deduktivního systému je, aby byl soběstačný, aby definice, operace a všechny potřebné prvky skladby (syntaxe) byly vyjádřeny v soustavě samé. Je tedy možno, jak víme asi 10 let, řešiti tuto úlohu: formulovati skladbu soustavy v ní samé (Carnap*). V české řeči nám bude tento výsledek samozřejmý: skladbu české řeči je přece možno v ní samé vyjádřiti. Upozorňuji, že ani tato věta není samozřejmá, mohlo by se státi, že věty, jimiž by se vyjádřila skladba české řeči, by sice česky zněly, ale patřily by k nějaké české „nad-řeči". A pro formalivanou soustavu taková věta již vůbec není samozřejmá. Řešení této úlohy se podařilo až tehdy, kdy celá sou-

*) Carnap, The Logical Syntax of Language, 1937. Dílo vyšlo také německy, německá verse je starší.

stava je považována za umělou „řeč". Wittgenstein považoval ještě v roce 1918 tuto úlohu za neřešitelnou. Začíti tímto způsobem, ostře, by nebylo pro naše účely právě vhodné. Pro počátek je to cesta svojí abstraktností značně obtížná. Přidržíme se proto s počátku v jednodušších částech obsahového pojetí, ale tak, že je položíme jako přibližnou interpretaci teprve po formalismu — který bude uveden v soudobé symbolické řeči.

2. *Výrokový počet dvojhodnotový.*

Nejprve si všimneme logické soustavy, která je nejpodrobněji propracována a má jméno „výrokový počet". Prvky, kterých tato soustava nebo řeč užívá, a kterými pracuje, jsou „výroky" a ty se již dále nerozkládají. Takovým výrokem může býti každé ucelené sdělení, na příklad věta „venku je hezky" nebo „počet prvočísel není konečný". Sdělení takové, t. j. výrok, ovšem musí míti smysl, musí být možno o výroku říci posudek, zda je pravdivý nebo nepravdivý.

Na tuto otázku pravdy, v našem případě pravdivosti výroku jsme již jednou letmo narazili. Potřebovali bychom celý veliký aparát formalisované řeči, abychom si mohli ukázati, k jakým výsledkům se dospělo v poslední době a jakou roli hraje pojem pravdy ve formalisované řeči. Tu jen na něco upozorníme. Právě logistika odkryla mnohé výroky, o nichž nelze říci ani že jsou pravdivé, ani že jsou nepravdivé. Jsou to výroky, které nemají smyslu, a které jen svojí slovnou formulací svádějí k tomu, považovati je za pravdy nebo nepravdy. Takovými výroky jsou mnohé, svým způsobem proslulé věty některých filosofických soustav (zejména německá idealistická filosofie 19. století jich měla mnoho), na př.: „dobro je identické s krásou", nebo „krása je nekonečné v konečném". Nechť čtenář přemýšlí o tom, co by takové výroky *vůbec* mohly znamenati. Jsou dokonale prázdné, jsou bez smyslu, protože jsou tak vzdáleny jakéhokoli materielního použití. Takové výroky se mohou, krásněji vyjádřeny, hoditi básníkům, aby navodily nějaký citový stav, pro vědu jsou bezcenné.

Takové výroky jsou nebezpečnější než hříčky, které také nemají smyslu, ale u nichž se tato vlastnost ihned projeví, jako na př. ve větě: „veďte tečnu ke čtyrhrannému kruhu". Tato věta nemá smysl proto, poněvadž čtyrhranný kruh je kontradiktorický předmět myšlení, z toho však následuje, že není vůbec předmětem. Úloha nemá tedy smysl.

Větu: byla vedena tečna ke čtyrhrannému kruhu nelze označiti ani přídavkem „pravdivá" ani „nepravdivá".

Již na těchto několika příkladech je patrno, že příčiny, proč nelze výrok hodnotiti jedním z obou přívlastků, mohou býti různého druhu. V prvních dvou případech se vyjadřuje zdánlivě něco o předmětech myšlení, jež nejsou „clare et distincte" určeny, jak požadoval Descartes. Proto žádnými předměty myšlení nejsou a citované výroky o kráse jsou bez smyslu. V druhém případě je to sporným způsobem stanovený předmět myšlení, jenž následkem toho nemůže existovati.

Připusťme teď, že se budeme zaměstnávati pouze takovými výroky, k nimž je možno hodnotící stanovisko „pravdivý" nebo „nepravdivý" zaujmouti. Každý výrok může tedy míti buď hodnotu „*P*" nebo „*N*", jak budeme od nynějška stručně psáti. Z tohoto důvodu se nazývá soustava, jejíž přehled si podáme, dvojhodnotový výrokový počet.

Jsou logické počty o větším počtu hodnot než dvě. Logický počet, jenž má tři hodnoty, je možno vhodně upraviti jako podklad pro intiucionistickou matematiku. Takový počet nemá jen „*P*" a „*N*" hodnoty, nýbrž ještě třetí, jakousi mezihodnotu — odpovídající výrazu „nerozhodnutelný" — čili proti antické logice tertium *datur*. Příklad na takovou soustavu si uvedeme v závěrečných poznámkách tohoto odstavce.

Je však možno jíti ještě dále a vybudovati logiku tak, že „*P*" a „*N*" jsou krajními hodnotami, mezi nimiž leží dokonce celé kontinuum hodnot, právě tak jako mezi body 0 a 1 na číselné ose. Hodnota výroků se dá pak interpretovati na příklad jako pravděpodobnost.

Máme-li v dvojhodnotové logice více výroků, na příklad n, pak je možno takový soubor hodnotiti 2^n různými způsoby, neboť každý výrok má dvě a jen dvě hodnoty. Příklad: mějme tři výroky A, B, C. Nevíme-li jakých hodnot nabyly, mohou zásadně nastati tyto možnosti hodnocení: P, P, P; P, P, N; P, N, P; P, N, N; N, P, P; N, P, N; N, N, P; N, N, N, celkem 2^3 možností. Spojením takových ohodnocených výroků dostaneme výrok nový, jakousi větu, v níž původní výroky jsou složkami celku. Logická hodnota nového útvaru jest funkcí hodnoty složek, tedy oněch elementárních výroků. Je, jak se můžeme stručně vyjádřiti, pravdivostní funkcí hodnoty svých složek.

Možných spojení výroků je mnoho (je-li předepsán počet výroků, není těžko vypočísti, kolik takových možných spojení je), volíme z nich taková, která se poměrně dobře uvedou v souhlas s hovorovou řečí a se základními logickými požadavky. Definici pravdivostních funkcí výroků, jež budeme potřebovati, provedeme tabulkovou methodou. Jsou to tabulky, jež mají sloupců o jeden více, než kolik je výroků (v našem případě stačí jak poznáme, výroky dva, protože ostatní spojení výroků lze na základní převésti), řádek je tolik, kolik je možností, ohodnotiti souhrn ‚n' výroků, tedy 2^n. Poslední sloupec tabulky určuje hodnoty pravdivosti toho určitého spojení; v něm jsou explicitně uvedeny hodnoty pravdivostní funkce toho spojení. Tyto hodnoty jsou vždy každému druhu spojení přiřčeny definitoricky a jimi je ono spojení charakterisováno.

Počneme s příklady nejjednodušších tabulek.

Tabulka pro negaci výroku. Tu je tabulka velmi jednoduchá, má pouze dva sloupce a následkem toho dva řádky. (Výroky budou zatím značeny malými latinskými písmenami.)

p	$\bar{p}$
P	N
N	P

Tato tabulka je jistě ve shodě s obvyklým pojetím negace. Má-li výrok ‚p' hodnotu P, potom jeho negace, značená ‚$\bar{p}$' má hodnotu N a opačně. S výjimkou této tabulky pro negaci definují všechny ostatní tabulky vskutku spojení výroků jako pravdivostní funkci složek. Tato tabulka jediná se zabývá jediným výrokem a definuje negaci výroku jako pravdivostní funkci jeho možných dvou hodnot.

Disjunkce dvou výroků.

p	q	$p \vee q$
P	P	P
N	P	P
P	N	P
N	N	N

Spojení výroků ‚p' a ‚q' provedené touto tabulkou nazveme „disjunkce", čteme je asi: ‚p nebo (také) q'. Spojení znakem ‚$\vee$' není totiž spojením ve smyslu vylučujícího: ‚buď' p nebo q', nýbrž spojení ve smyslu latinského „vel", jak již tradičně logistikové toto spojení do obyčejné řeči překládají. Latinské „vel" nemá totiž onoho vylučujícího rázu, je asi nejlépe vystiženo českým ‚nebo', k němuž si pro seslabení přidáme ‚také'. Poněvadž je to první spojení dvou výroků, popíšeme si je trochu podrobněji.

‚$p \vee q$' má hodnotu P, když
p má hodnotu P, q také hodnotu P,
p má hodnotu N, q hodnotu P,
p má hodnotu P, q má hodnotu N.

Tyto tři první případy jsou v souhlase s obvyklým pojetím disjunkce. Jsou-li oba výroky P, pak je disjunkce samozřejmě P. Je-li jeden z výroků falešný, pak disjunkce nepřestává býti správná a tedy hodnota, přiřazená funkci ‚$p \vee q$' pro tento případ musí být zase P.

Jedině v posledním řádku tabulky má naše funkce hodnotu N. Jsou-li oba výroky falešné, je celá disjunkce také.

Jiný příklad spojení dvou výroků poskytuje tabulka

p	q	$p . q$
P	P	P
N	P	N
P	N	N
N	N	N

Toto spojení výroků se nazývá „konjunkce", znak, kterého se užívá pro tuto pravdivostní funkci, je „ $\cdot$ ". Spojení se přeloží výstižně spojkou „a" („et"). Spojení výroků ‚p a q' má tedy hodnotu P jen v tom případě, když *oba* výroky jsou hodnoty P.

Obsahově odpovídá i toto stanovení běžné potřebě řeči. Jsou-li oba výroky falešné, má spojení samozřejmě hodnotu N. Ale i tehdy, je-li jen jeden z nich hodnoty N, nemůže býti hodnota funkce ‚p a q' rovna P. Nejlépe je to patrno tehdy, když položíme za ‚q' ve zvláštním případě opět ‚p'. Spojení by pak bylo v obou případech, o nichž uvažujeme; buď ‚$p . \bar{p}$' nebo ‚$\bar{p} . p$'. Současná platnost výroku a jeho negace není možná a spojení musí míti funkční hodnotu N.

Všimněme si jedné zajímavé vlastnosti obou posledně uvedených tabulek. První z nich má v posledním sloupci třikrát za sebou hodnotu P, jedinkrát hodnotu N.

V druhé z nich, v tabulce pro disjunkci, je to právě opačně. Nahraďme v této druhé tabulce *všechny* hodnoty pravdivosti hodnotami opačnými. Tabulka bude pak vypadati takto:

$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}$
N	*N*	*N*
P	*N*	*P*
N	*P*	*P*
P	*P*	*P*

V posledním sloupci máme negaci konjunkce a to výroků, jež jsou negacemi původních výroků. To způsobila výměna pravdivostních hodnot za hodnoty opačné. Čteme-li tuto poslední tabulku po řádcích směrem vzhůru, dostáváme přímo tabulku pro spojení „vel". Ukázali jsme si tak zajímavou souvislost dvou spojení výroků znakem „vel" a znakem „et". Disjunkce dvou výroků není podle tohoto výsledku ničím jiným, než negací konjunkce, v které jsou hodnoty výroků vzhledem k disjunkci změněny v opačné. Ukazuje se tu, a pozdější příklad nám dosavadní výsledek jen potvrdí, že spojení výroků nejsou na sobě nezávislá. Kdybychom vzali disjunkci jako původní funkci pravdivostních hodnot, můžeme konjunkci *definovati* pomocí disjunkce a negace, zavedené první tabulkou vůbec. Tento výsledek má význam pro logickou transformaci spojení výrazů. Dalším příkladem je tabulka spojení výroků implikačním znakem. Toto spojení dvou výroků je snad vůbec nejdůležitější pro matematickou logiku, je zvláštním případem spojení, jež by se dalo přibližně vystihnouti výrazem „býti důsledkem". Implikace umožňuje hledání důsledků z předpokladů. Definiční tabulka zní:

p	q	$p \rightarrow q$
P	P	P
N	P	P
P	N	N
N	N	P

Implikace jako pravdivostní funkce dvou výroků ‚p' a ‚q' má pouze tehdy hodnotu N, kdyby výrok hodnoty N byl důsledkem výroku hodnoty P. Jinak vždy má hodnotu P. První řádek i poslední řádek tabulky jsou obsahově přirozené. Z výroku hodnoty P jde P a to je správné tedy zase P (v posledním sloupci). Podobně z N jde N a to je také správné, tedy P. Podivná se může zdáti jen řádka druhá, že by z výroku hodnoty N plynul výrok hodnoty P a to celé že by mělo hodnotu P. Upozorňujeme proto znovu, že obsahový přepis těchto pravdivostních funkcí nevystihuje než velmi přibližně ve slovech jejich přesný význam, stanovený tabulkou. Implikace, jak je stanovena naší tabulkou, je širší než spojení, jež by se mohlo nazvati „důsledkem" v *užším* smyslu. Význam takového spojení byl studován americkým logikem Lewisem, jenž mu dal název „strict implication". Ukázalo se však, že pro závěry, jež potřebuje matematika, stačí úplně obecná implikace, daná naší tabulkou. Je mnohem jednodušší než „strict implication" a technicky se jí mnohem lépe pracuje. (Nezdá-li se býti čtenáři druhá řádka tabulky dosti jasná, nechť si ji přiblíží tímto příkladem: Je-li 3 . 5 = 16, pak je v účtě chyba. ‚3 . 5 = 16' má hodnotu N, věta ‚v účtě je chyba' hodnotu P a celé spojení má zřejmě hodnotu P.)

Implikace použijeme teď k tomu, abychom si po druhé, a to trochu jiným způsobem ukázali, že pravdivostní funkce výroků nejsou na sobě nezávislé, tím také se nám povaha implikace osvětlí s jiné strany, protože ji uvedeme ve vztah k disjunkci. Nahraďme v tabulce pro spojení „vel" výrok ‚p' výrokem ‚$\bar{p}$':

$\bar{p}$	q	$\bar{p} \vee q$
N	P	P
P	P	P
N	N	P
P	N	N

Při tom ponecháme hodnoty v třetím sloupci v původním sledu, od shora vzato P, P, P, N, protože to jsou hodnoty, jež ono spojení charakterisují. V minulém příkladě, kde jsme uváděli ve vztah konjunkci a disjunkci, se musely změniti hodnoty posledního sloupce v opačné, poněvadž šlo o negování celého spojení obou výroků v disjunkci.

Tato poslední tabulka se shoduje až na nepodstatnou výměnu v první a druhé dvojici řádků s tabulkou pro spojení ‚$p \to q$'. Je tedy možno implikaci ‚$p \to q$' čísti také jako disjunkci ‚non p nebo (také) q'. Spojení dvou výroků implikací a disjunkcí nejsou tedy také na sobě nezávislá a záleží jen na nás, které z nich chceme považovati za základní a které za odvozené. Obě spojení jsou ekvivalentní a jsou zase ukázkou transformace logické.

