# Úvod do filosofie matematiky

## Axiom výběru a theorie množin

In: Otakar Zich (author): Úvod do filosofie matematiky. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1947. pp. 133–142.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403165

# AXIOM VÝBĚRU A THEORIE MNOŽIN

Uvedli jsme na svém místě, že byl učiněn smělý pokus, vybudovati celou matematiku jako odvětví čisté logiky. Tento pokus sice ztroskotal, přinesl však nicméně neobyčejný zisk do poznatků o základech matematiky. Jednou z vět, jež nelze z logiky odvoditi, jsme se již zabývali. Byl to axiom nekonečna. Zbývá ještě druhý axiom, bez něhož matematiku nelze vybudovati, a to axiom výběru. Není vyloučeno, že je jich ještě více, zdá se však, že tyto dva již postačí; nedávno zmíněného axiomu reducibility není již zapotřebí. Axiom výběru je netautologickým axiomem, t. j. je větou, která přináší nové poznání a není prázdná. Axiom zní takto: je-li *M* množina množin, které jsou bez společných prvků a nejsou prázdné, pak existuje množina *N*, jež má s každou množinou množiny *M* společný jeden a jen jeden element.

Tento axiom lze formulovati obecněji, na př. podmínka, aby množiny obsažené v *M* byly bez společných prvků, není nutná, ale pro naše účely zcela postačí uvedené vyjádření.

Formalisuje-li se tento axiom, dá se dokázati, že jej nelze převésti na tautologickou formuli. Z toho následuje, že matematika pracuje při nejmenším se dvěma axiomy povahy specificky matematické.

Axiom výběru má význam pro násobení množin, proto budeme musiti uvésti napřed některé pojmy z operací množinových. Před násobením se zmíníme ještě o sčítání množin; sčítání nesouvisí sice přímo s povahou látky, o níž mluvíme, ale poskytuje pěkný příklad opatrnosti, s níž je nutno zaváděti základní operace pro množiny, abychom se vyhnuli analogiím, jež našim představám vnucují hromady, souhrny a jiné nedostatečně určené předměty. Jde tedy o sčítání a násobení množin, tím také projednáme sčítání a násobení kardinálních čísel, které se dá na operace množin převésti. Budeme předpokládati, že množiny, o které jde, nejsou konečné.

Máme sečísti množinu $M$ a množinu $N$. Elementy $M$ buďtež označeny $x$, elementy $N$ pak $y$. Utvoříme teď novou množinu, jež bude míti dvojí druh elementů: 1. elementy tvaru $(x,0)$, kde $x$ probíhá všemi elementy množiny $M$ a 2. elementy tvaru $(0,y)$, kde $y$ probíhá všechny elementy množiny $N$. Nově utvořené elementy (páry) nemají zřejmě společné jedince, takže můžeme prohlásiti množinu, jež obsahuje všechny jmenované páry jako elementy za součtovou množinu $M + N$. Má-li množina $M$ kardinální číslo $a_1$ a množina $N$ kardinální číslo $a_2$, má množina párů kardinální číslo $a_1 + a_2$. To plyne z okolnosti, že kardinální číslo je společný predikát všech ekvivalentních množin, t. j. takových, jež je možno na sebe jedno-jednoznačně zobraziti. Všimněme si zajímavé okolnosti, že nová součtová množina nemá již elementy původních množin, jež se měly sečísti, nýbrž elementy nové, páry, takže tu není ani vzdálená analogie se smísením dvou „hromad".

Máme-li utvořiti součin nekonečně mnoha transfinitních čísel $a_i$, tedy součin $\underset{i}{\pi a_i}$ postupujeme takto: každému transfinitnímu číslu kardinálnímu $a_i$ odpovídá nějaká množina $N_i$. Předpokládejme pro jednoduchost opět, že množiny $N_i$ nemají navzájem společných elementů. Utvořme teď množinu, jejíž elementy budou tváru

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots x_i, \ldots),^*)$$

kde každé $x_i$ je z množiny $N_i$ a nezávisle na všech ostatních $x_j$ probíhá všemi elementy množiny $N_i$. Množinu všech takových elementů prohlásíme za součin množin $N_i$, tedy $\pi_i N_i$ a kardinální číslo, jež odpovídá této množině, bude kardinální číslo příslušné součinu $\pi_i \alpha_i$.

