Počet pravděpodobnosti

3. Geometrické pravděpodobnosti

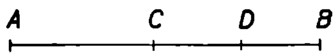
In: Bohuslav Hostinský (author): Počet pravděpodobnosti. První část. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1950. pp. 63–105.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403260

KAPITOLA TŘETÍ

GEOMETRICKÉ PRAVDĚPODOBNOSTI

26. Definice geometrických pravděpodobností v nejjednodušších úlohách. a) Je dána úsečka AB a volíme bod M někde uvnitř AB nebo na kraji. Množství všech případů, jež zde mohou nastati (t. j. množství všech bodů ležících na úsečce AB), měříme délkou $\overline{AB}$ úsečky AB a pravíme, že *množství všech bodů ležících na dané úsečce má za míru délku této úsečky.* Zvolme nyní na AB dva body C a D. (Obr. 6.) Množství



Obr. 6.

všech bodů ležících na CD má za míru délku úsečky CD. *Pravděpodobnost p, že bod M volený na úsečce AB leží zároveň na její části CD, určujeme vzorcem*

$$p = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}. \tag{1}$$

Definice (1) je zcela obdobná definici pravděpodobnosti podané v odst. 1. Na místo čísla n, které udávalo počet možných případů, nastupuje zde míra $\overline{AB}$ bodového množství na úsečce AB, a na místo čísla m, které udávalo počet příznivých případů, nastupuje míra $\overline{CD}$ bodového množství, jehož body odpovídají „příznivým případům".

Pravděpodobnost (1) se nemění, pošine-li se úsečka CD beze změny délky uvnitř AB. Jsou-li tedy C_1D_1 a C_2D_2 dvě polohy úsečky CD uvnitř AB, považujeme případy, že bod M

volený na AB leží buď na C_1D_1, nebo na C_2D_2 za stejně pravděpodobné. Tento předpoklad odpovídá předpokladům o případech stejně pravděpodobných, o nichž jsme jednali v odst. 1; viz poznámku na konci odst. 1.

Náš předpoklad lze vyjádřiti též tak, že hustota pravděpodobnosti je konstantní; viz odst. 31.

Je-li $\overline{AB}$ délka oblouku AB nějaké křivky a $\overline{CD}$ délka oblouku CD, jenž je částí předešlého, udává (1) zase pravděpodobnost, že bod volený na AB leží zároveň na CD.

b) Podle vzoru (1) tvoří se tyto další definice.

Veďme bodem O dva polopaprsky svírající dutý úhel α. Za míru množství všech polopaprsků o vrcholu O a probíhajících uvnitř úhlu α bereme velikost α toho úhlu. Množství všech polopaprsků vedených bodem O má tedy míru 2π.

Pravděpodobnost p, že polopaprsek vedený v rovině daným bodem O leží v daném úhlu α o vrcholu O, je dána vzorcem

$$p = \frac{\alpha}{2\pi}. \tag{2}$$

Za míru bodového množství, které jest utvořeno všemi body nějakého oboru A v rovině, považujeme jeho *plošný obsah* P. Je-li A_1 část oboru A a P_1 její plošný obsah, je pravděpodobnost p, že bod M, volený v A, leží zároveň v A_1, dána vzorcem

$$p = \frac{P_1}{P}. \tag{3}$$

Tento vzorec by platil také pro křivoplochý obor A volený na libovolné ploše a pro jeho část A_1; P a P_1 by byly příslušné plošné obsahy.

Za míru bodového množství, které jest utvořeno všemi body nějakého trojrozměrného oboru A, považujeme jeho *objem* V. Je-li A_1 část oboru A a V_1 její objem, je p pravděpodobnost, že bod M volený uvnitř A leží zároveň v A_1, dána vzorcem

$$p = \frac{V_1}{V}. \tag{4}$$

27. Přímky v rovině. *Přímka v rovině* budiž určena souřadnicemi q a φ tak, že v bodových pravoúhlých souřadnicích x, y má rovnici

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - q = 0;$$

φ jest úhel, který svírá kolmice spuštěná na přímku z počátku souřadnic O s osou Ox, a q vzdálenost přímky od O ($0 \leqq \varphi < 2\pi$; $q \geqq 0$). V dalším se budeme zabývati dvojrozměrnými množstvími přímek; souřadnice q a φ přímky, jež je částí takového množství, jsou spojité a vzájemně nezávislé proměnné.*) Takové množství může býti na př. utvořeno všemi přímkami, jichž souřadnice q, φ vyhovují nerovnostem

$$a \leqq F(q, \varphi) \leqq l,$$

kde a a l jsou konstanty a $F(q, \varphi)$ daná funkce dvou proměnných. Za míru dvojrozměrného přímkového množství M bereme integrál

$$\iint\limits_M dq\, d\varphi, \tag{1}$$

vztažený ke všem přímkám množství M. *Pravděpodobnost, že přímka obsažená v M je zároveň obsažena v části M_1 množství M, je dána vzorcem*

$$\iint\limits_{M_1} dq\, d\varphi : \iint\limits_M dq\, d\varphi. \tag{2}$$

Tak na př. všechny přímky protínající kružnici K opsanou poloměrem R kolem počátku souřadnic jsou stanoveny

*) Kdyby mezi q a φ byl určitý analytický vztah, takže každé hodnotě φ by odpovídala určitá hodnota q, bylo by přímkové množství jednorozměrné (obecně byly by ty přímky tečnami rovinné křivky).

nerovnostmi $0 \leqq q \leqq R$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$; míra množství utvořeného těmito přímkami je

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R \mathrm{d}q\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi R.$$

Je-li K_1 kružnice o poloměru R_1 soustředná s K, $R_1 < R$, je míra přímkového množství utvořeného přímkami protínajícími K_1 rovna $2\pi R_1$. Pravděpodobnost, že přímka protínající K protíná zároveň K_1, je rovna $2\pi R_1 : 2\pi R$ nebo $R_1 : R$.

28. Úhrnná a složená pravděpodobnost geometrická. a) Předpokládáme, že pravděpodobnost případu, kdy volíme bod na úsečce, počítá se podle vzorce (1) odst. 26. Rozdělme úsečky AB o délce l na n dílů, jichž délky jsou $l_1, l_2 \dots l_n$. Pravděpodobnost p_k, že bod zvolený na AB leží uvnitř*) k-tého dílu, je podle onoho vzorce

$$p_k = \frac{l_k}{l}.$$

Pravděpodobnost, že bod zvolený na AB leží buď uvnitř i-tého dílu, nebo uvnitř j-tého, je ve shodě s obecnou větou I. odst. 6.

$$\frac{l_i + l_j}{l} = p_i + p_j.$$

Pravděpodobnost, že bod zvolený na AB leží buď uvnitř i-tého dílu, nebo j-tého nebo k-tého jest

$$\frac{l_i + l_j + l_k}{l} = p_i + p_j + p_k$$

atd.

b) Totéž pravidlo o sčítání pravděpodobností platí v případech, kdy běží buď o polohu polopaprsku, nebo o polohu

*) Místo „uvnitř" můžeme ve všech těchto úvahách říci též „uvnitř nebo na kraji".

bodu v rovině nebo v prostoru (viz rovnice (2), (3) a (4) odst. 26) nebo o polohu přímky v rovině (rovnice (2) odst. 27). Tak na př. budiž dána uzavřená plocha, jež omezuje část T prostoru o objemu V; uvnitř T jsou dány další dvě vzájemně se vylučující uzavřené plochy, které omezují části T_1 a T_2 prostoru o objemech V_1 resp. V_2. Pravděpodobnost p_1, že bod zvolený uvnitř T leží uvnitř T_1, a pravděpodobnost p_2, že bod zvolený uvnitř T leží uvnitř T_2, jsou dány rovnicemi

$$p_1 = \frac{V_1}{V}, \quad p_2 = \frac{V_2}{V}.$$

Pravděpodobnost, že bod volený uvnitř T leží buď uvnitř T_1, nebo uvnitř T_2, je

$$\frac{V_1 + V_2}{V} = p_1 + p_2.$$

Obecná věta o úhrnné pravděpodobnosti zní takto: Je-li T množství prvků (bodů, přímek a pod.) a V jeho míra, jsou-li pak $T_1, T_2 \ldots T_n$ části množství T bez společných prvků a $V_1, V_2 \ldots V_n$ po řadě míry oněch částí, je $p_k = \frac{V_k}{V}$ pravděpodobnost, že prvek volený v T je zároveň v T_k, a

$$\frac{V_1 + V_2 + \cdots + V_n}{V} = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

pravděpodobnost, že prvek zvolený v T je buď v T_1, nebo v T_2, ... nebo v T_n (srv. větu I. odst. 6).

c) Budiž CD část úsečky AB; položme $l_1 = CD$, $l = AB$. Volme na AB dva body; množství všech takových párů má míru l^2.*) Podobně množství utvořené všemi páry bodů volenými na CD má míru l_1^2. Pravděpodobnost, že dva body volené na AB leží zároveň na CD, rovná se

*) Podle odst. 26a je l měrou množství všech bodů na úsečce o délce l.

$$\frac{l_1^2}{l^2}. \tag{1}$$

Pravděpodobnost, že tři body volené na AB jsou na CD, je podobně

$$\frac{l_1^3}{l^3}. \tag{2}$$

Obecná věta o složené pravděpodobnosti zní takto: Je dáno n množství T_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ a v každém z T_k je vytčena jeho určitá část M_k. Pravděpodobnosti p_k, že prvek zvolený v T_k je zároveň v M_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, jsou

$$p_1 = \frac{M_1}{T_1},\ p_2 = \frac{M_2}{T_2}, \ldots,\ p_n = \frac{M_n}{T_n},$$

kde míru každého z množství T_k nebo M_k značíme týmž znakem jako množství samo. Pravděpodobnost složená, že prvek zvolený v T_1 je v M_1 a že zároveň prvek volený v T_2 je v $M_2, \ldots$ a že prvek volený v T_n je v M_n, je ve shodě s obecnou větou II. odst. 6, rovna

$$p = \frac{M_1 \, . \, M_2 \, . \, M_3 . \, \ldots \, . \, M_n}{T_1 \, . \, T_2 \, . \, T_3 . \, \ldots \, . \, T_n} = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n. \tag{3}$$

Běží-li na př. o polohu dvou bodů na úsečce o délce l, které zároveň leží na její části o délce l_1, dosadíme do (3) $n = 2$, $T_1 = T_2 = l$, $M_1 = M_2 = l_1$ a vzorec (3) přechází v (1). Obecně je M^n míra množství složeného ze všech skupin po n různých prvcích, které lze voliti uvnitř daného množství o míře M. Příklad:

Na dané úsečce AB o délce l volíme n bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$; délku $\overline{AA_k}$ označme a_k a předpokládáme, že $0 < a_1 < \ldots < a_n < l$. Jak veliká je pravděpodobnost*) $\varphi(x)\,dx$, že a_1 je v mezích x a $x + dx$ a kolik je průměrně mezi úsečkami

*) Hledaná pravděpodobnost se blíží nule pro lim $dx \to 0$; proto ji předpokládáme ve tvaru $\varphi(x) \, . \, dx$.

