8. Rozmanitá užití Markovových řetězců

KAPITOLA VIII

ROZMANITÁ UŽITÍ MARKOVOVÝCH ŘETĚZŮ

83. Poincaréova úloha o míchání karet. Je dáno q karet, které jsou původně uspořádány v určité počáteční sestavě S_1; ostatní sestavy (neboli permutace) označíme $S_2, S_3, \ldots, S_r$, kde $r = q!$. Operace, t. j. způsob zamíchání (přemístění) karet se určuje takto: Místa, která zaujímají jednotlivé karty před operací, označíme pořadovými čísly $1, 2, \ldots, q$; je dáno číslo místa, které bude míti po operaci karta zaujímající před operací prvé místo; podobně je dáno číslo místa, které bude míti po operaci karta zaujímající před operací druhé místo atd. pro všechna místa. Operaci, která převádí počáteční sestavu S_1 do S_k, označíme S_k.

Hráč míchá karty opětovně. Každé zamíchání spočívá v tom, že hráč provede jednu z operací S_i. Budiž p_i pravděpodobnost, že provede S_i. Jak veliká je pravděpodobnost, že po n postupně provedených operacích budou karty tvořiti sestavu S_k? Předpokládáme, že

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1, \; p_k > 0, \; k = 1, 2, \ldots, r.$$

Znak $S_i S_j$ (symbolický součin) značí operaci, která vznikne, když provedeme nejprve S_i (tato operace převádí původní sestavu S_1 do sestavy S_i) a pak S_j. Znak S_i^{-1} značí operaci inversní k S_i, t. j. operaci, která vede od sestavy S_i k S_1. Sestavme tabulku symbolických součinů:

$$\begin{array}{l} S_1^{-1}S_1, \; S_1^{-1}S_2, \; S_1^{-1}S_3, \; \ldots, \; S_1^{-1}S_r \\ S_2^{-1}S_1, \; S_2^{-1}S_2, \; S_2^{-1}S_3, \; \ldots, \; S_2^{-1}S_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_r^{-1}S_1, \; S_r^{-1}S_2, \; S_r^{-1}S_3, \; \ldots, \; S_r^{-1}S_r. \end{array}$$

Každý z těchto součinů je rovnocenný určité z operací $S_1, S_2, \ldots$ Vepíšeme-li ji do tabulky na místo toho součinu, obdržíme „multiplikační tabulku grupy permutací". V každém řádku této tabulky vyskytují se všechny operace S_k, každá právě jednou. Rovnost dvou operací v i-tém řádku by totiž vyžadovala, aby

$$S_i^{-1}S_j = S_i^{-1}S_k,$$

tedy, aby $S_j = S_k$, což není možno, pokud $j \neq k$. Podobně v každém sloupci se vyskytuje každá operace právě jednou. V průseku i-tého řádku tabulky s k-tým sloupcem stojí operace $S_i^{-1}S_k$, která převádí i-tou sestavu v k-tou. V každém poli úhlopříčky je operace identická $S_k^{-1}S_k = S_1$, která nemění sestavení karet.

Nahraďme nyní v multiplikační tabulce v každém jejím poli symbol operace S_j, který je tam vepsán, příslušnou pravděpodobností p_j. V nové tabulce stojí pak v průseku i-tého řádku s k-tým sloupcem pravděpodobnost p_{ik}, že nějaká operace vede od i-té sestavy ke k-té. Každá p_{ik} je totožná s jednou z veličin p_j. Poněvadž v každém řádku a v každém sloupci nové tabulky jsou zastoupeny všechny veličiny p_j, každá jednou, platí

$$\sum_{k=1}^{r} p_{ik} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, r;\ \sum_{i=1}^{r} p_{ik} = 1,\ k = 1, 2, \ldots, r.$$

Jsou tedy splněny všechny podmínky nutné k tomu, aby platil dodatek k Markovově větě (odst. 76), takže pro $p_{ik} > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P_{ik}^{(n)} = \frac{1}{r},\ r = q! \qquad (1)$$

Zde značí $P_{ik}^{(n)}$ pravděpodobnost, že, jsou-li karty původně v sestavě S_i, přejdou po n postupně provedených operacích do sestavy S_k.

