Kubické a bikvadratické problémy

Elementárními konstrukcemi budeme rozumět konstrukce lineární a kvadratické, t. j. ty, které lze provést pravítkem, jež slouží k narýsování přímky dané dvěma body, a kružidlem, jehož použijeme k narýsování kružnice určené středem a poloměrem. V algebře odpovídá těmto konstrukcím řešení lineárních a kvadratických rovnic.

Kromě kružidla, jež se vůbec považuje za nejpřesnější matematický nástroj, používáme při praktickém provádění nejraději dvou pravítek s pravými úhly nebo aspoň jednoho, abychom mohli pohodlně vést rovnoběžky a rychle sestrojovat kolmice. Jsme si ovšem vědomi toho, že tyto konstrukce lze provést pouhým pravítkem s jednou hranou a kružidlem. Použití pravítka s pravým úhlem nepřináší při tomto způsobu použití nic nového, slouží jen k usnadnění konstrukce.

Dvěma pravoúhlými trojúhelníky lze však provést i jiné konstrukce, které přesahují obor úloh, jež jsme nazvali elementárními.

Tyto elementární konstrukce provádíme obyčejně pravítkem a kružidlem, ač je známo, že je lze provést jen kružidlem.[1]

Přidržme se tedy zde uvedeného stanoviska a připomeňme si některé nejzákladnější konstrukce.

1. Jsou-li dány úsečky $a, b, c, \ldots$, lze sestrojit úsečky $a \pm b$, $a \pm b \pm c, \ldots, \frac{ab}{c}, \frac{abc}{de}, \frac{abcd}{efg}, \ldots$, které vzniknou z daných sčítáním, odčítáním, násobením a dělením, zkrátka racionálními výkony.

---

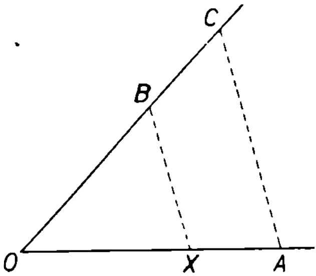
[1] Konstrukcemi pouhým kružidlem se zabývá kromě spisů uvedených v předešlé poznámce zajímavé dílo:

Lanascol, Géométrie du compas, Paříž (1925).

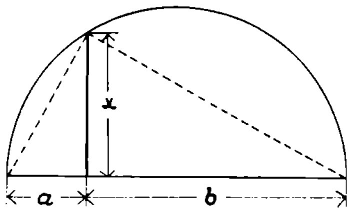
O sčítání a odčítání není třeba se šířit. Chceme-li sestrojit výraz $x = \frac{ab}{c}$, napíšeme jej v podobě úměry

$$x : a = b : c,$$

naneseme na jedno rameno úhlu $\overline{OA} = a$, na druhé $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$ (O je vrchol) a vedeme $BX \parallel CA$. Potom je $\overline{OX} = x$ (obr. 1).



Obr. 1



Obr. 2

Jde-li o výraz $x = \frac{abc}{de}$, sestrojíme napřed $y = \frac{ab}{d}$, pak $x = \frac{yc}{e}$.

Složitější racionální výrazy lze sestrojit postupným užitím těchto konstrukcí.

2. Nejjednodušší výrazy, které obsahují kvadratickou irracionalitu, jsou tvaru $\sqrt{a^2 \pm b^2}$, $\sqrt{a \cdot b}$.

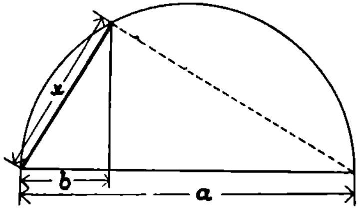
První pišme ve tvaru

$$x^2 = a^2 \pm b^2;$$

x sestrojíme podle Pythagorovy věty jako přeponu pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami a, b nebo jako druhou odvěsnu, je-li a přepona, b odvěsna.

Úsečku $x = \sqrt{ab}$ sestrojíme užitím Eukleidovy věty ($x^2 = ab$). x je výška pravoúhlého trojúhelníka, a, b úseky na přeponě (obr. 2) nebo x je odvěsnou, je-li a přepona, b úsek přilehlý (obr. 3).

Postupným užitím těchto konstrukcí lze sestrojit každý výraz, který dostaneme z daných úseček racionálními operacemi nebo druhými odmocninami.[2]



Obr. 3

Tímto způsobem lze také provádět grafické výpočty, pokud obsahují racionální výkony a druhé odmocniny. Je ovšem třeba zvolit jistou jednotkovou délku. Jsou-li na př. a, b dvě čísla a zároveň úsečky, které jim v daném měřítku odpovídají, a máme-li sestrojit $x = ab$, stačí napsat $x = \frac{ab}{1}$ a sestrojit úměru $x : a = b : 1$. Máme-li sestrojit $x = \frac{a}{b}$, napíšeme $x = \frac{a \cdot 1}{b}$. Podobně při $x = \sqrt{a}$ položíme $x = \sqrt{a \cdot 1}$ a použijeme Eukleidovy věty atd.

Cvičení:

1. Jsou dány úsečky a, b, c; sestrojte úsečky: a) $\frac{a^4}{b^2c}$, $\frac{a^2 + b^2}{c}$, $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$; b) $\sqrt{\frac{a^2b}{c}}$, $\sqrt{\frac{a^4 + b^4}{a^2 - b^2}}$, $\sqrt{\frac{a^5 + a^3b^2}{c^2(b + c)}}$.

2. Sestrojte graficky výrazy: $\sqrt{6}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[4]{1 + \sqrt{2}}$, $\sqrt[4]{a^4 + b^4 + c^4}$, $\sqrt[4]{\frac{a^6}{b^2 + c^2}}$.

[2] O rovnicích, jež lze řešit druhými odmocninami, nalezne čtenář poučení ve spisku Š. Schwarz, O rovnicích, Cesta k vědění, sv. 1, 2. vyd., Praha (1950).

3. Sestrojte výraz $x = \frac{a^{m+1}}{b^m}$, kde m je celé číslo. Návod: Na ramena pravého úhlu (osy Ox, Oy) nanesme délky $OA = a$, $OB = b$, veďme $AA_1 \perp AB$, kde A_1 je na Oy, dále $A_1B_1 \perp AA_1$, kde B je na Ox atd.; pak je $OA_1 = a \operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2}{b}$, $OB_1 = OA_1 \,.\, \operatorname{tg}\varphi = \frac{a^3}{b^2}$ atd. ($\varphi = \sphericalangle OBA$).

4. Řešte graficky rovnici druhého stupně $x^2 + px + q = 0$ nebo $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$.

3. KUBICKÉ ÚLOHY A KONSTRUKCE

Úlohami třetího stupně či kubickými rozumíme takové, které vyjádřeny algebraicky obsahují mimo racionální výkony a druhé odmocniny ještě odmocniny třetí, tedy irracionality kubické. Na takové výrazy vedou rovnice třetího a čtvrtého stupně.

Nejstarší kubické úlohy, již ve starověku známé, jsou:

1. *Zdvojení krychle* (*delický problém*): Je dána krychle o hraně a, jež má tedy objem a^3. Máme najít hranu krychle, jež má dvojnásobný objem $2a^3$.[1]

2. *Trisekce úhlu*: Daný úhel nebo kruhový oblouk rozdělit na tři stejné díly.

První úlohu lze algebraicky vyjádřit rovnicí

$$x^3 = 2a^3$$

čili

$$x = a\sqrt[3]{2}.$$

[1] Název delický souvisí s řeckým ostrovem Delos. Když bylo obyvatelstvo ostrova těžce sužováno morem, jak vypráví legenda, obrátilo se na Delfskou věštírnu s dotazem, co činit, aby byla odvrácena těžká rána. Bylo to asi v době Plutarchově (400 l. př. Kř.). Dostalo se jim odpovědi, že je třeba přeměnit oltář, který měl podobu krychle, tak, aby měl dvojnásobný objem. Tímto problémem se pak zabýval Platon a jeho žáci.

Jde tedy o konstruktivní řešení rovnice třetího stupně ($a = 1$)

$$x^3 - 2 = 0$$

nebo obecněji

$$x^3 - m = 0.$$

Na jakou rovnici vede problém trisekce úhlu, je vidět ze vzorce

$$\mathrm{tg}3\varphi = \frac{3\,\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}^3\varphi}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\varphi}.\ [2]$$

Položme

$$\mathrm{tg}3\varphi = a,\ \mathrm{tg}\varphi = x$$

a dostaneme úplnou kubickou rovnici

$$x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0.$$

Substitucí $x = y + a$ ji převedeme na redukovaný tvar

$$y^3 - 3(1 + a^2)y - 2a(1 + a^2) = 0;$$

tato rovnice má řešení $y = x - a = \mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}3\varphi$.

K jinému tvaru dospějeme, použijeme-li Moivrovy poučky

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi.$$

Pro $n = 3$ dostaneme

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\,.\,\sin^2\varphi + \\ + \mathrm{i}(3\cos^2\varphi\,.\,\sin\varphi - \sin^3\varphi) = \cos3\varphi + \mathrm{i}\sin3\varphi.$$

Srovnáme-li části reálné, vychází

$$\cos3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\ \sin^2\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi + 3\cos^3\varphi$$

a odtud

$$4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi - \cos3\varphi = 0.$$

---

[2] Je totiž $\mathrm{tg}2\varphi = \frac{2\,\mathrm{tg}\varphi}{1 - \mathrm{tg}^2\varphi}$, $\mathrm{tg}3\varphi = \mathrm{tg}(2\varphi + \varphi) = \frac{\mathrm{tg}2\varphi + \mathrm{tg}\varphi}{1 - \mathrm{tg}2\varphi\,.\,\mathrm{tg}\varphi} = \frac{3\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}^3\varphi}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\varphi}$.

Zaveďme

$$2\cos\varphi = x,\ \cos 3\varphi = a$$

a máme rovnici

$$x^3 - 3x - 2a = 0;$$

její řešení je

$$x = 2\cos\varphi.$$

Také lze vyjít z rovnice

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

čili

$$\sin\alpha = 3\sin\tfrac{1}{3}\alpha - 4\sin^3\tfrac{1}{3}\alpha.$$

Položme

$$\sin\tfrac{1}{3}\alpha = x,\ \sin\alpha = a$$

a máme rovnici tvaru

$$4x^3 - 3x + a = 0,$$

kde ovšem $a < 1$; její kořeny jsou $\sin\frac{1}{3}\alpha$, $\sin\frac{1}{3}(\alpha + 2\pi)$, $\sin\frac{1}{3}(\alpha + 4\pi)$.

To jsou nejstarší kubické problémy. Zajímavé je sledovat, jakými prostředky je hodlali zvládnout matematikové od nejstarších dob až do druhé polovice předešlého století, kdy po obrovském rozmachu, způsobeném rozvojem diferenciálního a integrálního počtu, nastává doba revise starších method. Teprve tato doba postavila uvažované problémy do pravého světla a ukázala, že kubické a bikvadratické problémy nejsou řešitelné kružidlem a pravítkem, a zhodnotila zároveň jiné prostředky, jimiž je lze řešit.

Dříve než přistoupíme k vlastní úloze, uvedeme stručný přehled různých způsobů, kterými byly kubické a bikvadratické úlohy během doby řešeny a které namnoze dávají svědectví o důmyslu starých matematiků.

4. PŘEHLED STARŠÍCH METHOD ŘEŠENÍ PROBLÉMU ZDVOJENÍ KRYCHLE

Konstruktivní řešení rovnice

$$x^3 - 2 = 0$$

nebo obecněji rovnice

$$x^3 - m = 0$$

považovali staří matematikové za zvláštní případ obecnější úlohy, jež lépe vyhovovala prostředkům, jež měli po ruce. S algebraického hlediska můžeme ji vyslovit takto:

Jsou-li dány úsečky a, b, máme nalézt střední úměrné úsečky x, y, t. j. úsečky, které vyhovují rovnicím

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Tyto podmínky lze rozepsat ve vztahy

$$x^2 = ay, \; y^2 = bx$$

čili

$$x^3 = a^2b, \; y^3 = ab^2;$$

odtud

$$x = \sqrt[3]{a^2b}, \; y = \sqrt[3]{ab^2}.$$

Pro $a = 1$, $b = 2$ dostaneme $x = \sqrt[3]{2}$, $y = \sqrt[3]{4}$.

