1. LINEÁRNÍ ZÁVISLOST ČÍSELNÝCH SOUSTAV.

Definice 1. Číselné soustavy v počtu $m(\geqq 1)$ po n číslech

$$a_{\mu 1}, a_{\mu 2}, \ldots, a_{\mu n}, \ (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{1}$$

nazýváme lineárně závislými, existují-li čísla c_μ, která nejsou všechna rovna nule tak, že platí n rovnic

$$\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu a_{\mu\nu} = 0; \ \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Je-li možno rovnice (2) splniti jenom tím, že položíme $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$, říkáme, že jsou soustavy (1) navzájem lineárně nezávislé.

Příklady. 1. Soustavy

$$\begin{array}{rrrr} 5, & -2, & 0, & 3 \\ 7, & 6, & -4, & 7 \\ -1, & -4, & 2, & -2 \end{array} \tag{3}$$

jsou navzájem lineárně závislé. Za čísla c_μ stačí zde vzíti: $c_1 = -1, c_2 = 1, c_3 = 2$.

2. Soustavy

$$\begin{array}{rrr} 8, & -2, & 3 \\ 0, & 1, & -5 \end{array} \tag{4}$$

jsou lineárně nezávislé. Z rovnic

$$8c_1 + 0 \cdot c_2 = 0, \ -2c_1 + 1 \cdot c_2 = 0, \ 3c_1 - 5c_2 = 0$$

totiž nutně vyplývá $c_1 = c_2 = 0$.

V dalších úvahách poznáme, že bývá často velmi důležité rozhodnouti o závislosti či nezávislosti předložených číselných soustav. Na druhé straně však není takovéto rozhodnutí vždy zcela jednoduché — to nahlédneme ostatně již z případu soustav uvedených v prvém příkladě. Zvláště tehdy, když jde o veliký počet soustav s mnoha čísly, byla by tato úloha prakticky vůbec neřešitelná. A právě v tomto bodě nám prokáže theorie determinantů a matic po prvé neocenitelnou službu, podávajíc spolehlivý a poměrně jednoduchý prostředek, jak o závislosti či nezávislosti soustav rozhodnouti.

Věta 1. Má-li matice $\|a_{ik}\|$, $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$ hodnost h, lze v ní nalézti h řádků navzájem lineárně nezávislých. Všechny ostatní řádky jsou pak lineárními kombinacemi oněch h navzájem nezávislých.

Důkaz. Majíce zřetel k definici 1. nahlédneme, že jsou-li soustavy (1) navzájem lineárně závislé, lze mezi nimi jistě nalézti takovou, jež jest lineární kombinací všech ostatních (pojem lineární kombinace byl vysvětlen v poznámce 3, str. 14, části I). V případě závislosti soustav jest totiž v rovnicích (2) alespoň jeden z koeficientů $c_1, c_2, \ldots, c_m$ různý od nuly; budiž to na př. c_i. Rovnice (2) lze pak psáti ve tvaru

$$a_{i\nu} = -\sum_{\mu \neq i}^{1,m} \frac{c_\mu}{c_i} a_{\mu\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n;$$

z něho je patrno, že i-tá ze soustav (1) jest lineární kombinací ostatních.

Obráceně soustavy (1) jsou lineárně závislé, je-li mezi nimi některá lineární kombinací všech ostatních.

Toto majíce na paměti, obrátíme se nyní k vlastnímu důkazu věty 1. Budeme při tom předpokládati, že determinant h-řadový, jehož různost od nuly je zaručena hodností h dané matice, je vytvořen z prvních h řádků a z prvních h sloupců; toho lze vždycky dosáhnouti eventuelní změnou pořadí řádek a sloupců, t. j. výkonem, který nemá na hodnost matice žádného vlivu. Je tedy

$$A_h = \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1h} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{h1}, \ldots, a_{hh} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{5}$$

avšak

$$\begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1h}, & a_{1k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{h1}, \ldots, a_{hh}, & a_{hk} \\ a_{i1}, \ldots, a_{ih}, & a_{ik} \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

pro $i = h + 1, h + 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, h, h + 1, \ldots, m$.

