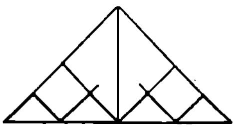
V. GEOMETRICKÁ SOFISMATA A PARADOXA

I o těchto záludnostech platí, co bylo řečeno o podobných problémech v Aritmetických hrách a zábavách (odst. 14). Jsou založena na neúplném nebo nesprávném použití správných vět, nesprávnost „důkazu“ bývá ukrývána buď zdlouhavostí postupu nebo různými zbytečnými oklikami. Celkem však lze říci, že geometrická sofismata jsou nesnadnější než aritmetická, dále že nelze přesně rozlišiti tyto oba druhy od sebe.

a) Bod se pohybuje a m vpřed, potom a m vzad, a m vpřed, a m vzad atd. Kde jest po takových n pohybech? Je-li n sudé, jest ve svém východišti, je-li n liché, jest na konečné stanici své dráhy. Proč nelze uvažovati takto: Celková dráha jest dána výrazem $a - a + a - a + a - - a + \ldots = a - (a - a + a - a + \ldots)$. Roste-li n ustavičně a označíme-li levou stranu této rovnice x, jest $x = a - - x$ a odsud $x = \frac{1}{2}a$. Vysvětlení jest nasnadě: Abychom mohli nějakou veličinu označiti algebraickým výrazem, musí příslušná hodnota skutečně existovati a to určitě, jednoznačně, a tomu v našem případě tak není, jelikož levá strana této rovnice nabývá jednou hodnoty 0, po druhé a. Této úloze podobná jest tato: Karel a Pavel jsou dva nerozluční přátelé; na vycházku do parků, z nichž jest jeden po levé a druhý po pravé straně řeky tekoucí jejich bydlištěm, chodí jen výlučně spolu. Jednou počítají, kolikráte přešli již most: zjistí, že číslo udávající přechod přes most jest u jednoho sudé, u druhého liché; jak jest to možno, když jindy než na vzájemnou návštěvu nechodí přes most? Jednoduše: Přátelé nebydlí na téže straně řeky, ten, jenž napočetl lichý počet přechodů, jest právě návštěvou u druhého.

b) Nad danou úsečkou o délce a jako nad přeponou sestrojme rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, součet jeho ramen jest $a\sqrt{2}$. Rozdělme tuto úsečku na dvě stejné části a nad každou z nich opět sestrojme rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník; součet ramen těchto dvou trojúhelníků jest $2\,\frac{1}{2}a\sqrt{2} = a\sqrt{2}$. (Obr. 39.)



Obr. 39.

K témuž výsledku dojdeme, rozdělíme-li úsečku na 3, 4, ... n dílců a konstrukci opakujeme. A nyní pozor, chci stylisací čtenáře ošáliti. Necháme-li n ustavičně vzrůstati, lomená čára určená rameny pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků, stále majíc délku $a\sqrt{2}$, posléze splyne s úsečkou, o níž jsme předpokládali, že má délku a. Jest tedy $a\sqrt{2} = a$, čili $\sqrt{2} = 1$, $2 = 1$ atd. Chyba ve výkladě jest tato: Stále uvažujeme délky různých lomených čar a to stejně velké $a\sqrt{2}$, pojednou však opustíme obsah svých úvah a tážeme se, jaký tvar má mezní útvar a jakou polohu zaujímá. Mezní útvar není úsečkou, nýbrž křivkou (lépe řečeno zase lomenou čarou), jež v každém i sebe menším intervalu má jistý počet oscilací. Takovýchto paradox lze vymysleti více; jak se na př. naše úvaha změní, nahradíme-li ramena pravoúhlého trojúhelníka polokružnicí? Rozdělte čtverec na n-kráte n menších stejných čtverců a do každého vepište kružnici o poloměru $\frac{a}{2n}$; součet ploch všech těchto kružnic pro každé n jest roven $\frac{1}{4}\pi a^2$. Zvětšuje-li se n ustavičně, přejdou kružnice v pouhé body vyplňující plochu čtverce daného, jak by se zdálo při povrchní úvaze. Jak zní toto paradoxon, zřídíme-li nad každým kroužkem o poloměru $\frac{a}{2n}$ polokouli a hledáme-li součet povrchů těchto polokoulí? V prostoru: Rozdělte krychli na n^3 menších krychliček a do každé vepište kouli o poloměru $\frac{a}{2n}$; který jest obsah těchto malých koulí, roste-li n nad každou mez? Přejdou v obsah krychle?