Uvedeme charakteristické ukázky starších řešení, ovšem v rouše moderní algebry.

4,1. Všichni historikové matematiky se shodují v tom, že autorem nejstaršího řešení tohoto problému je Archytas z Tarentu (430 l. př. Kr.). Jakkoli toto řešení nemá praktickou cenu, je rozhodně zajímavé tím, že užívá prostorových útvarů k řešení rovinného problému. Tohoto principu se v moderní geometrii mnohokrát použilo. Základní myšlenka uvedeného řešení je tato: Jsou dány úsečky a, b $(a > b)$ a hledáme střední úměrné úsečky r, s, které tedy vyhovují rovnicím $r^2 = as$, $s^2 = br$. Sestrojme v pravoúhlé soustavě (počátek soustavy budiž O) tři plochy

$$x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2},$$

$$x^2 + y^2 = ax,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{b^2}x^2.$$

První plocha je anuloid (prstenec), který vznikne, otáčí-li se kružnice o poloměru $\frac{1}{2}a$ kolem své tečny Oz v bodě O. Druhá plocha je kruhový válec s podstavou v rovině $z = 0$ a poloměrem $\frac{1}{2}a$, třetí plocha je rotační kužel s vrcholem O a osou Ox, který v rovině $x = b$ má kruhovou základnu o poloměru $\sqrt{a^2 - b^2}$. Jeden z průsečíků, který snadno sestrojíme methodou deskriptivní geometrie, budiž $P(x, y, z)$, jeho půdorys P_1. Pak je

$$OP = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ OP_1 = s = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Hořejší rovnice lze skutečně psát

$$r^2 = as,\ s^2 = ax,\ r = \frac{s^2}{b},$$

z čehož

$$\frac{a}{r} = \frac{r}{s} = \frac{s}{b}.$$

4,2. Řecký geometr Menächmus (asi 300 l. př. Kr.) podává řešení, které v principu vypadá asi takto: Parabola $y^2 = ax$ a parabola $x^2 = by$ mají společný bod ($x = \sqrt[3]{ab^2}$, $y = \sqrt[3]{a^2b}$); je tedy

$$\frac{a}{y_0} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{x_0}{b}.$$

Volíme-li $b = 2a$, je $y = a\sqrt[3]{2}$ hrana dvojnásobné krychle.

Jiné řešení téhož autora záleží v hledání průsečíku paraboly $y^2 = ax$ s rovnostrannou hyperbolou $xy = ab$. Pro průsečíky dostaneme $x = \sqrt[3]{ab^2}$, $y = \sqrt[3]{a^2b}$.

4,3. Myšlenka používat kuželoseček, po případě jiných křivek k řešení problémů, jež nelze řešit pravítkem a kružidlem, byla převzata pozdějšími, i moderními autory. První pokrok spočívá v tom, že se místo dvou narýsovaných kuželoseček používá jen jedné. Descartes používá paraboly $x^2 = ay$ a stanoví průsečíky s kružnicí

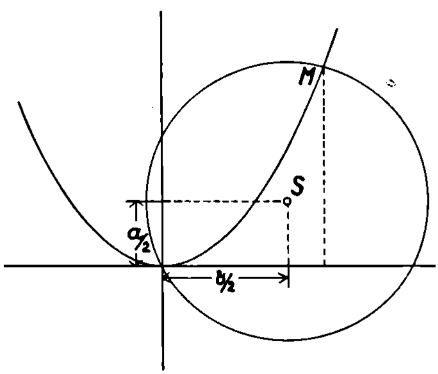
$$(x - \tfrac{1}{2}b)^2 + (y - \tfrac{1}{2}a)^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2),$$

která má střed $S(\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}a)$ a jde vrcholem paraboly (obr. 4). Řešením obou rovnic dostaneme souřadnice společného bodu $(\sqrt[3]{a^2b}, \sqrt[3]{ab^2})$; volíme-li $b = 2a$, je x-ová souřadnice společného bodu $a\sqrt[3]{2}$.

4,4. Grégoire (1668) uvádí toto řešení: Budiž $ABCD$ obdélník o stranách a, b (obr. 5). Opišme mu kružnici; její rovnice je

$$x^2 + y^2 = ax + by.$$

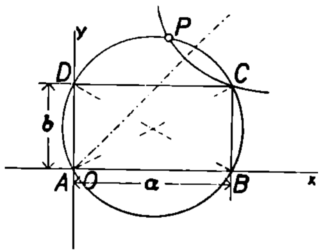
Sestrojme dále hyperbolu $xy = ab$, která má střed v bodě $O \equiv A$ a jde vrcholem $C(a, b)$. Dosaďme $x = ab/y$ do první rovnice a dostaneme po odstranění činitele $(y - b)$ rovnici



Obr. 4

$y^3 = a^2b$. Další průsečík P má tedy souřadnice $(\sqrt[3]{ab^2}, \sqrt[3]{a^2b})$.

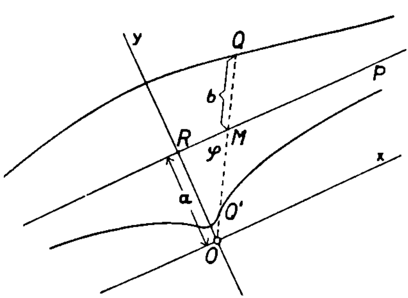
Asi z téže doby pochází řešení, jež podává Slusius a které



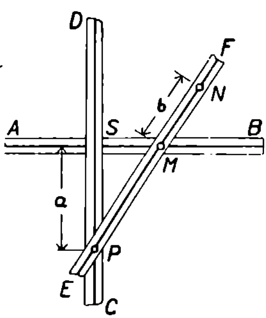
Obr. 5

neuvádíme. Používá také jen jedné kuželosečky (elipsy) a kružnice.[1] Zajímavé je, že používá elipsy, kdežto v jiných řešeních se užívá paraboly nebo hyperboly.

4,5. U řeckých geometrů je oblíben způsob řešení „*zasouváním*". Tím se rozumí konstrukce úsečky, jejíž koncové body jsou na dvou daných křivkách a jež sama nebo její prodloužení jde daným bodem. Mechanicky lze to snadno provést proužkem papíru, na kterém jsou vyznačeny oba koncové body úsečky. Pohybujeme proužkem tak, že jde stále daným bodem a jeden koncový bod se pohybuje po jedné křivce tak dlouho, až druhý koncový bod padne na druhou křivku. Tento proužek může někdy nahradit kružidlo a pravítko, ale jde mnohem dále. Jaký je jeho theoretický význam, poznáme zkoumáním křivek, které opisuje druhý koncový bod, pohybuje-li se první po dané křivce



Obr. 6



Obr. 6a

[1] Toto řešení je uvedeno ve spise Enriques-Fleischer II, str. 198.

a prochází-li přitom hrana proužku stále pevným bodem. Takové křivky se nazývají *konchoidy*. Nejjednodušší je případ, kdy je daná křivka přímkou. Druhý bod pak opisuje *konchoidu Nikomedovu*, jež byla dobře známa již v době Archimedově (250—150 l. př. Kr.). Je nutno, abychom se na tomto místě o ní zmínili.

Konstrukce N. konchoidy je patrna z obr. 6. Nechť je dána přímka p a mimo ni bod O ve vzdálenosti $OR = a$. Bodem O veďme přímku a od průsečíku M s přímkou p nanesme na obě strany délku b ($MQ = MQ' = b$). Otáčí-li se tato přímka kolem bodu O, opisují body Q, Q' dvě větve konchoidy. p je *základna* (basis), O *pól*, b *interval* konchoidy. Volíme-li souřadné osy tak, jak je v obrázku označeno, je rovnice konchoidy v polární soustavě

$$\varrho = \frac{a}{\sin\varphi} \pm b.$$

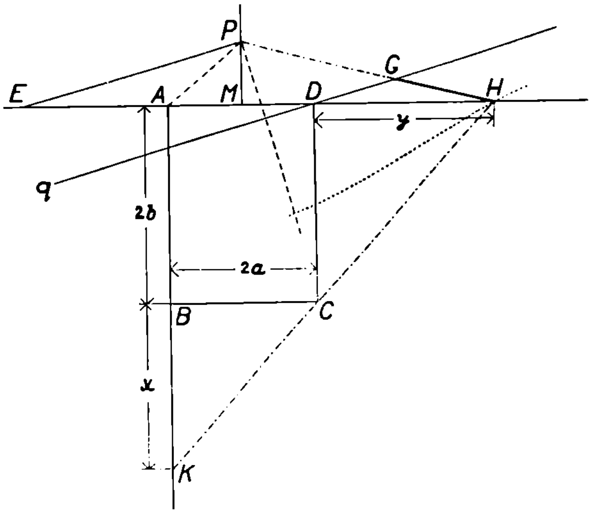
Přejdeme-li k pravoúhlým souřadnicím ($x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$), dostaneme rovnici

$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 = b^2y^2.$$

N. konchoida je racionální křivka čtvrtého stupně. V pólu O má dvojný bod s tečnami reálnými při $b > a$, bod vratu při $b = a$ a bod isolovaný při $b < a$. Nevlastní bod X^∞ osy Ox je dotykový uzel.

Velmi snadno lze sestrojit přístroj — *konchoidální kružidlo*, kterým lze tuto křivku spojitě opsat, což je velkou předností při konstruktivním řešení úloh. Tento přístroj sestává ze dvou na sebe kolmých pravítek, pevně spojených AB, CD a opatřených drážkami (obr. 6a). Pohyblivé pravítko EF je rovněž opatřeno drážkou, ve které se pohybují dva kolíky M, P . P spojme pevně s CD ($SP = a$) tak, aby se pravítko EF mohlo jinak volně pohybovat, a M, N (píšící hrot) spojme pevně s EF ($MN = b$). Při pohybu opíše N jednu větev konchoidy.

Konstrukce středních úměrných zasouváním či užitím konchoidy je značně složitá a svědčí o nemalém důmyslu starých geometrů.



Obr. 7

Sestrojme obdélník $ABCD$, kde $AB = 2b$, $AD = 2a$, a předpokládejme $a < b$ (obr. 7). Stanovme bod E tak, aby $AE = 2a$. V půlicím bodě M strany AD sestrojme kolmici a na ní bod P, při čemž $AP = DP = b$. Bodem D veďme přímku q rovnoběžně s PE. P je pól, q základna konchoidy s intervalem b. Jedna větev protíná AD v bodě H, je tedy $HG = b$; to je zasunutí úsečky b, aby její prodloužení šlo bodem P. Spojme H s C a dostaneme na AB bod K. Hledané úsečky jsou $DH = y$, $BK = x$.

Důkaz: Z konstrukce plyne $PM = \sqrt{b^2 - a^2}$, $HM = a + y$, tedy

$$PH = \sqrt{b^2 - a^2 + (a + y)^2} = \sqrt{y^2 + b^2 + 2ay}.$$

Z obrázku je zřejmé

$$EH : DH = PH : GH$$

čili

$$(4a + y) : y = \sqrt{y^2 + b^2 + 2ay} : b,$$

z čehož po úpravě vychází

$$y^4 + 2ay^3 - 8ab^2y - 16a^2b^2 = 0.$$

Levá strana je dělitelna dvojčlenem $(y + 2a)$, lze tedy poslední rovnici psát

$$(y + 2a)(y^3 - 8ab^2) = 0.$$

Poněvadž $(y + 2a)$ je různé od nuly, je

$$y^3 = 8ab^2.$$

Podobně plyne z obrázku

$$BC : BK = DH : DC$$

neboli

$$2a : x = y : 2b,$$

takže

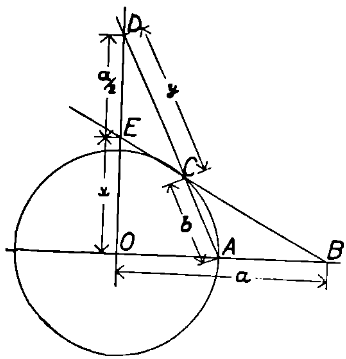
$$xy = 4ab,$$

z čehož

$$x^3 = 8a^2b.$$

Je tedy

$$\frac{2a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2b}.$$



Obr. 8

Volíme-li $a = \frac{1}{2}l$, $b = l$, je $x^3 = 2l^3$; x je tedy hrana krychle o objemu $2l^3$.