Tedy: *Pravděpodobnost, že se dostaví určitá sestava karet, když karty byly nekonečně mnohokrát postupně zamíchány, je* *konstantní; nezávisí ani na počáteční sestavě karet ani na hodnotách pravděpodobností p_i.*

Soustava pravděpodobností p_i charakterisuje individualitu hráčovu, jak praví Poincaré; některý hráč je nakloněn aplikovati spíše některou operaci než jinou, takže některá z čísel p_i mají pro něj větší hodnoty, jiná menší. Pro jiného hráče mají p_i zase jiné hodnoty, ale limita (1) je stejná pro všechny hráče a pro libovolné sestavy karet počátečnou a konečnou.*)

84. Lévyova úloha o míchání karet. a) Nechť jsou 1, 2, ... pořadová čísla karet v počáteční sestavě a ptejme se, jaká je pravděpodobnost, že po n operacích karta, která v počáteční sestavě měla pořadové číslo i, bude míti pořadové číslo k. Tyto pravděpodobnosti jsou v určité souvislosti s pravděpodobnostmi p_s, které jsme zavedli v odst. 83. Počítejme nejprve pravděpodobnost a_{ik}, že karta přejde jedinou operací z pořadí i do pořadí k.

Předně je

$$a_{ii} = \sum_i p_{si};$$

sumační index s probíhá hodnoty i příslušné po řadě všem těm operacím S_i, kterými se nemění poloha karty nalézající se na i-tém místě. Všech těchto operací, při nichž se ostatních $(q - 1)$ karet libovolně permutuje, je celkem $(q - 1)!$; tolik sčítanců má náš součet.

Buďte nyní S a T dvě různé operace takové, že každou z nich se převádí karta z pořadí i do pořadí k; patrně je $ST^{-1} = U$, kde U značí operaci, která nemění pořadí karty nacházející se na i-tém místě. Z toho plyne, že $S = UT$, t. j. že všechny operace, které převádějí kartu z pořadí i do pořadí k, dostaneme takto: napřed provedeme nějakou operaci U, která kartu ponechává na i-tém místě a pak provedeme jednu určitou operaci T, která ji převede na k-té místo.

*) *H. Poincaré*: Calcul des probabilités, 2ème édition, p. 301, Paris 1912.

Všech operací U je celkem $(q-1)!$, zrovna tolik je tudíž operací vyjádřitelných ve tvaru UT. Napišme pravděpodobnosti p_s příslušné všem těmto operacím a sečtěme je. Součet dává hledanou pravděpodobnost:

$$a_{ik} = \sum_{i,k} p_s; \quad i, k = 1, 2, \ldots, q.$$

Napravo se sečítají pravděpodobnosti p_s všech těch operací, které převádějí kartu z i-tého místa (pořadí) na k-té.

Veličiny a_{ik}, $(i, k = 1, 2, \ldots, q)$ jsou vesměs kladné (po případě některé z nich jsou rovny nule, jsou-li některé z veličin p_s rovny nule) a vyhovují rovnicím

$$\sum_{k=1}^{q} a_{ik} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, q. \tag{1}$$

Každá karta může totiž přejíti z pořadí i do pořadí k (jedinou operací) celkem $(q-1)!$ různými operacemi; a_{ik} se tedy vyjadřuje jakožto součet $(q-1)!$ čísel p_s. Celý součet na levé straně kterékoli z rovnic (1) skládá se tedy z $q(q-1)! = q!$ vesměs různých sčítanců p_s, jichž součet se ovšem rovná 1. Zcela stejně se odůvodní, vezmeme-li v úvahu inversní operace, že

$$\sum_{i=1}^{q} a_{ik} = 1.$$

Veličiny a_{ik}, $(i, k = 1, 2, \ldots, q)$, vyhovující rovnicím (1) a (2), splňují tedy podmínky, za kterých platí dodatek k Markovově větě uvedený v odst. 76, takže máme pro $a_{ik} > 0$ výsledek: *Nechť je počáteční číslo karty jakékoli, pravděpodobnost, že karta bude míti po nekonečně velikém počtu operací pořadové číslo k, je rovna $1 : q$, kde q je počet karet.**)

b) Všimněme si blíže případu tří karet, kdy $q = 3$. Celkem je šest operací ($r = q! = 6$), kterými lze permutovati tři karty. Označíme je takto:

*) *P. Lévy*: Calcul des probabilités, p. 49; Paris 1925.

$$S_1 = \begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix};\ S_2 = \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix},\ S_3 = \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix},\ S_4 = \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix},$$
$$S_5 = \begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix},\ S_6 = \begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}.$$