c) Definujme těžiště bez ohledu na jeho mechanický význam jako průsečík těžnic, jež definujeme jako spojnice vrcholů daného trojúhelníka s půlicím bodem protější strany. K vůli jednoduchosti uvažujme trojúhelník rovnoramenný o vrcholech $(0; 0)$, $(p; q_n)$, $(p; -q_n)$. Rovnice těžnic pak jsou

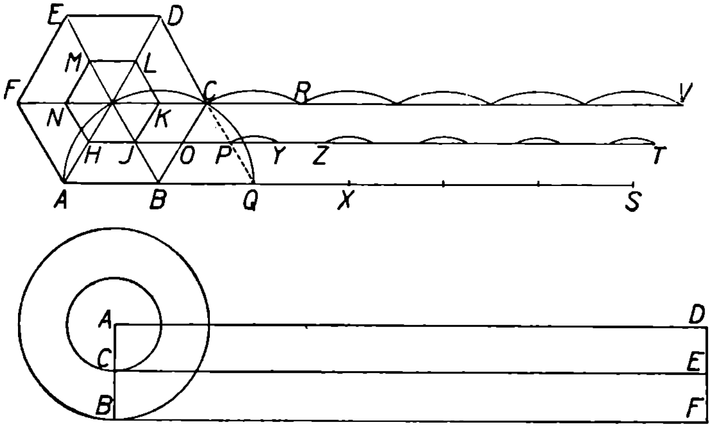
$$3q_nx - py - 2pq_n = 0, \quad y = 0, \quad 3q_nx + py - 2pq_n = 0$$

a protínají se v bodě $(\frac{1}{3}2p; 0)$, jehož souřadnice vůbec nezávisí na q_n. Nechť nyní q_n kladnými hodnotami se blíží k nule, jak jest jen možno; těžiště trojúhelníků stále užších a užších jsou v témž bodě; posléze trojúhelníky přejdou ve výšku společnou všem trojúhelníkům, jejíž těžiště — jelikož jest to úsečka — jest právě v polovině, kdežto tato úvaha umisťuje těžiště do dvou třetin výšky, počítaje od bodu $(0; 0)$. Jak vysvětlíme tento rozpor? Velmi jednoduše: původní konstrukce těžiště pozbývá významu pro $q_n = 0$ a rovněž analytický výpočet nelze v tomto případě provésti; řešíme-li totiž společně rovnice prvních dvou těžnic, obdržíme dosazením z druhé do první $3q_nx - 2pq_n = 0$ a tuto rovnici nelze za předpokladu $q_n = 0$ krátiti.

Ale i jednoduchou úvahou logickou lze tento spor vysvětliti. Pojem jest určen svými znaky, a jedním ze znaků jest i forma, jakou jsou znaky spojeny. Z pojmů „cesta“ a „město“ lze s pomocí předložek „na“ a „do“, které představují formu spojení obou pojmů, složiti dva pojmy: „cesta do města“ a „město na cestě“. Tyto pojmy jistě nejsou ekvivalentní právě tak, jako jimi nemusí býti (a v našem případě také skutečně nejsou) „mezní poloha těžiště“ a „těžiště mezní polohy“.

Při mechanickém pojetí těžiště jest věc ještě složitější: zmenšuje-li se ustavičně základna trojúhelníka a tím i jeho plocha, jest nutno říci, co se děje s hmotou původního trojúhelníka hmotného, zdaž a jak se koncentruje či dokonce nemizí-li zároveň s plochou trojúhelníka. Jinak nemá úloha vůbec smyslu. Velmi jednoduchý jest předpoklad, kdy se zmenšující se plochou hmota se v úsečkách rovnoběžných s půdicí oběma směry koncentruje do bodů ležících na výšce. Snadná úvaha vede k tomu, že těžiště takto vzniklé hmotné úsečky s hmotou rostoucí přímo úměrně se vzdáleností od bodu (0; 0) jest v bodě ($\frac{1}{3}2p$; 0).