K sestrojení bodu H lze užít zasouvání nebo konchoidálního pravítka.

Podobná konstrukce pochází od Newtona (obr. 8). Opišme kružnici poloměrem $OA = \frac{1}{2}a$, nanesme $OB = a$,

$AC = b$ a zasuňme délku $\frac{1}{2}a$ tak, že její prodloužení jde středem O kružnice, při čemž body D, E jsou na přímkách AC, BC. Pak je $OE = x$, $CD = y$. Zde hraje úlohu N. konchoida s pólem O, základnou BC a intervalem $\frac{1}{2}a$.

Důkaz: Užijme na trojúhelník OAD věty Menelaovy. Strany tohoto trojúhelníka jsou proťaty přímkou v bodech B, C, E a součin vzniklých dělicích poměrů je roven jedné, t. j.

$$\frac{OB}{AB} \cdot \frac{AC}{DC} \cdot \frac{DE}{OE} = 1.$$

Dosadíme-li délky, jak jsou vyznačeny na obrázku, je

$$\frac{a}{\frac{1}{2}a} \cdot \frac{b}{y} \cdot \frac{\frac{1}{2}a}{x} = 1$$

čili

$$ab = xy. \tag{a}$$

Je však (mocnost bodu D)

$$y(b + y) = (x + \tfrac{1}{2}a)^2 - (\tfrac{1}{2}a)^2 = (x + a)x$$

čili

$$y^2 - x^2 = ax - by. \tag{b}$$

Z rovnic (a), (b) vychází

$$x = \sqrt[3]{ab^2}, \; y = \sqrt[3]{a^2b}.$$

V pravoúhlé souřadnicové soustavě značí rovnice (a), (b) dvě rovnostranné hyperboly, veličiny x, y se tedy při daných a, b jeví jako souřadnice společného průsečíku dvou kuželoseček.

4,6. Kromě N. konchoidy se užilo i jiných křivek k řešení delického problému a k hledání středních úměrných. Pro jednoduchost je zajímavá Diokletova cissoida. Lze ji sestrojit takto (obr. 9): Je dána kružnice se středem S a poloměrem r. Průměr OSA volme za osu Ox, tečnu v bodě O za osu Oy. Sestrojme ještě tečnu v bodě A. Libovolná přímka bodem O dává průsečíky M, N. Nanesme vždy $OP = MN$. Bod P probíhá cissoidu.

Dle obrázku je

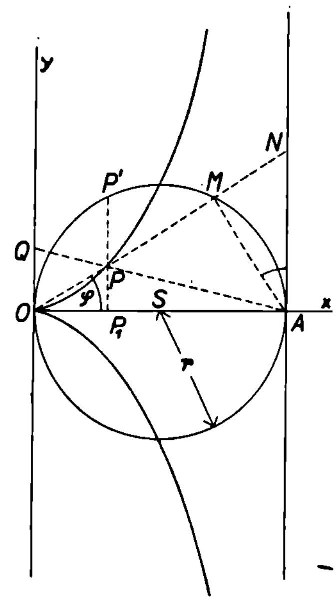
$$NA = 2r\ \mathrm{tg}\varphi,\quad MN = NA \sin\varphi = 2r \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} = OP.$$

Polární rovnice křivky je tedy

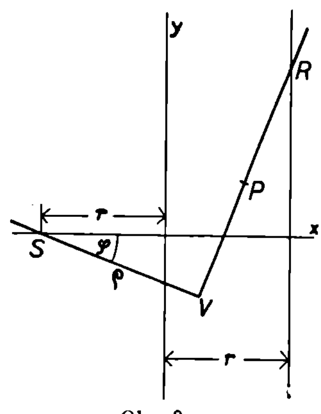
$$\varrho = 2r \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi};$$

přejdeme-li k pravoúhlým souřadnicím, dostaneme

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}.$$



Obr. 9



Obr. 9a

Cissoida je tedy křivka třetího stupně s bodem vratu O. Přímka $x = 2r$ je asymptota, její nevlastní bod je bodem obratu (inflexním).

Cissoidy lze užít ke grafickému umocňování na třetí a odmocňování. Je-li P bod křivky, je $AN = 2r\ \mathrm{tg}\varphi$. Spojnice AP dává na Oy bod Q a je $OQ : y_P = 2r : (2r - x_P)$; dosadíme-li z rovnice křivky $2r - x_P = \frac{x_P^3}{y_P^2}$, dostaneme

$$OQ = \frac{2ry_P}{2r - x_P} = 2r\left(\frac{y_P}{x_P}\right)^3 = 2r \operatorname{tg}^3\varphi.$$

Je-li tedy $2r = 1$, je $OQ = AN^3$, $AN = \sqrt[3]{OQ}$.

Z rovnice křivky plyne

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{\sqrt{x(2r - x)}} = \frac{\sqrt{x(2r - x)}}{2r - x};$$

to podle obrázku značí

$$\frac{P_1P}{OP_1} = \frac{OP_1}{P_1P'} = \frac{P_1P'}{AP_1}.$$

Tedy $OP_1 = x_P$, P_1P' jsou střední geometricky úměrné k úsečkám $P_1P = y_P$ a $AP_1 = 2r - x$.

Jak lze ke dvěma daným úsečkám a, b sestrojit užitím cissoidy obě střední úměrné? K tomu lze užít jednou pro vždy narýsované cissoidy. Sestrojme bod P tak, aby $P_1P : AP_1 = a : b$ čili $\operatorname{tg}P\widehat{A}P_1 = a/b$. Označme zatím $P_1P = a'$ $AP_1 = b'$ a pak podle předešlého je

$$\frac{a'}{OP_1} = \frac{OP_1}{P_1P'} = \frac{P_1P'}{b'}.$$

Hledané úsečky p, q sestrojíme pak jako čtvrté úměrné z rovnic

$$\frac{a}{a'} = \frac{p}{OP_1}, \frac{b}{b'} = \frac{q}{P_1P'}.$$

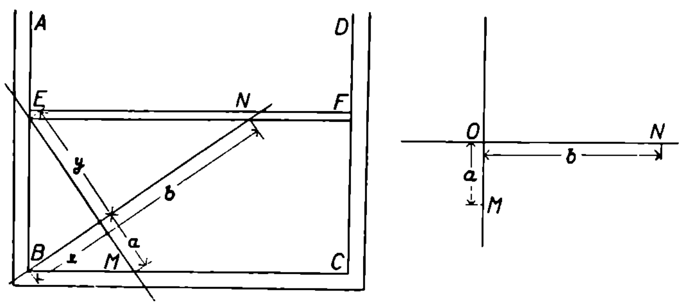
Oblíbené použití Diokletovy cissoidy spočívá v jejím jednoduchém výtvarném zákonu a také v tom, že ji lze opsat jednoduchým mechanismem podobně jako N. konchoidu. Počínaje Descartesem považujeme obyčejně za jednodušší tu křivku, která je nižšího stupně. Na jiném stanovisku stál Newton; u něho rozhoduje jednoduchost mechanismu, kterým lze křivku opsat, a ten je právě u D. cissoidy jednoduchý; pochází od Newtona. Je dán pevný bod S a přímka p (obr. 9a). Pravý úhel s vrcholem V se pohybuje tak, že jedno rameno jde stále bodem S, pevný bod druhého ramene R se stále pohybuje po přímce p. Půlicí bod P ramene VR opisuje cissoidu.

Důkaz: Volme souřadnicové osy jako na obrázku. Pak bod S má souřadnice $(-r, O)$, přímka p má rovnici $x = r$. Délka $VR = 2r$. Zaveďme úhel φ a délku $SV = \varrho$. Bod V má pak souřadnice $(\varrho\cos\varphi - r, -\varrho\sin\varphi)$ a je

$$\varrho\cos\varphi - r + 2r\sin\varphi = r,$$

z čehož

$$\varrho = 2r\frac{1 - \sin\varphi}{\cos\varphi}.$$



Obr. 10

Pro souřadnice bodu P vychází snadno

$$x = \varrho\cos\varphi - r + r\sin\varphi = r(1 - \sin\varphi),$$

$$y = -\varrho\sin\varphi + r\cos\varphi = r\frac{(1 - \sin\varphi)^2}{\cos\varphi}.$$

Po vyloučení φ dostaneme rovnici D. cissoidy

$$y^2 (2r - x) = x^3.$$

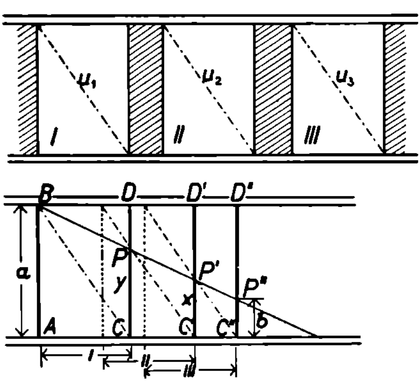
4,7. Vedle různých křivek a zasouvání se již ve starověku vyskytují také různé mechanismy, jimiž lze řešit delický problém. Podle historiků matematiky pochází takový nejstarší aparát od Platona (429—347 l. př. Kr.); vedle kružidla je považován za nejstarší matematický přístroj vůbec. Sestává z pevného rámu $ABCD$, kde při vrcholech B, C jsou pravé úhly (obr. 10). EF je pohyblivé pravítko, jež zůstává stále rovnoběžné s BC. Na listu papíru je dán pravý úhel s vrcholem O, na jehož ramena naneseme délky $a = OM$, $b = ON$. Zařiďme pak aparát tak, aby M bylo na BC, N na EF a aby prodloužení ramen šlo body E, B. Pak je z obrázku patrno, že

$$x^2 = ay, \ y^2 = bx,$$

a odtud

$$x = \sqrt[3]{a^2b}, \ y = \sqrt[3]{ab^2}.$$

Jiný aparát, zvaný *mesolabium*, pochází od Eratosthena (současník Eukleidův). Sestává ze tří stejně velikých obdélníkových tabulek I, II, III, které se pohybují mezi dvěma rovnoběžnými kolejnicemi tak, že se mohou částečně pokrývat (obr. 11). Jsou na nich vyznačeny úhlopříčky u_1, u_2, u_3. Vzdálenost kolejnic budiž a; na krajní stranu tabulky III vyznačme délku $C''P'' = b$. Pak zařiďme aparát



Obr. 11

tak, aby tabulka *II* byla pod tabulkou *I*, při čemž úhlopříčka u_2 protíná stranu CD v bodě P. Dále ať je tabulka *III* pod tabulkou *II* a u_3 ať protíná $C'D'$ v bodě P'. Posunujme tabulky tak dlouho, až jsou body B, P, P', P'' v jedné přímce. Pak snadno vychází z podobnosti trojúhelníků podle obrázku

$$a : y = BC : PC' = y : x = PC' : P'C'' = x : b$$

čili

$$a : y = y : x = x : b.$$

Také Descartes sestrojil mechanismus, který má podobný účel a jímž lze řešiti úlohy mnohem obecnější.