$AA_1, A_1A_2, \ldots, A_nB$ těch, jichž délka jest obsažena mezi x a $x + \mathrm{d}x$?

Pravděpodobnost, že jeden bod A_k má od bodu A vzdálenost větší než $x(x < l)$ je $1 - \frac{x}{l}$; pravděpodobnost, že každý z bodů $A_1, \ldots, A_n$ má od bodu A vzdálenost větší než x, je

$$p(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^n. \tag{4}$$

$p(x)$ je pravděpodobnost, že $a_1 \geqq x$ (neboť $a_k > a_1$ pro $k > 1$). *Hledaná pravděpodobnost* $\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ *souvisí s* $p(x)$ *podle rovnice*

$$p(x) = \varphi(x)\,\mathrm{d}x + p(x + \mathrm{d}x),$$

neboť v případě, že $a_1 \geqq x$ může býti buď $x \leqq a_1 < x + \mathrm{d}x$, nebo $x + \mathrm{d}x \leqq a_1$. Máme tedy

$$\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \frac{n}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^{n-1}\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou na AB voleny zcela libovolně a nezávisle jeden na druhém. Proto považujeme větu (4) odvozenou původně pro pravděpodobnost, že délka $\overline{OA_1} = a_1$, je v daných mezích, za platnou pro každou z dalších úseček $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nB$. Součin $(n + 1)\,p(x)$ čili

$$(n + 1)\left(1 - \frac{x}{l}\right)^n,$$

udává střední počet těch z $(n + 1)$ úseček $AA_1, A_1A_2, \ldots$ $\ldots, A_nB$, které jsou delší než x. Konečně $(n + 1)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ čili

$$\frac{(n + 1)n}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^{n-1}\mathrm{d}x \tag{7}$$

je hledaný *průměrný počet těch z* $(n + 1)$ *úseček* $AA_1, A_1A_2, \ldots$ $\ldots, A_nB$, *jichž délka je mezi* x *a* $x + \mathrm{d}x$.

Všimněme si ještě limitního tvaru, kterého nabude vzorec (5), rostou-li n a l do nekonečna tak, že poměr $n:l$ zůstává rovný konstantě h ($h =$ počtu bodů A_k připadajících na jednotku délky). V tomto případě je $l = n:h$ a tedy

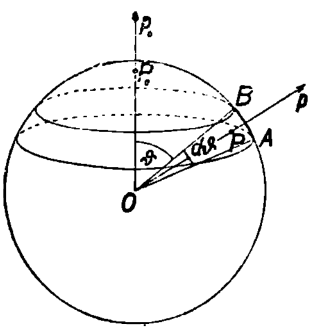
$$\left(1 - \frac{x}{l}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{hx}{n}\right)^{n-1}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^{n-1} = \mathrm{e}^{-hx},$$

$$\lim \varphi(x)\,\mathrm{d}x = h\,\mathrm{e}^{-hx}\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

To znamená: *Jsou-li body po neomezené přímce tak rozsety, že průměrně jich připadá h na jednotku délky, je pravděpodobnost, že vzdálenost dvou sousedních bodů je v mezích x až $x + \mathrm{d}x$, dána pravou stranou vzorce (8).*

29. Pravděpodobnost, že směr volený v prostoru vyhovuje daným podmínkám. Volíme určitý neproměnný směr p_0 a ptáme se, jak velká je pravděpodobnost, že jiný směr p svírá s p_0 úhel obsažený v mezích ϑ a $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$, kde ϑ je předepsaný úhel.

Předpokládáme, že směry p_0 a p jsou určeny přímkami (polopaprsky) vycházejícími z daného bodu O. Dáti směr znamená dáti bod P na kulové ploše opsané jednotkovým poloměrem kolem O; vektor OP má daný směr. Nechť je směr p_0 dán bodem P_0, směr p pak bodem P; podmínka, že směr p má svírati s p_0 úhel obsažený v mezích ϑ a $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$, vyjádří se geometricky takto: bod P leží na jednotkové kulové ploše uvnitř kulového pásu, jenž vzniká otočením oblouku AB kružnice o poloměru $OA = OB = 1$ kolem OP_0 (viz obr. 7). Povrch tohoto kulového pásu je $2\pi \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta$ povrch celé kulové plochy je 4π, takže hledaná *pravděpodobnost, že směr volený*



Obr. 7.

v prostoru má od pevně daného směru úchylku obsaženou v mezích ϑ a $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$, je

$$\frac{2\pi \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta}{4\pi} = \frac{\sin\vartheta}{2}\mathrm{d}\vartheta. \tag{1}$$

Při tomto odvození považujeme za platnou zásadu vyslovenou v odst. 26b: pravděpodobnost, že bod zvolený na povrchu koule leží v nějaké části tohoto povrchu, je úměrná plošnému obsahu té části.

30. O pravděpodobnostech závislých na čase. V některých fysikálních úlohách užívá se pojmu geometrické pravděpodobnosti tak, že některé souřadnice mají význam času.

Pravděpodobnost, že bod M volený na úsečce délky l leží na její nekonečně malé části o délce $\mathrm{d}x$, je rovna $\frac{\mathrm{d}x}{l}$. Pravděpodobnost, že ze dvou bodů M, N volených na té úsečce jeden leží v její části o délce $\mathrm{d}x$ a druhý v jiné její části o délce $\mathrm{d}y$, je $\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{l^2}$.

Zavedeme-li proměnný čas místo proměnné délky, nabudou uvedené vzorce tohoto významu:

Pravděpodobnost, že zjev, který se vyskytuje v časovém intervalu (x značí čas počítaný od počátečního okamžiku $x = 0$) od $x = 0$ do $x = l$, vyskytne se právě v nekonečně malé části $x \ldots x + \mathrm{d}x$ tohoto intervalu $0 < x < l$, je $\frac{\mathrm{d}x}{l}$. Pravděpodobnost, že jiný zjev, o kterém je také známo, že se vyskytne v časovém intervalu $0 \ldots l$, vyskytne se právě v intervalu $y \ldots y + \mathrm{d}y$, je $\frac{\mathrm{d}y}{l}$ $(0 < y < l)$. Pravděpodobnost, že dva zjevy, o nichž je známo, že se oba vyskytnou během intervalu $0 \ldots l$, vyskytnou se jeden v intervalu $x \ldots x + \mathrm{d}x$, druhý v intervalu $y \ldots y + \mathrm{d}y$, je $\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{l^2}$.

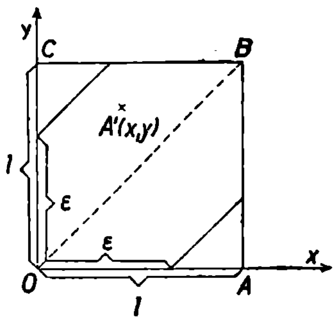
Uveďme ještě za účelem srovnání dvě úlohy:

a) Vypočísti pravděpodobnost p, že dva body M, N volené na úsečce o délce l mají vzdálenost menší než ε. Vzdálenost prvého bodu od kraje úsečky budiž x, druhého y. Volba obou bodů bude znázorněna v rovině Oxy jediným bodem A' o souřadnicích x, y (obr. 8). Všechny možné případy, t. j. všechny páry M, N takové, že

$$0 \leqq x \leqq l,\ 0 \leqq y \leqq l,$$

jsou znázorněny body A' vyplňujícími čtverec $OABC$ o straně l. Všechny příznivé případy, t. j. všechny páry M, N takové, že

$$\overline{MN} = |x - y| < \varepsilon,$$



Obr. 8.

jsou znázorněny body A' ležícími v pruhu omezeném rovnoběžkami, které mají rovnice

$$y = x + \varepsilon,\ y = x - \varepsilon.$$

Plošný obsah čtverce je l^2, plošný obsah tohoto pruhu (pokud leží ve čtverci), je $l^2 - (l - \varepsilon)^2$ takže

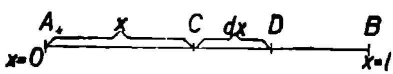
$$p = \frac{l^2 - (l - \varepsilon)^2}{l^2} = \frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}. \qquad (1)$$

b) Dvě osoby si umluví, že během určité doby (x značí čas) od $x = 0$ do $x = l$ se sejdou na určitém místě a že ten, kdo přijde dříve, počká na druhého nejdéle po dobu ε a pak odejde, nepřijde-li druhý. Jak veliká je pravděpodobnost p, že se setkají? Je-li x okamžik, kdy se dostaví první osoba, a y okamžik, kdy druhá, znázorníme zase všechny možné případy body $A'(x, y)$ ležícími uvnitř čtverce $OABC$ jako v předešlé úloze. Obor příznivých případů je dán podmínkou, že časová odlehlost mezi příchodem prvého a druhého není větší než ε, tedy $|x - y| < \varepsilon$, jako v předešlé úloze. Vychází vzorec (1) pro hledanou pravděpodobnost.

Vzorce a způsob výpočtu v úloze b) jsou úplně stejné jako v úloze a). Rozdíl v úlohách je v interpretaci proměnných, které mají v jedné úloze význam délek, ve druhé význam časových intervalů.

31. Zobecnění původní definice. Hustota pravděpodobnosti. a) Budiž AB úsečka délky l a vytkněme na ní dva body CD, tak, že $\overline{CD} =$ jednotce délky. Pravděpodobnost, že bod M, volený na AB, leží na CD, je podle odst. 26a rovna $\frac{1}{l}$. Kdybychom vytkli jiné dva body E, F na AB, zase tak, aby $\overline{EF} =$ jednotce délky, byla by pravděpodobnost, že bod M, volený na AB leží na EF rovna opět $\frac{1}{l}$. Pravděpodobnost, která v jednom i ve druhém případě připadá na jednotku délky (buď na CD nebo na EF), čili *hustota pravděpodobnosti* je stejná. Užívajíce definice (1) odst. 26. *předpokládáme* tedy, že *hustota pravděpodobnosti je konstantní.*

Jsou však případy, kdy máme důvody, pro které připouštíme, že hustota pravděpodobnosti je proměnná podle toho, kde na AB volíme úsečku CD nebo EF o jednotkové délce. V takových úlohách počítáme s proměnnou hustotu pravděpodobnosti podobně jako s proměnnou hustotou hmoty v mechanice. Pravděpodobnost p, že bod volený na úsečce AB o délce l leží na její nekonečně malé části CD (viz obr. 9).