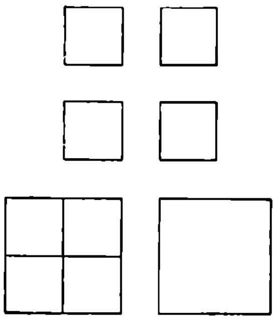
d) Nejstarším z geometrických sofismat (vedle *Achila* závodícího se želvou, viz Ar. hry a zábavy, odst 14) jest rota Aristotelis, kolo Aristotelovo. Na své správné rozřešení čekalo dva tisíce let a podal je až *Galileo Galilei* hned v prvních kapitolách svých proslulých Discorsi (Rozmluvy), v nichž *Salviati*, *Sagredo* a *Simplicio* rozmlouvají o různých mechanických otázkách (německý překlad viz *Ostwald's Klassiker*, XI., str. 20 a n.). *Aristoteles* uvažuje dva kruhy pevně spojené o poloměrech r, R, $r < R$. Když větší kruh se odvalí po přímce až se jí znovu dotkne tímtéž bodem, vzdálil se tento bod od svého původního místa o $2\pi R$. Menší kruh s ním pevně spojený se odvalil rovněž jen jednou, vykonal



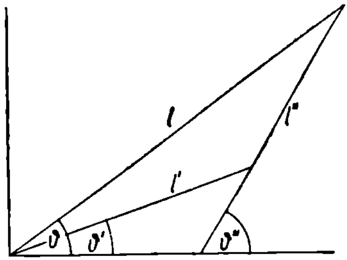
Obr. 40.

tedy dráhu $2\pi r$. Poněvadž oba body jsou opět na téže kolmici k přímce, musí býti $2\pi r = 2\pi R$, čili $r = R$, to jest: všechny kruhy mají týž poloměr. (Obr. 40.)

Galileo Galilei uvažuje nejprve dva pevně spojené šestiúhelníky; otočí-li se větší z nich kol bodu B, až strana $\overline{BC}$ dolehne na danou přímku, vykonává bod J jistou kruhovou dráhu a to se opakuje při dalších otočeních velkého šestiúhelníka. Vrcholy malého šestiúhelníka se tedy též *posunují*, úvaha zůstává v platnosti i pro osmiúhelník, desítiúhelník ... a v mezném případě i pro kruh. Odvaluje-li se tedy větší kruh po dané přímce, tu menší kruh kromě odvalování vykonává ještě další pohyb, posunuje se totiž. Pokuste se o vysvětlení, když za základní pohyb volíte skutečné odvalování menšího kruhu.



Obr. 41.



Obr. 42.

e) Aby číslo udávalo, zdaž počet předmětů jest větší nebo menší než jiný, jest nutno, aby počet uvažovaných předmětů byl konečný. Jinak tato otázka nemá smyslu; nelze říci, že by na úsečce o délce 1 cm bylo méně bodů než jest na celém rovníku; v jistém slova smyslu lze říci, že bodů tu i tam jest stejně; každému bodu na rovníku lze přiřaditi bod na úsečce a naopak a to jednoznačně.

Rovněž nelze porovnávati co do velikosti počet bodů na úsečce a v uzavřené ploše, na př. ve čtverci nebo ve dvou čtvercích. Zdánlivé rozpaky z toho plynoucí demonstroval *Bolzano* na tomto příkladě. Čtyři stejně veliké čtverce o straně a mají o body, ležící na úsečce $4a$, více než čtverec o straně $2a$, ač obsahy těchto útvarů jsou stejné. (Obr. 41.)