S_1 je operace identická; S_2 nechává kartu stojící na 1. místě v klidu a permutuje karty stojící na 2. a 3. místě; S_4 je permutace cyklická, jež zvyšuje pořadové číslo každé karty(myslíme si karty rozloženy dokola, podél kružnice) o jednotku atd. Jsou-li pak p_i pravděpodobnosti operací S_i, $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, máme v označení odst. 83

$$\begin{aligned} a_{11} &= p_1 + p_2,\ a_{12} = p_3 + p_4,\ a_{13} = p_5 + p_6,\\ a_{21} &= p_3 + p_5,\ a_{22} = p_1 + p_6,\ a_{23} = p_2 + p_4,\\ a_{31} &= p_4 + p_6,\ a_{32} = p_2 + p_5,\ a_{33} = p_1 + p_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Z těchto rovnic odvodíme, přihlížejíce k podmínce

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1,$$

vztahy

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik} = 1,\ \sum_{k=1}^{3} a_{ik} = 1;\ i = 1, 2, 3.$$

85. Veličiny závislé na veličinách, jichž pravděpodobnosti jsou spojeny v řetěz. Nechť jsou $E_1, E_2, \ldots, E_r$ zjevy, jež se mohou vyskytnouti jakožto výsledky nějakého pokusu; předpokládáme, že výsledky opětovně prováděných „pokusů prvního druhu" jsou spojeny v jednoduchý řetěz s konstantními pravděpodobnostmi přechodu p_{ik}. Nechť jsou dále $F_1, F_2, \ldots, F_s$ jiné zjevy, které se vyskytují jakožto výsledky „pokusů druhého druhu". Pokusy prvního a druhého druhu jsou v určité souvislosti, která je stanovena takto: $P_{ij}^{(n)}$ značí jako dříve pravděpodobnost, že n-tý pokus prvního druhu dá výsledek E_j, dal-li předběžný (nultý) pokus prvního druhu výsledek E_i. ϱ_{jk} je pravděpodobnost, že n-tý pokus druhého druhu dá výsledek F_k, je-li známo, že n-tý pokus prvého druhu dal E_j. Dále budiž $R_{ik}^{(n)}$ pravděpodobnost, že n-tý pokus druhého druhu dá F_k, dal-li předběžný (nultý) pokus prvého druhu výsledek E_i. Platí rovnice

$$R_{ik}^{(n)} = \sum_{j=1}^{r} P_{ij}^{(n)} \varrho_{jk}, \quad i = 1, 2, \ldots, r; \; k = 1, 2, \ldots, s.$$

Roste-li n do nekonečna a vyhovují-li p_{ik} podmínkám (1), odst. 75, má $P_{ij}^{(n)}$ limitu P_j a tedy také $R_{ik}^{(n)}$ má limitu R_k a platí, že

$$R_k = \lim_{n \to \infty} R_{ik}^{(n)} = \sum_{j=1}^{r} P_j \varrho_{jk}, \quad k = 1, 2, \ldots, s; \tag{1}$$

R_k nezávisí na i.

Toto schema, ve kterém přicházejí v úvahu zjevy F_k netvořící řetěz, ale spojené s jinými zjevy E_i, které tvoří řetěz, pochází od Markova; v odst. 88 bude uveden příklad.

86. Tahy ze dvou osudí se záměnou koulí. Úloha, kterou se zabýval D. Bernoulli, Laplace a Markov, zní takto: Dvě osudí A a B obsahují každé e koulí; v úhrnném počtu $2e$ všech koulí je polovina bílých a polovina černých. Tah se provádí tak, že současně vytáhneme po jedné kouli z každého osudí; pak vložíme do B kouli vytaženou z A, a do A kouli vytaženou z B. Vykonejme n takových tahů; jak veliká je pravděpodobnost $p_k^{(n)}$, že v osudí A je po n tazích právě k bílých koulí? ($k = 0, 1, 2, \ldots, e$).