Definice součinu množin, resp. kardinálních čísel je tak volena, aby byla v souhlase s výsledky operací v konečném oboru. Provedeme si jako příklad násobení dvou konečných množin

$$N_1 = (x_{11}, x_{12}), \qquad N_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23}).$$

V nové součinové množině budou tedy elementy tvaru

$$(x_{1i}, x_{2j}), \qquad \text{kde } i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3.$$

Dostaneme tak elementy

$$(x_{11}, x_{21}),\ (x_{11}, x_{22}),\ (x_{11}, x_{23}),\ (x_{12}, x_{21}),\ (x_{12}, x_{22}),$$
$$(x_{12}, x_{23}).$$

Více možností zřejmě není a elementů je šest. K množině $N_1$ patří konečné kardinální číslo 2, k množině $N_2$ konečné kardinální číslo 3, k součinové množině výsledné patří konečné kardinální číslo 6.

O konečných kardinálních číslech známe poučku, že jejich součin je tehdy a jen tehdy roven nule, je-li alespoň jeden z činitelů roven nule. Tato věta však není poučkou (t. j. dokazatelnou větou) v theorii kardinálních čísel transfinitních. Objasníme blíže, jak se tam věci mají. Tato věta se přesně vzato nedá dokázati v tom případě, že jde o součin *nekonečně mnoha* kardinálních čí-

*) Tohoto způsobu značení užíváme pro názornost, podrobnější poučení nalezne čtenář v učebnicích theorie množin.

sel (nebo množin), ať již konečných nebo transfinitních. V případě *konečného* počtu kardinálních čísel jakýchkoli se dokázati dá a výsledek je obdobný, jako u čísel konečných. Pro nekonečně mnoho kardinálních čísel se věta dá dokázati za předpokladu, že existuje alespoň jeden element toho tvaru, který jsme si uvedli při výkladu součinu množin. Element takový obsahuje z každé množiny, jichž součin má býti utvořen, *jednoho* representntna. A tu jsme právě u axiomu výběru. Takový výběr tedy musí býti možný, aby součin byl nenulový. Dá se dokonce dokázati ještě více: věta vyjadřující, že součin nekonečně mnoha kardinálních čísel není roven nule, je-li každý činitel různý od nuly, je *ekvivalentní* s axiomem výběru.

Rozšíříme-li tedy větu: součin jakéhokoli počtu kardinálních čísel je různý od nuly, jsou-li činitelé různí od nuly (vedeni jsouce jakýmsi principem permanence matematických úkonů), pak můžeme axiom výběru dokázati.

Axiom výběru je velmi pozoruhodná matematická věta, jež si zajistila v dějinách matematiky posledních desítiletí zvláště čestné místo. Je málo problémů v matematice, o nichž by se bylo s takovou prudkostí, v matematice jinak neobvyklou, diskutovalo. Axiom sám byl po prvé výslovně uveden Zermelem při důkazu, že každou množinu lze *dobře uspořádati.*

Množinu lze *uspořádati,* platí-li mezi kterýmikoli jejími elementy transitivní relace (pořádající), již symbolicky označíme „$\prec$". Mezi dvěma libovolnými elementy uspořádané množiny pak platí buď $a \prec b$ nebo $b \prec a$. Transitivnost relace je vyjádřena známým způsobem takto:

$$a \prec b . b \prec c \rightarrow a \prec c.$$

Tím však ještě není vyjádřeno *dobré* uspořádání množiny. To je splněno tehdy, když každá podmnožina původní množiny má první element. Na srovnání si vezmeme množinu celých kladných racionálních čísel, uspořádaných podle velikosti a množinu všech reálných čísel, obsažených mezi body 0 a 1 na číselné ose, včetně těchto bodů (tedy uzavřený interval 0,1). Ať volíme jakoukoli podmnožinu z množiny uspořádaných celých kladných čísel, bude míti vždy první element, bude to nejnižší celé číslo v té podmnožině obsažené. V druhé množině vytvořme podmnožinu tak, že odloučíme bod 0. Vzniklá množina nebude již míti první element, protože nexistuje reálné číslo, které by následovalo ihned po 0. Ke každému sebemenšímu kladnému reálnému číslu lze totiž udati ještě menší (na příklad jeho polovinu). První množina je dobře uspořádána, druhá nikoli, ačkoli je alespoň uspořádána.