Můžeme tedy, užívajíce odvozených výsledků, psáti

$$\bar{p} \vee q \equiv_{Df} p \to q,$$

t. j., výraz na levé straně definiční rovnice vyjádřiti výrazem

$$‚p \to q'$$

anebo

$$p \to q \equiv_{Df} \bar{p} \vee q.$$

Právě tak lze podle výsledku, jejž jsme odvodili před tím, psáti

$$p \vee q \equiv_{Df} \overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}$$

anebo

$$\overline{\bar{p} \cdot \bar{q}} \equiv_{Df} p \vee q$$

podle toho, které ‚spojení' chceme vzíti za základní a které za definované. Je na př. patrno, že by stačilo vzíti za základní spojení disjunkci. Spolu s negací, která má zcela zvláštní postavení, stačí tato pravdivostní funkce vyjádřiti konjunkci a také implikaci.

Radikálním způsobem zjednodušil americký logik Sheffer všechny funkce hodnot *P* a *N* tím, že je redukoval na jedinou, kterou lze vše vyjádřiti. Pro zajímavost si ukážeme, jak je to možné. Zavedeme jediný vztah mezi výroky, totiž ‚neslučitelnost'. Značiti budeme ‚$p \mid q$' a čísti budeme ‚p je neslučitelné s q'. Volně přeloženo: ‚p' a ‚q' neplatí současně. Negace výroku p se pak vyjádří ‚$p \mid p$' (‚p' je neslučitelné samo se sebou, tedy ‚non p'). Spojení „et" je vyjádřeno jako negace neslučitelnosti výroku ‚p' a ‚q', tedy $(p \mid q) \mid (p \mid q)$. Tento výraz je snano srozumitelný, podíváme-li se na negaci výroku, vyjádřenou Shefferovým symbolem. Po obou stranách pro neslučitelnost jsou stejné závorky. T. j. ‚p/q' neplatí. Pak však neplatí, že ‚p' a ‚q' jsou neslučitelné a platí tedy současně, čili ‚p a q'. Spojení „vel" je vyjádřeno jako $(p/p) \mid (q/q)$, obsahově tedy, že negace ‚p' je neslučitelná s negací ‚q'. Z toho jde však ‚p nebo q'. Máme-li již tyto výsledky, není těžké, vyjádřiti implikaci, o níž víme z předchozího, že ji lze převésti na disjunkci.

Shefferovou redukcí se dále nebudeme zabývati. Je pozoruhodná s technického stanoviska a jedním z pěkných výsledků této redukce je fakt, že umožnila vyjádřiti základní věty logiky větou jedinou. O jedinou větu se tedy může opříti celá budova formální logiky. Důkaz provedl v minulé světové válce nadaný, bohužel, předčasně zesnulý francouzský logik a matematik Nicod, žák Russelův.

Spojení většího počtu výroků než dvou by bylo možno prováděti také tabulkovou methodou dále. Počet polí ovšem vzrůstá a jednodušší je, rozložiti každé takové spojení na menší celky. Každý celek pak má charakter jednoduchého výroku. Na př. spojení tří výroků

$$‚(p \vee q) . r'$$

není než konjunkcí dvou nových výroků, výroku ‚$p \vee q$' a výroku ‚r'. Obdobně se, jak známo, převádí třeba v elementární matematice výpočet mocniny trojčlenu

$$(a + b + c)^n$$

na výpočet mocniny dvojčlenu

$$((a + b) + c)^n.$$

Seznámili jsme se teď se základními logickými operacemi výrokového počtu a musíme si ukázati věty, z nichž plyne, jakým způsobem se těch operací užívá. Logické principy antické logiky jsou nahraženy soustavou základních vět, na něž můžeme nahlížeti jako na operační pravidla. Počet základních vět není přesně určen. Některé soustavy užívají šesti (Frege), pěti (Russel), čtyř (Hilbert), menším počtem základních vět se hojně zabývali polští logikové (Lukasiewicz, Tarski) a konečně víme již, že tento počet lze redukovati až na větu jedinou (Nicod; Leszniewski později jiným způsobem také). Jak je tomu s principy antické logiky? Tyto principy jsou v těchto novodobých soustavách logických odvoditelnými větami. Veliké obohacení nových soustav proti antice spočívá v tom, že všechna pravidla pro operace s výroky výslovně uvádí, nic nezamlčuje. To je právě dobře patrno na okolnosti, že antické principy logiky jsou na př. v soustavě, kterou si zanedlouho uvedeme *odvozenými* větami.

Základní věty logické soustavy se také někdy nazývají axiomy té soustavy. Tomuto pojmenování se vyhneme a ponecháme si pojmenování ‚axiom' pouze pro soustavy matematické. Jeden z důvodů, proč tyto základní věty nenazýváme axiomy, poznáme, až si promluvíme o t. zv. závěrových axiomech v matematice.

Soustava základních logických vět, z nichž vše, co potřebujeme, můžeme odvoditi, musí splňovati některé podmínky, které si ihned uvedeme. Bez splnění těchto podmínek by byla soustava prázdnou hrou bez jakéhokoli užití. Setkáme se v první z obou podmínek s požadavkem, který známe z rozhovoru o matematickém předmětu. Požadavky jsou:

1. Nesmí býti v této dvojhodnotové soustavě odvoditelná věta tvaru ‚$p \,.\, \bar{p}$'. Dokážeme v pozdějším textu velmi jednoduše prostředky výrokového počtu, že z takové věty by plynula *každá* věta. Tím by byla soustava naprosto nepotřebná, protože by připustila i odvození vět nesprávných.

2. Soustava základních vět musí vyhovovati podmínce nezávislosti. Jednotlivé věty soustavy nesmí býti možno odvoditi souhrn ostatních.

Poznámka k požadavku 1. — Požadavek tento je zásadního rázu. Znala jej obsahová logika starší, mnohokráte byl tento požadavek zdůrazněn již ve středověku. Pro zajímavost uvedu delší citát z díla Duns Scotova. Duns Scotus byl jeden z nejsubtilnějších logiků středověké scholastiky. Příkladem předběhneme formální důkaz, slíbený v odst. 1., že z věty tvaru ‚$p \,.\, \bar{p}$' následuje každá věta. „Ad quamlibet propositionem implicantem contradictionem de forma sequitur quaelibet alia propositio in consequentia formali." To je důvod, pro který musí být splněna podmínka 1. Zajímavé je však Scotovo odůvodnění, které podává příkladem: „Socrates currit et Socrates non currit; igitur tu es Romae". To je věta, jejímž prvním členem je kontradikce, Sokrates běží a (současně) neběží — z této kontradikce následuje jakákoli věta, Duns Scotus volí větu: ‚proto ty jsi v Římě'. Jeho důkaz je tento: „Probatur quia ad dictam copulativam sequitur quaelibet eius pars gratia formae. Tunc reservata ista parte „Socrates non currit", arguantur ex alia sic: „Socrates currit, igitur Socrates currit vel tu es Romae", quia quaelibet propositio infert seipsam formaliter cum qualibet alia in una disjunctiva. Et ultra sequitur: „Socrates currit vel tu es Romae; sed Socrates non currit (ut reservatum fuit); igitur tu es Romae, quod fuit probatum per illam regulam: ex disjunctivam cum contradictoria unius partis ad reliquam partem est bona consequentia."*)

Jemná argumentace Scotova probíhá asi takto: z konjunkce ‚Sokrates běží a Sokrates neběží' plyne věta ‚Sokrates běží' i věta ‚Sokrates neběží'. Z věty ‚Sokrates běží' plyne formálně věta ‚Sokrates běží nebo ty jsi v Římě' [srovnej s tím později uvedenou základní větu b) výrokového počtu]. Duns Scotus znal však již implikaci v té podobě, jak ji známe my. Čtenář si vzpomene, že implikace mezi prvky ‚*p*' a ‚*q*' je ekvivalentní disjunkcí, ‚$\bar{p} \vee q$'. Tohoto obratu teď užije Duns Scotus. Věta ‚Sokrates běží *nebo* ty jsi v Římě' je ekvivalentní větě ‚Sokrates neběží *implikuje* ty jsi v Římě'. Ale předpoklad „Sokrates neběží" ještě máme v zásobě. S tím jsme dosud nic nepodnikli. Užijeme-li tohoto předpokladu, jenž plynul z kontradiktorické první věty, můžeme uzavříti: „ty jsi v Římě".

Nejde mi tu o to, osvěžovati středověkou scholastiku. Musíme si však uvědomiti, že technicky byla tato logika bezmála tak daleko, jako dnes, a cíle sledovala velmi podobné. Hlavně neúprosnou přesnost. Příklad Scotův dnešního čtenáře nemusí zajímati, ale forma argumentace má trvalou cenu. Důkaz jedné ze základních vět celé methodologie matematiky i logiky, že v základ-

*) Lukasiewicz, l. c., str. 130, 131.

ních větách soustavy nesmí býti skryt spor, by nebylo dnes možno přesněji provésti.

Poznámka k bodu 2. — Požadavek druhý, vyslovující nezávislost základních vět soustavy, není *jen* požadavkem úspornosti, aby totiž základních vět bylo co nejméně. Je sice zcela správné, volíme-li základních vět (v matematice pak základních axiomů) co možno nejméně, právě z důvodů ekonomických. Je tu však ještě okolnost jiná, již si nejlépe uvědomíme na dějinách pátého postulátu Euklidova. Neškodí, že to náhodou je postulát matematický. Kdyby byl postulátem logickým, nebyla by úvaha jiná. Kdyby postulát o existenci jediné rovnoběžky daným bodem k dané přímce bylo možno odvoditi z ostatních axiomů euklidovské geometrie, byl by jako axiom zbytečný. Byl by pouhou dokazatelnou poučkou, jež by se odvodila v systému dříve nebo později. To, že tento postulát odvoditelný nebyl, dalo základ k neeuklidovským geometriím. Postulát, který nebyl odvoditelný, bylo možno nahraditi postulátem *jiným*, právě proto, že s ostatními nesouvisel. Nezávislost základních vět, event. axiomů, na sobě není tedy jen výrazem ekonomického požadavku estetisujícího rázu, nýbrž má základní význam pro disciplinu, jejímž základem je.

To, co kdysi potřebovalo staletí, ba tisíciletí, aby bylo objasněno, je dnes možno logistickou technikou dokázati v době nepříliš dlouhé. Aby to bylo možno učiniti, není možné vystačiti s jednoduchým výrokovým počtem. Je nutno jej zdokonalit a dát mu vyjadřovací prostředky, jež na to, co chce zvládnouti, vskutku stačí. S vyšší formou takového počtu se setkáme později. Ale tu již můžeme říci, že oba hlavní požadavky, kladené na soustavu základních vět pro výrokový počet, si na té soustavě ověříme a bezespornost i nezávislost dokážeme. I když to je počet poměrně primitivní, bude ukázka obou důkazů velmi užitečná pro seznání methody, jaké se dá k takovému důkazu užíti. Leibnizovo tušení, že logického počtu bude možno užíti k řešení kontroversí, se v těchto otázkách do značné míry vyplnilo.

Soustava základních vět výrokového počtu je složena takto:

a) $p \vee p \rightarrow p$
b) $p \rightarrow p \vee q$
c) $p \vee q \rightarrow q \vee p$
d) $p \vee (q \rightarrow r) \rightarrow [p \vee q \rightarrow p \vee r]$ *) **)

Se základními operacemi je již čtenář seznámen, proto tyto logické formule nebudeme již nijak obsahově vykládati. Zato si ukážeme brzo, jak se jimi pracuje, co z nich plyne jako důsledky, jako poučky.

K těmto základním formulím patří pravidla pro tvoření výrazů. Tato pravidla vyslovíme v obvyklé řeči, ne tedy v soustavě samé, protože soustava, v níž by je bylo možno vysloviti, je příliš složitá. Již jednou jsme se o této věci zmínili. Není však proto třeba míti podezření, že by to nebylo možno.

Pravidla pro tvoření výrazů:

1. Je-li ‚p' výraz, je také ‚$\bar{p}$' výraz.
2. Jsou-li ‚p' a ‚q' výrazy, je jím také ‚$p \vee q$'.

---

*) Závorek se užívá pro větší přehlednost a oddělení výrazů, jež k sobě patří. Pravidla o užívání závorek výslovně neuvádím, užití bude patrno ze souvislosti.

**) Obvykle bývá místo naší věty d) uváděna věta d'):

$$(q \rightarrow r) \rightarrow [p \vee q \rightarrow p \vee r].$$

Lze dokázati, že naše soustava je rovnocenná se soustavou, jež má místo věty d) větu d').

Vzhledem k tabulkám, jimiž jsme si stanovili základní spojení výroků, by se mohla zdáti tato pravidla zbytečná. Nejsou zbytečná tehdy, položíme-li za základ celé soustavy pouze vyjmenované základní věty a nepoužijeme-li tabulek. V tom případě je nutno doplnit formule a) $\div$ d) pravidly, z nichž dvě první jsme uvedli a další právě uvedeme. Další pravidla vzhledem k soustavě základních vět jsou:

3. Závěrové pravidlo: Je-li ‚p' formule a je-li ‚$p \rightarrow q$' formule, pak je také ‚q' formulí. Formulí je pak buď základní věta nebo důsledek základní věty nebo vět. Obsahově říká toto pravidlo asi tolik: dejme tomu, že důsledkem našich úvah je věta X. Z věty X však plyne formálně věta Y (pozor na volný překlad implikace!). Z těchto obou předpokladů můžeme uzavříti na platnost věty Y. Tak se tvoří úsudky v řetězcích až k výsledku, který potřebujeme.

4. Jestliže se vyskytuje v nějaké formuli výrok obecně ‚r', pak můžeme na jeho místo položiti do všech formulí, v nichž se v téže souvislosti vyskytuje, výraz z jiných výroků.

Ukážeme si teď, jak se ze soustavy základních vět odvozují důsledky, logické poučky. Seznámíme se tak s logistickou technikou, jež nám bude v rozboru později nápomocná. Při důkazech se budeme stále odvolávati na základní věty a), b), c), d).

1. $$p \vee \overline{p}$$

(tato formule je slabší než princip „tertium non datur", říká ‚p nebo také non p').

Důkaz: $$p \vee p \rightarrow p \qquad \text{věta a)}$$
$$p \rightarrow p \vee p \qquad \text{věta b),}$$

kde za ‚q' je položeno ‚p'.

Pomocná věta: Je-li ‚$A \rightarrow B$' formule a ‚$B \rightarrow C$' také formule, je také ‚$A \rightarrow C$' formule. (Místo výroků, označených malými písmenami, píšeme teď písmena velká, označující event. výrazy z výroků.)