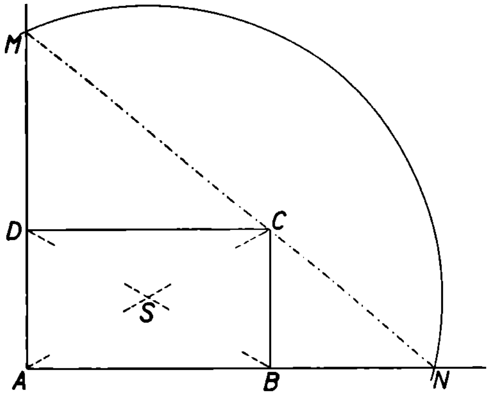
4,8. Zajímavé jsou přibližné konstrukce. To jsou takové konstrukce, jež lze provést pravítkem a kružidlem a jež nedávají theoreticky přesný výsledek, ale často dají výsledek velmi málo se lišící od přesného. Tu je třeba dát přednost konstrukcím, ve kterých lze opakováním jisté operace dojít k libovolně přesnému výsledku. Velmi obecnou methodou k získání takových výsledků je použití řetězových zlomků. Na př. $\sqrt[3]{2}$ lze rozvinout v

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{4} \cdots}}}}}$$

Bereme-li postupně zkrácené zlomky, docházíme k výsledku, který se stále více blíží přesné hodnotě.

S praktického hlediska ovšem nutno dát přednost konstrukci, kterou lze provést s nejmenším počtem přímek a kružnic a při níž je odchylka od správného výsledku tak malá, že s ní musíme počítat při práci s našimi pomůckami nebo že ji nelze smysly ani postřehnout.

Jedna taková přibližná konstrukce se připisuje Apolloniovi (270—186 l. př. Kr.). Na ramena pravého úhlu nanesme délky $AB = a$, $AD = b$, doplňme obdélník $ABCD$ a určeme jeho střed S (obr. 12). Pak hledejme zkusmo



Obr. 12

kružnici o středu S, jež protíná strany obdélníka v takových bodech M, N, že body M, C, N jsou v jedné přímce. Pak $x = DM$, $y = BN$ jsou hledané délky. Skutečně je dle obrázku

$$\frac{x + b}{b} = \frac{a + y}{y}$$

čili

$$xy = ab, \qquad \text{(a)}$$

$MS = NS$ neboli

$$(x + \tfrac{1}{2}b)^2 + (\tfrac{1}{2}a)^2 = (y + \tfrac{1}{2}a)^2 + (\tfrac{1}{2}b)^2,$$

t. j.

$$x^2 - y^2 = ay - bx. \qquad \text{(b)}$$

Z rovnic (a), (b) vychází

$$x = \sqrt[3]{a^2b}, \quad y = \sqrt[3]{ab^2}.$$

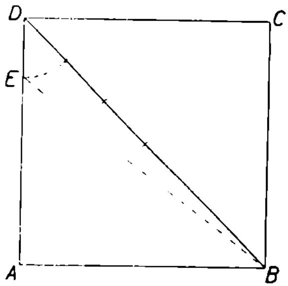
V rovnicích (a), (b) poznáváme opět rovnostranné hyperboly, které se vyskytují také při řešení Newtonově (4,5).

Dobrým příkladem přibližné methody, při níž docházíme postupným prováděním kvadratických konstrukcí k libovolně přesnému výsledku, je konstrukce Vargiova (1877). Budiž $l = 1$ hrana krychle; úhlopříčka čtvercové stěny je $u = l\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

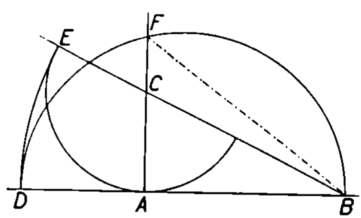
Sestrojme střední měřicky úměrnou obou úseček $m_1 = \sqrt{l \,.\, l\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{4}}$, potom střední měřicky úměrnou úseček u, m_1, t. j. $m_2 = \sqrt{u \,.\, m_1} = 2^{\frac{3}{8}}$, dále $m_3 = \sqrt{m_1 \,.\, m_2} = 2^{\frac{5}{16}}$ atd. Tak se postupně přibližujeme přesné hodnotě $\sqrt[3]{2}$. Pro $m_7 = 2^{\frac{85}{256}}$ dostaneme hodnotu 1,25878 ... Srovnáme-li s přesnou hodnotou

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992\ldots,$$

vidíme, že první hodnota je asi o jednu tisícinu menší.



Obr. 13



Obr. 14

G. Buonafalce uveřejnil několik přibližných řešení delického problému (1876). Uvádíme jen jedno, pozoruhodné svou jednoduchostí. Sestrojme čtverec $ABCD$, jehož strana $AB = 1$ (obr. 13). Úhlopříčku BD rozdělme na šest stejných dílů a nanesme $DE = \frac{1}{6}BD$. Délka BE je pak velmi přibližně rovna $\sqrt[3]{2}$. Skutečně je $AE = 1 - \frac{1}{6}\sqrt{2}$, a tedy

$$\overline{BE}^2 = 1 + (1 - \tfrac{1}{6}\sqrt{2})^2 = \frac{74 - 12\sqrt{2}}{36}.$$

Po propočtení dostaneme

$$BE = 1{,}25863\ldots,$$

což se od správné hodnoty liší až třetím desetinným místem.

Pro svou přesnost je rovněž pozoruhodná přibližná konstrukce, kterou uveřejnil Boccali (1884). K úsečce $AB = 1$ přičteme její větší díl, je-li rozdělena zlatým řezem, t. j. stranu pravidelného desetiúhelníka vepsaného do kružnice poloměru jedna (obr. 14). Tu sestrojíme, jak známo, takto: Budiž $AC = \frac{1}{2}AB$, opišme kružnici se středem C a poloměrem CA. Dostaneme na BC bod E, dále přeneseme $BE = BD$. Pak je $BC = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $BE = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ a $AD = BE - 1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) = 0{,}61803398\ldots$ Kružnice nad průměrem BD protíná AC v bodě F a je

$$BF = \sqrt{AB \,.\, BD} = \sqrt{1 \,.\, \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})} = 1{,}27201964\ldots$$

Dále je

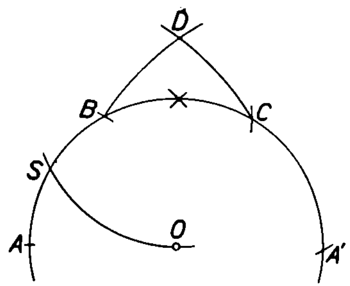
$$\tfrac{2}{3}(AD + BF) = 1{,}26003575\ldots$$

Porovnáním s přesnou hodnotou $\sqrt[3]{2}$ vidíme, že rozdíl je menší než 0,0001. Hrana dvojnásobné krychle je tedy s velkou přibližností rovna délce $\frac{2}{3}(AD + BF)$.

Lanascol ve svém spise „Géométrie du compas“, který je věnován řešení kvadratických a lineárních úloh pouhým kružidlem, uvádí také několik přibližných konstrukcí pro zdvojnásobení krychle, jež lze provést jen kružidlem. Uvádíme pouze jednu z nich.

Středem O opišme kružnici poloměrem rovným jedné a nanesme $AB = BC = CA' =$ poloměru (obr. 15). A, A'

jsou koncové body průměru. Oblouky o středech A, A', které jdou body C a B, protínají se v bodě D. Sestrojme dále bod X tak, že $AX = A'X = OD$ (X leží na původní kružnici). Ze středu X opišme kružnici poloměrem XO a dostaneme bod S. Pak se DS přibližně rovná $\sqrt[3]{2}$. Skutečně podle obrázku



Obr. 15

je $\overline{AD} = \overline{AC} = \sqrt{3}$, $\overline{OD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{OA}^2 = (\sqrt{3})^2 - 1 = 2$, $\overline{OD} = \sqrt{2}$. Pak $\overline{DS}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OS}^2 - 2 \,.\, \overline{OD} \,.\, \overline{OS} \,.\, \cos 60° = 2 + 1 - 2 \,.\, \sqrt{2} \,.\, 1 \,.\, \cos 60° = 3 - \sqrt{2}$ a $\overline{DS} = \sqrt{3 - \sqrt{2}} = 1{,}259281 \ldots$

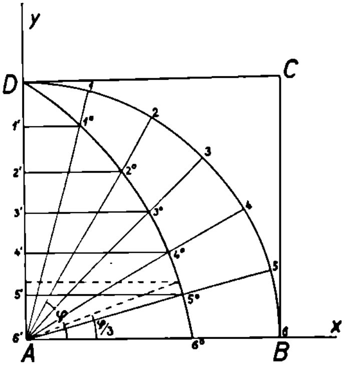
Odchylka od správné hodnoty je až na čtvrtém desetinném místě.

5. STARŠÍ METHODY TRISEKCE

5,1. První úvahy o trisekci úhlu pochází ze IV. století př. Kr. od Hippiase. Jemu se přičítá použití křivky, která později byla nazvána *kvadratrix*, poněvadž se jí použilo také při kvadratuře kruhu. Je to transcendentní křivka. Její jednu větev, jíž se používá k našemu účelu, lze mechanicky vytvořit takto (obr. 16): Budiž dán čtverec $ABCD$; nechť se jeho strana AD otáčí stejnoměrně kolem A z polohy AD do AB a současně strana DC se stejnoměrně pohybuje, zůstávajíc s původní polohou rovnoběžná, až se obě sejdou v poloze AB. Pohyb je označen na oblouku DB rozdělením na šest stejných dílů a rovněž na straně CB. Poloměr $A1$ se s rovnoběžkou bodem $1'$ protíná v bodě $1°$ křivky, poloměr

$A2$ s rovnoběžkou bodem $2'$ v bodě $2°$ atd. Všimněme si na př. bodu 2. Pak podle obrázku je poměr $y : b$ ($A2' : AD$) roven poměru $\varphi : \frac{1}{2}\pi$ (oblouk $\widehat{B2} : \widehat{BD}$),

$$\frac{y}{b} = \frac{\varphi}{\frac{1}{2}\pi} \quad \text{čili} \quad y = \frac{2b}{\pi}\varphi.$$



Obr. 16

y-ová souřadnice křivky je tedy úměrná úhlu φ. Je-li dán úhel φ a chceme-li sestrojit úhel $\frac{1}{3}\varphi$, vezměme na křivce bod o souřadnici y, která patří úhlu φ. Souřadnici $\frac{1}{3}y$ patří bod, který odpovídá úhlu $\frac{1}{3}\varphi$.

K témuž účelu může sloužit i *Archimedova spirála*, daná v polární souřadnicové soustavě rovnicí

$$\varrho = a\varphi,$$

kde a je konstanta. K úhlu φ patří průvodič ϱ, k úhlu $\frac{1}{3}\varphi$ průvodič $\frac{1}{3}\varrho$.

Podobně definovaných křivek se často použilo i v pozdější době. Sem patří na př. *trisektrix* Maclaurinova (1749), definovaná v bipolární soustavě rovnicí

$$\psi = 3\varphi;$$

její použití je zřejmé.

Catalanova trisektrix (1885) má v polární soustavě rovnici

$$\varrho \sin^3 \tfrac{1}{2}\varphi = k;$$

její tečna v bodě (ϱ, φ) svírá s průvodičem ϱ úhel $\frac{1}{3}(R - \varphi)$.

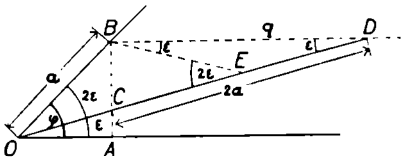
Podobnou vlastnost má Gaussova spirála

$$\varrho = \frac{1}{\cos^3 \frac{1}{3}\varphi};$$

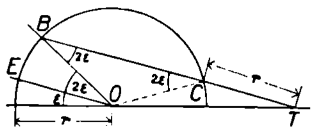
její normála v bodě (ϱ, φ) svírá s průvodičem ϱ úhel $\frac{1}{3}\varphi$.

Konstrukce těchto křivek je ovšem značně složitá.