Obr. 9.

$$\overline{AB} = l,\ \overline{AC} = x,\ \overline{CD} = \mathrm{d}x,$$

vyjádříme — to je základní předpoklad — ve tvaru $f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $f(x)$ je spojitá funkce proměnné x, vyhovující podmínkám

$$f(x) > 0,\ \int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Veličina $f(x)$, kde x značí vzdálenost bodu C na AB od A, je limita poměru

$$\frac{p}{\mathrm{d}x} \text{ pro } \lim \mathrm{d}x = 0;$$

jinými slovy $f(x)$ je *proměnná hustota pravděpodobnosti.*

Vytkněme nyní na AB dva body A', B' o úsečkách $\overline{AA'} = x_1$, $\overline{AB'} = x_2$ $(0 < x_1 < x_2 < l)$ a hledejme pravděpodobnost $p(x_1, x_2)$, že bod M volený na AB leží na $A'B'$. Tato pravděpodobnost je součet nekonečně malých pravděpodobností $f(x)\,\mathrm{d}x$ vztahujících se na všecky $\mathrm{d}x$, na které si myslíme úsečku $A'B'$ rozdělenu. Vzhledem k (1) je tedy

$$\left.\begin{aligned} &p(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x, \\ \text{kde}\quad & \\ &f(x) > 0,\ \int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x = 1. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ve speciálním případě konstantní hustoty je $f(x) = c$, a tedy podle (2) $\int_0^l c\,\mathrm{d}x = cl = 1$; z toho plyne

$$f(x) = \frac{1}{l},\ p(x_1, x_2) = \frac{x_2 - x_1}{l} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}},$$

což je právě definice (1) odst. 26.

b) Úprava vztahů (2) pro případ, že jde o pravděpodobnosti vztahující se k úhlům, nebo k bodům v rovině nebo v prostoru, je nasnadě.

Budiž x úhel ($O \leqq x < 2\pi$), jehož vrchol a jedno rameno se nemění; druhé rameno úhlu se otáčí kolem vrcholu. Pravděpodobnost, že úhel x jest obsažen v mezích ϑ a $\vartheta + d\vartheta$ budiž $f(\vartheta)\, d\vartheta$. Pak pravděpodobnost, že x je v mezích ϑ_1 a ϑ_2, se rovná

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} f(\vartheta)\, d\vartheta,$$

s podmínkami:

$$f(\vartheta) > 0, \quad \int_0^{2\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta = 1.$$

c) Je-li $f(x, y)\, dx\, dy$ pravděpodobnost, že bod zvolený uvnitř určité části P roviny leží uvnitř nekonečně malého obdélníka, který má jeden vrchol v bodě (x, y) a rozměry dx, dy, a je-li P_1 část oboru P, je

$$p = \iint_{P_1} f(x, y)\, dx\, dy,$$

pravděpodobnost, že bod zvolený v P leží uvnitř P_1. Hustota pravděpodobnosti $f(x, y)$ vyhovuje podmínkám.

$$f(x, y) > 0, \quad \iint_P f(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

Je-li na př. Oxy vodorovná rovina a házíme-li z větší vzdálenosti zrnkem tak, abychom trefili bod O, má funkce $f(x, y)$ větší hodnoty pro body blízké bodu O než pro body vzdálenější od C, neboť pravděpodobnost, že zrnko dopadne do plošky o obsahu 1 cm^2 položené blízko O je větší, než že dopadne do plošky stejně veliké, ale vzdálenější od O. V případě, že hustota pravděpodobnosti je konstantní, takže podle odst. 26b je $f(x, y) = 1/P$, kde P značí plošný obsah oboru P, je hledaná pravděpodobnost, že bod leží v P_1,

$$p = \iint\limits_{P_1} f(x, y)\,dx\,dy = \frac{P_1}{P},$$

což se shoduje s rovnicí (3) odst. 26; P_1 je obsah oboru P_1.

d) Je-li $f(x, y, z)\,dy\,dy\,dz$ pravděpodobnost, že bod zvolený uvnitř určité části V prostoru leží uvnitř nekonečně malého pravoúhlého rovnoběžnostěnu, jenž má jeden vrchol v bodě (x, y, z) a rozměry dx, dy, dz, a je-li V_1 část oboru V, je

$$\iiint\limits_{V_1} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

pravděpodobnost, že bod zvolený ve V leží ve V_1. Hustota pravděpodobnosti $f(x, y, z)$ vyhovuje podmínkám

$$f(x, y, z) > 0, \quad \iiint\limits_{V} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = 1.$$

V případě konstantní hustoty je $f(x, y, z) = 1 : V$, kde V značí objem oboru V; hledaná pravděpodobnost je pak

$$\iiint\limits_{V_1} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \frac{V_1}{V},$$

kde V_1 je objem oboru V_1. Tato rovnice se shoduje s rovnicí (4) odst. 26.

Obdobně by se zavedla hustota pravděpodobnosti v případě přímek v rovině, jichž polohu stanovíme souřadnicemi q a φ podle odst. 27.

Poznámka. Věty o úhrnné a o složené pravděpodobnosti dokázané v odst. 28. pro případ konstantní hustoty platí i v případech, že hustota je proměnná. Poněvadž pak počítání s pravděpodobnostmi se zakládá na těchto dvou větách, přenášejí se výsledky odvozené v kapitolách I. a II. na geometrické pravděpodobnosti. Totéž platí o větách týkajících se středních hodnot (viz odst. 32).

32. Střední hodnoty při geometrických pravděpodobnostech. a) Podle definice uvedené v odst. 8a vypočte se střední hodnota veličiny závislé na náhodě tak, že každá její možná hodnota se násobí příslušnou pravděpodobností a součiny se sečtou. Tato definice se přenáší na geometrické pravděpodobnosti s tou změnou, že na místo součtů se zavedou integrály.

Příklady: b) Na úsečce AB délky l volíme dva body C, D. Jak velká je střední hodnota úsečky CD?

Předpokládáme, že hustota pravděpodobnosti je konstantní. Úsečka AB nechť leží v ose Ox, takže koncovým bodům odpovídají hodnoty $x = 0$ a $x = l$. Pravděpodobnost, že úsečka bodu C je v mezích x až $x + \mathrm{d}x$ a že současně úsečka bodu D je v mezích y až $y + \mathrm{d}y$, je $\dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{l^2}$. Délka $\overline{CD} = |y - x|$, tedy

$$\text{s. h. } \overline{CD} = \int_0^l \int_0^l \frac{|y-x|}{l^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{l^2}\int_0^l \left[\int_0^y (y-x)\,\mathrm{d}x + \right.$$

$$\left. + \int_y^l (x-y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \frac{1}{l^2}\int_0^l \left(y^2 + \frac{l^2}{2} - ly\right)\mathrm{d}y = \frac{l}{3}. \qquad (1)$$

Výpočet lze provésti také takto: Předpokládejme, že bod C, bližší bodu A, má úsečku x, bod D pak úsečku y; $x < y$. Pak je $0 < x < y$, $0 < y < l$, a tedy

$$\text{s. h. } (\overline{CD}) = \text{s. h. } (y - x) = \text{s. h. } (y) - \text{s. h. } (x) =$$

$$= \int_0^l y\frac{\mathrm{d}y}{l} - \int_0^l \left[\int_0^y x\frac{\mathrm{d}x}{l}\right]\frac{\mathrm{d}y}{l} = \frac{l}{2} - \int_0^l \frac{y^2}{2l^2}\,\mathrm{d}y = \frac{l}{3}.$$

c) Střední hodnota čtverce vzdálenosti dvou bodů C, D volených na úsečce o délce l je

$$\text{s. h. } (y - x)^2 = \text{s. h. } (y^2) - 2 \text{ s. h. } (x) \,.\, \text{s. h. } (y) + \text{s. h. } (x)^2 =$$

$$= \int_0^l x^2 \frac{\mathrm{d}x}{l} - 2 \int_0^l x \frac{\mathrm{d}x}{l} \,.\, \int_0^l y \frac{\mathrm{d}y}{l} + \int_0^l y^2 \frac{\mathrm{d}y}{l} = \frac{1}{6} l^2. \qquad (2)$$

Při výpočtu užíváme věty (odst. 10b), že s. h. (xy) = s. h. (x) . . s. h. (y), neboť volbu jednoho bodu C považujeme za nezávislou na poloze druhého bodu D.

d) Úlohy b) a c) lze řešiti též užitím vzorce (1) odst. 30, podle něhož

$$p = \frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}$$

je pravděpodobnost, že dva body C, D volené na úsečce o délce l mají vzdálenost menší než ε. Pravděpodobnost, že ona vzdálenost je menší než $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$, je $p + \mathrm{d}p$ a tedy

$$\mathrm{d}p = \left(\frac{2}{l} - \frac{2\varepsilon}{l^2}\right) \mathrm{d}\varepsilon$$

je pravděpodobnost, že ona vzdálenost jest obsažena v mezích ε a $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$. Z toho plyne, že

$$\text{s. h. } \overline{CD} = \int_0^l \varepsilon \left(\frac{2}{l} - \frac{2\varepsilon}{l^2}\right) \mathrm{d}\varepsilon = \frac{l}{3},$$

$$\text{s. h. } \overline{CD}^2 = \int_0^l \varepsilon^2 \left(\frac{2}{l} - \frac{2\varepsilon}{l^2}\right) \mathrm{d}\varepsilon = \frac{l^2}{6},$$

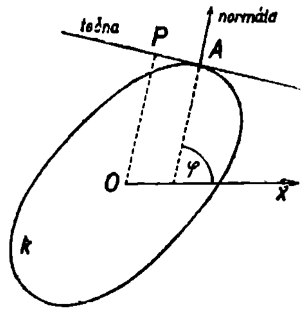
ve shodě s rovnicemi (1) resp. (2).

e) Dva body M, M' jsou zvoleny uvnitř čtverce o straně a. Střední hodnota čtverce vzdálenosti MM' je

$$\frac{1}{a^4} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \int_0^a \left[\left(x - x'\right)^2 + \left(y - y'\right)^2\right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}y' = \frac{a^2}{3}.$$

Poznámka. V úlohách o geometrických pravděpodobnostech a středních hodnotách předpokládá se zpravidla, že hustota pravděpodobnosti je konstantní.

33. Sečny konvexní křivky v rovině. Buffonova úloha o jehle. a) Budiž k uzavřená, vypuklá (konvexní) křivka v rovině (t. j. taková, že kterákoli přímka ji protíná nejvýše ve dvou bodech) neboli *ovál*. Volme počátek O souřadnic uvnitř k. Je-li φ úhel který svírá vnější normála (t. j. normála vystupující z vnitřku křivky k ven) s osou Ox, je vzdálenost OP tečny od počátku O určitou funkcí úhlu φ, kterou označíme $f(\varphi)$ (obr. 10). Každému úhlu $\varphi (0 \leqq \varphi < 2\pi)$ odpovídá jediný bod dotyku A na k; funkce $f(\varphi)$ je jednoznačná a periodická s periodou 2π (je definována pro všechny hodnoty úhlu φ). Každá přímka



Obr. 10.

