2. DETERMINANT A JEHO ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI.

Definice 3. Čtverečné schema

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{matrix} \right\| \tag{5}$$

sestavené z n^2 prvků $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ nazýváme n-řadovou (čtverečnou) *maticí* (matrix) těchto elementů. Nechceme-li ji obšírně vypisovati, užíváme pro ni značky $\|a_{ik}\|$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$.

Poznámka. Protože je celkem $(n^2)!$ různých permutací prvků $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$, lze z nich sestaviti $(n^2)!$ různých n-řadových matic. Tak na př. můžeme ze čtyř prvků 1, 2, 3, 4 zbudovati celkem $4! = 24$ dvouřadových matic.

Definice 4. *V součinu $a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$ permutujme při nezměněných posicích indexů prvých (t. zv. řádkových) indexy druhé (sloupcové) a každý nový součin*

$$a_{1k_1}a_{2k_2}a_{3k_3}\ldots a_{nk_n}$$

takto vzniklý opatřeme znaménkem + resp. — podle toho, zda je permutace

$$k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$$

sudá či lichá. Dostaneme tak celkem $n!$ součinů, z nichž má polovina znaménko + a polovina —; tyto součiny sloučíme. Číslo

$$A = \Sigma \operatorname{sgn} \Pi(k)\, a_{1k_1}a_{2k_2}a_{3k_3}\ldots a_{nk_n} \tag{6}$$

takto vzniklé se nazývá determinantem matice (5) *a užíváme pro ně vedle* (6) *také symbolů*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad A = |a_{ik}|;\ i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Poznámky. 1. Čísla a_{ik} se jmenují prvky determinantu A, jednotlivé součiny, o nichž byla právě řeč, jak jeho členy. Determinant má n řádků a n sloupců (říkáme: determinant n-řadový), n^2 prvků a $n!$ členů. Z konstrukce je zřejmo, že každý člen obsahuje právě po jednom prvku z každé řádky a právě po jednom z každého sloupce. Prvky a_{ii} ($i = 1, 2, \ldots, n$) jsou t. zv. hlavní (tvoří hlavní úhlopříčku determinantu), člen $a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$ se jmenuje členem hlavním (je zřejmě opatřen znaménkem $+$).

2. Jsou-li (r), (s) dvě permutace prvků $1, 2, \ldots, n$, jest výraz $a_{r_1s_1}a_{r_2s_2} \ldots a_{r_ns_n}$, opatřený vhodným znaménkem, očividně členem determinantu A. Příslušné znaménko určíme snadno touto úvahou: Pozměníme pořadí faktorů tak, aby onen součin nabyl tvaru $a_{1k_1}a_{2k_2} \ldots a_{nk_n}$; z něho vidíme ihned, že má ve smyslu definice 4. tento člen daného determinantu znaménko $\operatorname{sgn}\Pi(k)$, takže je také součin $a_{r_1s_1}a_{r_2s_2} \ldots a_{r_ns_n}$, jakožto člen determinantu A, opatřen tímto znaménkem. Nahlédneme nyní lehko, že jest $\operatorname{sgn}\Pi(k) = +1$, mají-li obě permutace (r), (s) stejnou třídu a $\operatorname{sgn}\Pi(k) = -1$ v případě opačném. Při uvedeném přerovnávání činitelů svrchu zmíněného součinu přešla totiž permutace (r) jistým počtem t transposic v permutaci $1, 2, \ldots, n$ a zároveň (tímto počtem t transposic) permutace (s) v (k). Jsou-li (r), (s) obě sudé (liché), jest t nutně číslo sudé (liché) vzhledem k sudosti permutace $1, 2, \ldots, n$ a proto bude (k) permutací sudou a $\operatorname{sgn}\Pi(k) = +1$, jak bylo dokázati. Analogicky se přesvědčíme o správnosti druhé části tvrzení výše uvedeného a vyslovíme výsledek právě provedené úvahy takto:

Součin $a_{r_1s_1}a_{r_2s_2} \ldots a_{r_ns_n}$ má, jakožto člen determinantu matice (5), znaménko + v případě, že jsou obě permutace (r), (s) stejné třídy; jinak má znaménko —.