5,2. Jiné methody trisekce záleží opět v zasouvání úsečky dané délky či v užití Nikomedovy konchoidy. Některé pochází snad již z V. století př. Kr. Vyskytuje se také u Archimeda. Ostatně užití této methody je zřejmé mnohem spíše než při hledání středních úměrných. Uveďme tuto konstrukci:



Obr. 17



Obr. 17a

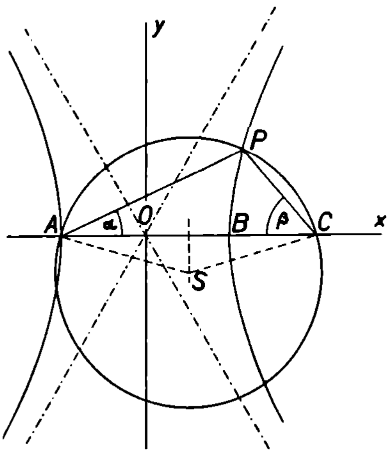
Budiž dán úhel $AOB = \varphi$ (obr. 17). Z bodu B na jednom rameni spusťme kolmici BA na druhé rameno. Nechť $BO = a$. Bodem B veďme rovnoběžku q s přímkou OA a zasuňme úsečku $CD = 2a$ mezi AB a q tak, aby její prodloužení šlo bodem O. Pak je

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle BDC = \varepsilon.$$

Trojúhelník BCD je pravoúhlý, E půlicí bod přepony, tedy trojúhelník BED je rovnoramenný, $\sphericalangle DBE = \sphericalangle BDE = \varepsilon$; vnější úhel $BEC = 2\varepsilon$. Avšak $BE = CE = a = BO$, trojúhelník OBE je tedy rovnoramenný a $\sphericalangle BOE = \sphericalangle BEO = 2\varepsilon$. Pak $\sphericalangle DOA = \varepsilon = \frac{1}{3}\varphi$.

Jiná podobná konstrukce je na obr. 17a. Daný úhel je $AOB = \varphi$. Kolem vrcholu O jako středu opišme kružnici poloměrem r. Zasuňme úsečku délky r tak, aby jeden koncový bod C byl na kružnici, druhý T na OA a prodloužení procházelo bodem B. $OE \parallel BC$ odděluje úhel $\varepsilon = \frac{1}{3}\varphi$, jak je snadno vidět z obrázku.

5,3. Jako k řešení delického problému používalo se k řešení trisekce ve starověku kuželoseček a tyto konstrukce převzali v principu i geometři v době renaissance. Po prvé snad použil kuželoseček k řešení trisekce Pappus. Mezi jeho konstrukcemi je jedna, která zaslouží pozornosti. Používá zde hyperboly, jejíž asymptoty svírají úhel 120° a jejíž rovnice je tedy ($b = a = \sqrt{3}$)



Obr. 18

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1 \text{ čili } y^2 = 3x^2 - 3a^2.$$

Vrcholy reálné osy buďte A, B (obr. 18). Sestrojme na hlavní ose bod C ($OC = 2a$). Libovolný bod P na hyperbole spojme s A a C. Pak je

$$\sphericalangle ACP = 2 . \sphericalangle CAP \quad (\beta = 2\alpha),$$

jak ukazuje jednoduchý výpočet. Skutečně dle obrázku je

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{a+x}, \operatorname{tg}\beta = \frac{y}{2a-x}.$$

Snadno vypočteme

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2y(a+x)}{(a+x)^2-y^2} =$$

$$= \frac{2y(a+x)}{(a+x)^2-3(x^2-a^2)} = \frac{y}{2a-x} = \operatorname{tg}\beta.$$

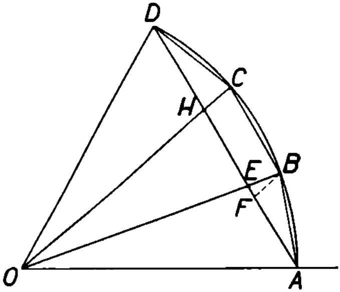
Sestrojme kružnici body A, P, C. Obvodový úhel patřící oblouku APC je $\alpha + \beta = 3\alpha$. Chceme-li tedy užitím narýsované hyperboly sestrojit třetinu úhlu φ, sestrojme kružnici nad tětivou AC tak, aby středový úhel $ASC = 2\varphi$ (obvodový φ). Je-li P příslušný průsečík kružnice s hyperbolou, je $\sphericalangle CAP = \alpha = \frac{1}{3}\varphi$.

Poznámka: Kružnice protíná hyperbolu ještě v dalších dvou bodech, které mají stejný význam pro jeden nebo druhý oblouk AC kružnice, jsou-li ovšem oblouky vzaty s patřičným znaménkem.

D e s c a r t e s uvažuje takto:

Na kružnici o středu O a poloměru $r = 1$ budiž oblouk AD rozdělen body B, C na tři stejné části (obr. 19). Označme $AD = q$, $AB = BC = CD = z$. Veďme $BF \parallel CO$. Trojúhelníky AOB, BAE jsou podobné (úhly při B jsou stejné, $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2} \sphericalangle BOD \sphericalangle = \sphericalangle AOB$). Pak

$$AO : AB = AB : BE$$



Obr. 19

čili

$$1 : z = z : BE$$

a odtud

$$BE = z^2.$$

Avšak také $\triangle ABE \sim \triangle BEF$, z čehož

$$AB : BE = BE : EF$$

čili

$$z : z^2 = z^2 : FE$$

a odtud

$$FE = z^3.$$

Avšak $AB = AE = HD = z$, $EH = z - z^3$, tedy

$$q = 3z - z^3.$$

Jde tedy o grafické řešení rovnice

$$z^3 - 3z + q = 0$$

a to lze snadno provést parabolou a kružnicí. Skutečně parabola

$$y^2 = x$$

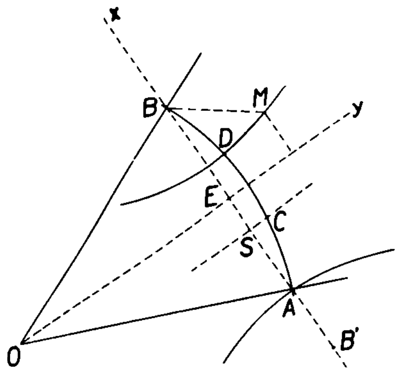
a kružnice

$$(x - 2)^2 + (y + \tfrac{1}{2}q)^2 = 2^2 + \tfrac{1}{4}q^2,$$

jež má střed $(2, -\frac{1}{2}q)$ a jde vrcholem paraboly, dávají po vyloučení x a vypuštění faktoru y rovnici

$$y^3 - 3y + q = 0.$$

Nejmenší kořen je tětivou daného ostrého úhlu.



Obr. 20

Clairautova konstrukce. Budiž AOB daný úhel, C, D body, které dělí oblouk AB na tři stejné části (obr. 20). Zvolíme kolmé osy x, y jako na obrázku a vidíme, že bod D je od B dvakrát tak vzdálen jako od osy y. Geometrickým místem takových bodů je hyperbola s ohniskem B a řídící přímkou y. Pro bod M je

$$BM = \sqrt{(u - x)^2 + y^2} = 2x$$

a rovnice křivky je

$$(u - x)^2 + y^2 = 4x^2$$

čili

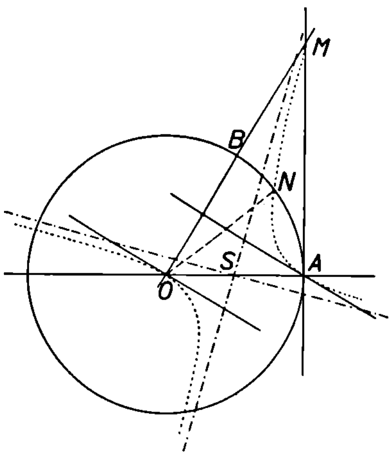
$$y^2 - 3x^2 - 2ux + u^2 = 0.$$

Tuto rovnici lze napsat ve tvaru

$$3(x + \tfrac{1}{3}u)^2 - y^2 = \tfrac{4}{3}u^2.$$

Uvažovaná hyperbola má tedy střed $S(-\tfrac{1}{3}u, 0)$, jeden vrchol $A(-u, 0)$ a druhé ohnisko $B'(-\tfrac{5}{3}u, 0)$. Poloosy jsou $a = \tfrac{2}{3}u$, $b = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,u$, úhel asymptot $\varphi = 120°$ ($\mathrm{tg}\varphi = b : a = \sqrt{3}$). Je to tedy táž hyperbola, se kterou jsme se shledali již při methodě Pappusově.

Zde lze dobře nahradit hyperbolu v okolí vrcholu G oskulační kružnicí.[1]



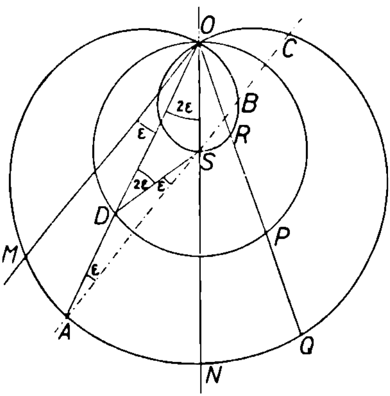
Obr. 21

[1] Velmi málo odlišnou konstrukci užitím hyperboly, jejíž asymptoty svírají úhel 120°, se zabýval Lampe v Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft (1905) a ukázal, že užije-li se oskulační kružnice, činí rozdíl při úhlu $\varphi = 60°$ asi jednu minutu.

Tato úvaha se zajímavou úvahou o přibližných konstrukcích je uveřejněna také v Archiv der Mathematik und Physik (Grunert), řada 3, sv. 10.

Chaslesova methoda. Budiž AOB daný úhel (obr. 21). Opíšeme kružnici o středu O a v bodě A sestrojíme tečnu. Je-li N hledaný bod, je $\sphericalangle BON = \varphi$, $\sphericalangle NOA = 2\varphi$, $\sphericalangle NAt = \varphi$, tedy $\sphericalangle BON = \sphericalangle tAN$. Necháme otáčet paprsek p kolem bodu O, paprsek q kolem bodu A z původních poloh OB, t stejnou rychlostí, takže svazky se středy O, A jsou shodné a opačného smyslu. Průsečík X vytvoří rovnostrannou hyperbolu, která protíná kružnici mimo A ještě ve třech bodech. Jeden N padne do oblouku AB a $\widehat{BN} = \frac{1}{3}\widehat{BA}$.

Tuto hyperbolu lze snadno blíže určit. Tečny v bodech O, A jsou kolmé k OM, střed S tedy půlí OA. Asymptoty jsou rovnoběžné s přímkami, které půlí úhel OMA a úhel vedlejší.



Obr. 22

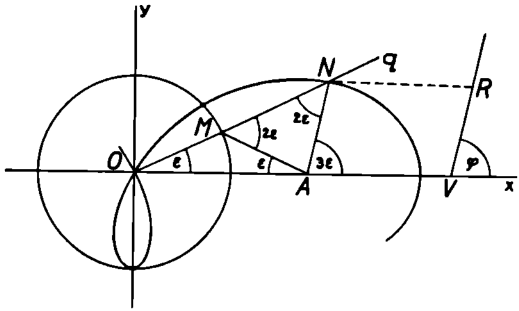
5,4. Kromě toho je mnoho křivek, jichž lze použít nejen k dělení na tři díly, nýbrž na libovolný počet dílů. Jedna z nich je *Pascalova závitnice*. Budiž dán úhel MON (obr. 22). Na rameni ON volme bod S jako střed kružnice, jež jde bodem O. Bodem O veďme přímku a od průsečíku P s kružnicí nanesme na obě strany délku $PQ = PR = OS = r$. Body

Q, R opíší P. závitnici. Je to křivka čtvrtého stupně s dvojným bodem O a dvěma imaginárními body vratu v kruhových bodech v nekonečnu.

Abychom rozdělili úhel MON na tři stejné části, sestrojíme bodem S rovnoběžku s ramenem OM, která protíná závitnici ještě v bodech A, B, C. Spojnice AO protíná kružnici v bodě D a ze vzniklých rovnoramenných trojúhelníků ADS, DSO a rovnosti úhlů při základnách je vidět, že $\sphericalangle MOA = \varepsilon$, $\sphericalangle AON = 2\varepsilon$.

Podobně lze ukázat, jaký význam mají body B, C. Je $\sphericalangle MOB = \frac{1}{3}(\pi + \sphericalangle MON)$, $\sphericalangle MOC = \frac{1}{3}(2\pi + \sphericalangle MON)$.

