Zborcené plochy

I. Úvod

In: Josef Kounovský (author): Zborcené plochy. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1947. pp. 5–12.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403173

I. ÚVOD

1. Vznik křivek a ploch. *Křivka* čili *křivá čára* vzniká jako geometrické místo spojitě se pohybujícího bodu; jest *rovinná*, leží-li v jedné rovině, nebo *prostorová*. Rovinná křivka leží celá v rovině libovolnými jejími třemi body určené.

Pohybem křivky vzniká *křivá plocha*. Křivka, která se pohybuje podle jistých zákonů, může měniti svůj tvar, nebo může býti neproměnnou. Každý bod křivky vytvořuje při jejím pohybu svou *dráhu* (*trajektorii*); i vznikají současně na ploše dvě soustavy křivek, které ji vyplňují: soustava křivek vzniklých pohybem křivky dané, jež se zove *tvořící křivkou* (*generatrix*) a soustava trajektorií jednotlivých bodů této křivky.

Je-li určeno, že pohybující se křivka protíná jisté křivky dané, zoveme je *řídícími křivkami* (*directrix*). Řídící křivky mohou býti nahrazeny *řídícími plochami*, kterých se tvořící křivka dotýká, nebo *řídícím bodem*, kterým prochází.

Ani tvořící ani řídící křivky nejsou vždy křivkami rovinnými, nýbrž mohou to býti křivky prostorové; ale nejčastěji se vytvoří plochy pomocí rovinných křivek.

Plocha může míti také t. zv. *části parasitní*. Uvažujeme-li na př. o ploše vytvořené pohybující se tečnou pevné kružnice, pak plocha daného kruhu je sice částí roviny, k níž vzniklá plocha patří, není však částí plochy. Vzniklá plocha je rovinou bez vnitřku kruhu.

Tím jsme již dospěli k pojmu *dotyku* křivek a ploch, z něhož je třeba uvésti základní vztahy.

Tečna křivky v daném *bodě dotyku* je spojnicí toho bodu s jejím bodem soumezným; má s křivkou společný *prvek*, jenž je určen oběma body bezprostředně po sobě na křivce následujícími a udává směr pohybu bodu při kinetickém jejím vytvoření. Dospíváme k tečně křivky v určitém jejím bodě M, určíme-li mezní polohu spojnice bodu M křivky s jiným bodem křivky, když tento druhý bod se blíží bodu M, t. j. když splyne s bodem dotykovým.

Duálně lze vytvořiti křivku souhrnem jejích tečen jako *křivku obalovou*; na pevné tečně obdržíme pak dotykový bod jako meznou polohu jejího průsečíku s proměnnou tečnou křivky, když při pohybu se stane její *tečnou soumeznou.*

Sečnou (*sekantou*) *prostorové křivky* se zove přímka, která ji protíná jen v jednom bodě. Přímka, která spojuje dva různé body prostorové křivky, jest její *bisekantou.*

Poznámka. Bisekanta, jejíž oba body na křivce splynou, je tečna křivky.

U prostorové křivky přistupuje ještě pojem tečné roviny. *Tečnou rovinou* prostorové křivky se zove každá rovina, jež prochází tečnou křivky; má tedy prostorová křivka v každém bodě celý rovinový svazek tečných rovin; tečna křivky v tom bodě je *osou* tohoto svazku.

Otáčíme-li tečnou rovinou prostorové křivky kolem tečny, kterou prochází, může se státi, že její průsečík, v kterém ještě protíná křivku, se blíží dotykovému bodu a že dokonce s ním splyne. Tato tečná rovina, která má s křivkou *tři splývající body společné*, jest t. zv. *oskulační rovina.*

Ve svých úvahách máme na mysli *obyčejný* čili *obecný bod* křivky, v němž existuje určitá tečna a určitá oskulační rovina, které jsme právě definovali. Zvláštní případy, t. zv. *singulární prvky* křivky, zatím pomíjíme.

Dotyk křivky s tečnou v obyčejném bodě se zove *dotyk prvního stupně*, nebo dotyk *dvoubodový*, dotyk křivky a oskulační roviny je dotyk s třemi společnými body (soumeznými) neboli t. zv. *dotyk trojbodový* čili *druhého stupně.*

Kolmice vztyčená k tečně nebo k tečné rovině křivky v dotykovém bodě jest její *normálou.* Souhrn normál prostorové křivky v daném bodě vyplňuje její *normální rovinu.* Normála ležící v oskulační rovině křivky jest *hlavní normála*, normála kolmá k oskulační rovině je *binormála křivky* v tom bodě. Tečna, hlavní normála a binormála tvoří pravoúhlý *hlavní trojhran*, nebo *průvodní trojhran* (Serretův) v tom bodě křivky, jeho stěnami jsou *oskulační rovina*, *normální rovina* a

t. zv. *rektifikační rovina,* jež je určena tečnou a binormálou a je tedy kolmá k hlavní normále.