Důkaz pomocné věty: ‚$B \rightarrow C$' je podle předpokladu formule. Vložme ji tedy do věty b), kam za ‚q' položíme ‚$\overline{A}$'.

$$(B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \vee \overline{A}.$$

Protože ‚$B \rightarrow C$' je formule a právě napsaná implikace je také formule (vzniklá dosazením do zákl. věty), je podle závěrového pravidla také ‚$(B \rightarrow C) \vee \overline{A}$' formule. Vložíme-li tuto formuli do levé strany věty c), dostáváme

$$(B \rightarrow C) \vee \overline{A} \rightarrow \overline{A} \vee (B \rightarrow C)$$

závěrovým pravidlem tedy

$$\overline{A} \vee (B \rightarrow C).$$

Podle věty d) však

$$\overline{A} \vee (B \rightarrow C) \rightarrow [\overline{A} \vee B \rightarrow \overline{A} \vee C],$$

závěrovým schematem tedy

$$\overline{A} \vee B \rightarrow \overline{A} \vee C.$$

Víme již z rozboru tabulkových definicí spojení výroků, že levá i pravá strana této poslední implikace se dá psáti zase jako implikace. Tedy

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C).$$

Protože ‚$A \rightarrow B$' je podle předpokladu formule, je jí podle pravidla o závěru také ‚$A \rightarrow C$'. Tím je dokázána pomocná věta. Užijeme-li jí na obě implikace, napsané na počátku důkazu, t. j. formule

$$p \rightarrow p \vee p \quad \text{a} \quad p \vee p \rightarrow p,$$

dostáváme ihned

$$p \rightarrow p,$$

to však není nic jiného nežli

$$‚\bar{p} \vee p'.$$

Dosazením této formule do levé strany věty c) a novým užitím závěrového pravidla máme formuli

$$p \vee \bar{p}.$$

2. $$p \sim \bar{\bar{p}},$$

nový znak, jejž teprve teď zavedeme, je logická ekvivalence a je definován takto:

$$A \sim B \equiv_{Df} A \rightarrow B \,.\, B \rightarrow A,$$

kde jsme opět místo značek pro jednotlivé výroky užili velkých písmen, jež mohou značiti výrazy z výroků sestavené.

Důkaz: ‚$\bar{p} \vee \bar{\bar{p}}$' je právě odvozená formule ‚$p \vee \bar{p}$' kde za ‚p' je položeno ‚$\bar{p}$'. Formule ‚$\bar{p} \vee \bar{\bar{p}}$' je však ‚$p \rightarrow \bar{\bar{p}}$', a to je podle definice ekvivalence jedna část, potřebná k důkazu. Do této dokázané formule vložíme za ‚p' opět ‚non p'; dostaneme

$$\bar{p} \rightarrow \bar{\bar{\bar{p}}}.$$

Tuto formuli vložme na místo závorky do levé strany implikace základní věty d). Dostaneme

$$p \vee (\bar{p} \rightarrow \bar{\bar{\bar{p}}}) \rightarrow [p \vee \bar{p} \rightarrow p \vee \bar{\bar{\bar{p}}}].$$

Užijeme dvakrát závěrového pravidla. Především je formulí levá strana této implikace.*) Potom však můžeme závěrem odloučiti formuli

$$p \vee \overline{p} \rightarrow p \vee \overline{\overline{\overline{p}}};$$

protože však, jak již víme, $p \vee \overline{p}$ je formule, je dalším užitím závěrového pravidla $p \vee \overline{\overline{\overline{p}}}$ také formule. Vložme tuto formuli do levé strany základní věty c). Dostaneme

$$p \vee \overline{\overline{\overline{p}}} \rightarrow \overline{\overline{\overline{p}}} \vee p,$$

tedy závěrem formuli

$$\overline{\overline{\overline{p}}} \vee p.$$

To je však jen jinak psaná formule

$$\overline{\overline{p}} \rightarrow p,$$

čímž jsme obdrželi druhou implikaci pro úplný důkaz.

Dokázaná věta se dá interpretovati jako věta o dvojí negaci. Je příznačná pro dvojhodnotovou logiku, dvojnásobnou negací se vrací výroku jeho původní hodnota. Je to právě jedna z vět, proti kterým namířili intuicionisté svoje nejtěžší zbraně. Formálně skromné, nenápadné vyřčení této věty nás nesmí mýlit při úvahách o jejím dosahu. S užitím jejím se v matematické literatuře setkáváme každou chvíli. Z neplatnosti negace nějaké věty se usuzuje na její správnost tehdy, není-li pří-

*) Tuto okolnost snadno nahlédneme, vložíme-li formuli $\overline{p} \rightarrow \overline{\overline{\overline{p}}}$ do věty b) za ‚p' a položíme-li do téže věty a ‚q' výrok ‚p'. Závěrem dostaneme formuli ‚$(\overline{p} \rightarrow \overline{\overline{\overline{p}}}) \vee p$', kterou vložíme celou do levé strany věty c). Závěrem dostaneme ‚$p \vee (\overline{p} \rightarrow \overline{\overline{\overline{p}}})$', což je levá strana implikace.

mé cesty, jak onu větu dokázati jinak, jak by intuicionisté řekli, „konstruktivně".

Podobný význam má pro matematické úvahy tato věta

3. $$(p \to q) \to (\bar{q} \to \bar{p}).$$

Důkaz:

$$q \to \bar{\bar{q}},$$

což je jedna z formulí, jež jsme dokazovali pro předešlou ekvivalenci. Tuto formuli vložme do levé strany věty d) a pišme krom toho v této větě za ‚p' ‚non p':

$$\bar{p} \vee (q \to \bar{\bar{q}}) \to [\bar{p} \vee q \to \bar{p} \vee \bar{\bar{q}}]. \qquad \text{(i)}$$

Pro další vedení důkazu potřebujeme pravou stranu této implikace; zdálo by se, že ji snadno osamostatníme užitím závěrového schematu. Důkaz je snadný. Vložením formule ‚$q \to \bar{\bar{q}}$' do věty b) dostaneme $(q \to \bar{\bar{q}}) \to$ $\to (q \to \bar{\bar{q}}) \vee \bar{p}$. Závěrem tedy máme formuli $(q \to \bar{\bar{q}}) \vee$ $\vee \bar{p}$. To ještě není to, co potřebujeme. Tuto formuli vložíme do levé strany implikace věty c), tedy

$$(q \to \bar{\bar{q}}) \vee \bar{p} \to \bar{p} \vee (q \to \bar{\bar{q}}).$$

Užitím závěru jsme tedy dokázali, že první člen implikace (i) je formulí. Lze tedy užíti závěru na implikaci (i), takže

$$\bar{p} \vee q \to \bar{p} \vee \bar{\bar{q}}$$

je také formule.

Pravou stranu poslední implikace vložme do věty c). Dostaneme

$$\bar{p} \vee \bar{\bar{q}} \to \bar{\bar{q}} \vee \bar{p}.$$

Užijeme teď obecné věty, kterou jsme si dokázali jako pomocnou větu při odvození formule $p \vee \overline{p}$. Užitím této věty dostáváme z obou posledních implikací

$$\overline{p} \vee q \to \overline{\overline{q}} \vee \overline{p},$$

což je možno psáti

$$(p \to q) \to (\overline{q} \to \overline{p}).$$

Také tato věta je formálním modelem pro mnoho matematických důkazů. Nepodaří-li se (třeba pro technické obtíže) dokázati přímo, že z věty ‚p' následuje věta ‚q', je často snazší, dokázati z opačného předpokladu ‚$\overline{q}$' větu ‚$\overline{p}$'. Protože však tento závěr plyne z nedokázaného prvního závěru, je možno zpět usouditi na platnost závěru ‚z věty p následuje q'. Implikaci, kterou jsme dokázali (viz na př. Hilbert-Ackermann: Základy teoretické logiky, str. 25), je však možno snadno doplniti na *ekvivalenci* a tak způsob úsudku, jenž jsme uvedli, podstatně zesíliti. Dokázáno je dosud:

$$(p \to q) \to (\overline{q} \to \overline{p})$$

a máme dokázati

4. $$(p \to q) \sim (\overline{q} \to \overline{p}).$$

Pišme dokázanou implikaci tak, že za ‚p' položíme ‚non q' a za ‚q' položíme ‚non p'. Dostaneme

$$(\overline{q} \to \overline{p}) \to (\overline{\overline{p}} \to \overline{\overline{q}}).$$

Protože však podle ekvivalence již dříve dokázané dvojí negace vrací výroku jeho hodnotu, platí

$$(\overline{q} \to \overline{p}) \to (p \to q).$$

Tím je dokázána implikace pravé a levé strany navzájem, čili pode naší definice, *ekvivalence*. Proto je možno způsobu důkazu, o němž jsme mluvili, užíti jako rovnocenného s důkazem přímým. Intuicionista by tak nikdy neusuzoval, alespoň ne tam, kde jde o úvahy s nekonečnem.

Ještě jednu větu, zajímavou pro matematické úvahy, si tu ukážeme. Podáme si jednoduchý formální důkaz nesprávnosti předpokladu, jestliže má tu vlastnost, že implikuje svoji negaci. Tato věta je základem pro methodu nepřímého důkazu.

5. $$(p \to \bar{p}) \to \bar{p}.$$

Důkaz: Dosaďme do věty a) za ‚p' ‚non p'. Dostáváme

$$\bar{p} \vee \bar{p} \to \bar{p}.$$

Levá strana této implikace se dá psáti $p \to \bar{p}$, takže

$$(p \to \bar{p}) \to \bar{p}.$$

6. $$p \sim p$$

(princip identity).

Důkaz: Podle 1. platí ‚$p \to p$' a ‚$p \to p$', tedy ‚$p \sim p$'.

Důkazy, jež jsme právě prováděli, jsou podrobně popisovány, aby usnadnily porozumění tomu, kdo se po prvé seznamuje s látkou této povahy. Mechanika důkazů je již z těchto ukázek patrná. Důležité je, pro začátek si uvědomiti celý význam závěrového pravidla: závěrovým pravidlem nesmíme odtrhnouti druhou část implikace dříve, dokud nemáme dokázáno, že levá strana té implikace je formule.

Podáme si teď důkaz věty: ze sporného předpokladu plyne *každá* věta. Víme již, že tuto větu znal a dokázal prostředky tehdejší logiky Duns Scotus. Důkaz má svoji cenu v tom, že názorně ukazuje, proč věta tvaru ‚$p \, . \, \bar{p}$',*)

*) nebo tvaru ‚$\bar{p} \, . \, p$', který je s ním ekvivalentní.

což je snad nejkratší vyjádření sporné věty, nemůže býti důsledkem základních vět logiky. Kdyby byla jejich důsledkem, byla by jejich důsledkem *každá* věta, což by vedlo k absurdnosti. Soustava by nebyla k ničemu potřebná.

Libovolnou (tedy také nesprávnou) větu si nazveme ‚n'. ‚$p \vee \bar{p}$' je formule, jak jsme dokázali. Vložme do věty b) za ‚p' formuli ‚$p \vee \bar{p}$', za ‚q' pak ‚n'. Dostáváme

$$p \vee \bar{p} \to (p \vee \bar{p}) \vee n.$$

Protože levá strana implikace je formule, je jí také, podle závěrového pravidla,

$$(p \vee \bar{p}) \vee n.$$

Vzpomeneme-li si na souvislost implikace a disjunkce, vidíme, že tuto formuli lze psáti

$$\overline{p \vee \bar{p}} \to n.$$

Podle úvahy, kterou jsme provedli při výkladu spojení výroků tabulkovou methodou, je však disjunkce ekvivalentní s negací konjunkce, jejíž výroky mají opačné pravdivostní hodnoty. *Negace* disjunkce, kterou máme na levé straně, musí býti tedy *dvojnásobnou* negací takové konjunkce, t. j. konjunkcí samou, podle věty o dvojí negaci. Platí tedy

$$(\bar{p} \,.\, p) \to n.$$

Věta ‚$\bar{p} \,.\, p$' jest však naším *předpokladem,* jemuž pro chvíli propůjčíme význam formule. Podle závěrového pravidla tedy můžeme uzavříti na větu ‚n'. Tím jsme ukázali, že z předpokladu ‚$\bar{p} \,.\, p$' následuje *každá* věta.

Tak se dostáváme přirozeně k zásadní otázce každé logické soustavy, k otázce bezespornosti. Již dříve jsme upozornili, že matematický předmět může býti zaručen dvěma způsoby — buď konstruktivně, jak si to přejí intuicionisté, nebo tak, že ukážeme, že z definovaného předmětu neplyne absurdní důsledek. Tento druhý způsob považuje intuicionista za „morálně slabší", ne-li za methodicky pochybený. Co je absurdní důsledek, teď přesně víme, je to věta tvaru ‚$\bar{p} \,.\, p$'. Záruka existence předmětu, daná bezesporností, je do jisté míry slabší než záruka poskytovaná konstrukcí — ale je zato podmínkou, bez níž nelze o existenci vůbec hovořiti.

Uvidíme nyní, že logické formule našich základních vět jsou docela zvláštního druhu. Teprve až si ukážeme tuto zvláštní povahu jejich, přikročíme k důkazu jejich bezespornosti, který bude veden jinou methodou, než čistě logickou. Logické věty nepřinášejí nám žádnou novou zkušenost. Jsou prázdnými schematy, do nichž je možno zkušenost lépe nebo hůře vtěsnat, ale samy o sobě, jako schemata, běží na prázdno. Toto nejasné tušení o zvláštní povaze logických vět bylo známo již dávno. Máme teď v moderní logice prostředky, jednoduše ukázati, v čem spočívá ten zvláštní ráz logických vět. Logické věty jsou tak zvané *tautologie,* t. j. věty vždy správné, ať se týkají jakéhokoliv materiálu. Tedy nejsou na něm závislé. Povahu takové tautologie je možno nejlépe charakterisovati tak, že je nezávislá na jakékoli změně pravdivostních hodnot svých složek. Matematicky řečeno, P-hodnota tautologie je invariantní vůči jakýmkoli substitucím pravdivostních hodnot, jež bychom provedli u jejích složek (výroků). Je jasné, že vedle vět vždy správných, jakými jsou tautologie, musí býti v naší soustavě dvojhodnotové logiky také věty vždy nesprávné. Ty jsou jakýmisi negativy tautologií a mezi těmito oběma druhy vět, jako mezi dvěma póly, jsou věty, jež nazýváme *syntetickými*. Takové věty jsou správné nebo nesprávné. Patří k nim věty zkušenostní, věty životní praxe. Správné zkušenostní věty mohou míti užití pro poznání vědecké.

Důkaz bezespornosti základních vět naší soustavy bychom mohli teď provésti tak, že bychom ukázali na každé větě a) ÷ d), že sama pro sebe je tautologií. Pak musí, když každá z těch vět je pořád hodnoty P, také jejich konjunkce býti stále hodnoty P. Z konjunkce základních vět lze pak odvoditi všechny potřebné věty výrokového počtu. Musili bychom ještě dokázati, že užití závěrového schematu tautologičnost neporuší a vyzkoušeti ještě ostatní pravidla, jež jsme si po uvedení vět a) ÷ d) napsali, ale v podstatě by důkaz bezespornosti neposkytl již obtíží. Abychom si mohli ukázati ještě jinou methodu důkazu bezespornosti naší soustavy, nebudeme voliti tuto cestu, přesvědčiti se o každé základní větě, že je tautologií. Pouze na příkladě ukážeme, jak by se takové šetření vedlo.

Tautologie je taková formule našeho logického počtu, jejíž pravdivostní hodnota P je nezávislá na substituci hodnot pravdivosti P a N, provedené na její jednotlivé výroky. T. j., máme-li formuli $\Theta\ (p, q, r, \ldots v)$ o výrocích ‚p', ‚q', ‚r', . . . až ‚v', pak bude tato formle tautologií tehdy, když poslední sloupec v tabulce, která definuje spojení ‚Θ', bude obsahovati vesměs P.

Mějme třeba formuli $\Theta\ (p, \bar{p}) \equiv p \vee \bar{p}$, jež je důsledkem základních vět. Toto spojení výroků je funkcí pouze ‚p' a jeho negace, takže se tabulka zjednoduší

p	$\bar{p}$	$p \vee \bar{p}$
P	N	P
N	P	P

na tabulku dvojřádkovou pro hodnoty P, N. Z tabulky pro spojení „vel" následuje, že v případech, jež jsou tu jedině možné, dává spojení vždy hodnotu P.