Platnost právě napsaného vztahu je pro i, $k \geqq h + 1$ zřejmá, protože na levé straně stojí v tomto případě $h + 1$-řadový determinant matice o hodnosti h, pro $k \leqq h$ pak je onen vztah také správný, protože jde v těchto případech o determinant se dvěma sloupci navzájem stejnými.

Rozvedeme-li determinant na levé straně naší rovnice (6) podle elementů posledního sloupce, dostaneme

$$a_{ik} = -\sum_{\varrho=1}^{h} \frac{c_\varrho}{A_h} a_{\varrho k}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Těchto m rovnic však vyjadřuje, že je i-tý řádek dané matice lineární kombinací prvních h jejích řádků. Protože pak takovéto rovnice platí pro všechna $i \geqq h + 1$ a protože prvních h řádků dané matice je zcela jistě navzájem nezávislých (jinak by se z nich nedal utvořiti nenulový determinant A_h — rozvažte si to podrobně pomocí toho, co bylo předesláno důkazu věty 1. o vzájemném vztahu mezi pojmem lineární závislosti soustav číselných a pojmem lineární kombinace a pak pomocí pozn. 2. a 3. na str. 13 a 14 části I), je platnost věty 1. dokázána.

Téměř samozřejmý je také opak právě dokázané věty. Vyslovíme jej *větou* 2.

Je-li možno v matici $\|a_{ik}\|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$ nalézti h řádků lineárně nezávislých tak, že všechny ostatní jsou jejich lineárními kombinacemi, má tato matice hodnost h.

Důkaz. Budiž p hodnost matice M; podle věty 11 svazku I je tato hodnost táž, jako u matice M_1 vzniklí z M vynecháním oněch řádků, jež nejsou navzájem nezávislé. Tato matice je však h-řádková a její řádky jsou podle předpokladu navzájem nezávislé, takže má (v důsledku právě dokázané věty 1.) hodnost h. Je tedy opravdu $p = h$, jak věta 2. tvrdí.

Výsledky podané větami 1. a 2. nám dávají možnost rozhodnouti zcela obecně otázku závislosti či nezávislosti soustav (1). Příslušné kriterium vyslovíme větou.

Věta 3. Nutná a postačující podmínka, aby m soustav (1) bylo navzájem lineárně nezávislých, je ta, aby matice oněch soustav měla hodnost právě m.

Na základě všech uvedených poznatků nahlédneme snadno správnost věty důležité pro určování hodnosti dané matice. Jest to

věta 4. Je-li některý h-řadový determinant dané matice různý od nuly, jsou-li však rovny nule všechny jeho superdeterminanty $h + 1$-řadové, má matice hodnost h.

Důkaz. Bez újmy obecnosti lze opět předpokládati, že nenulový determinant je právě A_h z věty 1. Z faktu, že všechny jeho superdeterminanty (jsou to zase právě determinanty (6) z věty 1.) jsou rovny nule, bylo odvozeno, že každý z posledních $m - h$ řádků matice je lineární kombinací prvních h navzájem nezávislých řádků. Podle věty 2. je tudíž hodnost matice skutečně h a věta 4. je tím dokázána.

Poznámka. Ve stejném smyslu, jako jsme to učinili pro číselné soustavy a řádky matic, budeme mluviti také o vzájemné lineární závislosti řad v determinantech. Věty 1., 2. a 4. se dají bezprostředně přenésti na případ determinantu.

Příklady.

Dva příklady byly již uvedeny při definici lineární závislosti číselných soustav. Je dobře všimnouti si ještě jedenkráte ve světle nových poznatků soustav (3). Protože jest determinant elementů společných prvním dvěma řádkům a prvním dvěma sloupcům matice určené soustavami (3) různý od nuly (má hodnotu 44), má tato matice hodnost alespoň 2. Počítáme nyní hodnotu třířadového determinantu

$$\begin{vmatrix} 5, & -2, & 0 \\ 7, & 6, & -4 \\ -1, & -4, & 2 \end{vmatrix}.$$

Odečteme-li první řádek od druhého, vidíme ihned, že pozměněný druhý řádek 2, 8, —4 jest roven poslednímu, násobenému číslem — 2, takže determinant má nulovou hodnotu. Zkoumáme proto ještě druhý superdeterminant výše uvedeného nenulového dvouřadového determinantu; tento nový superdeterminant se liší od právě uvažovaného pouze tím, že jeho poslední sloupec je tvořen čísly 3, 7, — 2. Stejným způsobem jako výše poznáme, že má i tento determinant hodnotu nulovou, takže je podle věty 4. hodnost matice určené soustavami (3) rovna 2 a soustavy samy podle věty 3. lineárně závislé a to (na příklad) tak, že prvé dvě z nich jsou navzájem nezávislé, třetí pak je jejich lineární kombinací. Existují tedy čísla γ_1, γ_2 taková, že platí rovnice