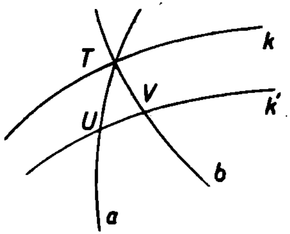
Úběžným bodem křivky jest její bod nekonečně vzdálený.

Asymptota jest mezní polohou tečny, když dotykový bod se vzdaluje po křivce do nekonečna. Je tedy *asymptota tečnou v úběžném bodě křivky.*

Tečna křivky sestrojené na křivé ploše jest tečnou plochy. Tečna je limitní polohou sečny plochy.

Tečny všech křivek bodem na ploše sestrojených leží v téže rovině t. zv. tečné rovině plochy.

Tečná rovina plochy v daném jejím bodě je určena tečnami sestrojenými v bodě ke dvěma křivkám, jež procházejí daným bodem na ploše a které se v bodě nedotýkají. Abychom si ozřejmili, že skutečně tečny všech křivek plochy v bodě leží v rovině, postupujme takto: Vytkněme bodem T na ploše dvě křivky pevné a a b a proměnnou křivku k jako křivku tvořící (obr. 1) a vyznačme ještě blízkou křivku k' té soustavy, která protíná křivky a a b v bodech U a V. Sečny TU, TV a UV leží v téže rovině, což platí pro různé polohy tvořící křivky k' po obou stranách křivky k; pro limitní polohu v křivce k obdržíme ze stran vytčeného trojúhelníku tři tečny, které leží tedy vskutku v jedné rovině, tečné rovině plochy.



Obr. 1.

Normálou plochy jest kolmice vztyčená na její tečnou rovinu v bodě dotykovém.

Z právě popsané úvahy o tečné rovině plyne, že můžeme do jisté míry křivou plochu nahraditi mnohostěnem o velkém počtu stěn velmi malých; vlastnosti mnohostěnů pak vhodně rozšiřujeme na křivé plochy.

2. Plochy přímkové. Plochy dělíme podle tvaru tvořících křivek i podle zákonů pohybu, za kterých se vytvořují.

Vzniká-li plocha pohybem přímky, zove se *přímkovou plochou*. Přímkové plochy dělíme na *plochy rozvinutelné* a *plochy zborcené*.

Prochází-li tvořící přímka plochy při svém pohybu stále pevným bodem, vzniká *plocha kuželová*, pevný bod jest jejím *vrcholem* čili *středem*; mimo vrchol je kuželová plocha určena *řídící křivkou*, kterou polohy tvořících *povrchových* (*plošných*) *přímek* protínají. Je-li vrchol plochy bodem úběžným a tedy tvořící přímky vzájemně rovnoběžné, jest *plocha válcovou*. Kuželové a válcové plochy se zovou též *paprskovými plochami*.

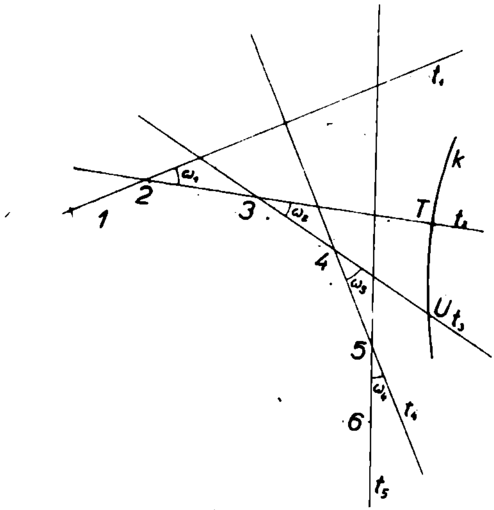
Kuželové a válcové plochy náleží do skupiny ploch rozvinutelných. *Plocha rozvinutelná* má tu vlastnost, že lze ji bez přerušení souvislosti, t. j. bez přeložení, protažení a přetržení rozprostříti do jedné roviny; při tom nahrazujeme plochu mnohostěnem, který lze rozvinouti do roviny.