Počet bílých koulí v A po 1. tahu, po 2. tahu, po 3. tahu, … jsou veličiny, jichž pravděpodobnosti jsou spojeny v řetěz o $(e + 1)$ eventualitách. Budiž p_{ik}, $(i, k = 0, 1, 2, \ldots, e)$ pravděpodobnost, že v A bude po tahu k bílých koulí, bylo-li jich tam i před tahem. Dostaneme tyto vzorce:

$$p_{j,j-1} = \frac{j^2}{e^2}, \quad p_{jj} = 2\,\frac{(e-j)\,j}{e^2}, \quad p_{j,j+1} = \frac{(e-j)^2}{e^2},$$

$$\text{pro } 0 < j < e, \tag{1}$$

$$p_{00} = 0, \quad p_{01} = 1, \quad p_{e,e-1} = 1, \quad p_{ee} = 0. \tag{2}$$

Mimo to je

$$p_{ik} = 0, \text{ je-li } |i - k| \geqq 2, \tag{3}$$

neboť počet bílých koulí v A se může tahem změniti nejvýše o jednu.

Z rovnic (1) a (2) plyne, že rovnice (1), odst. 71 jsou splněny pro $r = e + 1$, že totiž je

$$\sum_{k=0}^{e} p_{ik} = 1, \; i = 0, 1, 2, \ldots, e.$$

Prostá pravděpodobnost $p_k^{(n)}$, že po n-tém tahu bude v A právě k bílých koulí, vyjádří se pravděpodobnostmi $p_{k-1}^{(n-1)}$, $p_k^{(n-1)}$ a $p_{k+1}^{(n-1)}$. Neboť $p_k^{(n)}$ je úhrnná pravděpodobnost rovná součtu tří pravděpodobností, které odpovídají třem možným případům: po $(n - 1)$-tém tahu je v osudí A buď $(k - 1)$ bílých koulí nebo k nebo $(k + 1)$. Vyjádříme-li tyto tři pravděpodobnosti a sečteme-li je, vychází

$$p_k^{(n)} = p_{k-1}^{(n-1)} \cdot p_{k-1,k} + p_k^{(n-1)} \cdot p_{kk} + p_{k+1}^{(n-1)} \cdot p_{k+1,k}. \tag{4}$$

Tato rovnice je totožná s rovnicí (9), odst. 71, dosadíme-li $n = 1$ a píšeme-li pak $(n - 1)$ na místo m, a p_{jk} na místo $P_{jk}^{(1)}$. Na pravé straně (4) jsou ovšem jen tři členy, neboť ostatní p_{jk} jsou rovny nule podle podmínek (2) a (3). Dosaďme nyní do rovnice (4) na místo p_{jk} příslušné výrazy (1) a (2); dostaneme

$$p_k^{(n)} = p_{k-1}^{(n-1)} \cdot \frac{(e - k + 1)^2}{e^2} +$$

$$+ 2p_k^{(n-1)} \frac{(e - k) \cdot k}{e^2} + p_{k+1}^{(n-1)} \frac{(k + 1)^2}{e^2}. \tag{5}$$

Považujme $p_k^{(n)}$ za funkci dvou proměnných celých čísel k a n, $(k = 0, 1, 2, \ldots, e;\; n = 0, 1, 2, \ldots)$; (5) je parciální diferenční rovnice pro neznámou $p_k^{(n)}$. Známe-li pravděpodobnosti $p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_e^{(0)}$, že před prvním tahem je v osudí A po řadě 0, 1, 2, ..., e bílých koulí, určíme z rovnice (5) nejprve $p_k^{(1)}$, pak $p_k^{(2)}$ atd.

Je-li ve zvláštním případě dáno, že před prvním tahem je v osudí A právě i bílých koulí, je (srov. odst. 71)

$$p_i^{(0)} = 1, \ p_j^{(0)} = 0 \ \text{pro} \ j \neq i; \ p_k^{(n)} = P_{ik}^{(n)}, \ P_{ik}^{(1)} = p_{ik}.$$

$P_{ik}^{(n)}$, ($k = 0, 1, 2, \ldots, e$; $n = 1, 2, \ldots$) značí zde pravděpodobnost, že v A je po n-tém tahu k bílých koulí, bylo-li jich tam i před prvním tahem. Dosaďme do (5) $P_{ik}^{(n)}$ na místo $p_k^{(n)}$; dostaneme rovnici

$$P_{ik}^{(n)} = P_{i,k-1}^{(n-1)} \cdot \frac{(e-k+1)^2}{e^2} + 2P_{ik}^{(n-1)} \frac{(e-k)\,k}{e^2} + \\ + P_{i,k+1}^{(n-1)} \frac{(k+1)^2}{e^2}; \tag{5a}$$

tato rovnice je totožná s první rovnicí (6), odst. 71, máme-li na mysli, že p_{jk} jsou definovány hořejšími vzorci (1), (2) a (3).