Protože potřebujeme pro další výklad několik základních poznatků o pořádkových číslech, vsuneme je na tomto místě. Dvě množiny, jež byly uspořádány podle předchozího, jsou si podobny, můžeme-li je uvésti ve vztah originálu (první množina) a zobrazení (druhá množina) jeho tak, že platí-li mezi elementy originálu vztah „$x \prec y$", platí také takový vztah mezi příslušnými obrazy těchto elementů. Značíme-li tedy elementy druhé množiny obecně čárkou, pak platí „$x' \prec y'$". Říkáme pak, že dvě takové uspořádané množiny mají stejný pořádkový typ. Příklad: množina

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

uspořádaná obvyklou relací „větší než" a množina

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$$

patří k stejnému pořádkovému typu. Pořádkový typ je predikátem, shrnujícím v jednu třídu podobné množiny. Není tedy na př. množina

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

a množina

$$\{\ldots 5, 4, 3, 2, 1\}$$

stejného pořádkového typu, první z nich má počáteční element a nemá poslední, druhá naopak. Pořádkové typy dobře uspořádaných množin se nazývají pořádková čísla (ordinální) v případě, že jde o množiny nekonečné — transfinitní pořádková čísla. Nejmenším transfinitním pořádkovým číslem je číslo $\omega$. Je to označení pořádkového typu nekonečné posloupnosti, tedy také na př. množiny všech čísel celých, uspořádaných podle velikosti. Protože takto uspořádaná množina je, jak víme, *dobře* uspořádaná, můžeme nazvati tento pořádkový typ pořádkovým *číslem*. Platí pro něj rovnice

$$1 + \omega = \omega,$$

nikoli však

$$\omega + 1 = \omega.$$

To je patrno z okolnosti, že dvě uspořádané množiny

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

a

$$\{2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

patří k témuž pořádkovému typu, kdežto

$$\{2, 3, 4, \ldots; 1\}$$

mající poslední element a množina nemající jej

$$\{1, 2, 3, \ldots\}$$

k témuž pořádkovému typu nepatří.

Připojíme-li k dobře uspořádané množině

$$\{1, 2, 3, \ldots\}$$

ještě pořádkové číslo $\omega$ jako *poslední* element, dostaneme množinu, patřící k pořádkovému typu $\omega + 1$, od té lze postoupiti k pořádkovému typu $\omega + 2$, $\omega + 3, \ldots$ přidáváním dalších elementů až konečně k $\omega \,.\, 2$. Připojujeme vždy za poslední přidaný element $\omega + k$ nový element $\omega + k + 1$. K vyššímu pořádkovému typu a v našem případě i k pořádkovému číslu $\omega^2$ dojdeme na př. tak, že sestavíme posloupnost z posloupností takto: první z nich bude míti všechna prvočísla, jichž je, jak víme, nekonečně mnoho (Euklid)

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$$

druhá jejich dvojnásobky

$$4, 6, 10, 14, 22, 26, \ldots$$

třetí trojnásobky

$$9, 15, 21, 33, 39, \ldots$$

atd. Myslíme si všechny takové posloupnosti, jichž je nekonečně mnoho, napsány za sebou tak, aby představovaly dobře uspořádanou množinu. Tato množina má pořádkové číso $\omega^2$. Podobně je možno postoupiti k $\omega^3$, $\omega^4, \ldots$ a lze nahlédnouti, že i k pořádkovému číslu $\omega^\omega$, $\omega^{\omega^\omega}$ a dálė.

Zakladatel theorie množin, G. Cantor, považoval dobré uspořádání každé množiny za možné, ba intuitivně za jisté. Při ohromné složitosti, jaké mohou nabýti množiny, se však ukázalo, že dobré uspořádní množiny není nikterak jasně patrné. Proto bylo zapotřebí důkazu, že tato možnost vždy je. Myšlenku důkazu si tu podáme, s výslovnou výhradou, že nejde o přesný důkaz, jenž je uveden v učebnicích theorie množin. Celá záležitost s problémem dobrého uspořádání je totiž neobyčejně zajímavá se stanoviska logického. Věta, kterou dokázal Zermelo, je existenčním důkazem pro možnost dobrého uspořádání. Prakticky však tuto možnost dobrého uspořádání vůbec neukazuje.