Při základním vytvoření rozvinutelné plochy vzniká plocha tak, že sestrojujeme tečny prostorové křivky; je tedy rozvinutelná plocha *plochou tečen prostorové křivky* (tedy je dána souhrnem tečen křivky). Tuto plochu lze rozvinouti do jedné roviny, protože lze ukázati, že je možno jednu oskulační rovinu otočením kolem tečny v ní ležící převésti do oskulační roviny blízké.

V znázorňujícím obr. 2 jsou body křivky postupně označeny *1, 2, 3, 4*, ..., tečny $t_1, t_2, t_3, \ldots$ a oskulační roviny $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$; $t_1 \equiv 12$, $t_2 \equiv 23, \ldots, \omega_1 \equiv (t_1, t_2)$, $\omega_2 \equiv (t_2, t_3), \ldots$; na př. roviny ω_2 a ω_3 lze převésti do jedné roviny otočením kolem společné přímky t_3, atd.

Tímto postupem rozvine se spolu také prostorová křivka *1234*... tak, že délka křivky se zachová, protože prvky křivky *12, 23, 34*, ... se rozvinutím nemění.

Chceme-li sestrojiti v libovolném bodě rozvinutelné plochy tečnou rovinu, na př. v bodě T na *přímce* (též *povrchové přímce*) t_2 (obr. 2), sestrojíme tímto bodem na ploše křivku k, jež protíná celou soustavu plošných přímek; druhou křivkou je přímka t_2 sama. Tečná rovina je stanovena tečnami dvou křivek v dotykovém bodě. Jednu tečnu zastupuje přímka t_2, druhou tečnu sestrojíme ku křivce k; je přibližně určena bodem T a blízkým bodem U na blízké povrchové přímce t_3; tato tečna leží v oskulační rovině $\omega_2 \equiv (t_2, t_3)$, která jest tedy společnou tečnou rovinou v bodě T přímky t_2. Tedy:



Obr. 2.

Oskulační roviny prostorové křivky jsou tečnými rovinami její rozvinutelné plochy a dotýkají se plochy ve všech bodech příslušné tečny prostorové křivky.

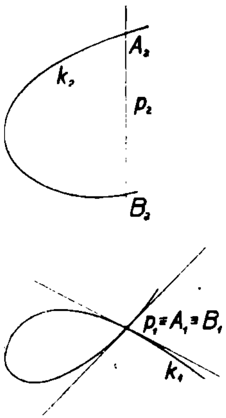
Poznámka. Rozvinutelná plocha jest také *obalovou plochou* svých tečných rovin; tato věta vyjadřuje charakteristickou vlastnost obalových ploch, jež vznikají pohybem roviny.

Na rozdíl od plochy rozvinutelné je *zborcená plocha vytvořena takovým pohybem přímky v prostoru, při němž každé dvě tvořící přímky (mimo konečný počet t. zv. singulárních přímek)* *jsou vzájemně mimoběžné.* Plošný prvek, který mezi dvěma blízkými přímkami leží, není částí roviny, je zborcený, nelze ho převésti do roviny. Také tečné roviny v různých bodech povrchové přímky jsou různé, bodové řadě na tvořící přímce plochy je přiřazen rovinový svazek tečných rovin, jak uvidíme.

Prostorová křivka a její rozvinutelná plocha tečen mají svou *řídící kuželovou plochu*, kterou obdržíme, sestrojíme-li libovolným bodem v prostoru rovnoběžky k tečnám prostorové křivky. Blízkým tečnám křivky jsou přiřaděny blízké povrchové přímky řídící kuželové plochy a lze ukázati, že oskulační roviny křivky jsou rovnoběžny s tečnými rovinami řídící kuželové plochy.

Obdobně sestrojujeme řídící kuželovou plochu plochy zborcené, její povrchové přímky jsou rovnoběžné s tvořícími přímkami zborcené plochy. Tato kuželová plocha vlastně promítá úběžnou křivku na ploše zborcené a odtud její, použití při konstrukcích.