$$5\gamma_1 + 7\gamma_2 = -1, \quad -2\gamma_1 + 6\gamma_2 = -4,$$
$$0 \cdot \gamma_1 - 4\gamma_2 = 2, \quad 3\gamma_1 + 7\gamma_2 = -2;$$

třetí z nich přímo udává hodnotu $\gamma_2 = -\frac{1}{2}$ a z druhé pak vychází $\gamma_1 = \frac{1}{2}$. Koeficienty c_1, c_2, c_3, o nichž mluví definice 1., jsou pak $\varrho\gamma_1$, $\varrho\gamma_2$, ϱ, při čemž je ϱ libovolný od nuly různý faktor úměrnosti. Volíme-li na př. $\varrho = 2$, dostáváme $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$, tedy tytéž hodnoty, jež byly uvedeny výše.

3. Co značí lineární závislost soustav

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \end{matrix} ? \tag{7}$$

Ježto soustavy jsou lineárně závislé, existují ve smyslu definice 1. čísla c_1, c_2 (která nejsou obě rovna nule) tak, že platí n rovnic

$$c_1 a_{1\nu} + c_2 a_{2\nu} = 0,\ \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Je-li na př. $c_2 \neq 0$, položíme $\varrho c_2 = -c_1$ a dostáváme

$$a_{2\nu} = \varrho a_{1\nu},\ \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Znamená tedy lineární závislost dvou číselných soustav, že jejich stejnolehlé členy jsou navzájem úměrné.

4. Rozhodnouti otázku závislosti či nezávislosti soustav

$$\begin{array}{l} 3,\ 2,\ 4,\ 2,\ 4,\ 3 \\ 1,\ 3,\ 1,\ 4,\ 3,\ 4 \\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3 \\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1\,. \end{array} \tag{9}$$

Determinant elementů společných prvým dvěma řádkům a prvým dvěma sloupcům má hodnotu 7; protože pak jest

$$\begin{vmatrix} 3, & 2, & 4 \\ 1, & 3, & 1 \\ 3, & 3, & 3 \end{vmatrix} = 3 \,.\, \begin{vmatrix} 3, & 2, & 4 \\ 1, & 3, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 3 \,.\, \begin{vmatrix} 1, & 0, & 2 \\ 0, & 2, & 0 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 3 \,.\, 2 \,.$$

$$.\, \begin{vmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

vypočteme ještě čtyřřadový superdeterminant determinantu právě uvažovaného. Dostáváme

$$\begin{vmatrix} 3, & 2, & 4, & 2 \\ 1, & 3, & 1, & 4 \\ 3, & 3, & 3, & 3 \\ 3, & 3, & 2, & 2 \end{vmatrix} = 3 \,.\, \begin{vmatrix} 1, & 0, & 2, & 0 \\ 0, & 2, & 0, & 3 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 3 \,.\, \begin{vmatrix} 0, & -1, & 2, & 0 \\ 0, & 2, & 0, & 3 \\ 0, & 0, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 0, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3) \,.\, \begin{vmatrix} -1, & 2, & 0 \\ 2, & 0, & 3 \\ 0, & 1, & 1 \end{vmatrix} = (-3) \,.\, \begin{vmatrix} -1, & 2, & 0 \\ 0, & 4, & 3 \\ 0, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

takže je hodnost matice soustav (9) rovna 4 a soustavy jsou podle věty 3. lineárně nezávislé.

5. Je-li daných soustav více, než čísel v každé z nich (t. j. $m > n$), jsou vždycky navzájem lineárně závislé.

Důkaz. Hodnost matice vytvořené danými soustavami může totiž býti za daných okolností nejvýše rovna číslu n, takže je vždycky menší než m a nikdy tedy nemůže býti splněna nutná a postačující podmínka pro nezávislost soustav, jak ji vyjadřuje věta 3.