f) Dle obr. 42 (str. 51) platí o průmětech úseček l, l', l'':

$$l \sin \vartheta = l' \sin \vartheta' + l'' \sin \vartheta'', \quad l \cos \vartheta = l' \cos \vartheta' + l'' \cos \vartheta''$$

a odtud dělením a další úpravou:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{l' \sin \vartheta' + l'' \sin \vartheta''}{l' \cos \vartheta' + l'' \cos \vartheta''} = \frac{n \sin \vartheta' + \sin \vartheta''}{n \cos \vartheta' + \cos \vartheta''},$$

kde $n = l' : l''$ může nabývati všech hodnot od nuly do nekonečna. Klademe-li $n = 0$, jest $\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \vartheta''$, volíme-li $n = \infty$, jest $\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \vartheta'$, tedy $\vartheta = \vartheta' = \vartheta''$. Vysvětlení jest nasnadě: V prvním případě jest vlastně $l' = 0$, úhel ϑ' nemá smyslu a tím ani soustava dvou rovnic, v druhém pak $l'' = 0$ a nulou nelze děliti.

g) Dosti zavilé jest toto sofisma: Oblouk $\overset{\frown}{AB}$ jest třikráte tak velký jako oblouk $\overset{\frown}{A'B'}$, poněvadž jeho poloměr jest třikráte větší. *Proto* jest oblouk $\overset{\frown}{A'B'}$ třetina oblouku, čili provedli jsme velmi jednoduše dávno a marně hledanou trisekci (třetění) libovolného úhlu. Abychom mohli porovnávati délku oblouku, musí míti stejné poloměry. Úhel $AOC = s$, $\overline{AC} = \overline{A'B'}$ vypočteme takto: Volme si $\alpha = 60°$; pak rovnice dvou kružnic určujících bod C jsou $x^2 + y^2 = 9a^2$, $(x - 3a)^2 + y^2 = a^2$, souřadnice bodu C jsou $(\frac{1}{6} 17a;\ \frac{1}{6} a\sqrt{35})$, takže $\operatorname{tg} s = \frac{\sqrt{35}}{17}$, $s = 19°\,10'$ místo $20°$. (Obr. 43.)

h) Způsobem velmi jednoduchým lze určiti obsah plochy uzavřené křivkou $y = \sin^2 x$, osou x a přímkou $x = \frac{1}{2}\pi$ (obr. 44).

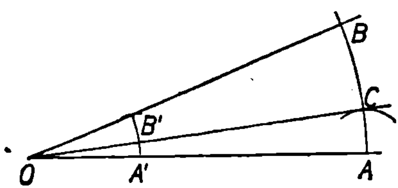
Rozdělme interval $(0; \frac{1}{2}\pi)$ na $(2n + 1)$ stejných dílců; šířka každého z nich jest $\frac{\pi}{2(2n+1)}$, výšky obdélníčků vepsaných (též proužků zvaných) jsou

$$\sin^2 \frac{0 . \pi}{2(2n+1)}, \ \sin^2 \frac{1 . \pi}{2(2n+1)}, \dots \sin^2 \frac{2n\pi}{2(2n+1)},$$

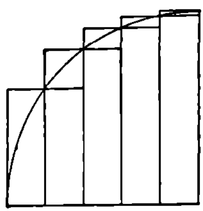
a součet obsahů těchto proužků jest

$$S_1 = \frac{\pi}{2(2n+1)} \left(\sin^2 \frac{\pi}{2(2n+1)} + \sin^2 \frac{2\pi}{2(2n+1)} + \dots + \right.$$
$$\left. + \sin^2 \frac{2n-1}{2(2n+1)} . \pi + \sin^2 \frac{2n\pi}{2(2n+1)} \right).$$

Poněvadž sčítanci stejně od konců vzdálení dávají součet 1, jest $S_1 = \frac{\pi n}{2(2n+1)} = \frac{1}{4}\pi - \frac{\pi}{4(2n+1)}$. Součet proužků opsaných jest pak o poslední proužek o obsahu $\frac{\pi}{2(2n+1)}$ větší, jest tedy $S_2 = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\frac{\pi}{2n+1}$. Roste-li n ustavičně, blíží se S_1 i S_2 a tím i hledaný obsah $\frac{1}{4}\pi$. Jest tedy tento obsah aritmetickým středem obou přibližných hodnot, avšak nelze to říci o jednotlivých opsaných a vepsaných proužcích a proužku omezeném obloukem křivky; který útvar má tuto vlastnost?