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - q = 0,$$

protínající křivku k vyhovuje podmínce

$$q - f(\varphi) \leqq 0.$$

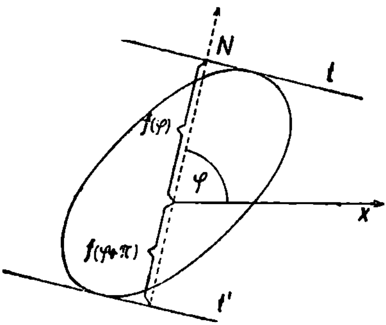
Znamení rovnosti platí zde jen pro případ, že přímka se křivky k dotýká. Měrou množství utvořeného všemi sečnami křivky k je podle vzorce (1) odst. 27 výraz

$$m = \int\int \mathrm{d}q\, \mathrm{d}\varphi = \int q\, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi,$$

který můžeme psáti také v tomto tvaru:

$$m = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [f(\varphi) + f(\varphi + \pi)]\, \mathrm{d}\varphi.$$

Výraz v hranaté závorce udává vzdálenost dvou tečen t a t' kolmých k normále ON určené úhlem φ (obr. 11). Tuto délku můžeme považovati za polovinu průmětu celého obvodu křivky do normály ON; při tom si představujeme celý její obvod rozložen na nekonečně malé elementy a sčítáme absolutní hodnoty jednotlivých průmětů. Průmět obvodu do ON označíme písmenem A; obdržíme



Obr. 11.

$$m = \tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi} A \, d\varphi.$$

Poslední integrál vypočteme podle Cauchyho takto: Promítneme-li nějakou úsečku délky s do přímky, která s ní svírá úhel φ, jest absolutní hodnota průmětu $s \, . \, |\cos\varphi|$. Integrujme tento výraz dle φ od 0 do 2π; vychází

$$s \, . \int_0^{2\pi} |\cos\varphi| \, d\varphi = 4s \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi \, d\varphi = 4s.$$

Obvod křivky k si myslíme rozdělený na nekonečně mnoho nekonečně malých částí; napišme poslední rovnici pro každou takovou část s a všechny rovnice sečtěme. Dostaneme

$$\int_0^{2\pi} A \, d\varphi = 4L,$$

kde L značí obvod křivky k; je tedy

$$m = L. \tag{1}$$

Míra přímkového množství, utvořeného všemi přímkami protínajícími daný ovál, se rovná jeho obvodu.

Budiž k_1 ovál obsažený celý uvnitř k a L_1 jeho obvod.

Pak je*) $L_1 < L$ a podle vzorce (2) odst. 27 *pravděpodobnost p, že přímka protínající ovál k protíná zároveň jiný ovál k_1 ležící uvnitř k, je rovna poměru $L_1 : L$ obvodů obou oválů,*

$$p = L_1 : L. \tag{2}$$

b) Užijeme rovnice (2) k řešení této úlohy: V rovině jsou narýsovány ekvidistantní rovnoběžky a mimo to ovál k_1 o obvodu L_1; vzdálenost $2a$ dvou sousedních rovnoběžek je tak veliká, že křivka k_1 nemůže protínati dvě z nich. Je vypočítati pravděpodobnost p, že křivka k_1 je proťata některou rovnoběžkou (příslušný pokus se provádí tak, že se rovnoběžky nakreslí na vodorovnou rovinu a na ní se hodí ovál k_1, vystřižený z papíru).

Narýsujme kružnici k o průměru $2a$ a uvnitř k narýsujme k_1. Obrazec μ složený z k a k_1 považujeme za neproměnný útvar; mění-li k_1 polohu, mění ji současně i k. Položme obrazec u jakkoli na rovnoběžky; v každém případě je k proťata některou rovnoběžkou (a jen jedinou, nehledíme-li k případu, že k se dotýká dvou sousedních rovnoběžek). Výpočet pravděpodobnosti p se tedy převádí na řešení úlohy: přímka protíná kružnici k o obvodu $L = 2\pi a$; určiti pravděpodobnost p, že protíná současně ovál k_1 o obvodu L_1 ležící uvnitř k. Podle vzorce (2) bude

$$p = \frac{L_1}{L} = \frac{L_1}{2\pi a}. \tag{3}$$

c) Předpokládejme, že se k_1 redukuje na úsečku délky $2b$; křivka k_1 je v tom případě vlastně zploštělá elipsa, jejíž hlavní osa $= 2b$ a vedlejší osa nekonečně malá. Máme $L_1 = 4b$ a rovnice (3) dává

$$p = \frac{2b}{\pi a}. \tag{4}$$

*) Nerovnost $L_1 < L$ je důsledek věty: Leží-li konvexní mnohoúhelník celý uvnitř jiného konvexního mnohoúhelníka, má první kratší obvod než druhý.

Rovnice (4) dává *řešení Buffonovy úlohy o jehle*, která zní takto: házíme jehlu (nebo hůlku) o délce $2b$ na rovinu, na níž jsou narýsovány ekvidistantní rovnoběžky; je-li $2a$ vzdálenost dvou sousedních rovnoběžek ($2b < 2a$), jak velká je pravděpodobnost p, že jehla protne některou z těch rovnoběžek? — Stran pokusů, kterými se potvrzuje správnost vzorce (4) viz odst. 35.

d) Užijeme nyní rovnice (1) k řešení úlohy: Nalézti pravděpodobnost p, že přímka protínající obvod vypuklého čtyřúhelníka $ABCD$ protíná jeho dvě protější strany AB a CD.

Veďme úhlopříčky, jež se protnou v O a položme (viz obr. 12)

$$\overline{AB} = a,\quad \overline{BC} = b,\quad \overline{CD} = c,\quad \overline{DA} = d,\quad \overline{AC} = m,\quad \overline{BD} = n.$$

Především hledáme míru M pro množství přímek, které protínají strany a a c. Množství přímek, které protínají obvod trojúhelníka AOB, má podle (1) za míru délku jeho obvodu;*) podobně pro obvod trojúhelníka COD.

Součet obou těchto měr (obvodů) totiž $a + c + m + n$ je měrou množství U složeného ze všech přímek protínajících obvod AOB a ze všech přímek protínajících COD. V množství U je každá přímka protínající strany a i c obsažena dvakrát. Každá přímka protínající obvod AOB nebo obvod COD protíná zároveň obvod čtyřúhelníka $ABCD$. Naopak každá přímka protínající $ABCD$ protíná obvod buď jednoho, nebo druhého trojúhelníka (nebo oba). Proto je

$$a + c + m + n - M$$

měrou množství všech přímek, které protínají obvod čtyřúhelníka $ABCD$; tato míra je podle (1) rovna jeho obvodu $a + b + c + d$, tedy

---

*) Věta (1) byla dokázána pro uzavřenou vypuklou křivku. Platí však i pro vypuklý mnohoúhelník, poněvadž lze sestrojiti uzavřené vypuklé křivky, které probíhají libovolně blízko jeho obvodu a jichž délka obvodu v limitě se rovná délce jeho obvodu.

$$a + c + m + n - M = a + b + c + d$$

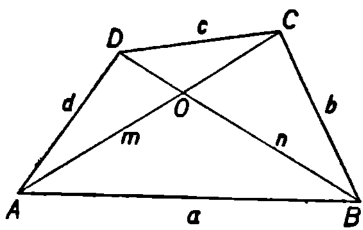
nebo

$$M = m + n - b - d.$$

Podobně množství přímek protínajících strany b a d má míru

$$M' = m + n - a - c.$$

Pravděpodobnost p, že přímka protínající obvod vypuklého čtyřúhelníka protíná jej ve dvou protějších stranách, je (viz obr. 12)



Obr. 12.

$$p = \frac{M + M'}{a + b + c + d} = 2\frac{m + n}{a + b + c + d} - 1.$$

Pro čtverec ($a = b = c = d$, $m = n = a\sqrt{2}$) je

$$p = \sqrt{2} - 1 = 0{,}414\ldots$$

Pro obdélník, jehož strany jsou v poměru $3 : 4$ ($a = c = 3$, $b = d = 4$, $m = n = 5$) je*)

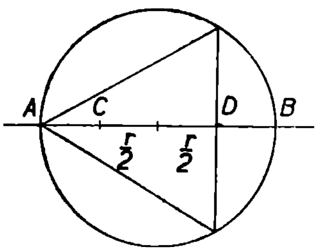
$$p = \tfrac{3}{7} = 0{,}428\ldots$$

34. Bertrandovo paradoxon a jeho výklad podle Borela. Naší úlohou bude nyní srovnati řešení těchto tří úloh:

*) Viz *G. Polya:* Über geometrische Wahrscheinlichkeiten (Sitzber. der Ak. d. Wiss. Wien, Bd. 126, 319; 1917).

a) Na vodorovné rovině je narýsována řada ekvidistantních rovnoběžek; vzdálenost dvou sousedních rovnoběžek budiž $2r$. Na rovinu hodíme kruhový kotouč o poloměru r, jenž vždy protne jednu z rovnoběžek (v krajním případě by se kotouč dotýkal dvou sousedních rovnoběžek); jak velká je pravděpodobnost p, že tětiva vymezená na kotouči onou rovnoběžkou je větší než $r\sqrt{3}$?*)

Poloha kotouče na rovině jest určena souřadnicemi x, y jeho středu a úhlem ω, který svírá nějaký poloměr na kotouči vyznačený s pevnou přímkou. Nechť dané rovnoběžky mají směr osy Oy. Je zřejmo, že délka tětivy vymezené na kružnici nezávisí ani na y ani na ω, nýbrž jedině na x. Stačí srovnávati jen sečny kolmé na určitý průměr kotouče a úloha se dá vysloviti takto: na pevném průměru AB kotouče volíme bod a vedeme jím tětivu kolmou k AB; jaká je pravděpodobnost p, že takto sestrojená tětiva bude delší než $r\sqrt{3}$? Pravděpodobnost se zde vztahuje k volbě bodu M na průměru AB. Pokud je bod M ve vzdálenosti menší než $\frac{1}{2}r$ od středu kotouče, je příslušná tětiva delší než $r\sqrt{3}$, jinak je kratší (obr. 13). Bodové množství na $\overline{AB} = 2r$ odpovídající „příznivým případům" (t. j. úsečka CD), má tedy míru r a



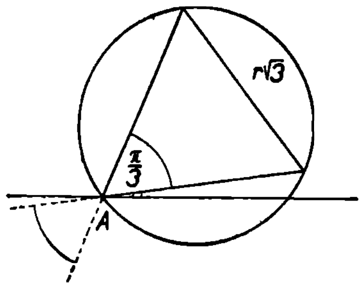
Obr. 13.

$$p = \frac{r}{2r} = \tfrac{1}{2}. \qquad (1)$$

b) Na pevné rovině narýsujeme přímku a a v jednom jejím bodě A připíchneme k rovině list průhledného papíru, na

*) $r\sqrt{3}$ je délka strany rovnostranného trojúhelníka vepsaného do kružnice. p je tedy pravděpodobnost, že tětiva bude delší než strana tohoto trojúhelníka.

němž je narýsována jednak kružnice o poloměru r procházející bodem A, jednak rovnostranný trojúhelník T s vrcholem A do ní vepsaný. Roztočíme list prudce kolem bodu A; list se otáčí ve své rovině a zastaví se konečně v určité poloze, takže přímka a protíná kružnici v tětivě určité délky. Je vypočísti pravděpodobnost p, že tato tětiva bude delší než $r\sqrt{3}$ (obr. 14).