3. Konstrukci determinantu A matice (5) jsme mohli provésti také permutujíce v součinu $a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$ všemi možnými způsoby indexy řádkové při nezměněném pořadí indexů sloupcových. Byli bychom (ve smyslu úvah poznámky 2.) dospěli k témuž determinantu (6) resp. (7) jako dříve. Z toho plyne, že se hodnota determinantu nemění, píšeme-li řádky jako sloupce a naopak a dále, že každý výrok, dokázaný o řádcích, platí také o sloupcích.

Věta 3. *Vzájemnou výměnou dvou sloupců (nebo dvou řádků) změní determinant pouze své znaménko.*

Důkaz. V determinantu (6) spolu vyměňme na př. řádek r-tý a s-tý. Vznikne determinant $\bar{A}$, jehož r-tý řádek je $a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{sn}$ a s-tý řádek $a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn}$; ostatní řádky mají stejné pořadí, jako měly v A. Obecný člen $\bar{a}$ determinantu $\bar{A}$ (budiž na př. $r < s$) jest

$$\bar{a} = \operatorname{sgn}\Pi(k)\, a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{r-1,k_{r-1}}a_{sk_r}a_{r+1,k_{r+1}}\dots$$
$$\dots a_{s-1,k_{s-1}}a_{rk_s}a_{s+1,k_{s+1}}\dots a_{nk_n} =$$
$$= \operatorname{sgn}\Pi(k)\, a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{r-1,k_{r-1}}a_{rk_s}a_{r+1,k_{r+1}}\dots$$
$$\dots a_{s-1,k_{s-1}}a_{sk_r}a_{s+1,k_{s+1}}\dots a_{nk_n} = \operatorname{sgn}\Pi(k)\,.\,\frac{a}{\operatorname{sgn}\bar{\Pi}(k)},$$

kde a značí obecný člen původního determinantu A a $\bar{\Pi}(k)$ výraz, který vznikne z $\Pi(k)$ vzájemnou výměnou veličin k_r, k_s. Je tedy $\operatorname{sgn}\bar{\Pi}(k) = -\operatorname{sgn}\Pi(k)$ a proto $\bar{a} = -a$, takže každý člen nového determinantu je až na znaménko také členem determinantu původního a naopak. Je tedy opravdu $\bar{A} = -A$, jak věta tvrdí.

Jednoduchým důsledkem právě dokázaného je fakt, že determinant, jehož dvě rovnoběžné řady jsou stejné, je roven nule.

Věta 4. *Determinant je homogenní lineární funkcí prvků kterékoli své řady.*

Důkaz. Podle poznámek k definici 4. obsahuje každý z $n!$ členů determinantu A jeden a jen jeden prvek libovolné řady. Máme-li na mysli speciálně na př. řádek r-tý, rozdělí se všech $n!$ členů daného determinantu na n skupin po $(n - 1)!$ členech: První z nich zahrnuje všechny členy determinantu A, které obsahují prvek a_{r1}, druhá ty, které mají za faktor element $a_{r2}, \ldots$, až n-tá ty, v nichž figuruje a_{rn}. Lze tedy psáti

$$A = a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \ldots + a_{rn}A_{rn}; \tag{8}$$

výrazy $A_{r1}, A_{r2}, \ldots, A_{rn}$ jsou součty součinů po $n - 1$ činitelích. Protože pak žádný z těchto součinů už neobsahuje jako faktor prvek řádku r-tého, je rovnicí (8) věta 4. dokázána.

Věta 5. Výraz A_{rs} ve vztahu (8) je $(-1)^{r+s}$ násobný determinant stupně $(n - 1)$-ho, který vznikne z A vynecháním těch řad, jež se kříží v prvku a_{rs} (t. j. r-tého řádku a s-tého sloupce). Označíme-li tento determinant znakem M_{rs}, máme tedy

$$A_{rs} = (-1)^{r+s}M_{rs}. \tag{9}$$

Důkaz. Nejprve si objasníme význam výrazu A_{11}. Sloučením všech $(n - 1)!$ členů determinantu A, které obsahují faktor a_{11}, dostaneme podle věty 4. hodnotu $a_{11}A_{11}$, takže je A_{11} součtem $(n - 1)!$ sčítanců tvaru

$$a_{2k_2}a_{3k_3} \ldots a_{nk_n},$$

z nichž má každý znaménko určené třídou příslušné permutace $1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ čísel $1, 2, 3, \ldots, n$, tedy znaménko dané permutací $k_2, k_3, \ldots, k_n$ čísel $2, 3, \ldots, n$. Je tudíž A_{11} podle definice 4. rovno determinantu s hlavním členem $a_{22}a_{33} \ldots a_{nn}$, t. j. determinantu M_{11}, jak o něm mluví věta 5. Pro $r = s = 1$ jsou tudíž vztah (9) a tím i věta 5. dokázány.