Napišme veličiny p_{ik} do tvaru matice o $e + 1$ řádcích a $e + 1$ sloupcích. Užijme označení zavedeného v odst. 77; vzhledem k rovnicím (1), (2) a (3) jsou v hlavní úhlopříčce Δ matice a na přilehlých s ní rovnoběžných příčkách Δ_2 a Δ_2' vesměs kladné*) prvky p_{ik}, kdežto všechny ostatní jsou rovny nule. Podle úvah uvedených v odst. 77 jsou všechny veličiny $P_{ik}^{(n)}$ kladné, je-li n dosti veliké. Z toho pak plyne, že $P_{ik}^{(n)}$ má pro $n \to \infty$ limitu P_k nezávislou na i (odst. 77). Mezní hodnoty P_k se určí řešením rovnic (9) a (10), odst. 75, které nyní píšeme ve tvaru:

$$P_k - \sum_{i=0}^{e} P_i p_{ik} = 0, \ k = 0, 1, 2, \ldots, e; \ \sum_{k=0}^{e} P_k = 1. \tag{6}$$

Abychom potvrdili, že těmto rovnicím se vyhoví, položíme-li**)

---

*) S výjimkou prvků $p_{00} = 0$, $p_{ee} = 0$.

**) $(e)_k$ je binomický symbol (viz odst. 3c); $(e)_k = \frac{e!}{k!(e-k)!}$.

$$P_k = \frac{[(e)_k]^2}{(2e)_e}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, e, \tag{7}$$

napišme levou stranu k-té rovnice (6) ve tvaru

$$P_k(1 - p_{kk}) - P_{k-1} \cdot p_{k-1,k} - P_{k+1}p_{k+1,k} \tag{8}$$

a dosaďme sem za P_k a p_{jk} podle (7) a (1), (2), (3); přihlížejíce k vztahům

$$(e)_k = (e)_{k-1} \cdot \frac{e - k + 1}{k};$$

$$(e)_{k+1} = (e)_{k-1} \frac{(e - k + 1)(e - k)}{k(k + 1)},$$

shledáme, že výraz (8) se rovná nule. Soustavě homogenních rovnic (6) je tedy vyhověno. Abychom dokázali, že součet všech P_k se rovná 1, srovnejme koeficienty při x^e na obou stranách rovnice

$$(1 + x)^e(1 + x)^e = (1 + x)^{2e};$$

vychází

$$\sum_{j=0}^{e}[(e)_j]^2 = (2e)_e, \tag{9}$$

a tedy, dosadíme-li za P_k podle (7),

$$\sum_{k=0}^{e} P_k = 1.$$

Pravá strana rovnice (7) je rovna pravděpodobnosti, že skupina koulí vyvolená z $2e$ koulí, z nichž je e bílých a e černých, obsahuje právě k bílých koulí. Docházíme k výsledku:

Po nekonečně velkém počtu postupně provedených tahů je pravděpodobnost, že v osudí A bude právě k bílých koulí, rovna pravděpodobnosti, že bude právě k bílých koulí ve skupině e koulí vytažených z osudí, ve kterém je smícháno e koulí bílých a e černých.

87. Charakteristická rovnice příslušná předešlé úloze. Utvořme charakteristickou rovnici (odst. 78), v níž jsou p_{ik} definovány rovnicemi (1), (2) a (3), odst. 86. Změníme-li znaménka u všech členů determinantu $D_r(\lambda)$ a píšeme-li pak s na místo $1 : \lambda$, nabude rovnice tvaru

$$\Delta_{e+1} = \begin{vmatrix} p_{00} - s, & p_{01}, & \ldots, & p_{0e} \\ p_{10}, & p_{11} - s, & \ldots, & p_{1e} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{e0}, & p_{e1}, & \ldots, & p_{ee} - s \end{vmatrix} = 0.$$