5,5. Cevova *cykloida*. Sestrojme kružnici se středem O a poloměrem r a osu Ox (obr. 23). Bodem O veďme přímku q,



Obr. 23

její průsečík s kružnicí budiž M. Nechť $MA = r$ a $AN = r$. Bod N opisuje C. cykloidu. Její rovnici lze snadno nalézt. Dle obrázku je $ON = r + 2r \cos 2\varepsilon$; přejdeme-li k pravoúhlým souřadnicím,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r(1 + 2 \cos 2\varepsilon),$$

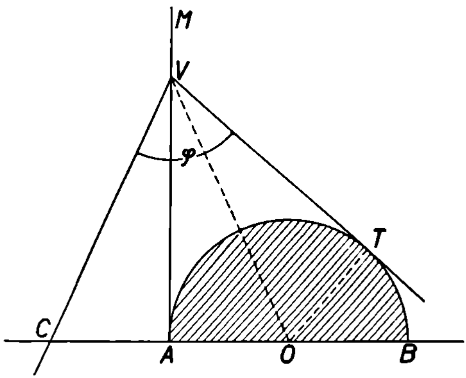
$$\cos 2\varepsilon = \cos^2\varepsilon - \sin^2\varepsilon = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

dostaneme rovnici křivky

$$(x^2 + y^2)^3 = r^2(3x^2 - y^2)^2.$$

Počátek O je čtyřnásobný (tečny splývají po dvou), kruhové body v nekonečnu jsou trojnásobné. Obrázek ukazuje, jak lze použít C. cykloidy k trisekci úhlu. Daný úhel φ umístíme tak, aby jedno rameno bylo VX, na druhé naneseme $VR = r$ a bodem R vedeme rovnoběžku s OX. Ta protne křivku v bodě N a úhel $NOX = \frac{1}{3}\varphi$.[1]

Z četných přístrojů sestrojených k mechanickému provedení trisekce uvedu jen jeden nejjednodušší. Sestává z pravítka CAB, polokruhu se středem O, při čemž $OA = OB = AC$, a jiného pravítka AM, které se dotýká kruhu v bodě A (obr. 24). Tyto části jsou spolu pevně spojeny. Chceme-li daný úhel φ rozdělit na tři stejné díly, umístíme aparát tak, aby vrchol V byl na hraně AM a aby jedno rameno šlo bodem C; posunujme pak aparát tak, aby se druhé rameno dotklo kružnice. Jak patrno, je $\sphericalangle CVA = \sphericalangle AVO = \sphericalangle OVT = \frac{1}{3}\varphi$.[2]



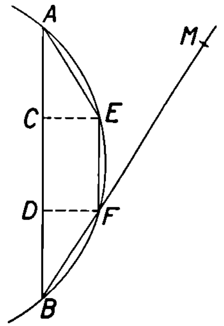
Obr. 24

[1] O těchto a jiných křivkách a jejich použití viz citovaná díla Enriques a Enriques-Fleischer.

[2] Jiné aparáty jsou popsány ve výše uvedených spisech.

5,6. Přibližné konstrukce jsou konstrukce prováděné pravítkem a kružidlem, které se co nejvíce přibližují přesnému výsledku.

Jedna z nejstarších konstrukcí rozdělení kruhového oblouku na tři stejné díly, jež byla vědomě prohlášena za přibližnou, pochází od A. Dürera a záleží v tomto: Tětivu AB rozdělme na tři stejné části body C, D, sestrojme kolmice CE, CF k AB (obr. 25). Aritmetický střed tětiv AE, EF, FB je tětiva příslušející třetině oblouku AB. Konstrukcí i výpočtem se snadno přesvědčíme, že přiblížení je dosti značné.



Obr. 52

Jiná methoda záleží v tom, že najdeme kvadratickou konstrukci, jejíž opakování vede k libovolně přesnému výsledku. Na příklad geometrická řada

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + \cdots$$

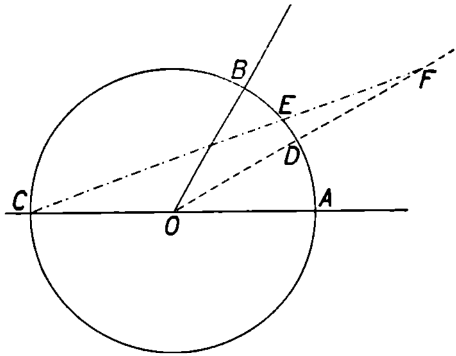
má součet $\frac{1}{3}$. Pišme tedy

$$\tfrac{1}{3}\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{4}\varphi + \tfrac{1}{8}\varphi - \tfrac{1}{16}\varphi + \cdots$$

Daný úhel φ rozdělme tedy na 2, 4, 8, ... dílů, což znamená jen postupné půlení, a po dostatečném počtu operací přijdeme k výsledku libovolně přesnému.

Cominotto a Monti (1895) uvádějí několik přibližných konstrukcí, které jsou snad již staršího původu, a zkoumají jejich přesnost. Přesnost je sice značná, ale konstrukce jsou příliš složité. Poměrně nejjednodušší je tato: Kolem vrcholu O úhlu opíšeme kružnici, která protíná ramena v bodech A, B, prodloužení prvního ramene v bodě C (obr. 26). Budiž D půlicí bod oblouku AB; naneseme $DF = OD$ a spojíme F s bodem C; přímka CF protíná kružnici v bodě E. Oblouk BE je přibližně třetina oblouku AB. Konstrukcí i výpočtem se přesvědčíme, že pro ostré úhly je chyba malá.

K poměrně dobrému výsledku vede použití t. zv. přibližného *trisekčního bodu*. Všimněme si obrázku 17a, kde jsme provedli trisekci zasunutím úsečky $CT = OA = 1$. T se na-



Obr. 26

zývá trisekční bod. Zřejmě je $OT = 2\cos\frac{1}{3}\varphi$. Je-li φ dosti malý úhel, lze vzít $OT = 2$; T se nazývá přibližný trisekční bod a může sloužit k přibližné konstrukci. Je-li dán úhel $COB = \varphi$, stačí jen spojit B s T a $\sphericalangle BTC \doteq \frac{1}{3}\varphi$.

6. OBECNÁ KUBICKÁ ROVNICE

Nejprve uvažme, že speciální kubická rovnice, t. zv. binomická,

$$x^3 - 1 = 0$$

má tři kořeny

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon,\ x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon^2.$$

Čísla $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ jsou tedy třetí odmocniny z jedné, $\varepsilon^3 = 1$. Z toho plyne, že rovnice

$$x^3 - a = 0$$

má kořeny $\sqrt[3]{a}$, $\varepsilon\sqrt[3]{a}$, $\varepsilon^2\sqrt[3]{a}$, při čemž první hodnota znamená jednu, nejlépe reálnou, třetí odmocninu čísla a.

Obecnou rovnici

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \tag{1}$$

převedeme substitucí $x = y - \frac{1}{3}a_1$ na redukovaný tvar

$$y^3 + py + q = 0, \tag{2}$$

v němž

$$p = a_2 - \tfrac{1}{3}a_1^2,\ q = a_3 - \tfrac{1}{3}a_1a_2 + \tfrac{2}{27}a_1^3. \tag{3}$$

Jedna methoda řešení rovnice (2) záleží v tom, že místo jedné neznámé zavedeme dvě neznámé u, v vázané vztahem

$$y = u + v; \tag{4}$$

tedy

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

čili

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0. \tag{5}$$

Volme mezi u, v mimo (4) ještě další vztah, totiž

$$3uv = -p. \tag{6}$$

Z rovnice (5) vychází

$$u^3 + v^3 = -q \tag{7}$$

a rovnice (6) a (7) dávají

$$v^3 = -\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3},$$
$$u^3 = -\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3};$$

z toho

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}},\\ u &= \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Každý z těchto výrazů má tři hodnoty, musí však být splněna podmínka (6), a proto pro y dostáváme jen tři různé hodnoty

$$y_1 = u + v,\ y_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v,\ y_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v. \tag{9}$$

Vzorce (9) se shrnují pod názvem Cardanův vzorec.

Pokud jsou kořeny od sebe různé, má kubická rovnice tři kořeny reálné nebo jeden reálný a dva komplexní sdružené. Při tom předpokládáme, že koeficienty rovnice jsou reálné. Chceme-li provést diskusi, musíme si povšimnout výrazu pod druhou odmocninou ve vzorcích (8). Tento výraz je

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{27q^2 + 4p^3}{108}.$$

Výraz v čitateli s opačným znaménkem nazýváme diskriminantem rovnice (2) a značíme jej D; je tedy

$$D = -(27q^2 + 4p^3).$$

Jak známo, je

$$D = [(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)]^2,$$

o čemž se můžeme přesvědčit přímým dosazením hodnot (9).

Výrazy (8) lze pak napsat

$$\begin{aligned} v &= \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{-\tfrac{1}{108}D}}, \\ u &= \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{-\tfrac{1}{108}D}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Jsou-li y_1, y_2, y_3 reálné a různé, je D číslo kladné. Jsou-li y_1 reálné, y_2, y_3 komplexní sdružené, je výraz $(y_2 - y_3)^2$ záporný, $[(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)]^2$ kladný a D je tedy záporné. Při $D = 0$ jsou dva kořeny stejné. Tedy:

Jestliže diskriminant rovnice (2) *je kladný* ($D > 0$), *má rovnice tři reálné kořeny, je-li záporný* ($D < 0$), *je jeden kořen reálný, dva komplexní sdružené. Při* $D = 0$ *má rovnice jeden dvojnásobný kořen.*

V případě $D < 0$ podávají vzorce (10) a (9) řešení v pohodlném tvaru, v případě $D > 0$ podávají tyto vzorce řešení ve tvaru komplexním, ač jsou reálné. Tento případ — „casus irreducibilis“ — se obchází tak, že si pomáháme řešením goniometrickým.*

---

* Ohledně dalšího poučení o rovnicích 3. a 4. stupně poukazuji na spisek Š. Schwarz, O rovnicích, Cesta k vědění sv. 1., JČMF, 2. vyd., 1949.

7. BIKVADRATICKÉ ROVNICE

Rovnici čtvrtého stupně lze řešit podobně jako rovnici kubickou.

Obecnou rovnici

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

lze substitucí $x = y - \frac{1}{4}a_1$ opět převést na tvar

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0. \tag{1}$$

Místo neznámé y zaveďme tři nové neznámé u, v, w, vázané vztahem

$$2y = u + v + w, \tag{2}$$

a volme opět dva nové vztahy. Násobme rovnici (1) číslem 16 a dosaďme z rovnice (2). Dostaneme po krátké úpravě

$$\begin{aligned}(u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4(uv + vw + wu)(u^2 + v^2 + w^2 + 2p) + \\ + 4p(u^2 + v^2 + w^2) + 8(uvw + q)(u + v + w) + \\ + 4(u^2v^2 + v^2w^2 + u^2w^2) + 16r = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Volme dva nové vztahy

$$u^2 + v^2 + w^2 = -2p, \tag{4}$$

$$uvw = -q. \tag{5}$$

Z rovnice (3) zůstává jen

$$u^2v^2 + v^2w^2 + u^2w^2 = p^2 - 4r. \tag{6}$$

Podle rovnic (4), (5), (6) jsou u^2, v^2, w^2 kořeny rovnice třetího stupně

$$t^3 + 2pt^2 + (p^2 - 4r)t - q^2 = 0, \tag{7}$$

kterou nazýváme *resolventou* rovnice (1).

Nechť její kořeny jsou t_1, t_2, t_3; pak je

$$u = \sqrt{t_1},\ v = \sqrt{t_2},\ w = \sqrt{t_3}.$$

Znaménka volíme tak, aby byla splněna rovnice (5); dostáváme čtyři kořeny, jež lze napsat

$$
\begin{aligned}
2y_1 &= \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3},\\
2y_2 &= \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3},\\
2y_3 &= -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3},\\
2y_4 &= -\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}.
\end{aligned}
$$

Z toho je patrno, že řešení rovnice čtvrtého stupně vede na řešení rovnice třetího stupně — resolventy první rovnice; řešíce problémy kubické, řešíme zároveň i problémy bikvadratické. Ostatně čistě geometrické úvahy vedou k témuž výsledku. Za nejobecnější projektivní bikvadratický problém lze považovat sestrojení společných bodů dvou kuželoseček, je-li každá z nich dána na př. pěti body. Tento problém vede k sestrojení společného polárního trojúhelníka, což je kubický problém, při kterém jde o tři průsečíky dvou kuželoseček; jejich jeden společný bod je znám, což bude v dalším ukázáno.