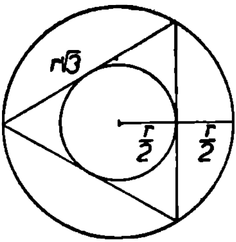
Obr. 14.

Za míru množství všech poloparsků vedených v rovině bodem A vezmeme 2π. Za „příznivý případ" považujeme, když polopaprsek (nebo polopaprsek protivného směru) prochází vnitřkem trojúhelníka T; příslušné množství polopaprsků má míru $\frac{2\pi}{3}$, takže (vzorec (2) odst. 26)

$$p = \frac{2\pi}{3} : 2\pi = \tfrac{1}{3}. \tag{2}$$

c) Házejme na kruhový kotouč o poloměru r malé zrnko tak, aby kterákoli část kotouče mohla býti zasažena se stejnou hustotou pravděpodobnosti. Bod, ve kterém zrnko dopadne, považujme za střed tětivy. Jak velká je pravděpodobnost p, že tětiva takto určená bude delší než $r\sqrt{3}$?

Je-li střed tětivy ve vzdálenosti menší než $\frac{1}{2}r$ od středu kotouče, bude tětiva delší než $r\sqrt{3}$ (obr. 15). Množství všech případů možných (polohy zrnka uvnitř kruhu) má za míru obsah kruhu πr^2; množství případů příznivých (body uvnitř kruhu soustředného o poloměru $\frac{1}{2}r$) má obdobně za míru $\frac{1}{4}\pi r^2$. Proto je (vzorec (3) odst. 26)



Obr. 15.

$$p = \frac{\pi r^2}{4} : \pi r^2 = \tfrac{1}{4}. \qquad (3)$$

Kdybychom všechny tři úlohy a), b) a c) vyjádřili jedinou otázkou: jak veliká je pravděpodobnost p, že tětiva volená v kružnici o poloměru r je delší než $r\sqrt{3}$?, dospěli bychom k paradoxnímu výsledku, že úloha má tři různá řešení (1), (2) a (3). *J. Bertrand* napsal proto, že ona otázka, a vůbec pojem geometrické pravděpodobnosti, nemá určitého smyslu. *E. Borel* rozebíraje otázku ukázal, že v každé úloze o geometrických pravděpodobnostech je třeba přihlížeti k podmínkám, za kterých se provádějí pokusy.

S tohoto hlediska nestačí se ptáti: jak veliká je pravděpodobnost, že tětiva bude delší než $r\sqrt{3}$, nýbrž je nutno udati způsob, kterým se „náhodně zvolená tětiva" sestrojuje. Přihlížejíce k těmto podmínkám rozeznáváme tři různé úlohy a), b) a c); každá sama o sobě má dobrý smysl a určité řešení, jak jsme ukázali.*)

Kdybychom volili tětivu tak jako v úloze a) (házením kotouče), dostali bychom v řadě 1000 postupně vykonaných pokusů asi $\frac{1}{2}1000 = 500$krát tětivu delší než $r\sqrt{3}$. Kdybychom volili tětivu tak jako v úloze b) (roztočením listu papíru), dostali bychom v řadě 1000 pokusů asi $\frac{1}{3}1000 = 333$krát

*) Viz *Borel:* Le hasard, N° 34, 35; *Borel:* Éléments de la Théorie des probabilités, N° 46.

tětivu delší než $r\sqrt{3}$. Kdybychom konečně volili střed tětivy podle c) (házením zrna), vyšla by v řadě 1000 pokusů tětiva delší než $r\sqrt{3}$ asi $\frac{1}{4}1000 = 250$krát.

35. Statistické ověření vzorců pro geometrické pravděpodobnosti. V odstavci 22 bylo uvedeno, jak se data odvozená ze statistiky o výsledcích dlouhé řady pokusů srovnávají s theoretickými formulemi o pravděpodobnostech; poněvadž odvození těchto formulí (podané v kap. II. pro nespojité pravděpodobnosti) se opírá o základní věty o pravděpodobnosti úhrnné a o pravděpodobnosti složené, a poněvadž obě tyto věty platí i pro geomatrické pravděpodobnosti, *platí vzorce odst. 22 beze změny i pro případ, že p je geometrická pravděpodobnost.* Běží hlavně o kontrolu těchto theoretických vzorců: a) V řadě n postupně provedených nezávislých pokusů je podle theorie střední počet zdařených roven np; p je pravděpodobnost, že jeden pokus se zdaří. Vykonejme veliký počet ns pokusů; je-li s serií pokusů, v každé n pokusů (s a n veliká čísla) a je-li m_k počet zdařených pokusů v k-té serii, má býti přibližně

$$\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_s}{s} \doteq np. \tag{1}$$

b) Je-li $h = m - np$ úchylka počítaná pro řadu o n pokusech, ve které je m zdařených, je podle theorie s. h. $(h^2) = np(1 - p)$. Dělíme-li zase pokusy na s serií po n pokusech, má býti přibližně

$$\frac{(m_1 - np)^2 + (m_2 - np)^2 + \ldots + (m_s - np)^2}{s} \doteq np(1 - p). \tag{2}$$

c) Utvořme úchylku pro každou z s serií:

$$m_1 - np,\ m_2 - np, \ldots,\ m_s - np$$

a spočítejme, kolik z těchto úchylek má absolutní hodnotu menší než h; je-li takových úchylek celkem ν, má býti podle theorie přibližně

$$\nu \doteq s\Theta\left(\frac{h}{2np(1-p)}\right); \tag{3}$$

Θ je funkce zavedená v odst. 21.

Uveďme jakožto příklad Buffonovu úlohu o jehle (odst. 33c). Je-li $2a$ vzdálenost sousedních rovnoběžek a $2b$ délka jehly, je pravděpodobnost, že se pokus zdaří, t. j. že jehla protne některou rovnoběžku, rovna $\frac{2b}{\pi a} = p$. Vykonáme-li s serií po n pokusech, čekáme podle (1), že

$$\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_s}{n \, . \, s} \doteq \frac{2b}{\pi a}.$$

Vzorec (1) byl od různých autorů ověřován pokusy.*) Bylo by zajímavo ověřiti též vzorce (2) a (3) pro geometrické pravděpodobnosti p; dosud, pokud vím, se tím nikdo nezabýval.

36. Methoda libovolných funkcí. Regularisace pravděpodobnosti.

a) *Úloha o ruletě.* Ruleta je kotouč rozdělený na veliký počet stejných výsečí, které jsou střídavě červené a černé.

---

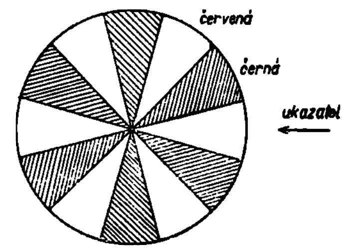
*) Položíme-li pro stručnost $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = m$, dává rovnice v textu $\pi \doteq \frac{2b}{a} \frac{sn}{m}$. Na pravé straně jsou dané veličiny; ze statistického pozorování průseků dá se tedy nalézti přibližná hodnota čísla π.

Švýcarský matematik R. Wolf konal v letech 1849—1853 takové pokusy a odvodil ze serie 5000 pokusů hodnotu 3,159 pro číslo π. Viz o tom *Czuber:* Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte (Leipzig, 1884, p. 88); *Markoff-Liebmann:* Wahrscheinlichkeitsrechnung (Leipzig, 1912, p. 164); *Markov:* Izčislěnije věrojatnostěj, 4. vyd. (Moskva, 1924, p. 263). — Bývalý posluchač přírodovědecké fakulty Masarykovy university *J. Baťa* v práci: Některé pokusy o geometrických pravděpodobnostech (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university č. 90, 1927) uvádí výsledky pokusů, jimž se potvrzuje Buffonův vzorec, Bertrandovy vzorce (viz odst. 34 textu) a řada jiných theoretických vzorců.

Uvedeme ruletu do rychlé rotace. Kotouč se mnohokrát otočí dokola a pak se zastaví. Jak velká je pravděpodobnost p, že, když se kotouč zastavil, pevný ukazatel ukazuje na červenou výseč? (V obrazci 16 je ruleta se 12 výsečemi.) Úhrnný úhel, o který se ruleta otočí, souvisí s tím, jak velikou počáteční rychlost jsme jí udělili.

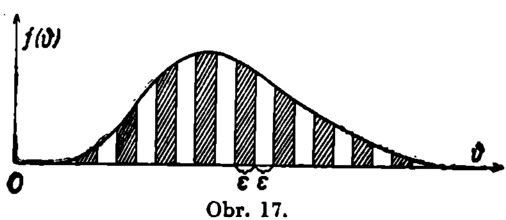
Předpokládáme: pravděpodobnost, že úhrnný úhel, o který se ruleta otočí, jest obsažen v mezích ϑ a $\vartheta + d\vartheta$, dá se vyjádřiti formulí $f(\vartheta)\,d\vartheta$. Přitom je hustota pravděpodobnosti $f(\vartheta)$ kladná a spojitá funkce, která vyhovuje podmínce

$$\int_0^\infty f(\vartheta)\,d\vartheta = 1. \qquad (1)$$



Obr. 16.

(To znamená: je jisto, že onen úhel jest v mezích 0 až $+\infty$.) Budiž ε středový úhel jedné výseče na ruletě; znázorníme funkci $y = f(\vartheta)$ graficky a rozdělíme osu ϑ dělícími body na stejně dlouhé intervaly o délce ε a dělícími body vedeme pořadnice až k průseku s křivkou $y = f(\vartheta)$. Plocha omezená křivkou a osou $O\vartheta$ je tak rozdělena na svislé pruhy o šířce ε, jež odpovídají střídavě výsečím červeným a černým. V obrazci odpovídají bílé pruhy červeným úsečím a vyčárkované černým. Pravděpodobnost p se rovná součtu ploch bílých (obr. 17).