Jinou ukázkou nám může být přímo základní věta b). Tato věta, již známe ve tvaru ‚$p \rightarrow p \vee q$', je rovnocenná s formulí $\bar{p} \vee p \vee q$, jak víme ze vzájemného vztahu disjunkce a implikace. Chápeme-li tuto formuli způsobem, který pro přehlednost vyznačíme novými závorkami, takto $(p \vee \bar{p}) \vee q$, potom má závorka vždy hodnotu P; ať již má ‚q' hodnotu jakoukoli, má celá disjunkce hodnotu P. To plyne ze stanovení disjunkce. Je tedy základní věta b) také tautologií.

Příkladem na větu vždy nesprávnou (protipól tautologie) je věta, o níž jsme nedávno uvažovali, věta tvaru ‚$p \,.\, \bar{p}$'. Tabulka pro toto spojení bude zcela podobná jako pro spojení ‚$p \vee \bar{p}$, tedy také dvojřádková v hodnotách P, N, ale s tím rozdílem, že v posledním sloupci hodnot spojení budou pouze N.

Přestáváme na těchto malých ukázkách vyšetřování tautologičnosti formulí našeho počtu, jež by se bez obtíží dalo rozšířiti na všechny základní věty. Osvětlení povahy tautologie s tohoto stanoviska je významným objevem nové logiky a největší zásluhu o ně má již dříve jmenovaný Wittgenstein. V čem jsou tedy tautologie platné, když nepřinášejí nového poznání, když je lhostejné, jaké věty do jejich mechanismu vpravíme? Právě proto, že *tautologie není obsahem věty ovlivněna,* je uzpůsobena k tomu, aby její pomocí byl výraz transformován. Tautologická transformace nám ukáže výraz v jiném světle a zvláštní povaha tautologie, že nic nepřidá ze svého během sebedelší úvahy, zaručuje, že nedostaneme ve výsledku více, než jsme do předpokladů vložili.

Bezespornost soustavy základních vět dokážeme teď způsobem jiným, ač jen zdánlivě novým. Tento způsob využívá totiž tautologičnosti formulí také a jen jeho aritmetická forma je něčím methodicky novým.*) Bezespornost dokážeme tak, že najdeme nějaký *model,* jenž bude tak vhodně volen, aby se na něm dala bezespornost ověřiti. Takové methody, kdy se nalezl vhodný model pro celou theorii, neužívá formální věda po prvé. Bezespornost jisté soustavy neeuklidovské geometrie byla převedena na bezespornost euklidovské geometrie tak, že se geometrie neeuklidovská vhodně interpretovala jako geometrie na euklidovské kouli. Model tedy byl nalezen — geometrie neeuklidovská (jeden druh, ne všechny!) není než obrazem geometrie na obyčejné kouli a tím se přenese bezespornost soustavy této své doby nezvyklé geometrie na bezespornost euklidovské geometrie. V dobách, kdy tento *model* vznikl, nebyla ještě bezespornost euklidovské geometrie dokázána — ale byl tu získán jakýsi morální podklad, jakási morální jistota pro životní schopnosti nového vědeckého odvětví. Právě v té situaci budeme i my s nynějším důkazem be-

*) Důkaz je v podstatě podle Hilberta, l. c. str. 29 a násl., ale methoda aritmetické interpretace je starší a vede zpět k výzkumům amerických logiků Posta a Huntingtona z počátku našeho století.

zespornosti základních vět naší logické soustavy. Bezespornost převedeme na bezespornost aritmetiky, pokud se její operace týkají malých čísel. Je ku podivu, že náhodou obě vyšetřování, na tomto místě zmíněná, vyšetření bezespornosti geometrie i vyšetření bezespornosti základních vět logiky — tedy oborů velmi vzdálených — se převádí na bezespornost aritmetiky. Bezespornost euklidovské geometrie převedl totiž Hilbert ve svém známém díle „Základy geometrie" na bezespornost aritmetiky. Teď by se čtenář mohl právem zeptat, při nejmenším: a jak je to s bezesporností aritmetiky? neptal-li by se spíše, vzhledem k *logice:* jak je možné, že se bezespornost něčeho, co má býti základem i pro matematiku, tedy soustavy základních vět logiky, převádí na aritmetiku?

Odpověď není tak těžká, jak by se na první pohled zdálo, aspoň pokud jde o logiku. Logika výrokového počtu ke svému důkazu bezespornosti aritmetiku nepotřebuje. Víme již, jak by důkaz vypadal, z předchozího výkladu, o tautologii. Aritmetický model, o němž byla řeč i pro logiku, není než názornou demonstrací bezespornosti. Pokud se týká aritmetiky samé, promluvíme si později o jisté soustavě, jež obsahuje aritmetiku, a o níž platí velmi zajímavá věta (Gödelova). K porozumění nástinu důkazu této věty se musíme seznámiti ještě s některými novými výrazovými prostředky logického počtu.

Po tomto odbočení se obrátíme k hledání modelu pro naši soustavu základních vět. Výroky $p, q, r, \ldots$ budeme považovati za aritmetické proměnné, jež mohou nabýti pouze hodnot 0 nebo 1. Spojení ‚$p \vee q$' budeme považovati za aritmetický součin a negaci přeložíme do aritmetiky takto: přisoudíme-li výroku ‚p' hodnotu P, pak má v aritmetickém pojetí hodnotu 1, výrok ‚$\bar{p}$' má tomto pojetí hodnotu 0.

$$\bar{1} = 0 \quad \text{a} \quad \bar{0} = 1.$$

Zvolíme-li takto svůj aritmetický model, dávají, jak uvidíme, všechny tautologie vždy hodnotu 0. Základní věty musí míti hodnotu 0 pro jakoukoli hodnotu svých proměnných, musí dávati tedy 0 identicky, jak se říká v aritmetice.

Přesvědčíme se o tom u věty a).

1. $\overline{\bar{1} . 1} . 1$, což je $0 . 1 = 0$

(násobení značíme jak obvykle tečkou, není to tedy značka logické konjunkce).

2. $\overline{\bar{0} . 0} . 0$, což je $\bar{0} . 0$, podle úmluvy tedy $1 . 0 = 0$.

Jiných možností u této věty není.

Základní věta b).

1. $1 . 0 . 1 = 0$ pro hodnoty $p \ldots 0$, $q \ldots 1$.
2. $1 . 0 . 0 = 0$ pro hodnoty $p \ldots 0$, $q \ldots 0$.
3. $0 . 1 . 0 = 0$ pro hodnoty $p \ldots 1$, $q \ldots 0$.
4. $0 . 1 . 1 = 0$ pro hodnoty $p \ldots 1$, $q \ldots 1$.

(Pozn.: výrokům ‚p' a ‚q' nejsou ovšem přiřazeny hodnoty 0, 1. Pro stručnost jsem vynechal přiřazení hodnot P, N, jimž teprve 1, 0 odpovídá.)

Jiných možností pro tuto větu b) není.

U základní věty c) by byly k vyšetření také 4 případy, hodnocení proměnných vede k 2^2 případům, jelikož jsou zase jen 2 proměnné. U věty d) by bylo nutno vyšetřiti 2^3 případů, protože různé výroky jsou 3. Podrobné provedení nebudeme tu dále sledovati, protože je zcela mechanické povahy a nepřinese již nového nic. Abychom viděli rozdíl základních vět a jiných spojení výroků, jež nejsou tautologiemi, tedy nedají v aritmetické interpretaci 0, uveďme si tento příklad:

$$p \rightarrow (q \,.\, r).$$

Tato věta, napsaná jako všechny předchozí logistickými značkami, se neliší na první pohled nijak od vět, jež jsou tautologiemi. Na srovnání uvedu větu

$$p \rightarrow (q \rightarrow p \,.\, q),$$

o níž lze snadno ukázat, že tautologií je.

Obsahově ovšem je hoření věta podezřelá — z libovolného výroku ‚p' nemůže přece obecně následovati konjunkce dvou dalších libovolných výroků ‚q' a ‚r'. $p \rightarrow q \,.\, r$ je ekvivalentní s tvarem $\overline{p} \vee \overline{(\overline{q} \vee \overline{r})}$, vzpomeneme-li na souvislost konjunkce a disjunkce. Přisuďme výroku ‚p' hodnotu N, druhým dvěma P. Podle úmluvy, jak interpretovati negaci a disjunkci, dostáváme pro aritmetickou hodnotu zkoumané věty $\overline{0} \,.\, \overline{0 \,.\, 0}$, tedy 1. Při zvoleném hodnocení výroků nedává tedy věta 0, není tedy tautologií, protože by musila dát nulu vždy. To znamená, že věta sama je nějak nesmyslná, je mimologická, a její strukturu může míti každá zkušenostní věta třeba tvaru: Způsob života tohoto živočicha (p) vede k hospodářským důsledkům q a r pro obyvatele jistého území. Tato věta je tedy pravdivá, jsou-li splněny materielní podmínky její platnosti; není splněna na př. pro živočicha jiného druhu, než o kterém tato věta mluví.

Základní věty výrokového počtu dávají identicky 0 v aritmetickém pojetí. Zbývá ukázati, že ani závěrové schema, jehož jsme použili pro vyvození důsledku, neporuší tuto vlastnost tautologií.

Závěrové pravidlo říká: Je-li ‚A' formule a je-li také ‚$A \rightarrow B$' formule, je jí (bez dalšího zkoumání, což je důležité) také ‚B'.

‚A' budiž formule (tedy základní věta nebo důsledek z nich). Ta dává tedy v aritmetickém pojetí identicky 0. ‚$A \rightarrow B$' je však, jak víme, ekvivalentní s výrazem ‚$\bar{A} \vee B$'. ‚$\bar{A}$' bude tedy míti přiřazenou hodnotu 1. Protože však $\bar{A} \vee B$ je formule podle předpokladu, musí v aritmetickém pojetí to býti B, jež anuluje výraz, to musí tedy míti aritmetickou hodnotu 0. *Tím je však vyjádřeno, že B je také formulí.*

Nezávislost základních vět. Byla-li bezespornost základních vět životní otázkou soustavy tohoto výrokového počtu, je nezávislost otázkou sice menší důležitosti, nicméně pro logické vyšetření ještě velmi závažnou. Své doby jsme si o celé věci již obsahově něco pověděli, na tomto místě ukážeme, jak se dá nezávislost v tomto jednoduchém počtu prakticky demonstrovati. Nezávislost se také zkoumá aritmetickým modelem. Základní myšlenkou je, volit obor hodnot pro aritmetické proměnné tak, aby při této volbě dávaly třeba první tři věty a) $\div$ c) identicky 0 jako při ověřování tautologií, a čtvrtá věta dala v aritmetické interpretaci hodnotu od nuly různou. Tím se ukáže jeho nezávislost na ostatních. Způsob tento, jenž v dalším na příkladě ukážeme, umožnil Hilbertovu spolupracovníku Bernaysovi dokázati závislost páté základní věty logické soustavy Russel-Whiteheadovy na předchozích čtyřech. Pro stupeň zmechanisování, jakého dosáhla logická technika, je to velmi názorný příklad. Ukážeme teď podle Hilberta (l. c. str. 31), že základní věta a) není závislá na větách b) $\div$ d). Aritmetické hodnoty, jež budou naším oborem, jsou 0, 1, 2. Spojení znakem „V" odpovídá zase násobení, jako v důkaze bezespornosti. Negace 0 budiž 1, negace 1 tedy 0, negace 2 budiž opět hodnota 2. Taková umělá volba není než zkusmo nalezená pomůcka, nevězí za ní již nic hlubšího, volbu by bylo možno uskutečniti také jinak, možná méně vhodně, ale tak, že by také vyhovovala. Ještě úmluvu o hodnotách větších než 2. Při smluveném pojetí znaku „V" jako násobení se někdy stane, že číselná hodnota formule je větší než hodnota 2, na př. 4. V tom případě odečítáme od všech hodnot, jež by dosáhly 4 anebo byly větší, vhodné násobky 4 tak, abychom dostali číslo menší než 4. Matematicky řečeno, užíváme pouze zbytkové třídy modulo 4.

Lze teď snadno ukázati vyčtením všech možností při dosazování smluvených hodnot našeho oboru, že formule b), c), d) dávají stále hodnotu 0. Kdyby byla i formule ‚$p \vee p \rightarrow p$' z nich odvoditelná, musila by dávati také identicky 0. To je jasné proto, poněvadž *každý* důsledek formulí b) $\div$ d) musí dáti aritmeticky 0, tedy také a), jež by bylo důsledkem b) $\div$ d).

Přiřaďme výroku ‚p' hodnotu 2. Formule a) se dá psát podle způsobu nám již běžného jako disjunkce $\overline{p \vee p} \vee p$. Aritmeticky tedy $\overline{2 \,.\, 2} \,.\, 2$. Hodnotu 4 redukujeme tedy podle úmluvy na 0 a negace 0 je 1. Dává tedy poslední součin hodnotu 2. Stejně tak by se dokázala nezávislost druhých vět na zbývajících třech.

Na tomto místě ještě připojíme formální důkaz Russelovy páté základní věty z našich vět a) $\div$ d). Věta jeho zní takto:

$$p \vee (q \vee r) \rightarrow q \vee (p \vee r).$$

Důkaz:

$$r \rightarrow p \vee r$$

z věty b), kde je v pravé straně implikace provedena záměna obou členů disjunkce. Je to dovolená operace, již lze snadno dokázati.

Vložme tuto formuli do levé strany věty d) a použijme na větu d) závěrového pravidla, tedy

$$q \vee (r \rightarrow p \vee r) \rightarrow [q \vee r \rightarrow q \vee (p \vee r)],$$

takže dostaneme formuli

$$q \vee r \rightarrow q \vee (p \vee r).*)$$

Zcela stejným postupem („násobením" výrokem ‚p')

$$p \vee (q \vee r) \rightarrow p \vee [q \vee (p \vee r)]$$

a výměnou v disjunkci na pravé straně

$$p \vee (q \vee r) \rightarrow [q \vee (p \vee r)] \vee p. \tag{1}$$

Druhá část důkazu:

$$p \rightarrow r \vee p$$

z věty b), kde pořad členů v disjunkci vpravo je zase vyměněn. Vložme do této formule za ‚p' výraz ‚$p \vee r$' a za výraz ‚r' položme ‚q'. Dosaneme

$$p \vee r \rightarrow q \vee (p \vee r).$$

Z této implikace a z předchozí uzavřeme podle schematu: $A \rightarrow B$ i $B \rightarrow C$ jsou formule, tedy také $A \rightarrow C$ je formule

$$p \rightarrow q \vee (p \vee r)$$

s poznámkou, že k umožnění tohoto závěru je nutno zase v disjunkci, jež je společným členem B, zase vyměnit členy disjunkce. Viděli jsme v první části důkazu, že formule implikační „vynásobením" obou stran ně-

*) neboť levá strana předchozí implikace je formulí: viz pozn. k větě 2. tohoto odstavce.

jakým výrazem nepřestane býti formulí. To je obsah věty d). Užijeme-li tohoto obratu na poslední implikaci, máme

$$[q \vee (p \vee r)] \vee p \rightarrow [q \vee (p \vee r)] \vee [q \vee (p \vee r)].$$

V této poslední formuli je na pravé straně disjunkce stejných výrazů. Lze lehce dokázati, že je ekvivalentní výrazu samému. Podle věty a) platí $p \vee p \rightarrow p$ a dosazením ‚p' za ‚q' do věty b) máme $p \rightarrow p \vee p$. Podle definice ekvivalence je tvrzení dokázáno, protože platí obě implikace. Disjunkci napravo nahradíme tedy jediným jejím členem, takže máme

$$[q \vee (p \vee r)] \vee p \rightarrow q \vee (p \vee r). \qquad (2)$$

Spojením formulí (1) a (2) a užitím závěru o dvou implikacích se společným členem, kterého jsme již častěji použili, máme hledanou formuli.