8. PŘEVEDENÍ KUBICKÉ ROVNICE NA TRISEKCI NEBO DELICKÝ PROBLÉM

Lze ukázat, že obecnou rovnici třetího stupně lze převést racionálními operacemi a druhými odmocninami na rovnici, na niž vede buď trisekce nebo delický problém.

Stačí uvažovat redukovaný tvar

$$z^3 + pz + q = 0. \tag{1}$$

Trisekce úhlu vedla na rovnici (odst. 3)

$$y^3 - 3(1 + a^2)y - 2a(1 + a^2) = 0. \tag{2}$$

Substitucí $z = \lambda y$ lze převést první rovnici na druhou. Dosazením do (1) vychází

$$\lambda^3 y^3 + p\lambda y + q = 0$$

čili

$$y^3 + \frac{p}{\lambda^2}y + \frac{q}{\lambda^3} = 0. \tag{3}$$

Srovnáním rovnice (2) s (3) dostaneme

$$\frac{p}{\lambda^2} = -3(1 + a^2),\quad \frac{q}{\lambda^3} = -2a(1 + a^2). \tag{4}$$

Dělením obou rovnic

$$a = \frac{3q}{2p\lambda}. \tag{5}$$

Dosazením do (4)

$$12p^2\lambda^2 = -4p^3 - 27q^2,$$

z čehož

$$\lambda = \frac{1}{2p}\sqrt{-\frac{4p^3 + 27q^2}{3}} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{D}{3}},$$

a podle (5)

$$a = \frac{3q}{\sqrt{\frac{1}{3}D}}.$$

Tato transformace má geometrický význam jen pokud jsou výrazy pro λ a a reálné, t. j. $D > 0$. Pak lze uvedené výrazy sestrojit kružidlem a pravítkem.

Konstrukci kořenů kubické rovnice lze převést na trisekci tehdy, když je diskriminant rovnice (1) kladný.

V případě záporného diskriminantu ($D < 0$) má rovnice, jak známo, jeden reálný kořen a ten je dán t. zv. Cardanovým vzorcem (odst. 6)

$$z = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{-\tfrac{1}{108}D}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{-\tfrac{1}{108}D}}$$

a zbývá jen sestrojit výrazy

$$m = -\tfrac{1}{2}q + \frac{\sqrt{-D}}{6\sqrt{3}},\quad n = -\tfrac{1}{2}q - \frac{\sqrt{-D}}{6\sqrt{3}},$$

jež obsahují pouze druhé odmocniny, a pak výrazy

$$\sqrt[3]{m}, \sqrt[3]{n},$$

což je úloha delická.

Konstrukce třetího stupně lze tedy převést pravítkem a kružidlem na trisekci úhlu nebo delický problém.

Proveďte podobnou úvahu pro rovnici

$$4x^3 - 3x + a = 0 \quad (|a| < 1),$$

na kterou vede také trisekce (odst. 3).

9. DŮKAZ, ŽE NENÍ MOŽNO DRUHÝMI ODMOCNINAMI ŘEŠIT ÚLOHU, KTERÁ VEDE NA IRREDUCIBILNÍ ROVNICI TŘETÍHO STUPNĚ

Teprve moderní algebra našla prostředky, jimiž lze stanovit, lze-li danou úlohu provést jistými nástroji či není-li to vůbec možné. Tak je tomu i v uvažovaném případě, kdy jde o problémy kubické a bikvadratické. Předešleme krátkou úvahu z theorie algebraických rovnic.

Tělesem se nazývá množina čísel, která má tu vlastnost, že provedeme-li základní početní úkony — sčítání, odčítání, násobení, dělení (vyjma dělení nulou) — s kterýmikoli jejími čísly, dostaneme vždy číslo, jež do této množiny patří.* Budiž R takové těleso. Pak je zřejmá věta:

Jsou-li všechny prvky tělesa R obsaženy v jiném tělese R_1, je R dělitelem tělesa R_1 a R_1 nazýváme *nadtělesem* tělesa R.

Nejznámější těleso je těleso čísel racionálních, které budeme nadále označovat R. Toto je dělitelem každého jiného tělesa, neboť každé těleso obsahuje aspoň jednu veličinu $\omega \neq 0$, a tedy i $\omega : \omega = 1$ a z jedničky lze konečným

* Tento pojem zavedl Dedekind. Viz Dirichlet-Dedekind. Vorlesungen über Zahlentheorie, 1871.

počtem základních početních výkonů přijít ke každému racionálnímu číslu.

Připojíme-li k tělesu R veličinu α a zároveň všechna čísla, která vzniknou základními početními výkony z čísla α a čísel tělesa R, dostaneme nové, obsáhlejší těleso R_1 čili nadtěleso, které obsahuje R i α. Takové připojení se nazývá *adjunkce*. R_1 vzniklo z R adjunkcí veličiny α.

Budiž

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_m$$

celá funkce, jejíž koeficienty patří tělesu R.

Jsou možné dva případy: $f(x)$ lze rozložit ve dva mnohočleny nižšího stupně, jejichž koeficienty patří tělesu R, nebo to není možné. V prvním případě nazýváme $f(x)$ *reducibilní*, v druhém *irreducibilní*. Lineární funkce je samozřejmě irreducibilní. Funkce $f(x)$, jejíž koeficienty patří tělesu R a která je irreducibilní, může být reducibilní v jiném tělese R_1 (na př. v nadtělese, které vznikne z R adjunkcí některého kořene rovnice $f(x) = 0$).

Ihned je zřejmá věta:

Irreducibilní funkce $f(x)$ nemůže mít s jinou funkcí $F(x)$, jež patří témuž tělesu, žádný společný dělitel, není-li $F(x)$ dělitelna mnohočlenem $f(x)$. Neboť největší společný dělitel lze nalézt postupným dělením a je tedy v R obsažen.

Irreducibilní funkce $f(x)$ nemá dělitele obsaženého v R, jen sebe a konstantu.

Nyní můžeme přistoupit k rovnici kubické. Budiž R stále těleso racionálních čísel, a určité racionální číslo, které není druhou mocninou jiného čísla. Adjungováním čísla $\sqrt{a}$ dostaneme nadtěleso R_1. Všechna čísla tohoto tělesa mají tvar $M + N\sqrt{a}$, kde M, N jsou čísla tělesa R. Jsou-li na př. $x_1 = m_1 + n_1\sqrt{a}$, $x_2 = m_2 + n_2\sqrt{a}$, je

$$x_1 \,.\, x_2 = m_1 m_2 + a n_1 n_2 + \sqrt{a}(m_1 n_2 + m_2 n_1)$$

a podobně

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{(m_1 + n_1\sqrt{a})(m_2 - n_2\sqrt{a})}{m_2^2 - an_2^2}$$

téhož tvaru.

Budiž a_1 číslo tělesa R_1, avšak $\sqrt{a_1}$ nikoli. Adjunkcí čísla $\sqrt{a_1}$ k tělesu R_1 dostaneme nadtěleso R_2, jež zahrnuje čísla tvaru $p + q\sqrt{a_1}$, při čemž p, q patří tělesu R_1. K tělesu R_2 připojme opět $\sqrt{a_2}$, kde a_2 patří tělesu R_2, nikoli však $\sqrt{a_2}$. Dostáváme nové nadtěleso R_3. Takto pokračujíce dostaneme těleso R_n adjunkcí čísla $\sqrt{a_{n-1}}$ k předešlému tělesu. Čísla posledního tělesa mají tvar $r + s\sqrt{a_{n-1}}$, kde r, s patří předchozímu tělesu R_{n-1}.

Na př. číslo

$$x = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{3}}}{\sqrt{11}}$$

se dostane z tělesa racionálních čísel R postupným připojením druhých odmocnin. Adjunkcí čísla $\sqrt{3}$ dostaneme z R těleso R_1, ve kterém je $5 + \sqrt{3}$. Adjunkcí čísla $\sqrt{5 + \sqrt{3}}$ dostaneme těleso R_2. Další adjunkcí čísla $\sqrt{11}$ dostaneme těleso R_3, ve kterém je obsaženo číslo x.

Nyní můžeme ukázat, že rovnice třetího stupně, která nemá racionální kořen a je tedy irreducibilní, není řešitelna druhými odmocninami. Rovnici můžeme předpokládat ve tvaru redukovaném, neboť kdyby měla úplná rovnice racionální kořen, měla by jej i rovnice redukovaná.

Mějme tedy rovnici

$$x^3 + ax + b = 0, \tag{1}$$

kde a, b jsou racionální čísla. Ta má tři kořeny, pro které platí (koeficient při x^2 roven nule)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \tag{2}$$

Předpokládejme, že žádný z těchto kořenů není racionální, že však je možno na př. x_1 vyjádřit řadou druhých odmocnin. Pak lze dle předešlé úvahy získat z tělesa R připojováním druhých odmocnin těleso, ve kterém je x_1 obsaženo. Budiž $\sqrt{p}$ poslední z připojených druhých odmocnin. Pak x_1 je tvaru

$$x_1 = m + n\sqrt{p}, \tag{3}$$

kde m, n, p patří předposlednímu tělesu. Dosadíme-li do rovnice (1), dostaneme výraz tvaru

$$P + Q\sqrt{p} = 0, \tag{4}$$

kde

$$P = m^3 + 3mn^2p + am + b,\ Q = 3m^2n + n^3p + an.$$

P, Q, p patří předposlednímu tělesu, $\sqrt{p}$ však nikoliv. Nemůže tedy být

$$\sqrt{p} = -\frac{P}{Q},$$

ledaže by bylo současně $P = Q = 0$. Potom by však rovnice (1) měla také kořen

$$x_2 = m - n\sqrt{p}$$

a bylo by rovněž

$$x_3 = -(x_1 + x_2) = -2m.$$

Kořen x_3 by patřil předposlednímu tělesu.

Máme tedy výsledek: Lze-li jeden kořen x_1 rovnice vyjádřit řadou druhých odmocnin, lze postupným připojením druhých odmocnin utvořit těleso, jemuž náleží x_1 a mimo to ještě druhý kořen x_2. Třetí kořen náleží pak tělesu předcházejícímu. Poněvadž x_3 patří předposlednímu tělesu, lze toutéž úvahou dokázat, že jeden z kořenů x_1 x_2 mu také patří, tedy zbývající kořen patří tělesu předcházejícímu atd. Konečně bychom dospěli k tělesu čísel racionálních. Není tedy přípustný předpoklad, že jeden kořen lze vyjádřit druhými odmocninami. *Rovnice třetího stupně není řešitelna druhými odmocninami, nemá-li jeden kořen racionální.*

Avšak úloha, jíž nelze řešit druhými odmocninami, nedá se konstruktivně provést pravítkem a kružidlem. Taková konstrukce se skládá z přímek a kružnic. Vyjádříme-li tyto útvary analyticky za předpokladu, že jsme zvolili souřadnicovou soustavu, dostaneme jen rovnice prvního a druhého stupně; průsečíky přímky s kružnicí a průsečíky dvou kružnic vedou k rovnicím kvadratickým. Obráceně výraz, který obsahuje jen výkony racionální a druhé odmocniny, lze sestrojit opakováním konstrukcí uvedených v odst. 2, které lze provést pravítkem a kružidlem. Podle toho tedy, *vede-li úloha na irreducibilní rovnici třetího stupně, není řešitelná kružidlem a pravítkem.*

10. JAK POZNÁME, ZDA MÁ ROVNICE S RACIONÁLNÍMI KOEFICIENTY RACIONÁLNÍ KOŘEN

Především platí věta: Má-li rovnice celistvé koeficienty a je-li koeficient nejvyšší mocniny roven jedné, je racionální kořen číslo celé, které je dělitelem absolutního členu.