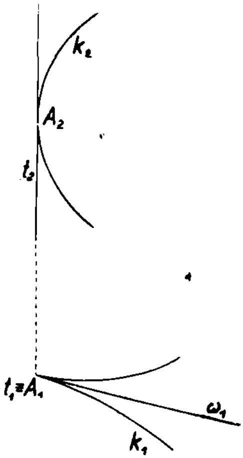
3. Průměty prostorových křivek. Obrysy ploch. Promítáním (rovnoběžným i středovým) rovinné křivky, která neleží v rovině promítací, se povaha všech bodů zachová. Obecný (obyčejný) bod (čl. 1) zůstává obecným bodem a *zvláštní* (*singulární*) *body* jako *bod dvojný*, *bod vratu a bod obratu*, podržují také svůj charakter.



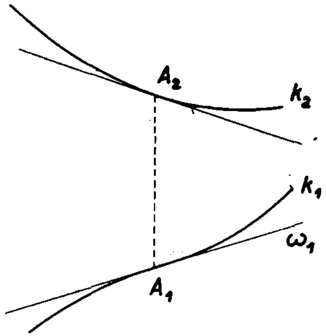
Obr. 3.

U prostorové křivky se promítá dvojný bod jako takový; můžeme však také dospěti k dvojnému bodu průmětu, leží-li střed promítání na bisekantě křivky. V obr. 3 znázorněn nárys k_2 a půdorys k_1 prostorové křivky a vytčena její bisekanta $p \equiv AB$, která je půdorysně promítací. *Půdorys bisekanty je dvojným bodem půdorysu křivky.* Dvojným bodem procházejí dva oblouky křivky; obě tečny těchto oblouků v bodě jsou tečny křivky v tom bodě; každá má v tom bodě tři body společné s křivkou.

Leží-li střed promítání na tečně t křivky k v bodě A (obr. 4), je tečna promítací přímkou (v obr. speciálně kolmá k půdorysně) a v průmětu $t_1 \equiv A_1$ má křivka k_1 *bod vratu*. Bod A zastupuje dva body společné s křivkou, oskulační rovina ω je



Obr. 4.



Obr. 5.

rovněž promítací a průmět ω_1 je jedinou tečnou v bodě vratu A_1. Tedy: *Promítací tečna prostorové křivky dává v průmětu křivky jeho bod vratu.*

Leží-li střed promítání v oskulační rovině bodu A, která je promítací (obr. 5), pak v průmětu leží tři splývající body křivky k_1 na průmětu ω_1 oskulační roviny; to znamená, že ω_1 je tečnou obratu bodu A_1, který je *bodem obratu* neboli *inflexním* bodem průmětu k_1.

Tečnu prostorové křivky určené dvěma průměty v jejím obecném bodě stanovíme, sestrojíme-li v sdružených obrazech bodu tečny k příslušným obrazům křivky; tím dostaneme sdružené obrazy hledané tečny.

Oskulační rovinu prostorové křivky v jejím bodě T sestrojíme jako tečnou rovinu podél tečny t toho bodu ke kuželové ploše, která promítá křivku z libovolného bodu V na tečně. (Za vrchol kuželové plochy lze také zvoliti bod T.)

Při sestrojování průmětů ploch zobrazujeme soustavy křivek na ploše a *zdánlivý obrys plochy*. Sestrojíme středem promítání nebo ve směru promítání tečny k ploše, čímž obdržíme *dotykovou kuželovou* nebo *válcovou plochu promítací*. Dotyková křivka s danou plochou je *skutečným obrysem* a stopa promítací dotykové plochy, tedy průmět skutečného obrysu, je *obrysem zdánlivým*. Skutečný obrys je také geometrickým místem dotykových bodů tečných promítacích rovin.

Je-li na ploše křivka, která přechází v průsečném bodě se skutečným obrysem z viditelné části povrchu plochy k části neviditelné, pak v průmětu tohoto průsečného bodu dotýká se průmět té křivky zdánlivého obrysu. Má-li uvažovaná křivka na ploše v průsečíku se skutečným obrysem za tečnu promítací paprsek, pak ovšem podle obr. 4 má její průmět v průmětu toho průsečíku bod vratu na zdánlivém obrysu plochy, tečna v něm je stopou oskulační roviny křivky a nemusí býti tečnou obrysovou. *Zdánlivý obrys plochy obaluje průměty křivek, které leží na ploše a protínají její skutečný obrys.*

Je-li uvažovaná plocha zborcená, jsou podle této úvahy průměty tvořících přímek tečnami zdánlivého obrysu, který obalují. U rozvinutelné plochy to obecně neplatí, každá tečná rovina není rovinou promítací; je-li promítací, pak průmět celé přímky náleží obrysu.

Obměnou uplatňují se tyto úvahy v theorii osvětlení ploch.