Formule je zajímavá potud, že v době, kdy Russel s Whiteheadem budovali svůj logický systém jako základ pro zpracování *celé* matematiky, neměli prostředků, jak dokázat nezávislost základních vět a byli přesvědčeni, že soustava základních vět výrokového počtu na menší počet redukovati nelze.

Logistická methoda, vyšetřiti nezávislost jednotlivých základních vět, nebo při matematické disciplině axiomů, je velkým krokem kupředu. Axiomy geometrie, aritmetiky, theorie množin, počtu pravděpodobnosti, topologie a jiných odvětví matematických, dají se vyjádřiti v logistické řeči, výrazově bohatší než je náš dosavadní systém. Důkaz nezávislosti jednotlivých axiomů je ovšem složitější, někde chybí dosud obecné methody takového vyšetřování, ale je tu velký krok kupředu, velký krok od těch dob, kdy tyto methody nebyly známé. Hlavní věc je ta, že logika *sama* si našla takové methody, jež jsou skutečně plodné a dostatečně obecné a nemusí se spoléhati na vtipný nápad, jenž v tom neb onom případě umožnil důkaz nezávislosti mimologickou cestou, jenž však nemá té nosnosti, aby zaručil dobrý výsledek ve všech případech. V mnoha případech byl takový důkaz již logistickými methodami se zdarem proveden. Postup je často ten, že analysou logistických formulí se objeví samostatné menší složky vět, jež vyjadřují axiomy a všechny axiomy se jaksi vypreparují na své základní součástky. O mnohých z nich se dá snadno ukázati, že jsou to tautologie, takže zbývá vyšetřiti to, co povahu tautologie nemá — to je pak čistě matematický postulát.

Redukce na menší počet základních vět a zkoumání nezávislosti nám poskytuje příležitost, zmíniti se o významu takové redukce pro jiný obor, pro obor základních předmětů. Jestliže základní věty, v matematice pak axiomy, jsou předpisy, jak se s předměty té soustavy zachází, pak musí být také pro každou soustavu jistý počet základních předmětů, jichž funkce je základními větami určena a všechny ostatní se již definují. Počet předmětů, dále nedefinovaných, jenž je v základech soustavy, může býti eventuelně také dál redukován.

Staré pravidlo Viléma Occama říká „Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem"; je to pravidlo ekonomické. Ale jak jsme si již řekli, ekonomičnost má hlubší význam než jen jistý estetický požitek, jak se podařilo v nějaké soustavě materiál zjednodušit. Právě tak, jako jsme si ukázali na příkladech výrokových spojení (tabulkami) jejich vzájemnou závislost, a jak jsme si zase u základních vět ukázali nezávislost, tak také je možno logisticky vyšetřiti závislost, resp. nezávislost základních předmětů matematického oboru, o který jde. Ukáže se pak, že stačí voliti celkem malý počet takových základních předmětů, a všechny ostatní se již dají jimi definovati.

Ukážeme si teď, jak je to obecně možné. Každý vědní obor má jisté množství předmětů, jimž odpovídají značky. Soubor těch značek nazveme A. V tomto souboru jsou tedy *jména* všech předmětů. Vedle toho se opírá soustava o základ axiomů, jež nazveme souhrnně soubor X. Dá se ukázati, že platí poměrně jednoduché kriterium v tom případě, když nějaká nová značka „a" má býti definovatelná souborem A spolu se souborem X. Methodu takovou objevil na počátku tohoto století italský matematik Padoa. Je patrno, oč jde. V důkaze se již nestaráme o předmět, značce „a" přiřazený, považujeme značku za slovo a zkoumáme jeho závislost na slovech skupiny A a skupiny vět X.

Uvedu jako poučný výsledek této methody zajímavá jištění polského logika Tarskiho, opřená o starší výsledky amerického matematika Veblena. Jde o základní pojmy geometrie. Mějme na mysli n-rozměrnou euklidovskou geometrii a zaveďme si v ní dvě relace. První označme a (x, y, z, t). Tato relace nechť značí, že pár bodů (x, y) má tutéž vzdálenost jako pár bodů (z, t). Druhou relaci, již si zavedeme, je b (x, y, z). Tato relace nechť značí, že bod y leží *mezi* body x, z. Relace „a" je základní relací metrické geometrie (jako je normální analytická geometrie středoškolských učebnic), relaci „b" lze považovati za základní relaci topologickou. V topologii nezáleží na metrických vztazích, protože ta zkoumá zákonitosti jiné. Zkoumá na př., co zůstane zachováno (invariant), podrobí-li se její předmět spojité deformaci. Máme-li bod na úsečce, který je mezi oběma krajními, pak můžeme tuto úsečku jakkoli spojitě deformovati a tato vlastnost, ležeti „mezi", zůstane zachována, pokud se koncové body původní úsečky nespojí nebo pokud se nevytvoří nějaká smyčka. Takové možnosti se v topologii vylučují tím, že deformace musí býti jednojednoznačná — t. j. v našem případě každému novému bodu nové křivky (po deformaci) musí odpovídati jediný bod původní (před deformací) a naopak. Toto „ležeti mezi" je tedy topologickým invariantem.

Tarski ukázal, že je možno vybudovati celou euklidovskou geometrii logicky na obou uvedených relacích. T. j. jediné tyto relace jsou *mimologickými* relacemi, tedy čistě matematickými vztahy. Všechno ostatní dodá, abychom se tak drasticky vyjádřili, logický mechanismus. Avšak *„a"* a *„b" nejsou na sobě závislé. „a"* nelze definovati předmětem „*b*". To je patrno na první pohled i obsahově, „*a*" má něco navíc — právě metrický pojem vzdálenosti, který v „*b*" chybí. Vezmeme-li tedy soustavu vět euklidovské geometrie jako *X* a soubor *A*, představovaný tu jedinou značkou „*a*", lze „*b*" souborem *X* a *A* definovati. Tento výsledek sám o sobě by nebyl tak zvláštní, ale z důkazu plyne ještě tento překvapující dodatek: jedině v případě jednodimensionální geometrie (t. j. geometrie na euklidovské přímce) *není* možno *„b"* definovati pomocí *„a"*. Tam jsou tedy obě základní relace *nezávislé*.

3. *Logika intuicionistická, vícehodnotové logiky.*

Dosavadní výklad se omezoval, jak jsme od počátku ukazovali, na dvojhodnotovou logiku s význačnými hodnotami *„P"* a *„N"*. Byly učiněny úspěšné pokusy, rozšířiti dvojhodnotovou logiku. Všimneme si tu dvou; první si vyložíme jen obsahově, bude to ukázka způsobu myšlení v logice Brouwerově, zakladatele moderní intuicionistické školy. Druhou ukázkou bude trojhodnotová logika Lukasiewiczova, již uvedeme ve formalisovaném znění.

Intuicionisté, o nichž jsme již mluvili při poznámkách o matematickém předmětu, kladou podmínku konstruovatelnosti předmětu jako podmínku nezbytnou pro jeho matematickou existenci. Brouwer namířil svůj útok proti logice i matematice velmi důkladně a radikálně do hloubky. Tvrdí, že logika, stará logika se svými principy, jež jsme si své doby vypsali, není než *abstrakce* z pravidel, jež platí pro matematické úvahy o konečném počtu předmětů. Tvrdí dále, že abstrakce z těchto pravidel se ustavily v logické principy, jichž platnost se neprávem přenáší na úvahy o nekonečně mnoha předmětech. Je tedy podle Brouwera naprosto nutno vyzkoušeti pravidla staré logiky, pokud jsou na takové případy vhodná a pokud nevedou k nepotřebným výsledkům. Pokud by matematika užívala pravidel staré logiky mechanicky, může se ocitnouti v slepé uličce. Brouwerovo obrazoborectví je trochu obdobné revoluční činnosti Humeově ve věci kausality. Hume bořil předsudek proti středověké pověře v absolutní nutnost kausality — proti mechanickému zneužívání pojmu kausality, jenž nadto tehdy zdaleka neměl dnešního kritického vybroušení. Brouwer tu sahá na samé základy lidského myšlení. Proti logikům také hlásá, že mohou existovati zásadně neřešitelné problémy — vědomě tedy přidává k Du Bois Reymondovu „ignorabimus" další závaží.

Na tom, co jsme dosud z myšlenek Brouwerových uvedli, je jistě nesprávné, považovati logiku za souhrn pravidel, odvozených na úvahách o konečném počtu předmětů. Již takové úvahy předpokládají elementární užití logických principů, nehledíc k tomu, že logické principy mají mnohem širší užití než jen na matematické předměty anebo na empirické předměty, o nichž matematicky uvažujeme. Než jsou tu matematické, z větší části jen matematikovi přístupné důvody, jež uvádí Brouwer pro revisi logických principů, pokud se týká jejich užití uvnitř matematiky samé.

Abychom vpadli přímo doprostřed jeho problémů, promysleme si tuto úlohu: Je v desetinném rozvoji čísla π právě sedm sedmiček za sebou? T. j. existuje v desetinném rozvoji π řád třeba n-tý, aby po jeho dosažení číslicemi rozvoje následovalo právě těch 7 sedmiček, při čemž by „n" mohlo býti nejmenší číslo té vlastnosti? To je jeden z *jednoduchých* příkladů Brouwerových.

Při analyse podobných příkladů vytýká Brouwer logice, že dá jednoduše odpověď: buďto ano *nebo* ne. Tertium non datur. Odpověď je možno hledati několika způsoby.

1. Ukážeme, budeme-li znáti rozvoj čísla π dosti vysoko, že v něm žádaná skupina sedmiček je. To by byla t. zv. demonstrace, proti které ovšem intuicionista nemá nejmenších námitek, naopak, v jeho smyslu by rozvoj byl až k hledané skupině konstruován. Číslo π má ovšem desetinný neperiodický rozvoj — kdybychom znali jeden milion číslic za desetinnou čárkou, je to právě tak málo, jako když jich známe nynějších několik set — nebude-li tam náhodou hledaná skupina sedmiček.

2. Posloupnost číslic v desetinném rozvoji π není dosud aritmeticky uzákoněna. Posloupnost je, abychom užili silnějšího výrazu, matematicky dosud nezkrocená. Kdybychom znali výtvarný zákon pro sled číslic v roz-

voji π, pak je posloupnost vlastně známá jako celek. Na základě této zákonitosti by bylo možno rozhodnouti bezpečně, je-li nebo není-li v rozvoji těch 7 sedmiček. Výtvarný zákon posloupnosti desetinného rozvoje by musil být, nehledíc k složitosti vyjádření, právě tak jasný, jako je třeba zákon této posloupnosti

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

(první dva členy jsou dány: 0, 1, další jsou součty vždy dvou předchozích, je to posloupnost Fibonacciho, mající zajímavé vlastnosti ve vztahu k theorii čísel).

3. Můžeme předpokládati existenci oněch 7 sedmiček *někde* v rozvoji π a ukázati, že tento předpoklad vede ke sporu s definicí čísla π, danou třeba Leibnizovou řadou

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

nebo jiným rozvojem nebo tvarem.

4. Můžeme předpokládati existenci oněch 7 sedmiček *někde* v rozvoji a ukázati, že tento předpoklad *nevede* ke sporu s definicí čísla π (pozor na rozdíl proti bodu 3.).

S řešeními v bodech 1., 2., kdyby se taková řešení nalezla, bude intuicionista spokojen zcela. Nebude však určitě spokojen s druhem úvahy v bodě 4., přesto, že tento způsob je v matematické praxi běžný. Intuicionistovi nezaručí nic, jak uvidíme z dalšího. Úvahu 3. považuje klasická matematika za důkaz nemožnosti hledané skupiny.

Mohou nastati tyto možnosti:

a) v desetinném rozvoji π, jakkoli vysoko bude znám, nebude těch 7 sedmiček,

b) spoutání nezkrocené posloupnosti v desetinném rozvoji π se nedaří,

c) důkaz tvaru 3. nebo 4. se nedaří.

Intuicionisté považují za možné, alespoň zásadně, že úloha vůbec není řešitelna. Proto nechtějí připustit jednoduchou alternativu, že sedmičky v rozvoji jsou anebo nejsou.

Podívejme se na celý problém s jiné stránky. Je známa soustava základních vět, axiomů, jimiž je ustavena theorie reálných čísel. Je otázka, je-li možno z této soustavy axiomů dokázati výtvarný zákon posloupnost v desetinném rozvoji čísla π. Co kdyby tento zákon by na axiomech theorie reálných čísel *nezávislý?* Pátý postulát Euklidův také nebyl ze všech ostatních vět geometrie dokazatelný. Tato možnost, třebaže značně nepříjemná, tu je.

Otázku existence matematických předmětů dosud nedokázaných ani nevyvrácených se pokusím ještě osvětliti jiným příkladem. Je známo již dlouhou dobu, že k mnohým prvočíslům lze nalézti prvočísla větší o dvě jednotky. Příkladem jsou dvojice prvočísel 5, 7; 11, 13 17, 19; ... 101, 103; ... Pokud sahají tabulky prvočísel, je možno, i když později řídce, takové dvojice nalézti. O těchto dvojicích prvočísel platí velmi zajímavá věta (Brunova), že řada převrácených hodnot těchto prvočísel konverguje. Při tom však *není* známo, zda takových dvojic je konečný nebo nekonečný počet. Kdyby jich byl konečný počet, pak je Brunova věta triviální Věta je interesantní teprve tehdy, je-li dvojic nekonečně mnoho. A to právě nevíme. Brunův důkaz, který je značně obtížný, se opírá o methodu Erastothenova síta, známého z elementárních výkladů o prvočíslech V podstatě jde o to, že se zjistí, jak řídce jsou rozlo žena po celé nekonečné posloupnosti prvočísel místa, na nichž „by" mohlo býti prvočíslo tvaru ‚$p + 2$'. Je patrno, že mnoho čísel tvaru ‚$p + 2$' odpadne, protože jsou dělitelna jinými prvočísly. Ta pak, která zůstanou, mohou být prvočísly, ale nemusí. Jejich eventuelní vlastnost, „býti prvočíslem" není ve sporu s prostředky užité methody. Není tedy dokázáno nic více než: kdyby takových dvojic bylo nekonečné množství, jsou tak řídce rozloženy, že řadu jejich převrácených hodnot lze sečísti. (Na srovnání uvádím jen známou větu, že řada převrácených hodnot prvočísel součet nemá, diverguje.)

Na tomto příkladě je názorně patrno, co je existence, zaručená bezespornosti. Existence prvočísla tvaru ‚$p + 2$' tu není brána se stanoviska konstruktivního; předpokládáme-li o číslech, jež „by" prvočísly být mohla (těch řídkých), že prvočísly *jsou*, nedojdeme uvedenou methodou ke sporu a to pro důkaz Brunovy věty stačí.

Vzhledem k logické větě o významu dvojí negace by se výsledek dal také tak vysloviti: neplatí, že na oněch řídkých místech prvočísla neexistují. Tato věta by měla býti rovnocenná s větou, že tedy na oněch místech prvočísla existují. A to právě zaručeno není. Brouwer také větu o dvojí negaci nepřijímá.