Tak dostaneme pro $e = 2$

$$\Delta_3(s) = \begin{vmatrix} -s, & 1, & 0 \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} - s, & \frac{1}{4} \\ 0, & 1, & -s \end{vmatrix} = 0,$$

kde

$$\Delta_3(s) = -(s-1)(s+\tfrac{1}{2})\,s,$$

a dále

$$\begin{aligned} \Delta_4(s) &= (s-1)(s+\tfrac{1}{9})(s+\tfrac{1}{3})(s-\tfrac{1}{3}) \\ \Delta_5(s) &= -(s-1)(s-\tfrac{1}{2})(s+\tfrac{1}{4})(s+\tfrac{1}{8})(s-\tfrac{1}{8}) \\ \Delta_6(s) &= (s-1)(s-\tfrac{3}{5})(s-\tfrac{7}{25})(s+\tfrac{1}{5})(s+\tfrac{3}{25})(s-\tfrac{1}{25}) \\ \Delta_7(s) &= -(s-1)(s-\tfrac{2}{3})(s-\tfrac{7}{18})(s+\tfrac{1}{6})(s-\tfrac{1}{6})(s+\tfrac{1}{9})\,s. \end{aligned}$$

Kořeny rovnice $\Delta_{e+1}(s) = 0$ jsou racionální čísla, pokud $e \leqq 6$. J. Potoček poznamenal r. 1937, že toto pravidlo platí obecně a že kořeny rovnice

$$\Delta_{e+1}(s) = 0$$

jsou pro každé e vyjádřeny vzorcem:

$$s_k = \frac{(e-k)^2 - k}{e^2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, e, \tag{1}$$

který pro $e = 2, 3, 4, 5, 6$ souhlasí se shora uvedenými rozklady determinantu $\Delta_{e+1}(s)$ v činitele. Podle Fréchetovy zprávy*) dokázal T. R. Rawles obecně vzorec (1) nezávisle na Potočkovi.

Zavedeme-li do počtu kořeny $s_0 = 1, s_1, s_2, \ldots, s_e$ na místo kořenů λ_j původní charakteristické rovnice, změní se formule Romanovského (8), odst. 79 takto:

$$P_{ik}^{(n)} = P_k + \sum_{j=1}^{e} \varphi_{kj}\psi_{ij}s_j^n.$$

88. Tahy ze dvou osudí se záměnou koulí; druhá úloha. Vraťme se k tahům ze dvou osudí za podmínek uvedených v odst. 86 a položme si úlohu: Ustanoviti limitu pro $n \to \infty$ pravděpodobnosti, že při n-tém tahu se záměnou koulí bude z osudí A vytažena bílá koule.

Užijeme Markovova schematu vyloženého v odst. 85. Za podmínek naší úlohy je počet bílých koulí v A roven buď 0 nebo 1, 2, 3, ..., e. Za zjev E_i považujeme případ, že v A je právě i bílých koulí ($i = 0, 1, 2, \ldots, e$). Za zjev F_1 považujeme tah bílé koule z A, a za zjev F_2 tah černé z osudí A; v označení odst. 85 je tedy $r = e + 1$, $s = 2$. Poněvadž P_j jsou určeny rovnicí (7), odst. 86 a

$$\varrho_{j1} = \frac{j}{e}, \quad \varrho_{j2} = \frac{e-j}{e},$$

bude hledaná limita R_1 dána vzorcem (1), odst. 85:

$$R_1 = \sum_{j=0}^{e} P_j\varrho_{j1} = \sum_{j=0}^{e} \frac{[(e)_j]^2}{(2e)_e} \cdot \frac{j}{e}. \tag{1}$$

Podle Potočka dokáže se, že poslední součet je roven $\frac{1}{2}$ takto: Z rovnice

$$\sum_{j=0}^{e}[(e)_j]^2 \cdot j = \sum_{j=0}^{e}[(e)_j]^2(e-j)$$

*) *M. Fréchet*: Recherches théoriques modernes sur le Calcul des Probabilités, second livres p. 285 (Paris 1938) cituje práci: *T. R. Rawles*: A problem of Laplace (Report of third annual Conference on economics and statistics; Colorado Springs, 1937).

plyne, že

$$\sum_{j=0}^{e}[(e)_j]^2 \cdot j = \tfrac{1}{2}e \cdot \sum_{j=0}^{e}[(e)_j]^2.$$

Podle (9), odst. 86 je pravá strana této rovnice rovna

$$\tfrac{1}{2}e(2e)_e$$

a tedy, dosadíme-li do pravé strany rovnice (1), vychází

$$R_1 = \tfrac{1}{2}.$$

Po nekonečně velkém počtu tahů ze dvou osudí se záměnou koulí, je-li v každém osudí stejný počet koulí a úhrnný počet bílých koulí v obou osudích roven úhrnnému počtu černých, je pravděpodobnost vytáhnouti z daného osudí bílou kouli rovna jedné polovině.