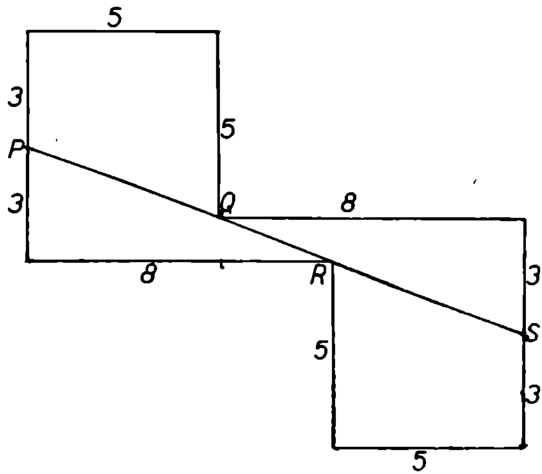


Obr. 43.



Obr. 44.

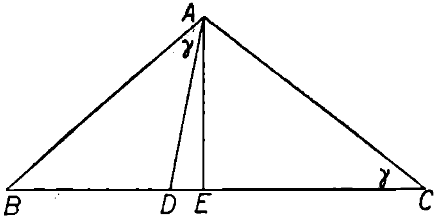
i) V Aritm. hrách a zábavách (odst. 5) byl podán „důkaz", že $64 = 65$. Z týchž ústřižků jako na uvedeném místě lze složit obrazec 45 mající pouze 63 plošných jednotek. Zjištěte, zdaž body *PQRS* jsou na přímce, užijte postupu



Obr. 45.

jako při důkazu svrchu uvedeném. Sestrojte pomocí jiných *Fibonacciho* čísel podobné obrazce.

k) V nerovnostranném trojúhelníku ABC budiž α největší úhel. Úhel γ nanesme ve vrcholu A, takže jest $BAD = \gamma$. Trojúhelníky ABC a DBA mají všechny úhly mezi sebou rovny, proto jsou si podobny a jejich obsahy se mají k sobě jako čtverce příslušných stran: $\triangle ABC : \triangle DBA = \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2$. Avšak oba trojúhelníky mají touž výšku, proto jsou jejich obsahy v poměru základen: $\triangle ABC : \triangle DBA = \overline{BC} : \overline{BD}$. Jest tedy $\overline{AC}^2 : \overline{BC} = \overline{AD}^2 : \overline{BD}$. Známou větu kosinovou lze říci též takto: Čtverec strany ležící proti ostrému úhlu jest roven součtu čtverců druhých dvou stran zmenšenému o dvojnásobný obsah obdélníka vytvořeného z jedné těchto stran a z průmětu druhé strany na tuto stranu.



Obr. 46.

Lze tedy psáti:

$$\frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC} . \overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2\overline{BD} . \overline{BE}}{\overline{BD}}.$$

Proveďme naznačené dělení, — $2\overline{BE}$ se ruší a máme

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}} + \overline{BC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BD}} + \overline{BD};$$

převedeme-li $\overline{BC}$ a $\overline{BD}$ na druhou stranu, je po další úpravě:

$$\frac{\overline{AB}^2 - \overline{BC} . \overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}^2 - \overline{BC} . \overline{BD}}{\overline{BD}};$$

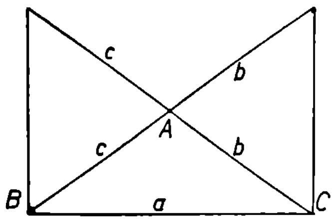
čitatelé těchto zlomků jsou rovny, proto se rovnají i jmenovatelé: $\overline{BC} = \overline{BD}$, to jest úsečka se rovná své části. Vše jest v pořádku, až na poslední výkon: $\overline{AB}^2 - \overline{BC} . \overline{BD}$ jest rovno nule (proč?) a nulou nelze krátiti.