Obr. 17.

Ruletu nesmíme roztáčeti ani příliš málo*) ani příliš mnoho (s ohledem na její pevnost). Je-li A maximální hodnota úhlu, o který se může ruleta otočiti a n počet pruhů v obrazci 17**), je $n\varepsilon = A$. Připusťme, že funkce $f(\vartheta)$ má derivaci, jejíž absolutní hodnota je menší než konstanta M. Rozdíl ploch dvou sousedních pruhů je menší než $\varepsilon(\mu' - \mu)$, kde μ' a μ jsou resp. maximum a minimum funkce $f(\vartheta)$ v intervalu o délce 2ε odpovídajícímu oběma pruhům.

Veličina $\mu' - \mu$ je menší než $2M\varepsilon$, rozdíl plošných obsahů obou pruhů je tedy menší než $2M\varepsilon^2$. Součet ploch všech bílých pruhů (kterých je celkem $\frac{1}{2}n$) liší se od součtu ploch všech vyčárkovaných pruhů o méně než $\frac{1}{2}n \cdot 2M\varepsilon^2 = Mn\varepsilon^2 = MA\varepsilon$.

Je-li ε nekonečně malé, je také tento rozdíl nekonečně malý, t. j. úhrnná pravděpodobnost p že vyjde červená = = úhrnné pravděpodobnosti, že vyjde černá.

Kdybychom nic nevěděli o funkci $f(\vartheta)$, nemohli bychom nic počítati; jen proto, že něco o ní víme, můžeme tvrditi, že hledaná pravděpodobnost je rovna $\frac{1}{2}$.†)

Výsledek je pozoruhodný tím, že možno funkci $f(\vartheta)$ v širokých mezích libovolně voliti a že tyto změny nemají vlivu na konečný výsledek; při velkém počtu výsečí je p přibližně rovna jedné polovině, nechť je $f(\vartheta)$ jakákoli *(methoda libovolných funkcí)*.

Podle Frécheta pravíme, že zde nastává *regularisace pravděpodobnosti*; v jednoduchém výsledku $p = \frac{1}{2}$ neprojevují se podrobnosti z průběhu funkce $f(\vartheta)$. Tato funkce závisí obecně na konstrukci rulety a na individualitě hráčově; pro různé

---

*) Kdybychom jí udělili jen velmi malý náraz, takže by se otočila méně než o úhel ε, dovedli bychom předvídati výsledek; zjev by nebyl náhodný (srovnej s tím, co bylo řečeno o házení kostkou na začátku odst. 1).

**) n je tím větší, čím více výsečí má ruleta.

†) Uvedený důkaz pochází od *Poincaréa*. K důkazu stačí předpokládati, že $f(\delta)$ je spojitá nebo jen integrovatelná.

hráče bylo by třeba zavésti různé funkce $f(\vartheta)$, ale výsledek $p = \frac{1}{2}$ platí stejně pro všechny rulety a pro všechny hráče.

b) Methoda libovolných funkcí, která právě byla vyložena na problému rulety, je velmi obecná a dá se jí užíti takřka ve všech úlohách o počtu pravděpodobnosti; ukážeme to na příkladech v dalších odstavcích.

37. Pomocná věta o přírůstku funkce několika proměnných; zobecněná methoda libovolných funkcí. a) Budiž $f(x, y, z)$ kladná funkce spojitá v okolí bodu $x = a$, $y = b$, $z = c$ se spojitými parciálními derivacemi f_x', f_y' a f_z'. Položme

$$\varphi(t) = f(a + ht,\ b + kt,\ c + lt);$$

$\varphi(t)$ je spojitá funkce proměnné t se spojitou derivací. Platí tedy

$$\varphi(1) - \varphi(0) = (1 - 0)\,\varphi'(\Theta),\ 0 < \Theta < 1 \qquad (1)$$

kde $\varphi'(t)$ značí derivaci funkce $\varphi(t)$. Poněvadž

$$\begin{aligned} \varphi(1) = f(a + h,\ b + k,\ c + l),\ \varphi(0) &= f(a, b, c),\\ \varphi'(t) = h\,f_x'(a + ht,\ b + kt,\ c + lt) &+ \\ + k\,f_y'(a + ht,\ b + kt,\ c + lt) &+ \\ + l\,f_z'(a + ht,\ b + kt,\ c + lt)&, \end{aligned}$$

je podle (1)

$$\begin{aligned} &f(a + h,\ b + k,\ c + l) - f(a, b, c) = \\ &= h\,f_x'(a + \Theta h,\ b + \Theta k,\ c + \Theta l) + \\ &+ k\,f_y'(a + \Theta h,\ b + \Theta k,\ c + \Theta l) + \\ &+ l\,f_z'(a + \Theta h,\ b + \Theta k,\ c + \Theta l). \end{aligned} \qquad (2)$$

Rovnice (2) vyjadřuje *větu o přírůstku funkce* tří proměnných.*)

b) V odst. 36 byla vyložena Poincaréova methoda libovolných funkcí pro případ, ze hustota pravděpodobnosti $f(x)$ byla funkcí jedné proměnné. Vezmeme nyní v úvahu případ, že

*) Tento důkaz je uveden podle knihy *N. N. Luzin:* Differencialnoje izčislěnije (Moskva, 1946, p. 377—378).

hustota $f(x, y, z)$ pravděpodobnosti je spojitá funkce tří proměnných x, y, z se spojitými parciálními derivacemi f_x', f_y', f_z' v určitém oboru A. Předpokládáme, že A je část prostoru, v němž bod je určen pravoúhlými souřadnicemi x, y, z, omezená uzavřenou plochou. Pokud bod x, y, z je v A, nechť tyto derivace vyhovují podmínkám

$$|f_x'| < K, \; |f_y'| < K, \; |f_z'| < K \tag{3}$$

kde K je konstanta.

Rozdělme obor A na m oborů stejného objemu, které nazveme „elementární obory". Je-li A objem oboru A, má každý elementární obor objem

$$\varepsilon = \frac{A}{m}. \tag{4}$$

Při tom předpokládáme, že vzdálenost dvou bodů volených uvnitř téhož elementárního oboru je vždy kratší než délka l a že

$$\lim_{m \to \infty} l = 0. \tag{5}$$

Jinými slovy: roste-li m do nekonečna, blíží se všechny rozměry elementárního oboru nule.

Rozdělme pak každý elementární obor ve dvě části; každá z těchto částí může býti složena z menších dílů, jež leží odděleny jedny od druhých. Objem prvé části, kterou nazveme bílou, budiž $\lambda\varepsilon$ objem druhé části, kterou nazveme černou, je $(1 - \lambda)\varepsilon$. Poměr λ objemu bílé části k objemu celého elementárního oboru budiž konstantní; poměr ten je číslo obsažené mezi 0 a 1, které nezávisí ani na uvažovaném elementárním oboru ani na čísle m.

Zaveďme integrály I a I_1:

$$I = \iiint_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \quad I_1 = \iiint_{A_1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

integrál I má za integrační obor A, integrační obor A_1 integrálu I_1 je složen ze všech bílých částí obsažených uvnitř A.

Hodnota integrálu I_1 závisí na čísle m. ***Roste-li** m **do nekonečna, je***

$$\lim_{m \to \infty} I_1 = \lambda I. \tag{6}$$

Abychom dokázali rovnici (6), označme písmenem δ libovolný elementární obor sestrojený uvnitř A. Uvnitř δ je bod (x, y, z), ve kterém nabývá funkce $f(x, y, z)$ největší hodnoty M a bod $(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$, ve kterém ta funkce nabývá své nejmenší hodnoty M'. Podle předpokladu je

$$|\Delta x| \leqq l,\ |\Delta y| \leqq l,\ |\Delta z| \leqq l.$$

Vzhledem k (2) a (3) je

$$\begin{aligned} M - M' = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \\ - f(x, y, z) < 3lK. \end{aligned} \tag{7}$$

Násobme číslem λ tu část integrálu I, která patří k uvažovanému elementárnímu oboru δ; součin je menší než $\lambda M \varepsilon$, je-li ε objem oboru δ. Ta část integrálu I_1, která se vztahuje k bílé části oboru δ, je větší než $\lambda M' \varepsilon$. Rozdíl onoho součinu a této části integrálu I_1 je menší než

$$(M - M')\, \varepsilon \lambda < 3l\lambda K \varepsilon = \frac{3l\lambda KA}{m},$$

jak plyne z (7) a (4). Trojnásobný integrál $(\lambda I - I_1)$ je limita součtu m takových rozdílů; proto je

$$|\lambda I - I_1| < 3l\lambda KA. \tag{8}$$

Vzhledem k (5) konverguje $(\lambda I - I_1)$ k nule, roste-li m do nekonečna; tím je dokázána správnost rovnice (6).

Obdobný výsledek platí pro funkci libovolného počtu nezávisle proměnných. V případě, že f je funkce jen jedné nezávisle proměnné a že $\lambda = \frac{1}{2}$, vyjadřuje (6) Poincaréovu větu uvedenou v předešlém odstavci.

c) Vraťme se k funkci $f(x, y, z)$ tří proměnných a předpokládejme, že f nezávisí na z. Pak je třetí člen na pravé straně rovnice (2) roven nule a proto budeme míti na místo (7) nerovnost

$$M - M' < 2lK. \tag{9}$$

Předpokládejme nyní, že utvoříme integrály I a I_1 s trojrozměrnými integračními obory A resp. A_1 jako dříve, s tím rozdílem, že „elementární obory" budou míti s rostoucím m do nekonečna, nekonečně malé rozměry ve směrech Ox a Oy; připustíme však, že rozměry elementárních oborů nejsou nekonečně malé ve směru Oz. Bude tedy

$$|\Delta x| \leqq l, \; |\Delta y| \leqq l, \; \lim_{m \to \infty} l = 0,$$

bude platiti nerovnost (9), a z ní plyne, že (8) se promění na

$$|\lambda I - I_1| < 2l\lambda KA. \tag{10}$$

Z toho pak následuje, že rovnice (6) platí i v tomto případě: $f(x, y, z)$ nezávisí na z a rozměry elementárních oborů, měřené rovnoběžně k Oz, nemají za limitu nulu.

38. Nové řešení úlohy o jehle. a) Na vodorovné rovině jsou narýsovány ekvidistantní rovnoběžky; vzdálenost dvou sousedních rovnoběžek budiž $2a$. Hodíme na rovinu jehlu o délce $2b$. Úlohou je vypočítati pravděpodobnost p, že jehla protne některou rovnoběžku.