89. Zákon velkých čísel v případě řetězu. Nechť jsou $x^{(1)}$, $x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$ veličiny přiřaděné po řadě výsledkům prvního, druhého, ..., n-tého, ... pokusu; $a^{(n)}$ nechť značí střední hodnotu veličiny $x^{(n)}$. Veličiny $x^{(n)}$ splňují zákon velkých čísel, liší-li se aritmetický střed veličin $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ od aritmetického středu hodnot $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$ o méně než ε s pravděpodobností blížící se jistotě, když n roste do nekonečna.

Položme

$$B_n = E[x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(n)} - a^{(1)} - a^{(2)} - \ldots - a^{(n)}]^2.$$

Podle odst. 24 splňují veličiny $x^{(n)}$ zákon velkých čísel, je-li

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{n^2} = 0. \tag{1}$$

Důkaz podaný v odst. 24 platí i v tom případě, že veličiny $x^{(n)}$ nejsou vzájemně nezávislé. *Zákon velkých čísel platí pro veličiny $x^{(n)}$, jichž pravděpodobnosti jsou spojeny v jednoduchý Markovův řetěz o r alternativách, jsou-li všechny pravděpodob-*

nosti přechodu p_{ik} kladné, neboť, podle rovnice (2), odst. 81 existuje konečná limita disperse, t. j.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{n}$$

a tedy je splněna podmínka (1).

90. Regularisace pravděpodobností spojených v řetěz. Ergodický princip. a) Konáme pokus, jenž může míti různé výsledky $E_1, E_2, \ldots, E_r$ s různými pravděpodobnostmi; pravíme, že tomu pokusu náleží určité *rozdělení pravděpodobností* (t. j. že různé jeho výsledky mají různé pravděpodobnosti). Konáme-li řadu pokusů, z nichž každý má za výsledek některý ze zjevů $E_1, E_2, \ldots, E_r$ a jsou-li pokusy spojeny v řetěz, závisí rozdělení pravděpodobností na pořadovém čísle n pokusu. V obecném případě (na př. jsou-li všechny prvky p_{ik} jednoduchého řetězu konstantní a kladné) se rozdělení pravděpodobností zjednodušuje s rostoucím n, nastává *regularisace*.

Tak v úloze o míchání karet (odst. 83) jeví se na př. po pátém zamíchání vliv počáteční sestavy karet. Kdybychom srovnali karty do dané počáteční sestavy S_1, a pětkrát zamíchali, a kdybychom pak karty znovu srovnali do téže sestavy S_1, a zase pětkrát zamíchali atd., dostali bychom na konci každé takové serie pěti „operací" postupně provedených nějakou konečnou sestavu karet. Proveďme mnoho takových pokusů a zaznamenejme konečné sestavy po pěti operacích. Tak dostaneme statistiku o tom, kolikrát se vyskytla která konečná sestava a tím přibližně rozdělení pravděpodobností pro jednotlivé sestavy. Rozdělení bude závislé na tom, jakou sestavu jsme volili za počáteční; kdybychom místo S_1 volili jinou za počáteční, dopadla by statistika konečných sestav jinak. Kdybychom však zamíchali karty n-krát (místo pětkrát), ukázalo by se, že vliv počáteční sestavy po n-tém zamíchání je tím menší, čím je n větší. Provedeme-li postupně nekonečně veliký počet operací, má každá sestava karet stejnou pravděpodobnost, že se objeví jakožto konečná; rozdělení pravděpodobností se regularisuje.

V úloze o tazích ze dvou osudí se záměnou koulí (odst. 86—88) jde o pravděpodobnost, s jakou očekáváme určité složení osudí po n-tém tahu (buď není v A žádná bílá koule, nebo je tam jedna, dvě, ...). Rozdělení těchto pravděpodobností jistě závisí na tom, kolik bílých koulí bylo v A před prvním tahem. Ale roste-li n do nekonečna, tato závislost zmizí; po nekonečně velikém počtu tahů je pravděpodobnost P_k, že v A bude k bílých koulí, rovna $[(e)_k]^2 : (2e)_e$. Regularisace je zde taková, že konečné rozdělení pravděpodobností není rovnoměrné (P_k závisí na k), nezávisí však na počátečním složení osudí.