l) V obecném trojúhelníku ABC s úhly α, β, γ prodlužme strany b, c za vrchol A dle obrázku 47, pak jest dle sinové věty

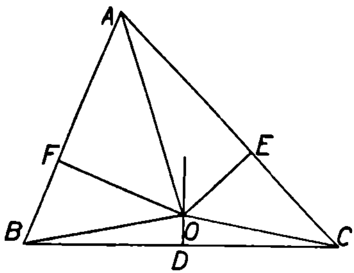
$$\sin(\beta + \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{b + c}{a} \sin \tfrac{1}{2}\alpha, \quad \sin(\gamma + \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{b + c}{a} \sin \tfrac{1}{2}\alpha,$$

takže $\sin(\beta + \frac{1}{2}\alpha) = \sin(\gamma + \frac{1}{2}\alpha)$ a dále: $\beta = \gamma$. Jest tedy každý trojúhelník rovnoramenný, a poněvadž podobnou konstrukci a úvahu můžeme provésti i u vrcholu B nebo C, jest i $\alpha = \beta = \gamma$ čili každý trojúhelník jest rovnostranný. Kde je chyba?

Správně jest: Platí-li $\sin \varphi = \sin \psi$, nemusí býti $\varphi = \psi$, může též býti $\varphi = \pi - \psi$. Skutečně v našem případě jest $\beta + \frac{1}{2}\alpha = \pi - (\gamma + \frac{1}{2}\alpha)$.

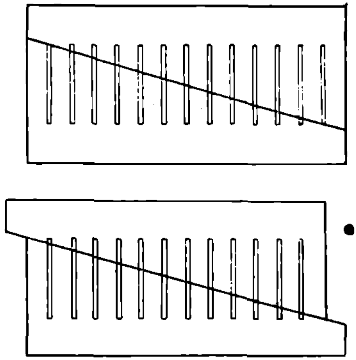


Obr. 47.



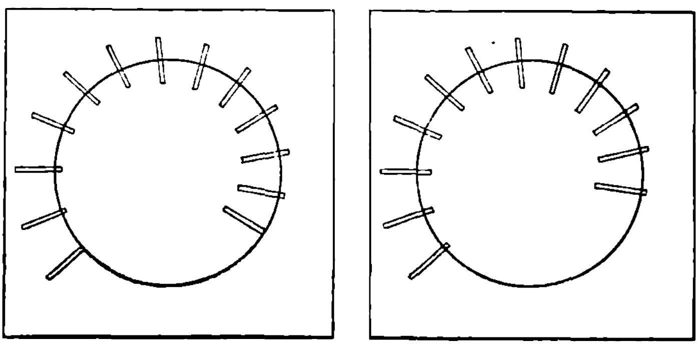
Obr. 48.

m) Pro začátečníka svůdnou, ale také i velmi nebezpečnou dokazovací methodou jest názor, to jest opírati se při provádění důkazu o vlastnosti a vztahy narýsovaného obrazce. Větu vyřčenou v odstavci předchozím dokážeme nyní planimetricky (viz obr. 48), kdež $\overline{AO}$ jest osa úhlu při A, $\overline{DO}$ pak osa strany $\overline{BC}$, obě se protínají v bodě O, jejž spojíme s vrcholy A, B, C a s něhož spustíme kolmice na strany $\overline{AB}$ a $\overline{AC}$. Trojúhelníky — jak snadno ukážeme dle základních vět o shodnosti trojúhelníků — AFO a AEO, dále trojúhelníky ODB a ODC jsou shodny, z této shodnosti plyne $\overline{OF} = \overline{OE}$ a $\overline{OB} = \overline{OC}$, proto jsou shodné i trojúhelníky OBF a OCE, skutečně úhel pravý leží proti větší z uvažovaných stran. Z těchto shodných trojúhelníků dále plyne $\overline{AF} = \overline{AE}$ a $\overline{FB} = \overline{EC}$ a sečtením těchto rovnic $\overline{AB} = \overline{AC}$, t. j. tento trojúhelník jest rovnoramenný a opakujeme-li celý postup pro vrchol *B*, ukážeme, že jest tento trojúhelník a každý jiný rovnostranný. Nechť čtenář si pečlivě narýsuje předepsané výkony a k svému podivení zjistí, že bod *O* při různostranném trojúhelníku jest *mimo* plochu trojúhelníka. Nesčetněkráte názor vedl k nesprávným důsledkům; před sedmdesáti l⸗ty ohromil *Weierstrass* své současníky správným důkazem, že existují křivky, jež nemají nikde tečny; ovšem byla to geometrická interpretace toho že spojitá funkce nemusí míti buď v nekonečně mnoha bodech nebo dokonce v žádném bodě derivaci; poznatek tento učinil již několik desítek let před *Weierstrassem* pražský rodák *Bernard Bolzano*.