Při obecných hodnotách indexů r, s změníme tvar determinantu A tak, aby se element a_{rs} stal prvním hlavním (t. j. přešel na to místo, kde dříve stál prvek a_{11}) při nezměněném pořadí řad, které prvek a_{rs} neobsahují. Pro determinant $\bar{A}$ takto vzniklý najdeme podle věty 3. snadno (doporučuji provésti podrobně!)

$$\bar{A} = (-1)^{r+s}A.$$

Rozviňme nový determinant $\bar{A}$ podle vzorce (8):

$$\bar{A} = \bar{a}_{11}\bar{A}_{11} + \ldots;$$

nyní však jest $\bar{a}_{11} = a_{rs}$, $\bar{A}_{11} = M_{rs}$, takže máme

$$\bar{A} = (-1)^{r+s}A = a_{rs}M_{rs} + \ldots,$$

kdežto násobením rovnice (8) hodnotou $(-1)^{r+s}$ dostáváme

$$(-1)^{r+s}A = \ldots + (-1)^{r+s}a_{rs}A_{rs} + \ldots$$

Porovnáním obou výrazů (rozmyslete si věc podrobně!) dostaneme

$$M_{rs} = (-1)^{r+s}A_{rs},$$

což je pouze jiný tvar vzorce (9).

Poznámky a doplňky. 1. Vzorci (8) a (9) je determinant A „*rozveden podle elementů r-té řádky*". Výraz M_{rs} je t. zv. *subdeterminant* (minor) prvku a_{rs} v determinantu A, A_{rs} pak t. zv. *doplněk* (komplement) onoho prvku v determinantu A. Determinant A lze ovšem také rozvinout podle elementů s-tého sloupce ve tvaru

$$A = a_{1s}A_{1s} + a_{2s}A_{2s} + \ldots + a_{ns}A_{ns}. \tag{10}$$

2. Ze skutečností, vyjádřených větami 4. a 5., nahlédneme snadno správnost tohoto tvrzení: Nahradíme-li ve vzorci (8), jehož A_{rs} jsou dána relacemi (9), veličiny $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}$ novými $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, dostaneme výraz rovný determinantu A_α, který se od A liší jen tím, že jeho r-tý řádek zní $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, místo původního $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}$.

3. O řadě čísel $l_1, l_2, \ldots, l_n$ říkáme, že jest lineární kombinací řad $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$; $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$; …; $a_{m1}, a_{m2}, \ldots, \ldots, a_{mn}$, existují-li veličiny $c_1, c_2, \ldots, c_m$ (mohou býti i vesměs rovny nule) tak, že platí n rovnic

$$l_\nu = c_1 a_{1\nu} + c_2 a_{2\nu} + \ldots + c_m a_{m\nu}; \; \nu = 1, 2, \ldots, n. \qquad (11)$$

Opírajíce se o tuto definici, dokážeme si jednoduše, že se *hodnota determinantu nemění, když k jeho libovolné řadě* (na př. k r-tému řádku) *přičteme libovolnou lineární kombinaci jiných řad rovnoběžných*. Jsou-li to na př. řady $r_1, r_2, \ldots, r_\varrho$-tá, násobené konstantami $c_1, c_2, \ldots, c_\varrho$, zůstanou všechny elementy determinantu A beze změny, až na řádek r-tý, jehož obecný element bude míti místo původního tvaru a_{rs} nový $a_{rs} + c_1 a_{r_1 s} + c_2 a_{r_2 s} + \ldots + c_\varrho a_{r_\varrho s}$. Rozvedeme-li tento nový determinant $\overline{\overline{A}}$ podle elementů r-tého řádku, vyjde nám podle vzorců (8) a (9) a ve smyslu předchozí poznámky:

$$\overline{\overline{A}} = \sum_{s=1}^{n} (a_{rs} + c_1 a_{r_1 s} + c_2 a_{r_2 s} + \ldots + c_\varrho a_{r_\varrho s}) A_{rs} =$$
$$= A + c_1 A_1 + c_2 A_2 + \ldots + c_\varrho A_\varrho = A,$$

protože má každý z determinantů $A_1, A_2, \ldots, A_\varrho$ dvě řádky stejné (A_1 na př. r-tou a r_1-tou) a tedy hodnotu nulovou.