b) Geometrický obraz řetězu (odst. 72) hodí se ke studiu soustav, které se vyvíjejí během času. Znázorněme si jednotlivé stavy, ve kterých uvažovaná soustava (na př. soustava molekul plynu uzavřeného v nádobě) může býti, body A_1, $A_2, \ldots, A_r$. Pozorujeme soustavu po uplynutí určitého časového intervalu τ, pak po intervalu 2τ, 3τ atd. Soustava je znázorněna pohyblivým bodem B, jenž po každé splývá s některým z bodů A_k. Připouštíme, že zákony, jimiž se řídí časový vývoj soustavy, neurčují vývoj naprosto přesně, nýbrž že jsou dány jen pravděpodobnosti přechodů z jednoho stavu A_i do druhého A_k. V některých případech přijímáme t. zv. *ergodický princip*, podle kterého pravděpodobnost, že soustava se dostane za určitou dobu do určitého stavu A_k, se s časem mění, ale po uplynutí nekonečně dlouhé doby nabývá určité hodnoty závislé jen na indexu k. Ergodický princip se odůvodňuje regularisací, která ve smyslu shora uvedených příkladů o míchání karet a o tazích ze dvou osudí se záměnou koulí, nastává za určitých podmínek u zjevů spojených v Markovův řetěz; význam řetězů je právě v tom, že dávají základ k přesnému vyjádření ergodického principu.

91. Obecný pojem náhody a statistické zákonitosti. a) V odst. 36—41 jsme jednali o regularisaci při geometrických pravděpodobnostech. Tento případ a případy regularisace zmíněné v odst. 90 odpovídají dvěma základním vlastnostem zjevů, které se všeobecně považují za náhodné a na něž se dá aplikovati počet pravděpodobnosti. Podle Poincaréa shledáváme totiž, když zjevy toho druhu rozebíráme: buď jsou takové, že malá změna v příčině má za následek velkou změnu v účinku, nebo že jsou velmi složité.

V prvním případě jde o vztah mezi pravděpodobností příčin a pravděpodobností účinku. Za určitých předpokladů dá se pravděpodobnost účinku vyjádřiti, zavedeme-li parametr n a mimo to libovolnou funkci, která definuje rozdělení pravděpodobnosti pro příčinu; shledáváme, že roste-li n do nekonečna, pravděpodobnost účinku se stává nezávislou na oné libovolné funkci (methoda libovolných funkcí, viz odst. 36 a násl.).

Ve druhém případě (zjevy spojené v řetěz) rovněž máme co činiti s počátečním rozdělením pravděpodobností a s číslem n (t. j. počtem postupně provedených pokusů). Roste-li n, zjev se komplikuje a stupeň složitosti je právě dán velikostí čísla n. Tak míchá-li hráč karty postupně n-krát (odst. 83) a je-li n veliké číslo, je zajisté objevení se konečné sestavy následek velikého počtu složitých příčin (účinek každého zamíchání se kombinuje s účinky následujících).

Úlohy, ve kterých regularisace vede ke zjevům stejně pravděpodobným (v úloze o ruletě — odst. 36 — vychází stejná pravděpodobnost pro černou a červenou; v úloze o míchání karet — odst. 83 — stejná pravděpodobnost pro každou konečnou sestavu) ukazují, že v určitých úlohách je odůvodněno považovati některé případy za stejně pravděpodobné. Zamícháme-li dobře koulemi v osudí, můžeme tah každé koule považovati za stejně pravděpodobný (obdoba k úloze o míchání karet). Užívání pojmu „zjevů stejně pravděpodobných“, na němž se zakládá elementární definice pravděpodobnosti (odst. 1), odůvodňuje se tak v mnohých případech regularisací. Poznamenejme k tomu, že všechny výpočty o souvislostech mezi pravděpodobnostmi a regularisaci se opírají o dvě základní věty (odst. 6), které připouštíme jako axiomy.

b) Již v odst. 1 bylo poukázáno ke dvěma stránkám náhodných zjevů; k podmínkám, za kterých se koná pokus s výsledkem závislým na náhodě, a k pravidelnosti, která se jeví ve statistice veliké řady pokusů. Všechny úlohy o výpočtu pravděpodobnosti, kterými jsme se zabývali, jsou toho druhu, že číselné hodnoty uvažovaných pravděpodobností jsou přibližně určitelné ze statistických dat.

Všechny theoretické vzorce o pravděpodobnostech lze takto statisticky kontrolovati; výpočty, které konáme na základě statistických dat, jsou vlastně aplikace počtu pravděpodobnosti.