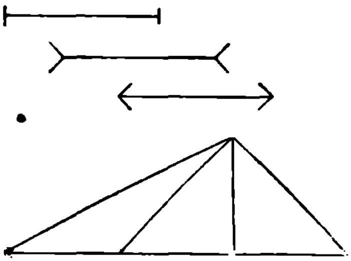
Obr. 49.

n) Jedním z nejkrásnějších paradox jest zmizení úsečky před zraky čtenářovými. Narýsujte si přesně dle obr. 49



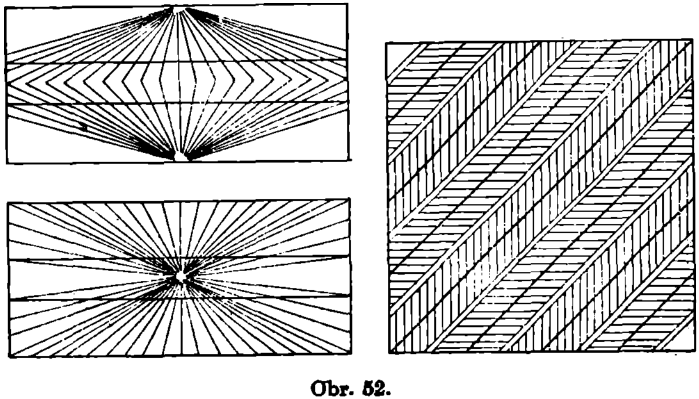
Obr. 50.

třináct stejných úseček a rozstřihněte papír s tímto nákresem přesně dle udané úsečky. Posunete-li oběma částmi nákresu dle obr. 49, obdržíte místo třinácti úseček pouze dvanáct. Vysvětlení jest nasnadě; délka každé nové úsečky jest třináct dvanáctin úsečky původní. Tyto úsečky lze uspořádati do kruhu (obr. 50), a toto uspořádání jest základem japonských a čínských obrázků třinácti osob, z nichž jedna při pootočení zmizí a při zpětném pohybu se opět objeví.



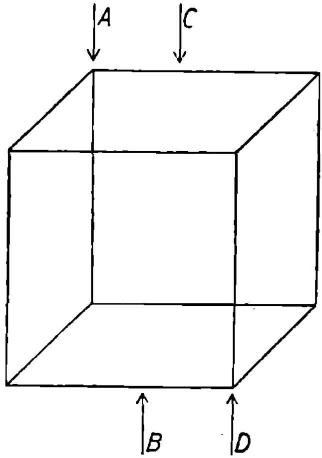
Obr. 51.

o) Již předchozím příkladem jsme se octli na hranicích optických klamů, které mylně bývají přidružovány ke geometrickým hrám, třeba užívají četných geometrických prvků. Avšak při vysvětlení těchto klamů jest nutno znáti též fysiologii oka; i omezíme se jen na ukázku několika nejjednodušších příkladů. Která z úseček a základen tří troj-



Obr. 52.

úhelníků jest nejdelší, která nejkratší? (Všechny úsečky jsou stejně velké). V obr. 52 soustavy rovnoběžek jeví se jako nerovnoběžky nebo dokonce jako křivky, a to vlivem protínajících je paprsků nebo úseček. V obr. 53 lze pozorovati dvě různé krychle, dle toho, ve kterém směru určeném šipkami hledíme.



Obr. 53.