Vyjádříme nejprve podrobně předpoklady, za kterých konáme pokusy: Rovnoběžky jsou narýsovány na vodorovném čtverci C, jehož strana má délku $2na$ (počet rovnoběžek $= n + 1$). Jeden vrchol čtverce je v počátku O pravoúhlých souřadnic a dvě jeho strany leží v osách Ox a Oy. Vrcholy čtverce mají tedy souřadnice

$$(0, 0), \; (2na, 0), \; (2na, 2na), \; (0, 2na).$$

Rovnoběžky narýsované na čtverci mají rovnice

$$y = 0, \; y = 2a, \; y = 4a, \; \ldots, \; y = 2na,$$

a dělí jej na n shodných obdélníků o rozměrech $2na$ a $2a$. Na začátku každého pokusu umístíme jehlu ve středu čtverce C tak, že její osa je svislá a udělíme jí pak určitou rychlost ve směru svislém vzhůru. Jehla ovšem není na počátku v naprosto přesně svislé poloze, počáteční náraz, kterým se jehla uvádí do pohybu, mění se od pokusu k pokusu co do směru i velikosti, třebaže jen v malých mezích. Proto dopadá jehla v různých pokusech na různá místa čtverce. Ale odchylky v počátečních podmínkách nesmějí býti příliš veliké, poněvadž jehla nemá padnouti mimo čtverec. Předpokládáme, že je málo pravděpodobno, že jehla dopadne na obvod čtverce. Budiž p_1 pravděpodobnost, že střed jehly dopadne dovnitř čtverce o straně 1 cm, jenž je narýsován poblíže středu čtverce C; budiž pak p_2 obdobná pravděpodobnost pro plošku 1 cm^2 položenou poblíž obvodu čtverce C. Patrně bude $p_1 > p_2$.

Nazveme x, y souřadnice bodu, do kterého padne střed jehly a písmenem ω prostou velikost její odchylky od osy Oy; při tom nepřihlížíme k orientaci jehly, takže je vždy $0 \leqq \omega \leqq \frac{1}{2}\pi$. Hustota pravděpodobnosti pro dopad středu jehly na určité místo x, y a pro určitý úhel ω budiž $f(x, y)$, nezávislá na ω. Funkce $f(x, y)$ je kladná, má spojité parciální derivace 1. řádu takové, že

$$|f_x'| < K, \ |f_y'| < K$$

a vyhovuje podmínce

$$\iiint_A f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\omega = 1, \tag{1}$$

kde A značí obor všech možných případů určený podmínkami:

$$0 \leqq x \leqq 2na, \ 0 \leqq y \leqq 2na, \ 0 \leqq \omega \leqq \tfrac{1}{2}\pi.$$

b) Hledaná pravděpodobnost p je vyjádřena vzorcem

$$p = \iiint_{A_1} f(x, y,)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\omega, \tag{2}$$

kde A_1 je obor všech případů, ve kterých jehla protne některou rovnoběžku. Je-li h vzdálenost středu jehly od té rovnoběžky, kterou protíná ($h \leqq b$), je

$$0 \leqq \omega \leqq \arccos \frac{h}{b};$$

obor A_1 je definován nerovnostmi

$$0 \leqq x \leqq 2na, \; 2\nu a \leqq y \leqq 2\nu a + b,$$

$$0 \leqq \omega \leqq \arccos \frac{y - 2\nu a}{b}$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \dots, n - 1)$$

pro případ, že pořadnice y je větší než pořadnice proťaté (ν-té) rovnoběžky, a nerovnostmi

$$0 \leqq x \leqq 2na, \; 2\nu a - b < y < 2\nu a,$$

$$0 \leqq \omega \leqq \arccos \frac{2\nu a - y}{b}$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, n)$$

pro případ, že pořadnice y je menší než pořadnice proťaté (ν-té) rovnoběžky.

Považujme x, y a ω za obyčejné pravoúhlé souřadnice bodu v prostoru a sledujme tvary oborů A a A_1. Obor A je pravoúhlý rovnoběžnostěn, jehož základnou je čtverec C a jehož výška se rovná $\frac{1}{2}\pi$. Rozdělíme obor A na n^2 elementárních oborů dvěma soustavami rovin kolmých k rovině čtverce C; jednak rovinami, které procházejí každá jednou z daných rovnoběžek:

$$y = 2\nu a, \; (\nu = 1, 2, \dots, n - 1),$$

jednak rovinami kolmými k předešlým:

$$x = 2\nu a, \; (\nu = 1, 2, \dots, n - 1).$$

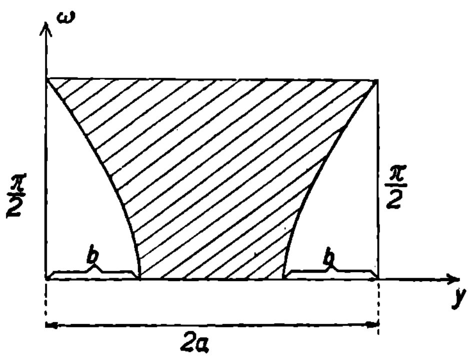
Každý elementární obor je tedy pravoúhlý hranol, jehož základna je čtverec o straně $2a$ a jehož výška je rovna $\frac{1}{2}\pi$. Rozdělme dále tyto elementární obory válcovými plochami (jichž hrany jsou rovnoběžné s osou Ox):

$$\omega = \arccos \frac{y - 2\nu a}{b}, \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n - 1\,;\; y > 2\nu a)$$

a

$$\omega = \arccos \frac{2\nu a - y}{b}, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\, y < 2\nu a).$$

Každý elementární obor se tak rozdělí na dvě části. Jedna, kterou nazveme bílou je tvořena body (x, y, ω) znázorňujícími případy, kdy jehla protíná jednu ze dvou sousedních rovnoběžek; druhá, kterou nazveme černou, je tvořena zbytkem oboru. V obr. 18 je řez elementárního oboru rovinou kolmou k Ox; je patrno, že bílá část (nevyčárkovaná) se skládá ze dvou vzájemně nesouvisících dílů.



Obr. 18.

Obor A_1 je tvořen souborem všech bílých částí. Poměr bílé části k celému elementárnímu oboru je roven poměru bílé plochy v obr. 18 k celé ploše obrazce, tedy

$$\lambda = \left(2\int\limits_0^b \arccos\frac{h}{b}\,\mathrm{d}h\right) : 2a\tfrac{1}{2}\pi = \frac{2b}{\pi a}. \tag{3}$$

V označení nerovnosti (10) odst. 37 je

$$\lambda = \frac{2b}{\pi a},\quad z = \omega,\, m = n^2,\, l = 2a,\, A = 2n^2a^2\pi,$$

takže podle (10) bude

$$|\lambda I - I_1| < 16ba^2n^2\pi K.$$

Připusťme, že počet rovnoběžek n roste do nekonečna a že při tom se nemění ani poměr b/a ani plocha P čtverce C. Je tedy $P = 4a^2n^2$, $\lim a = 0$, $\lim b = 0$, takže platí podle (6) odst. 37

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda I - I_1) = 0;$$

podle (1), (2) a (3) odst. 38 je

$$I = 1,\; p = \lim_{n\to\infty} I_1 = \lambda I = \lambda = \frac{2b}{\pi a}.$$

Výsledek vyjádříme takto: *Je-li počet rovnoběžek narýsovaných ve čtverci C velmi veliký, je za předpokladů uvedených v odst. 38a pravděpodobnost, že jehla protne některou rovnoběžku, rovna přibližně $2b : \pi a$.*

c) Kdyby hustota pravděpodobnosti, že střed jehly dopadne na dané místo čtverce C, byla konstantní $= f$, měli bychom místo (1)

$$f \,.\int\limits_{\omega=0}^{\frac{1}{2}\pi}\int\limits_0^{2na}\int\limits_0^{2na} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\omega = 2n^2a^2\pi \,.\, f = 1;$$

hledaná pravděpodobnost by byla vzhledem k (2) rovna

$$p = \frac{\iiint\limits_{A_1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\omega}{\iiint\limits_{A} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\omega} = \lambda = \frac{2b}{\pi a},$$

neboť všechny elementární obory jsou stejné a poměr obou trojnásobných integrálů je totožný s poměrem bílé části elementárního oboru k celému oboru, kterýžto poměr je určen rovnicí (3). Tento výsledek se shoduje s dříve podaným důkazem Buffonova vzorce; viz rovnici (4) odst. 33.*)

39. Valivý pohyb koule po vodorovné rovině. a) Na povrchu koule o poloměru a je dán sférický obrazec S omezený uzavřenou křivkou bez dvojného bodu. Položíme kouli na vodorovnou rovinu α tak, že z počátku bod O kulového povrchu dotýká se jí v bodě O_1; v dalším budeme značiti body ležící na povrchu koule písmeny $O, A, B, \ldots$ a body ležící v rovině α písmeny s indexy: $O_1, A_1, B_1, \ldots$. Udělme kouli vodorovný náraz, takže se valí po rovině a zastaví se posléze (vlivem tření a pod.) v určité konečné poloze; budiž T_1 bod dotyku, v němž se rovina α dotýká koule a T příslušný bod kulového povrchu, splývající v konečné poloze s T_1. Pravděpodobnost p, že T leží uvnitř obrazcè S, vyjádříme za těchto předpokladů:

I. Počáteční poloha koule vůči rovině α je předepsána (bod O splývá s O_1).

II. Koule se valí po rovině bez klouzání a její počáteční rychlost nepřekročí určité meze, takže střed koule opíše úsečku ne delší než $2\pi na$ (koule se otočí nejvýše n-krát kolem vodorovného průměru). Bod O opisuje při tom cykloidu obsaženou ve svislé rovině procházející bodem O_1. Směr úsečky opsané středem koule může býti jakýkoli, ovšem vodorovný; n je veliké kladné celé číslo.

---

*) Výsledky uvedené v odst. 38 jsem uveřejnil v pracích Nové řešení Buffonovy úlohy o jehle (Rozpravy České Akademie, II. tř. R. 26, č. 13, 1917); Sur une nouvelle solution du problème de l'aiguille (Bulletin des sciences mathématiques, 2e série, t. 44, 126—136, 1920). *M. Fréchet* doplnil moje úvahy v článku Remarque sur les probabilités continues (Bull. des sc. math. 2e série, t. 45, 87—88, 1921). Viz též *Fréchet-Halbwachs:* Le calcul des probabilités à la portée de tous p. 49 (Paris, 1924); *Fréchet:* Recherches théoriques modernes sur le Calcul des probabilités, fasc. 1. (Paris, 1925).