V obou příkladech jde o soubory, v nichž je nekonečný počet předmětů, ať již číslic nebo míst tvaru ‚$p + 2$' a pro takové soubory nechce intuicionista připustiti platnost alternativy: buď — anebo, třetí možnosti není. To jsme poznali na prvním příkladě. Nechce však také připustiti v těchto případech platnost věty o dvojí negaci, jíž se často užívá v existenčních důkazech.

Pro svoje úvahy si zavedli intuicionisté logiku, již formalisoval Heyting, v níž neplatí princip vyloučené třetí možnosti a neplatí věta o dvojí negaci. Své logiky, o níž však současně prohlašují, že se vlastně formalisovati nedá, užívají k novému položení základů klasické matematiky, zejména analysy.

Ukážeme si teď, jak může taková trojhodnotová logika výrokového počtu vypadati. Zvolíme k tomu cíli jednodušší soustavu, než je Brouwerova soustava intuicionistické logiky,*) a to soustavu Lukasiewiczovu.

Filosofické, resp. noetické úvahy jiného druhu než Brouwerovy úvahy o matematice vedly polského logika Lukasiewicze k odkrytí vícehodnotových logik. Lukasiewiczovi šlo o vyjádření dějů v budoucnu, o vyjádření jejich determinovatelnosti a nedeterminovatelnosti. Přijal k formálnímu vyjádření svých myšlenek logickou soustavu, v níž neplatí „tertium non datur" a vytvořil soustavu výrokového počtu, kde nejsou jen hodnoty *P* a *N*, nýbrž dokonce i nekonečně mnoho hodnot mezi oběma těmito póly.

Souvislost Lukasiewiczových úvah s počtem pravděpodobnosti je nepochybná. V počtu pravděpodobnosti právě vyjadřujeme číslem uzavřeného intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ možnost výskytu nějakého zjevu. Tu jsou také dva póly, ‚0', která odpovídá nemožnosti výskytu a ‚1', odpovídající jistotě výskytu. U Lukasiewicze má pak každá formule theorie přiřazenou svoji hodnotu, souhrn formulí podle povahy svého spojení tedy také. Jeho theorie se dá tedy užíti k vyjádření úloh počtu pravděpodobnosti, když logický počet vhodně interpretujeme.

Lukasiewicz používal původně tabulkové methody,

---

*) Tato Brouwerova (Heytingova) soustava intuicionistické logiky je na př. předmětem úvah článku M. H. Stone, Topological Representations of Distributive Lattices and Brouwerian Logics v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 67, a A. Kolmogorova v čas. Math. Zeitschrift *35* (1932).

v podstatě stejné jako jsme uvedli v dvojhodnotové logice. V případě trojhodnotové logiky přibude ovšem k hodnotám P a N ještě „tertium" T. Touto tabulkovou methodou provedl také základní spojení výroků obdobně k postupu, jenž je nám znám. Později však, vlivem nové methody, které s úspěchem užil na vyšetřování bezespornosti axiomatických soustav, našel nový způsob. Jsou to t. zv. rovnice v maticích, jež určují hodnoty základních spojení výroků z hodnot, jež mají výroky samy. Základním typem spojení výroků je implikace. Abychom docílili přehlednějšího tvaru psaní, přisoudíme teď hodnotám P, N, T postupně aritmetické hodnoty 1, 0, 2 (stejně dobře místo poslední hodnoty třeba 1/2). Pak platí v soustavě 3hodnotové logiky:

$$0 \to 0 = 0 \to 1 =$$
$$= 0 \to 2 = 1 \to 1 = 2 \to 1 = 2 \to 2 = 1;$$
$$1 \to 0 = 0; \quad 1 \to 2 = 2 \to 0 = 2;$$
$$N0 = 1, \ N1 = 0, \ N2 = 2; \ T0 = T1 = T2 = 2.$$

Znak N, T, postavený před příslušnou aritmetickou hodnotu, vyjadřuje její negaci, resp. operaci „tertium",

Postupně čteny dávají napsané implikace tento slovní opis: nepravdivý výrok implikuje nepravdivý, nepravdivý pravdivý, nepravdivý tertium (z falešného plyne jak víme z dvojhodnotové logiky, také správný, tedy také tertium), pravdivý zase pravdivý, tertium pravdivý (chceme-li, lze pokládati tertium za slabší nepravdivý výrok), tertium zase tertium a hodnota všech těchto implikací je 1, t. j., jsou správné. Další skupinou je jediná implikace: pravdivý výrok implikuje nepravdivý a tato implikace má hodnotu 0; je nesprávná jako v dvojhodnotové logice. Další skupina: pravdivý výrok implikuje tertium, tertium implikuje nepravdivý výrok a hodnota obou těchto implikací je 2. Rovnice pro negaci a operaci tertium jsou snadno srozumitelné.

Připomínám, že žádný formální logik nečiní tyto obsahové přepisy, jsa si vědom nebezpečí, jež takové slovní přepisy mohou skrývat. Pokusím se jen formálně ospravedlniti poslední skupinu implikací, 1 → 2 a 2 → 0. Obě mají hodnotu 2. Druhá není snad tak nepřístupná i dvojhodnotovému myšlení, v němž tyto opisy provádíme. Tertium může implikovati také 0. Připustíme-li tuto možnost, pak lze snadno ukázati, že první implikace této skupliny, 1 → 2, neříká nic jiného. Implikaci lze obrátiti, negujeme-li současně oba členy, spojené implikačním znakem. Použijeme-li příslušných rovnic, napsaných na počátku, dostáváme přímo druhou implikaci této skupiny. Pro obsahové chápání jsou tu ovšem nesrovnalosti. Příklad: připustíme-li oprávněnost implikace 2 → 0, řekneme-li si třeba, že tertium je nerozhodnutelné, takže *může* implikovati nepravdivý výrok, lze říci stejně dobře, že tertium může implikovati pravdivý výrok. Implikace má však v prvním případě hodnotu 2 a v druhém případě hodnotu 1, jak je patrno z matic. Pokud zůstaneme v okruhu operací, daných maticemi a rovnicemi na počátku, nedojdeme ke sporu. Kdybychom přiřkli druhé implikaci zdánlivě stejně oprávněně hodnotu 2, pak by spor uvnitř soustavy vznikl. Obsahově se však rozlišení hodnot obou implikací nedopátráme, protože myslíme pořád v okruhu dvojhodnotové logiky.

Uvedu ještě na srovnání se soustavou základních vět dvojhodnotového výrokového počtu soustavu základních vět pro tento trojhodnotový počet. Soustavu připravil pro Lukasiewicze jeho žák Slupecki.

1. $p \rightarrow (p \rightarrow q)$,
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$,
3. $[(p \rightarrow \bar{p}) \rightarrow p] \rightarrow p$,
4. $(\bar{p} \rightarrow \bar{q}) \rightarrow (q \rightarrow p)$,
5. $Tp \rightarrow \overline{Tp}$,
6. $\overline{Tp} \rightarrow Tp$,

kde negace je psána starým způsobem, jejž známe z dvojhodnotového počtu, vodorovnou čárkou nad znakem. Je patrno, že některé základní věty, v nichž nepřichází ‚T', jsou odvoditelné ze základních vět dvojhodnotové logiky. (Na př. věta 4. vyjadřuje známý obrat implikace, jejž jsme své doby dokázali.) Tertium přichází až ve dvou posledních větách, obě spolu vyjadřují, že negace tertia je s tertiem ekvivalentní, bráno se stanoviska dvojhodnotové logiky.

Přestávám na této neúplné ukázce, protože v rámci našeho dalšího postupu není možno více se věcí zabývati. Nebylo by však dobře, aby v čtenáři byl vzbuzen dojem, že jde o prázdnou hru, konstrukci logických soustav, jež nemají žádného užití. Jak Brouwerova logika, tak také soustavy Lukasiewiczovy vznikly z vědeckých problémů, jež se té doby v obvyklé logice řešiti nedaly. Nechci říci, že se nedají řešiti. Jde o to, jsme-li schopni mysliti v soustavách obecnějších, než je soustava klasické logiky. Užití nějaké soustavy na vědeckou praxi je pak věc času. Již mnohokrát se stalo v dějinách vědy, že theorie předběhla praxi značně a připravila jí výzbroj, kterou našla hotovou, když jí bylo nejvíce zapotřebí.*)

*) Na možnost takového užití těchto logik poukázal již 1937 polský logik Zawinski a ve Francii Paulette Février (Kvant. fysika).

4. *Funkční počet.*

Jako druhou ukázku logického počtu uvedeme počet funkční. Je výrazově mnohem bohatší než počet výrokový a prokáže nám také mnohem lepší služby pro analysu matematického myšlení. Výrokový počet bylo nutno předeslati jako jeho základ. Vnikneme teď mnohem hlouběji do struktury vět a soudů, kde se nepracuje výroky jako celky, neschopnými dalšího rozboru.

Nejdříve ukážeme stručně, v čem spočívá obohacení nového počtu. Mějme nějaký predikát, kterým přisuzujeme danému předmětu nějakou vlastnost. Nazveme-li předmět ‚x', vlastnost (přiřčenou predikátem) ‚f', pak vyjádříme větu „o x platí f" symbolicky ‚$f(x)$', Předměty, jež vyhovují funkci ‚f' (předměty vlastnosti ‚f'), tvoří třídu předmětů, vytvořenou predikátem ‚f'. Celý tak zvaný počet tříd, který ještě v díle Russel-Whiteheadově hraje důležitou roli, je možno za jistého předpokladu (extensionality) vyjádřiti rovnocenně funkčním počtem, takže se počtem tříd zvláště zabývati nebudeme.

Platí-li pro všechna ‚x' nějakého oboru ‚f', píšeme ‚$(x)f(x)$' a čteme: pro všechna ‚x' platí ‚f'. Závorkovaný znak před funkční značkou se nazývá „operátor", v tomto případě „pro všechny". Existuje-li ‚x', pro něž platí ‚f', píšeme ‚$(Ex)f(x)$'. Operátor tento nazýváme existenční operátor. Proměnná ‚x', jež probíhá oborem předmětů, pro něž platí ‚f', je v obou uvedených případech *vázaná,* a to operátory. Píšeme-li bez operátoru ‚$f(x)$', pak říkáme, že proměnná je v tomto případě volná. V matematické logice se obyčejně upozorňuje na obdobu vázané proměnné v integrálním počtu. Máme-li tam na př. integrál $\int_0^x f(x)\,dx$, kde ‚f' je funkce integrace schopná třeba ve smyslu Riemannově, pak ‚x' je vázáno na uzavřený interval $\langle 0, x \rangle$. To je obdoba operátoru „pro všechny". Bylo by možno najíti i obdobu s volnou proměnnou a to v integrálu, jenž je chápán jako primitivní funkce k dané funkci vzhledem k operaci derivace a vyjadřuje se t. zv. neurčitým integrálem po způsobu, který byl své doby v analysi oblíben. Tyto analogie přes to, že se hojně uvádějí, nejsou pro náš účel nijak závazné.

Ukážeme si teď, jak je možno vyjádřiti znaky s operátory způsobem, jejž známe z výrokového počtu. Předpokládáme však výslovně, že obor proměnných, jež vyhovují zvolené funkci, je *konečný*. Buďtež předměty tohoto oboru — té třídy lze také říci —

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n.$$

Potom platí

1. $(x) f(x) \equiv_{Df} f(x_1) . f(x_2) . f(x_3) \ldots f(x_n)$.
2. $(Ex) f(x) \equiv_{Df}$

$$f(x_1) \vee f(x_2) \vee f(x_3) \vee f(x_4) \vee \ldots \vee f(x_n).$$

Ekvivalence jsou obsahově snadno pochopitelné. Platí-li pro všechny předměty třídy — stanovené znakem ‚f' — že mají vlastnost ‚f', pak pravá strana 1. vyjadřuje tuto vlastnost výslovně pro každého člena souboru. Existuje-li pak předmět vlastnosti ‚f', má tuto vlastnost ‚x_1' nebo (také) ‚x_2', ... až ‚x_n', což je pravá strana 2. Pomocí těchto ekvivalencí lze pro konečné třídy předmětů dokázati důležité vztahy funkčního počtu, jež platí pro operátory ve spojení s funkcí. Tyto vztahy, nové ekvivalence, si teď dokážeme. Zaveďme ještě označení

$$\text{místo } \overline{(x) f(x)} \text{ pišme } (\bar{x}) f(x)$$

(neplatí pro všechna ‚x' vlastnost ‚f')

a místo $\overline{(Ex)f(x)}$ pišme $(\overline{Ex})f(x)$ (neexistuje ‚x' vlastnosti ‚f').

Z výrokového počtu známe ekvivalenci

$$p \vee q \backsim \overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}$$

a protože platí v dvojhodnotové logice věta o dvojí negaci, platí také

$$\bar{p} \vee \bar{q} \backsim \overline{p \cdot q}$$

záměnou výroků za výroky negované.

Lze snadno dokázati, že platí obecněji

$$p \vee q \vee r \vee \ldots \vee t \backsim \overline{\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r} \ldots \bar{t}}$$

a stejně tak platí

$$\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r} \vee \ldots \vee \bar{t} \backsim \overline{p \cdot q \cdot r \ldots t}.$$

Použijeme těchto ekvivalencí na svůj případ. Platí tedy

$$\overline{f(x_1) \cdot f(x_2) \ldots f(x_n)} \backsim \bar{f}(x_1) \vee \bar{f}(x_2) \vee \ldots \vee \bar{f}(x_n),$$

ale levá strana není nic jiného než $(\bar{x})f(x)$, pravá je $(Ex)\bar{f}(x)$. Platí tedy

$$(\bar{x})f(x) \backsim (Ex)\bar{f}(x).$$

Tato ekvivalence se dá obsahově velmi snadno interpretovati a je hojně používána v matematických úsudcích. Intiucionisté by ji přijali, tak jak byla dokázána. Rozšíří-li se však obor platnosti této ekvivalence také na třídy nekonečné, což logika činí, nemohou s touto ekvivalencí souhlasiti, neboť její podmínkou je princip vyloučení třetí možnosti. Pro nekonečné obory proměnných funkce ‚f' nelze také ekvivalenci dokazovati obratem přes výrokový počet, protože nekonečné disjunkce i konjunkce zásadně nejsou připuštěny. To by bylo nutno rozšířiti pravidla počtu. Obsahově říká ekvivalence zřejmě tolik: neplatí-li predikát ‚f' o všech ‚x', existuje ‚x' takové, pro něž platí ‚non f' a také naopak. V matematice se často používá tohoto obratu: najdeme-li příklad, který vyvrací předpokládanou vlastnost, společnou celé skupině předmětů, pak neplatí tato vlastnost obecně. Takový příklad, jenž vyvrátí tušenou (špatně tušenou) vlastnost celého souhrnu, bývá obyčejně vtipně vymyšlenou konstrukcí, jež svoji úlohu splní tím, že tušenou větu zvrátí.

Jestliže utvoříme negaci výrazu

$$f(x_1) \vee f(x_2) \vee \ldots \vee f(x_n),$$

dostaneme

$$\overline{f}(x_1) \, . \, \overline{f}(x_2) \, \ldots \, \overline{f}(x_n),$$

ale to je jinak psáno

$$(x)\overline{f}(x).$$

Negace disjunkce, z které jsme teď vyšli, se dá psáti stručně

$$\overline{(Ex)}f(x).$$

Platí tedy

$$\overline{(Ex)}f(x) \sim (x)\overline{f}(x).$$

Tuto ekvivalenci také snadno dostaneme z ekvivalence první negací obou stran.