4. Dokažte pomocí vět 3., 4. a 5., že doplňky $A_{r1}, A_{r2}, \ldots \ldots, A_{rn}$ vyhovují těmto n rovnicím:

$$\begin{aligned} a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \ldots + a_{rn}A_{rn} &= A \\ a_{\varrho 1}A_{r1} + a_{\varrho 2}A_{r2} + \ldots + a_{\varrho n}A_{rn} &= 0; \\ \varrho = 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n&. \end{aligned} \qquad (12)$$

Pomocí Kroneckerova symbolu, definovaného vzorci

$$\delta_{ik} = 0 \text{ pro } i \neq k, \; \delta_{ii} = 1; \; i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

lze relace (12) psáti ve tvaru

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\varrho\nu} A_{r\nu} = \delta_{\varrho r} A; \; \varrho = 1, 2, \ldots, n. \qquad (12,1)$$

Přesvědčte se dále o správnosti analogických vztahů

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu\sigma} A_{\nu s} = \delta_{\sigma s} A; \ \sigma = 1, 2, \ldots, n. \tag{12,2}$$

Příklady.

1. Jest určiti hodnotu $(n + 1)$-řadového determinantu

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, \ldots, & 0, & 0, & a_0 \\ -x, & 1, & 0, \ldots, & 0, & 0, & a_1 \\ 0, & -x, & 1, \ldots, & 0, & 0, & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & 1, & 0, & a_{n-2} \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & -x, & 1, & a_{n-1} \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & 0, & -x, & a_n \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Píšeme-li pro náš účel místo $f(x)$ na okamžik znak f_n, dostaneme rozvedením podle prvků posledního řádku ihned rekurentní vzorec

$$f_n = x \,.\, f_{n-1} + a_n$$

a z něho výsledek

$$f(x) = f_n = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n. \tag{13'}$$

Vidíme tedy, že lze každý polynom n-tého stupně proměnné x vyjádřiti $(n + 1)$-řadovým determinantem.

2. Jako pěknou aplikaci vzorců (12,1) a (12,2) si dokážeme správnost tohoto tvrzení: *Je-li determinant roven nule, jsou doplňky prvků jeho libovolné řady úměrny doplňkům prvků kterékoli jiné řady s prvou rovnoběžné.*

Doplněk A_{r1} pišme ve tvaru n-řadového determinantu, který z A vznikne tím, že v něm nahradíme elementy r-té řádky po řadě čísly $1, 0, 0, \ldots, 0$ a násobme pak k-tý sloupec $(k \neq 1)$ tohoto doplňku číslem A_{sk} (t. j. komplementem prvku a_{sk} v determinantu A). Determinant, jejž tím dostaneme, má zřejmě hodnotu $A_{r1} A_{sk}$; jeho tvar pozměníme nyní tak, že k jeho k-tému sloupci přičteme prvý znásobený

A_{s1}, druhý násobený A_{s2}, ..., až konečně A_{sn}-násobný sloupec n-tý. Hodnota determinantu zůstává těmito změnami zřejmě nedotčena, jeho k-tý sloupec však bude složen — rozvažte si věc podrobně, užívajíce vzorců (12,1) a předpokladu, že je $A = 0$ — ze samých nul, jenom na jeho r-tém místě stojí výraz A_{s1}. Rozvedením tohoto determinantu o hodnotě $A_{r1}A_{sk}$ podle elementů k-tého sloupce dostaneme $A_{s1}A_{rk}$ a proto

$$A_{r1}A_{sk} = A_{s1}A_{rk}.$$

Klademe-li sem postupně $k = 2, 3, \ldots, n$, získáváme rovnice vyjadřující vzájemnou úměrnost doplňků prvků řádku r-tého a s-tého, jak o ní mluví výše uvedená věta.