III. p lze vyjádřiti integrálem

$$p = \iint_P F(\varrho)\, \varrho \, d\varrho \, d\varphi \tag{1}$$

kde ϱ a φ jsou polární souřadnice v rovině α s pólem v bodě O_1; $\varrho \, d\varrho \, d\varphi$ je element plošného obsahu v rovině; hustota pravděpodobnosti $F(\varrho)$ (t. j. pravděpodobnost připadající na 1 cm² roviny) je kladná spojitá funkce průvodiče ϱ, jejíž derivace je menší než daná konstanta K, a platí, že

$$\iint_C F(\varrho)\, \varrho \, d\varrho \, d\varphi = 2\pi \int_0^{2\pi n a} F(\varrho)\, \varrho \, d\varrho = 1, \tag{2}$$

kde C značí kruh opsaný v rovině α kolem bodu O_1 poloměrem $2\pi n a$. P značí obor všech příznivých případů, t. j. množství všech bodů, které mohou býti body dotyku T_1 roviny s koulí v její konečné poloze.

b) Všimněme si případu, že hustota $F(\varrho)$ pravděpodobnosti, která nezávisí na φ, nezávisí ani na ϱ. Položíme-li $F(\varrho) = c$, dá rovnice (2)

$$2\pi c \int_0^{2\pi n a} \varrho \, d\varrho = 4\pi^3 c n^2 a^2 = 1,$$

tedy

$$c = \frac{1}{4\pi^3 n^2 a^2}$$

a podle (1) bude

$$p = \frac{1}{4\pi^3 n^2 a^2} \iint_P \varrho \, d\varrho \, d\varphi. \tag{3}$$

Dvojnásobný integrál (3) se rovná plošnému obsahu „oboru příznivých případů"; ve jmenovateli je obsah kruhu C.

c) V některých případech, i když funkce $F(\varrho)$ není konstantní, lze počítati, aspoň přibližně, hodnotu p hledané pravděpodobnosti methodou obdobnou methodě vyložené v odst. 36 (zobecněná úloha o ruletě) nebo v odst. 38 (problém jehly). Místo elementárních oborů máme zde mezikruží, která vzniknou, dělíme-li kruh C kružnicemi o středu O_1 a poloměrech $2\pi a, 4\pi a, 6\pi a, \ldots, (n - 1)2\pi a$. Tři takové příklady jsou uvedeny v následujícím odstavci.

40. Tři příklady valivého pohybu koule. a) Na kouli narýsujeme hlavní kružnici, která dělí její povrch na dvě stejně veliké části; jednu „červenou" a druhou „bílou". Kouli položíme na vodorovnou rovinu α tak, aby střed O červené části splýval s bodem O_1 roviny, jenž je tedy bodem dotyku roviny a koule. Uveďme pak kouli do pohybu za podmínek uvedených v odst. 39. Jak veliká je pravděpodobnost p, že se koule zastaví v takové poloze, že se dotýká roviny bodem ležícím v červené části kulového povrchu?

Výpočet obdobný výpočtu v odst. 37—38 vede k výsledku:*)

$$|p - \tfrac{1}{2}| < 4\pi^3 n^2 a^3 K, \tag{1}$$

kde ve shodě s označením odst. 39 značí

a = poloměr koule,

n = největší počet obrátek, které koule při valivém pohybu může vykonati,

K = horní mez derivace hustoty pravděpodobnosti $F(\varrho)$,

p = je obecně dána rovnicí (1) odst. 39.

Je-li pravá strana nerovnosti (1) dosti malá, je p přibližně rovno $\frac{1}{2}$. V případě, že $F(\varrho) = \text{const}$, je $K = 0$, a tedy $p = \frac{1}{2}$.

b) Do koule je vepsána krychle o vrcholech $ABCDEFGH$. Sestrojme nad každou hranou krychle oblouk hlavní kružnice, takže se povrch koule rozdělí na šest křivočarých čtyřúhelníků, které označíme I, II, ..., VI. Čtyřúhelník VI budiž

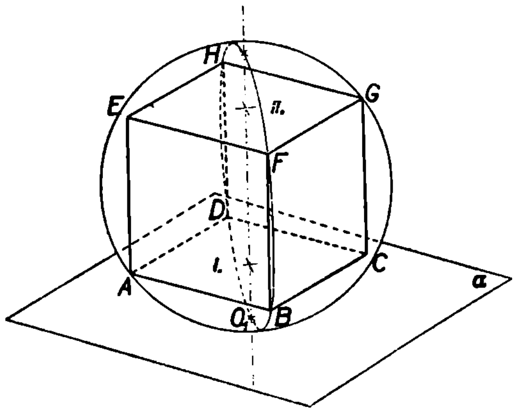
*) Uvádím zde jen výsledky; stran podrobností viz můj článek Sur la méthode des fonctions arbitraires (Acta Mathematica, 40, 95—113, 1926), moje spisy Geometrické pravděpodobnosti (Praha, 1926, odst. 40), Méthodes générales du Calcul des Probabilités (Mémorial des sciences mathém. 52, Paris, 1930, No 2).

protilehlý k I. V počáteční poloze nechť koule leží na rovině α tak, že střed čtyřúhelníku I splývá s O_1 (obr. 19). Pravděpodobnost p_{I}, že se koule zastaví tak, že bod dotyku bude v čtyřúhelníku I, rovná se příslušné pravděpodobnosti p_{VI} pro čtyřúhelník VI a platí

$$|p_{\mathrm{I}} - \lambda| < 8\pi^3 n^2 a^3 K \lambda, \tag{2}$$

kde

$$\lambda = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \arcsin \sqrt{\frac{2}{3 + \sin 2\varphi}} \, . \, \mathrm{d}\varphi = 0{,}267\ldots$$



Obr. 19.

Je tedy, pokud pravá strana (2) je dosti malá,

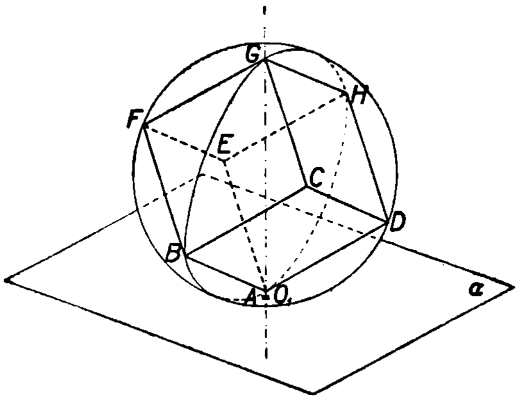
$$p_{\mathrm{I}} = 0{,}267\ldots \tag{3}$$

Dále platí

$$p_{\mathrm{II}} = p_{\mathrm{III}} = p_{\mathrm{IV}} = p_{\mathrm{V}} = 1 - 2p_{\mathrm{I}} = 0{,}466\ldots \tag{4}$$

Rovnice (3) a (4) platí přesně, je-li $F(\varrho) = \text{const}$, tedy $K = 0$.

c) Do koule je zase vepsána krychle jako v předešlé úloze. V počáteční poloze dotýká se koule roviny α ve vrcholu A krychle (viz obr. 20). Pravděpodobnost, že bod dotyku koule s rovinou bude ležeti v jednom ze šesti křivočarých čtyřúhelníků je stejná pro všech šest čtyřúhelníků a rovná se, pro případ, že $F(\varrho) = \text{const}$, jedné šestině.*)



Obr. 20.

*) Je-li $F(\varrho)$ konstantní, vede výpočet pravděpodobnosti p pro kterýkoli ze šesti čtyřúhelníků k hodnotě

$$p = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \arcsin \frac{2}{\sqrt{5 - \sin(\frac{1}{6}\pi + 2\varphi)}} \, d\varphi;$$

arcsin je určen podmínkou, že s rostoucím φ v intervalu $(0, \frac{1}{3}\pi)$ stále roste a rovná se $\frac{1}{2}\pi$, když φ se rovná $\frac{1}{6}\pi$. Poněvadž součet šesti pravděpodobností je 1, musí býti $p = \frac{1}{6}$. Pan prof. O. Borůvka mně sdělil (v dopise ze dne 8. září 1925) důkaz, kterým se přímo odůvodňuje, že uvedený integrál se rovná $\frac{1}{6}\pi^2$, takže $p = \frac{1}{6}$.

41. Poznámky o geometrických pravděpodobnostech. V odstavci 37—40 jsme ukázali, jak se „regularisace“ zavedená Poincarém v úloze o ruletě (odst. 36) přenáší na jiné úlohy o geometrických pravděpodobnostech. I když hustoty pravděpodobností, ze kterých se vychází (n. př. pro zastavení roztočené rulety nebo pro dopad středu jehly) nejsou konstantní, lze odůvodniti, že hledané pravděpodobnosti (že ruleta se zastaví u červené výseče, že jehla protne některou rovnoběžku) mají přibližně takové hodnoty, jaké jim přisuzuje elementární theorie založená na počtu s konstantními hustotami pravděpodobnosti. Elementární definice geometrických pravděpodobností (odst. 26, 27) založené na obdobě s původní definicí pro nejjednodušší úlohy (odst. 1) se doplňují zvláštními vztahy, které v odst. 36—40 byly odvozeny mezi určitými pravděpodobnostmi s proměnnou hustotou a pravděpodobnostmi hledanými. Srovnajíce elementární způsob s tímto obecnějším docházíme k odůvodnění a vysvětlení pojmu „stejně pravděpodobných případů“, které n. př. pro hod kostkou shrneme takto: vržená kostka koná složitý valivý pohyb než se zastaví a počítáme s tím, že je nekonečně mnoho poloh, ve kterých se může na konec zastaviti a že každá z nich má obecně jinou pravděpodobnost. Přece však usuzujeme, že pravděpodobnost kteréhokoli počtu ok je rovna $\frac{1}{6}$. Nebylo by snadné vzíti do počtu valivý pohyb kostky a podrobně odůvodniti, proč čekáme se stejnou pravděpodobností každý ze šesti případů. Ale cesta k tomuto cíli je naznačena řešením úlohy (viz hlavně odst. 40c) o valivém pohybu koule po rovině; povrch koule je rozdělen na šest shodných sférických čtyřúhelníků, jichž vrcholy jsou zároveň vrcholy krychle vepsané do koule. S tohoto hlediska jsou nejen úlohy o vrhu kostkou nebo penízem, nýbrž vůbec všechny úlohy o pravděpodobnostech týkající se pohybu těles úlohami o geometrických pravděpodobnostech; ačkoli nás zajímá pravděpodobnost zjevu zdánlivě zcela jednoduchého (kolik ok padne při hodu kostkou, padne-li peníz na líc či na rub), nezapomínáme, že možných případů je nekonečně mnoho.*)

---

*) O geometrických pravděpodobnostech jednají mimo knihy již dříve uvedené, tyto spisy:

Crofton: Probability (článek v Encyklopedia Britannica).

Czuber: Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelworte (Leipzig, 1889). Vyšlo též francouzsky:

Czuber-Schuermans: Probabilités et moyennes géométriques (Paris, 1902).

Hostinský: Sur les probabilités géométriques (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university č. 50, Brno, 1925).

Hostinský: Geometrické pravděpodobnosti (Praha, 1926).

Deltheil: Probabilités géométriques (Paris, 1926).