Také tento druh úsudku je dostatečně znám a jeho slovní vyjádření neposkytuje obtíží.

Znovu si uvědomíme, že jsme při odvození obou těchto důležitých ekvivalencí funkčního počtu užili konečného počtu výrazů tvaru ‚$f(x_i)$' nebo ‚$\overline{f}(x_i)$', sestavených v disjunkce nebo konjunkce. Ještě Russel a Whitehead připouštěli možnost disjunkcí a konjunkcí o nekonečně mnoha členech. Tuto možnost pozdější kritika oslabila. Jistou obměnou postupu, jejž jsme uvedli, dochází Wittgenstein s použitím Shefferova symbolu (viz dříve ve výrokovém počtu) k definici základních výrazů funkčního počtu. I Wittgensteinův způsob je však proveditelný jen pro konečné soubory. Proto nebylo možno užíti tohoto způsobu jako podkladu pro theorii transfinitních čísel.

Soustava funkčního počtu užívá všech čtyř základních vět výrokového počtu a) $\div$ d), jež jsme své doby uvedli. Místo výroků ovšem mohou býti vloženy do základních vět funkce, jak brzo poznáme, i funkce více proměnných, jež vyjadřují *vztahy* mezi proměnnými. Soustava základních vět je však doplněna dvěma zvláštními základními větami, jež podstatně určují význam operátorů. Jsou to věty

e) $(x)f(x) \rightarrow f(y)$,

f) $f(y) \rightarrow (Ex)f(x)$.

Tyto základní věty nejsou odvozeny methodou konečných disjunkcí nebo konjunkcí. Jsou zvoleny tak, aby platily pro konečné i nekonečné soubory a mají tedy *transfinitní* povahu. Platnost ekvivalencí, jimiž jsme se před nedávnem zabývali, se nyní zavádí definicemi, na příklad

$$(Ex)f(x) \equiv_{Df} \overline{(x)\overline{f}(x)};$$

(položíme-li za ‚*f(x)*' výraz ‚$\overline{f}(x)$', dostaneme jednu z odvozených ekvivalencí). Úvahy podle těchto myšlenkových schemat nemusí ovšem, jak víme, intuicionista přijmouti.

Vedle základních vět e) a f), jež jsou nové, platí ještě doplňkové pravidlo: není-li ‚*A*' závislé na ‚*x*', t. j. ‚*x*' se v něm vůbec nevyskytuje, nebo alespoň ne jako volná proměnná, je-li dále ‚B' výrazem na ‚x' závislým, což označíme ‚$B(x)$', a je-li možno v naší logické soustavě odvoditi implikaci $A \rightarrow B(x)$ jako důsledek základních vět a) $\div$ f) (t. j. tato implikace je formulí soustavy logické), je také $A \rightarrow (x)B(x)$ formulí této soustavy.

Funkce, jež mají více proměnných, vzniknou z úvah o vztazích, jež mají předměty k sobě. Přehměty ‚x' a ‚y' nechť mají vztah ‚g'. Logistický přepis tohoto výroku je ‚$g(x,y)$'. Funkce tří proměnných vyjadřují vztahy tří předmětů k sobě, na příklad vztah ‚$h(x,y,z)$' může znamenati, že na dané otevřené křivce je bod ‚y' mezi body ‚x' a ‚z'. Proměnné mohou býti vázány operátory stejně jako u funkcí jedné proměnné. Operátory se pak výslovně vždy týkají jen zcela určité proměnné. Na příklad věta: pro každé celé kladné ‚x' existuje ‚y' větší než ‚x' může míti tento logistický přepis

$$‚(x)(Ey)\, v\, (x,y)'.$$

Při tom značíme funkčním výrazem ‚$v\, (x,y)$' aritmetickou relaci ‚$x < y$'.

Základní věty e) a f) platí ovšem pro jakékoli funkce, jež mají konečný počet proměnných. Přítomnost většího počtu operátorů způsobuje, že k dosažení hledaného tvaru je nutno použíti základních vět třeba několikrát; na příklad

$$g(x,y) \rightarrow (Ex)g(x,y)$$

a novým užitím věty f)

$$(Ex)g(x,y) \rightarrow (Ex)(Ey)g(x,y),$$

takže dostaneme poslední tvar s oběma ‚E-operátory' dvojnásobným užitím věty f).

Pro operátory platí ještě věta, že účinnost operátoru se vztahuje na celou formuli, před níž je operátorový znak a není samozřejmě možné, aby táž proměnná byla vázána v téže formuli dvěma operátory, jež se navzájem vylučují.

Funkční počet, o jehož některých vlastnostech jsme si teď promluvili, je možno ještě podstatně rozšířiti. Rozšíření spočívá v tom, že připustíme, aby proměnnými byly také predikáty nebo relace samy, tedy funkce. Lze přece pronášeti také predikáty o predikátech, vyjadřovati se o nich. Tím se dostaneme k rozšířenému tvaru funkčního počtu, jenž je již dosti bohatý výrazově, aby mohl vyjádřiti matematické problémy. K tomu se teď vrátíme.

Uvedeme si obsahově několik výrazů, abychom se do tohoto způsobu myšlení uvedli. Zcela jistě je obsahově patrná platnost formule

$$(x)\,[P(x) \vee \overline{P}(x)]\,;$$

tato formule se dá snadno dokázati. Důkaz užívá formule ‚$p \vee \overline{p}$', jež je ve výrokovém počtu dvojhodnotovém odvoditelná. Tedy je také ‚$P(x) \vee \overline{P}(x)$' odvoditelné. Pak je však také $(x)\,[P(x) \vee \overline{P}(x)]$ odvoditelné, důkaz je možno podati na základě věty, již jsme citovali a která říká: je-li odvoditelná implikace, jejíž pravá strana má volnou proměnnou, je také odvoditelná implikace, jejíž pravá strana je vázána operátorem „pro všechny" té proměnné. Nic nám nebrání, abychom napsali formuli ještě s jedním operátorem takto

$$(P)\,(x)\,[P(x) \vee \overline{P}(x)],$$

která říká, že vlastnost ‚$(x)\,[P(x) \vee \overline{P}(x)]$' mají všechny predikáty ‚P'.

Můžeme také definovati jiné, velmi obecné vlastnosti dvou predikátů, na př. ‚Impl (F,G)' — což čteme: predikát ‚F' implikuje predikát ‚G' a to touto definicí

$$\text{Impl}\,(F,G) \equiv_{Df} (x)\,[F(x) \rightarrow G(x)]$$

nebo predikát

‚Vyluč (F,G)'

definicí

$$\text{Vyluč}\,(F,G) \equiv_{Df} (x)\,[\overline{F}(x) \vee \overline{G}(x)]$$

vyjadřující, že predikáty ‚F' a ‚G' nejsou současně platné, čili že se vylučují. Poslední definice nabude snad názornějšího rázu, uvědomíme-li si, že podle výrokového počtu platí ekvivalence

$$\overline{F}(x) \vee \overline{G}(x) \backsim \overline{F(x)\,.\,G(x)},$$

kde pravá strana říká jasně: neplatí současně ‚F' a ‚G'.

Vztah mezi predikáty ‚Impl' má své užití na příklad v theorii množin, je-li množina určena predikátem ‚G' a její podmnožina, (t. j. množina, neobsahující všechny elementy ‚G', t. zv. vlastní podmnožina) pak predikátem ‚F', platí jistě pro každý element vlastnosti ‚F' že má také vlastnost ‚G', což je obsah levé strany definiční rovnice pro ‚Impl'.

Predikátu ‚Vyluč', jenž značí vyšší vztah mezi dvěma predikáty, užila logika na př. k důkazu rovnic jako $1 + 1 = 2$, obecně $n + m = s$. To si zanedlouho ukážeme.

Po této přípravě se obrátíme k definici celých čísel prostředky pouhé logiky. Celá čísla přirozené řady číselné definovati lze a je možno dokázati prostředky logiky platnost nejzákladnějších vztahů jejich. Je to věc velikého dosahu pro filosofii matematiky. Celá čísla považovali a dosud považují mnozí matematikové za věc čistého názoru. Tvrdí, že lidský duch má schopnost nazírati řadu přirozených čísel celých a že tato schopnost není dále rozboru schopná. Matematičtí intuicionisté staršího typu, naklonění lehkému mysticismu, šli dokonce tak daleko, že považovali řadu celých čísel za předmět stvořený Bohem — vše ostatní (t. j. matematika) je již lidská práce. Ostře se od nich liší matematičtí logikové a to následkem úspěchu method, jež zavedli. Snaha matematických logiků, odvoditi co možno *vše* prostředky logiky, zaslouží plného respektu, i když ještě nevykonali vše, co si v celkovém programu předsevzali. K této snaze logiků a méně jasně formulovanému skeptickému názoru intuicionistů, si nemohu odpustiti uvést paralelu, známou z biologie. V biologii jsou dva základní směry, jež se liší spíše myšlenkovým pojetím než nástroji, jichž užívají — je to mechanismus a vitalismus. Kdežto mechanisté vidí, krajním způsobem vyjádřeno, v každém organismu stroj a hledí činnost tohoto stroje objasniti racionálními, každému přístupnými methodami fysiky a chemie, a tak stroj pochopiti, uznávají vitalisté jakousi životní sílu — zvláštní faktor, jenž umožňuje život. Povahu tohoto faktoru je nemožno exaktně vyjádřiti, nelze jej zkoumati fysikálně chemickými methodami, protože je afysikální. Specielní, jeho povaze odpovídající methoda *jiná* nebyla však vitalisty k jeho zkoumání také objevena.

Je pravda, že i vitalisté pracují způsoby, jež nalezli mechanisté, kteří jdou důsledně ve svém programu — celá věc je spíše otázkou vědeckého přesvědčení: mechanista věří ve svoji methodu i když ztroskotává — proto hledí svou pracovní methodu zlepšit, změnit, vypátrat novou. Vitalista, i když pracuje methodami mechanisty, je proniknut myšlenkou v podstatě negativní, že nepoznáme prapříčiny života, je skeptikem ve smyslu věčného „ignorabimus".

V matematice intuicionista, i když přemýšlí o nejzákladnějších otázkách matematiky, je ochoten připustiti zásadní neřešitelnost některých matematických problémů a je také ochoten uplatňovati ve svých úvahách ne dosti jasně vyslovitelný moment intuice — věří v určité předmětné hodnoty, jimiž se dále nezabývá. Proto je také v úvahách intuicionistů tolik nejasné formulace a nesporný anthropologický rys — my nepoznáme, v našich schopnostech není, atd.

Logik má program: přemáhá velmi záludné překážky, objasňuje celou jemnou mechaniku logické sítě, zkoumá s mnoha stran hlavní prameny poznatků — souvislost předpokladů a závěrů. Logik chce věděti, *kam* až lze jíti, co tedy už v mechanismu myšlení dále redukovati nelze — je-li vůbec něco takového. Chce znát jasně funkci svých předmětů a není-li to možno, tedy ponechati jim jen tak málo volnosti, nakolik stačí právě současný stav method.

S tohoto stanoviska vzato, je definice celých čísel krásným výsledkem přesné logické práce. Definice provést lze, jak uvidíme, pouze prostředky čisté logiky — lze tak postupně provésti definici každého celého čísla — ne však definici celé třídy racionálních celých čísel. Proč to není možno a v čem je nový požadavek takové třídy, který již nelze pouhou logikou vyjádřiti, ukážeme později. Je to axiom nekonečna.

Definice prvních celých čísel racionálních:

$$0. \quad 0(F) \equiv_{Df} \overline{(Ex)}F(x);$$

takto je definováno číslo ‚0'. ‚0' je podle toho definována jistou vlastností predikátu ‚*F*' a to vlastností, jež vyznačenou pravou stranou definiční rovnice 0. Pravou stranou je definována prázdná třída; každé ‚F' totiž, jež může definovati ‚0', má tu vlastnost, že neexistují předměty, jež by funkci ‚F' vyhovovaly.

1. $1(F) \equiv_{Df} (Ex)F(x) \,.\, (y)F(y) \rightarrow x = y,$

při tom vztah, který je psán na konci výrazu, je definován takto:

$$x = y \equiv_{Df} (P)\,[P(x) \rightarrow P(y)]\,;$$

je to logický přepis Leibnizovy definice identity, o které jsme již mluvili při úvaze o logických principech antických. (Identitas indiscernibilium.) Dva předměty jsou tehdy identické, platí-li predikát ‚P' jak o jednom tak o druhém, a toto musí platiti pro všechny predikáty ‚P' (určitého typu, viz dále theorii typů).*)

Definiční rovnice 1 se dá snadno přečísti. Číslo ‚1' není nic jiného než jistá vlastnost predikátu ‚F', pro nějž platí: ‚x' vyhovuje funkci ‚F' a každý jiný předmět ‚y', jenž vyhovuje ‚F', je s ‚x' identický.

2. $2(F) \equiv_{Df} (Ex)\,(Ey)\,[\overline{x = y} \,.\, F(x) \,.\, F(y) \,.$
$\quad .\, (z)F(z) \rightarrow z = x \vee z = y],$

což dává, přečteno, tento obsahový opis: číslo dvě je určeno každým predikátem ‚F', pro nejž platí: existují dva předměty ‚x' a ‚y', jež ‚F' splňují a nejsou identické. Každý další předmět, vyhovující ‚F', je buď s prvním nebo také s druhým identický.

Význam těchto definicí, v nichž by se zřejmě dalo

*) Toto formalisované užití Leibnizova principu není ve sporu s naší dřívější poznámkou, že *obecná* formulace tohoto principu není dobře proveditelná. Zvláštní případ principu, zde užitý, je korektní a stačí. Viz ostatně poznámku pod čarou u příležitosti kritiky principu identity.

pokračovati obdobně, je v tom, že nejjednodušší vztahy a rovnice, jako třeba ‚$1 + 1 = 2$' lze bez užití nějakých mimologických postulátů *dokázati*. Lidové rčení „je to tak jisté, jako že $1 + 1$ jsou 2" je tedy větou logicky dokazatelnou a ne jen intuitivní jistotou.

Vzhledem k závažnosti definice celých čísel ještě několik poznámek o jejich povaze. Nepředpokládáme při nich již zakrytě existenci nějakých individuí, jež by již čísly byla, takže by definice přece jen nebyly pouze logické a trpěly by nedostatkem, známým pod jménem „petitio principii"?

K tomu je nutné uvědomiti si význam operačních symbolů ‚(Ex)', ‚(Ey)'. V definici, užívající takových symbolů, netvrdíme, *že* takové předměty existují; povaha věci je spíše takováto, jak patrno na definici čísla 2: predikátu ‚F' vyhovuje předmět ‚x' a ‚y' a predikát má kromě toho vlastnost, že každý další předmět je s jedním z nich identický. Takové myšlenkové útvary je dovoleno tvořiti; vše, oč se opíráme, je, že ty dva předměty musí býti různé. Různost je však definitoricky negace identity. Netvrdíme tedy ani přímo, že ty předměty jsou dva.