Mějme nějakou neprázdnou množinu $M$. Z této množiny vyjmeme jeden element, jejž označíme $x_0$. Ze zbývající podmnožiny $M_0$ (což je $M$, z níž byl odebrán $x_0$) lze opět vybrati element, označme jej $x_1$. Tímto dalším odebráním vznikla podmnožina $M_1$, se kterou můžeme provésti totéž. Vybrané elementy můžeme uspořádati, tak jak „historicky" byly vybrány, pořádkovou relací

$$x_0 \precsim x_1 \precsim x_2 \precsim x_3 \dots$$

Je-li množina konečná, vyčerpáme elementy dříve nebo později, a proces je samočinně u konce. Není-li konečná, pokračujeme bez omezení až k prvnímu transfinitnímu pořádkovému číslu $\omega$.

Příslušné $x$ označíme $x_\omega$. Tímtéž způsobem pokračujeme dále k elementům $x_{\omega+1}$, $x_{\omega+2}$, až konečně $x_{\omega\cdot 2}$. Je patrno, že zcela stejným způsobem dojdeme až k elementům $x_{\omega^2}$, potom $x_{\omega^\omega}$, $x_{\omega^{\omega^\omega}} \dots$ *) až jednou vyčerpáme původní $M$. Celý postup má řadu speciálních problémů (na příklad otázku značení a značek čísel transfinitních, jež vznikají při postupu k dalším elementům výběrovým), ale myšlenka jeho, kterou těmito zvláštními úvahami nemůžeme zatěžovati, je jasná.

*) Indexy tu naznačené odpovídají prvním pořádkovým číslům t. zv. druhé třídy číselné, na kterou ovšem postup není omezen.

Všimněme si, kde tu vlastně přichází k planosti axiom výběru. Je tu ve tvaru poněkud jiném, než na který jsme z předchozího byli upozorněni. Vždy, když ze zbývající podmnožiny vyjmeme jeden element, užíváme tohoto axiomu. Kdežto dříve bylo možno podle axiomu výběru vyjmouti z každého elementu transfinitní množiny, jenž sám byl množinou, jednoho representanta, je v tomto případě representant vybírán z každé podmnožiny, jež v procesu přijde na řadu. Lze dokázati, že obě formulace jsou rovnocenné. Historicky je tato druhá formulace, přicházející v Zermelově důkaze, starší.

Věta o dobrém upořádání každé množiny je bohužel větou ryze existenční. Neukáže ani stín možnosti, jak uspořádati dané množiny v konkrétním případě, není-li množina sama tak jednoduché struktury, že dobré uspořádání se samo nabízí. Takových případů je však velmi málo. Stačí poukázati na jeden zvláště nápadný případ, kdy věta Zermelova neposunula problém ani o malý kousek dopředu: je to problém dobrého uspořádání kontinua, na příklad všech reálných čísel kladných obsažených v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Intuicionističtí matematikové potom mají jisté právo poukazovati na prázdnost věty o dobrém uspořádání, když v daném případě nic nepomůže. Tak jak situace s větou o dobrém uspořádání vypadá, nelze více říci, než že tato věta není ve sporu s logickými větami a s axiomem nekonečna. Takový je rozdíl existence dobrého uspořádání, zaručený bezesporností od dobrého uspořádání, jež by bylo možno na předložené množině ukázati konstrukcí.

Povaha každého mimologického axiomu je taková, že nemusí býti zásadně přijat do základu soustavy. Lze se bez něj obejíti. Obejdeme-li se bez axiomu výběru, musíme obětovati velké části theorie množin a tím také mnoho z theorie reálných funkcí v analyse. Proto v moderních pracích z theorie množin bývá upozorňováno, které věty a důsledky lze činiti *bez* použití axiomu výběru, a které jsou zase na něm *podstatně* závislé.*)

---

*) Viz na př. W. Sierpiński, Hypothèse du continu (Warszava) str. 5 a 7.