Pojetí čísel, jež jsme ukázali, se opírá o výsledky Russelovy z počátku našeho století a dalo by se ještě jinak popsati. Číslo není než společným znakem všech skupin, jež mají stejný počet elementů. Každý predikát, jenž má na př. vlastnost vyjádřenou pravou stranou definiční rovnice čísla 2, určuje třídu. Jiný predikát téže formální vlastnosti určuje také třídu. To, co mají takové třídy společné, společná vlastnost, to je právě číslo 2.

Sčítání celých čísel takto definovaných je možno převésti na disjunkci dvou predikátů, jež se vylučují. Formálně vyjádřeno: máme-li ‚$m(F)$' a ‚$n(G)$', pak platí ‚$m + n\ (F \vee G)$'. — Provedeme si teď důkaz rovnice $1 + 1 = 2$ tímto naznačeným způsobem.

K tomu účelu pišme definice obou jednotek, jež jsou na levé straně rovnice, v tomto tvaru:

$$1(F) \equiv_{Df} (Ex)F(x) \,.\, (u)F(u) \to u = x,$$
$$1(G) \equiv_{Df} (Ey)G(y) \,.\, (u)G(u) \to u = y.$$

Abychom dokázali rovnici $1 + 1 = 2$, musíme dokázati logickou ekvivalenci obou stran. Proto je potřebí odvoditi dvě implikace: $1 + 1 \to 2$ a $2 \to 1 + 1$. V dalším se budeme zabývati pouze důkazem první z obou implikací, postačí to zcela pro náš účel, abychom poznali možnost takového důkazu. Jde tedy o důkaz této implikace: $1(F) \,.\, 1(G) \to 2(F \vee G)$. Vypsaná levá strana této implikace zní:

$$[(Ex)F(x) \,.\, (u)F(u) \to u = x] \,.$$
$$.\, [(Ey)G(y) \,.\, (u)G(u) \to u = y] \qquad 1.$$

S výrazy právě napsanými budeme zacházeti jako s formulemi, protože jsou to logické předpoklady celého důkazu. Proto budeme podle závěrového pravidla z těchto výrazů činiti důsledky. Před vlastním důkazem odvodíme dvě pomocné věty.

A) $\qquad P \,.\, Q \to P$ a také $P \,.\, Q \to Q$.

Důkaz obou implikací plyne okamžitě z věty b) výrokového počtu. Tato věta zní: $p \to p \vee q$. Podle formulí, které jsme odvodili jako příklady dedukcí ze základních vět výrokového počtu, víme, že implikaci je možno obrátiti, negujeme-li oba její členy (formule 3., resp. 4. citovaného místa). Tedy platí $\overline{p \vee q} \to \overline{p}$. Levá strana této implikace však je, podle souvislosti negace disjunkce a konjunkce ekvivalentní s konjunkcí $\bar{p} . \bar{q}$. Platí tedy $\bar{p} . \bar{q} \rightarrow \bar{p}$. Označíme-li jinak oba negované výroky, dostáváme přímo první případ formule, již jsme měli dokázati. Důkaz druhé je neméně snadný.

B) $$\{P \rightarrow Q . P \rightarrow R\} \rightarrow [P \rightarrow (Q . R)].$$

Levou stranu implikace je možno psáti $\bar{P} \vee Q . \bar{P} \vee R$. Tento výraz je však dokonce ekvivalentní s výrazem $\bar{P} \vee (Q . R)$, jak se snadno dokáže. Takovéto „vytknutí před závorku" je jednou z nejběžnějších operací logistiky, naopak je možno závorku, obsahující konjunkci, „vynásobiti" výrokem, jenž je s touto závorkou v disjunkci. Výraz $\bar{P} \vee (Q . R)$ je ekvivalentní s implikací $P \rightarrow (Q . R)$.

Užijeme na výraz ... 1. pomocné věty A), a to dvakrát po sobě. 1. je totiž konjunkce dvou závorek; podle věty A) tedy můžeme osamostatniti kteroukoli z nich užitím závěrového pravidla. Ale každá z těch závorek je zase konjunkcí, můžeme tedy tímtéž postupem osamostatniti tyto dva výrazy

$$(u)F(u) \rightarrow u = x \quad \text{a} \quad (u)G(u) \rightarrow u = y. \qquad 2.$$

Výrazy 2. jsou ale ekvivalentní výrazům

$$(Eu)\overline{F}(u) \vee u = x \quad \text{a} \quad (Eu)\overline{G}(u) \vee u = y, \qquad 3.$$

implikaci jsme pouze vyjádřili jako disjunkci a použili ekvivalence

$$\overline{(x)} f(x) \backsim (Ex)\overline{f}(x),$$

kterou jsme své doby odvodili. Oba výrazy 3. vložíme za ‚p' do základní věty b), za její ‚q' pak ‚$u = y$', resp. ‚$u = x$'. Dostaneme

$$(Eu)\overline{F}(u) \vee u = x \rightarrow (Eu)\overline{F}(u) \vee u = x \vee u = y$$

a podobně

$$(Eu)\overline{G}(u) \vee u = y \rightarrow (Eu)\overline{G}(u) \vee u = y \vee u = x. \qquad 4.$$

Závěrovým pravidlem můžeme osamostatniti obě pravé strany implikací 4. Protože tyto pravé strany jsou důsledkem výrazu 1., je podle pomocné věty B) také jejich konjunkce důsledkem výrazu 1. Tuto konjunkci s malou změnou napíšeme

$$(Eu)\overline{F}(u) \vee u = x \vee u = y \,.$$
$$.\ (Eu)\overline{G}(u) \vee u = x \vee u = y. \qquad 5.$$

Změna se týká pouze výměny dvou členů v disjunkci druhého výrazu, a ta je, jak víme ze základní věty c), dovolená. Zevrubným důkazem se nebudeme zdržovati. Oba výrazy jsou disjunkcemi tří členů, z nichž dva poslední jsou stejné. Tyto poslední členy „vytkneme za závorku" a dostaneme ekvivalentní výraz k 5.

$$(Eu)\,[\overline{F}(u)\,.\,\overline{G}(u)] \vee u = x \vee u = y. \qquad 6.$$

Tento poslední výraz přepíšeme zpět na implikaci

$$(u)\,[F(u) \vee G(u)] \rightarrow u = x \vee u = y. \qquad 7.$$

To je hlavní část výsledku, kterou jsme potřebovali.

Užijeme-li na výraz 1. znovu pomocné věty A), osamostatníme užitím závěrového pravidla dva další výrazy: $(Ex)F(x)$ a $(Ey)G(y)$. Oba tyto výrazy vložme za ‚p' do základní věty b), za ‚q' položme $G(x)$, resp. $F(y)$. Dostaneme

$$(Ex)F(x) \rightarrow (Ex)F(x) \vee G(x)\,.$$
$$.\ (Ey)G(y) \rightarrow (Ey)G(y) \vee F(y) \qquad 8.$$

Pravé strany implikací 8. jsou také důsledky 1., můžeme je tedy pomocí závěrového pravidla osamostatniti, při čemž u druhé implikace provedeme dovolenou výměnu členů disjunkce G a F. Důsledky 1., které potřebujeme, jsou celkem tři, první je obsažen v 7., druhé dva v 8. Užijeme-li teď dvakráte pomocné věty B), dostaneme

$$
\begin{aligned}
&[(Ex)F(x) \,.\, (u)F(u) \rightarrow u = x \,.\, (Ey)G(y) \,. \\
&.\, (u)G(u) \rightarrow u = y] \rightarrow (Ex)[F(x) \vee G(x)] \,. \\
&.\, (Ey)[F(y) \vee G(y] \,.\, (u)[F(u) \vee G(u)] \rightarrow \\
&\qquad \rightarrow u = x \vee u = y.
\end{aligned}
$$

Podíváme-li se na pravou stranu implikace a srovnáme-li ji s definicí čísla 2, jak byla uvedena, vidíme, že jsme již implikaci $1 + 1 \rightarrow 2$ skoro dokázali. Pravé straně chybí ještě člen ‚$\overline{x = y}$'. Abychom tento člen obdrželi, musíme využíti předpokladu, že oba predikáty F a G se vylučují.

Především si objasníme, co znamená podmínka $\overline{x = y}$ v naší soustavě.

$$x = y \equiv_{Df} (P)[P(x) \rightarrow P(y)],$$

tedy negace rovnosti je podle pravidel

$$\overline{x = y} \equiv_{Df} (EP)[P(x) \,.\, \overline{P}(y)]$$

[implikaci napravo píšeme jako disjunkci a užijeme na ni pravidla o tvoření negace, stejně tak stručně řečeno, negovaný operátor ‚$(\overline{P})$' se změní na ‚(EP)'].

Podmínka, že oba predikáty se vylučují, zní:

$$\text{Vyluč } (F,G) \equiv_{Df} (y)[F(y) \vee G(y)].$$

Tato podmínka měla ještě býti uvedena v 1., takže celý předpoklad 1', je

$$
\begin{aligned}
&(Ex)F(x) \,.\, (u)F(u) \rightarrow u = x \,.\, (Ey)G(y) \,. \\
&.\, (u)G(u) \rightarrow u = y \,.\, (y)[\overline{F}(y) \vee \overline{G}(y)]. \qquad 1'.
\end{aligned}
$$

Výraz $(y)[\overline{F}(y) \vee \overline{G}(y)]$ lze psáti po výměně členů disjunkce známým způsobem jako implikaci

$$(y)[G(y) \to \overline{F}(y)].$$

Platí obecná věta funkčního počtu, již dokazovati nebudeme:

$$(x)[f(x) \to g(x)] \to [(Ex)f(x) \to (Ex)g(x)].$$

Užijeme-li této věty ve svém případě, máme

$$(y)[G(y) \to \overline{F}(y)] \to [(Ey)G(y) \to (Ey)\overline{F}(y)].$$

Užijeme-li dvakrát po sobě závěrového schematu (první část implikace je předpoklad, v implikaci napravo je první člen důsledkem předpokladu) dostáváme: $(Ey)\overline{F}(y)$. Tento důsledek ve spojení s $(Ex)F(x)$ dává podle věty B) konjunkci

$$(Ex)F(x) \,.\, (Ey)\overline{F}(y),$$

což lze psáti

$$(Ex)(Ey)[F(x) \,.\, \overline{F}(y)].$$

Podle základní věty f) platí

$$(Ex)(Ey)[F(x) \,.\, \overline{F}(y)] \to$$
$$\to (Ex)(Ey)(EF)[F(x) \,.\, \overline{F}(y)]$$

a tedy závěrovým pravidlem pravá strana poslední implikace se dá osamostatniti. Touto pravou stranou je vyjádřeno ‚$\overline{x = y}$' a tento důsledek patří ještě k důsledkům, jež tvoří definici čísla 2. Máme tedy celkem

$$1(F) \,.\, 1(G) \,.\, \text{Vyluč}\,(F,G) \to 2(F \vee G).$$

Okolnost, že číslo 2 je pojednou stanoveno disjunkcí dvou predikátů místo jediným predikátem, není nijak podstatná, nemáme nikde umluveno, jaký měl být tvar predikátu ‚F' nebo ‚G' a konečně disjunkci ‚$F \vee G$' můžeme pojmenovati třeba ‚H', takže číslo 2 je zase určeno jedním predikátem. Důkaz lze formálně provésti kratšeji, nevolil jsem tuto pohodlnější cestu proto, aby byly jednotlivé kroky dobře patrny. Proto je také oddělen dodatek ‚$\overline{x=y}$' od předchozího postupu, aby se získalo na přehlednosti. Důkaz zpětné implikace $2 \rightarrow 1 + 1$ není již obtížný, všechny podstatné kroky k důkazu potřebné jsou v našem odvození obsaženy.

Nerad bych, aby v čtenáři vznikl dojem, že se uměle vytvářejí duchaplnosti ze samozřejmostí, jako je rovnice $1 + 1 = 2$. Rovnice, o niž jde, je tak jasná, jako málo co na světě, podle běžné představy. Naopak, naše pracné odvození musí buditi na první pohled dojem, že jdeme, lidově řečeno, s kanonem na mouchu. Běžnou představou se spokojiti nesmíme. Nejde ve skutečnosti o něco prajednoduchého. Odkážeme-li na názor, že přece tato rovnice platí pro jakékoli představitelné předměty, nedostali jsme se o nic dále, než k začátkům početní praxe, jak se jí vyučuje na prvním stupni rozvíjejícího se dětského intelektu. Tam se také konec konců neříká nic jiného, než že jedna hruška a jedna hruška jsou dvě hrušky a trochu sugestivněji se rovnocennost obou jednotek podporuje na počítadle. Řekneme-li však poučeně, že rovnice vyjadřuje abstrakci všech takových případů, řekli jsme větu, kterou zakrýváme svoji neznalost: pokusíme-li se vyjádřiti, co pod tou abstrakcí rozumíme, zůstaneme státi již při prvních krocích. Ve vědě se nesmíme takovou polovičatostí spokojiti. Logický rozbor ukazuje naopak, jak složitým myšlenkovým pochodem jsou nejzákladnější početní operace. Proto byly výsledkem až vyšších, vyvinutých kultur, a patřily vždy k jejich nejvyšším projevům. Dnes, pod tlakem praktického užití počtů není tak snadno prvotní duševní pochody, jež k počítání vedly, v celé šíři rekonstruovati. Dnešní stav věcí je pak ten, že se základním početním operacím učíme pouhým napodobením, ne vlastním promýšlením. Se stanoviska životní praxe to není ani jinak možno, také k tomu vede úspornost školního vyučování. Se stanoviska vědy je však dobře, podívati se někdy samozřejmostem do očí.

Každá ze zvláštních rovnic pro součet celých čísel je dokazatelná touto methodou. Důkaz sám by byl pro vysoká čísla značně zdlouhavý, ale je v podstatě prostý a vždy proveditelný. I základní vlastnosti jiné, na př. důkaz záměnnosti sčítanců v aritmetickém počtu nečiní ve zvláštních případech potíží. To nahlédneme bez důkazu. Jde o ekvivalenci

$$m + n(F \vee G) \sim n + m(G \vee F).$$

Víme ze základní věty c) výrokového počtu, že disjunkce má zaměnitelný pořad výroků. A to je nejpodstatnější složka důkazu pro zaměnitelnost sčítanců aritmetického součtu.

Situace se však změní v neprospěch logiky, chceme-li odvoditi platnost takové ekvivalence (záměnnost sčítanců) v *obecném* případě. Henri Poincaré uvažuje ve své proslulé knize „La science et l'hypothése" o možnostech důkazu takových základních aritmetických identit a hájí stanovisko, že platnost obecných rovnic, jako je $n + m = m + n$ nelze dokazovati bez principu úplné indukce, jak se raději říká — bez platnosti závěru z ‚n' na ‚$n + 1$'. Poincaré viděl v tomto závěru podstatné obohacení logického mechanismu tautologií. Jediný tento princip povožaval Poincaré za pravou synthetickou apriorní větu, netautologického rázu, jež je vlastním tvůrčím principem matematickým, otvírajícím mimo jiné matematikovi svět nekonečna. Výsledek logického rozboru Poincarému za pravdu nedal, ale ukázal, že Poincaré správně tušil v závěru z ‚n' na ‚n + 1' přítomnost jiné věty, axiomu nekonečna. Tento axiom je skutečně mimologickým principem matematických úvah, a je tím, co Poincaré charakterisoval jako apriorní synthetickou větu. Synthetická věta na rozdíl od analytické přináší do poznání nový prvek a není jen tautologickou transformací. Přívlastek „apriorní" označuje poznání, nezávislé na zkušenosti vnějšího světa, jež však je pro naše myšlení nutné.