Budiž dána rovnice

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (1)$$

v níž $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou celá čísla; předpokládejme, že má kořen $x = p : q$, kde p, q jsou celá nesoudělná čísla kladná nebo záporná. Dosazením vychází

$$p^n + a_1p^{n-1}q + a_2p^{n-2}q^2 + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0.$$

Dělme číslem q a dostaneme

$$\frac{p^n}{q} + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2}q + \ldots + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1} = 0.$$

Na levé straně jsou vesměs celá čísla mimo první člen. Ten musí tedy být také celé číslo, t. j. $q = 1$. Racionální kořen rovnice (1) je tedy číslo celé a zřejmě musí být dělitelem čísla a_n. V daném případě rozložíme tedy a_n v činitele a dosazením do rovnice (1) zjistíme zkusmo, zda některý vyhovuje této rovnici.

Má-li nejvyšší mocnina celistvý koeficient různý od jedné, jako na př. rovnice

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \; a_0 \neq 1, \qquad (2)$$

položíme

$$x = \frac{y}{k}$$

a dostaneme

$$y^3 + \frac{a_1}{a_0}ky^2 + \frac{a_2}{a_0}k^2y + \frac{a_3}{a_0}k^3 = 0. \qquad (3)$$

Volme za k takové nejmenší číslo, aby koeficienty $\frac{a_1}{a_0}k, \frac{a_2}{a_0}k^2,$

$\frac{a_3}{a_0}k^3$ byly celými čísly. Má-li rovnice (2) racionální kořen, musí mít i rovnice (3) kořen racionální, a tedy celistvý kořen, který lze nalézt podle předešlého.

Podle těchto vět je tedy rovnice

$$x^3 - 2 = 0,$$

na níž závisí delický problém, a obecněji i rovnice

$$x^3 - a = 0,$$

pokud a není trojmoc racionálního čísla, irreducibilní. Podobně jsou irreducibilní na př. rovnice

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0,$$
$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

Také rovnice

$$y^3 - 3(1 + a^2)y - 2a(1 + a^2) = 0,$$

na které závisí problém trisekce úhlu, je obecně irreducibilní. Kdyby byla reducibilní pro libovolné a, byla by reducibilní i pro každé a celistvé. Avšak tomu tak není, neboť na př. $a = 2$ vede k rovnici

$$y^3 - 15y - 20 = 0,$$

která je podle hořejších pravidel irreducibilní.

Pro některé zvláštní hodnoty a je ovšem tato rovnice reducibilní; na př. pro $a = 1 = \operatorname{tg} 45°$ dostaneme rovnici

$$y^3 - 6y - 4 = 0,$$

která má kořeny -2, $1 \pm \sqrt{3}$; jim odpovídají hodnoty $x = -1, 2 \pm \sqrt{3}$, což jsou tangenty úhlů $\varphi = 135°, 75°, 15°$.

Kružidlem a pravítkem lze provést také trisekci úhlu $\varphi = 2\pi : n$, kde n je celé číslo, jež není dělitelno třemi. Neboť pak lze vždy nalézt taková celá čísla x, y, že je splněna neurčitá rovnice

$$nx - 3y = 1.$$

Potom je

$$\tfrac{2}{3}\pi nx - \tfrac{2}{3}\pi \,.\, 3y = \tfrac{2}{3}\pi$$

čili

$$\frac{2\pi x}{3} - \frac{2\pi y}{n} = \frac{2\pi}{3n} = \tfrac{1}{3}\varphi.$$

$\frac{1}{3}\varphi$ se tedy jeví jako rozdíl úhlů $60°x$ a $y\varphi$. Lze tedy provést trisekci každého úhlu $\varphi = 2\pi : n$, kde n není dělitelno třemi, a tedy i trisekci úhlu $m\varphi$, kde m je číslo celé.

11. ŘEŠENÍ ÚLOH TŘETÍHO A ČTVRTÉHO STUPNĚ UŽITÍM PEVNÉ KUŽELOSEČKY

Kubické a bikvadratické úlohy vedou na rovnice třetího a čtvrtého stupně; jde tedy o grafické řešení těchto rovnic.

11,1. Nejpřirozenější je řešení užitím dvou kuželoseček.

Můžeme volit dvojí cestu. Buď k dané rovnici hledat vhodné kuželosečky nebo volit dvě kuželosečky a hledat rovnice, jež lze jejich užitím řešit.

Na př. máme-li rovnici

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

můžeme ji považovat za výsledek eliminace proměnné y z rovnic

$$x^2 = y, \; xy + ay + bx + c = 0.$$

První je rovnice paraboly, druhá rovnice rovnoosé hyperboly o středu $(-a, \; -b)$. Narýsujme tedy na milimetrovém papíře pevnou parabolu a pak hyperbolu. Stačí narýsovat jen části hyperboly v okolí hledaných průsečíků, k určení hyperboly stačí asymptoty a jeden bod.

Vyjděme obráceně od dvou kuželoseček; v takovém případě je nejlépe zvolit za jednu kružnici, abychom skutečně rýsovali jen jednu kuželosečku různou od kružnice. Volme opět parabolu

$$y = x^2$$

a kružnici

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

Eliminujeme y a dostaneme rovnici

$$x^4 + (1 - 2n)x^2 - 2mx + m^2 + n^2 - r^2 = 0.$$

V této rovnici schází člen s x^3, ale protože lze každou rovnici čtvrtého stupně převést racionální operací na tento tvar, vidíme snadno, že každou takovou rovnici lze graficky řešit danou pevnou narýsovanou parabolou a kružnicí. Neboť je-li taková rovnice

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0,$$

dostaneme srovnáním

$$1 - 2n = a, \; -2m = b, \; m^2 + n^2 - r^2 = c;$$

střed kružnice má tedy souřadnice

$$m = -\tfrac{1}{2}b,\ n = \tfrac{1}{2}(1 - a);$$

poloměr dostaneme pak z poslední rovnice.

V tomto je zahrnuto i řešení kubické rovnice ($c = 0$)

$$x^3 + ax + b = 0.$$

Odpadá hledání poloměru r, neboť $r = \sqrt{m^2 + n^2}$; kružnice jde tedy vrcholem paraboly.

Vidíme tedy, že kubické a bikvadratické problémy lze řešit kružidlem, je-li dána pevná parabola. Ukážeme dále, že to obecně platí o každé kuželosečce, ovšem různé od kružnice. To je rozšíření Steinerových úvah pro kvadratické problémy. Kvadratické úlohy v rovině lze řešit pouhým pravítkem, je-li dána pevná kružnice; zde máme pevnou kuželosečku a používáme kružidla a pravítka.[1]

11,2. Budiž dána elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \tag{1}$$

vyjádříme ji parametricky

$$x = a\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi, \tag{1a}$$

kde φ je t zv. excentrická anomalie. Vyjádříme-li $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ tangentou polovičního úhlu, $t = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi$, dostaneme racionální vyjádření

$$x = a\frac{1 - t^2}{1 + t^2},\ y = b\frac{2t}{1 + t^2}. \tag{1b}$$

Pro parametry průsečíků kružnice

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0 \tag{2}$$

---

[1] Po prvé byla tato myšlenka a její užití na některé problémy zpracována v dílech:

Kortum, Über geom. Aufgaben dritten u. vierten Grades, Bohn (1869),

Smith, Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques, Annali di matematica, ř. 2., sv. 3.

s elipsou vychází rovnice

$$(a^2 + 2am + p)t^4 - 4bnt^3 + (-2a^2 + 4b^2 + 2p)t^2 - \\ - 4bnt + (a^2 - 2am + p) = 0. \qquad (3)$$

Tato rovnice nemá ovšem tvar obecné bikvadratické rovnice,neboť koeficienty při t^3 a t jsou stejné. Je tedy otázka, zda lze obecnou bikvadratickou rovnici

$$x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d = 0$$

uvést na takový tvar transformacemi, jež obsahují jen výkony racionální a druhé odmocniny. Především můžeme lineární substitucí $x = x' + \alpha$ dosáhnout toho, že koeficienty a', c' budou mít v transformované rovnici stejné znaménko ($a'c' > 0$), neboť je

$$4a' = 4\alpha + 4a,\ 4c' = 4\alpha^3 + 4 \,.\, 3a\alpha^2 + 6 \,.\, 2b\alpha + 4c.$$

Zřejmě je možno α volit tak, aby a', c' měly stejná znaménka v nové rovnici

$$x^4 + 4a'x^3 + 6b'x^2 + 4c'x + d' = 0.$$

Proveďme pak substituci $x = \sqrt{\frac{c'}{a'}} \,.\, t$ a dostaneme rovnici tvaru

$$t^4 + At^3 + Bt^2 + At + C = 0, \qquad (4)$$

kde koeficienty při t^3 a t jsou stejné. Taková redukce je tedy vždy možná užitím jen druhých odmocnin.

Srovnáním rovnic (3) a (4) vychází

$$A = -\frac{4bn}{a^2 + 2am + p},\ B = \frac{-2a^2 + 4b^2 + 2p}{a^2 + 2am + p}, \\ C = \frac{a^2 - 2am + p}{a^2 + 2am + p}. \qquad (5)$$

Obráceně dostaneme při daných A, B, C veličiny m, n, p z lineárních rovnic

$$\begin{aligned} m\,.\,2aA \quad &+n\,.\,4b+p\,.\,A &= -Aa^2, \\ m\,.\,2aB \quad & \qquad\quad +p\,.\,(B-2) &= -2a^2-Ba^2+4b^2, \\ m\,.\,2a(C+1) \quad & \qquad\quad +p\,.\,(C-1) &= a^2(1-C) \end{aligned} \tag{6}$$

ve tvaru

$$\begin{gathered} m = -\frac{e^2(C-1)}{a(1+C-B)},\quad n = -\frac{Ae^2}{b(1+C-B)}, \\ p = -a^2 + \frac{2e^2(C+1)}{1+C-B}, \end{gathered} \tag{7}$$

kde $e^2 = a^2 - b^2$. Příslušná kružnice má tedy rovnici

$$x^2 + y^2 + 2e^2\,\frac{b(C-1)x + aAy + (C+1)ab}{ab(1-B+C)} = a^2. \tag{8}$$

Případ $1 - B + C = 0$ není třeba brát v úvahu, neboť pak lze rovnici (4) psát ve tvaru

$$t^4 + At^3 + (C+1)t^2 + At + C = 0$$

a levou stranu lze rozložit na

$$(t^2+1)(t^2+At+C) = 0.$$

Výrazy pro m, n, p (tedy i r) lze snadno sestrojit, a tedy i příslušnou kružnici. Průsečíkům odpovídají hledané hodnoty t $(=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi)$. Užitím pevné elipsy lze tedy řešit bikvadratickou i kubickou rovnici.[2]

Z předchozí úvahy plynou některé zajímavé vztahy. Všimněme si ještě jednou rovnice (3) pro parametry t_1, t_2, t_3, t_4 průsečíků kružnice s elipsou. Koeficienty při t^3 a t jsou stejné, tedy

$$\Sigma t_1 = \Sigma t_1t_2t_3 = t_1t_2t_3t_4\Sigma\frac{1}{t_1}; \tag{9}$$

tato rovnice vyjadřuje nutnou a postačující podmínku, aby čtyři body elipsy byly na kružnici. Její geometrický význam

[2] Toto řešení uveřejnil Vahlen, Archiv der Mathematik, ř. 3., sv. 3.

vysvitne ještě lépe, vrátíme-li se opět k excentrické anomalii. Neboť podle vzorce

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta - (\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta \,.\, \operatorname{tg}\gamma + \ldots)}{1 - (\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\gamma + \ldots) + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\delta},$$

dosadíme-li $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1 = t_1$, $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2 = t_2 \ldots$, je podle (9) čitatel roven nule, a tedy

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = 0$$

čili

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0 \ \ (\mathrm{mod} 2\pi). \tag{10}$$

Čtyři body elipsy jsou na kružnici, je-li součet exentrických anomalií roven nule (mod2π).

Necháme-li tři body elipsy splynout s bodem o parametru $t(\varphi)$, protíná jimi určená kružnice, oskulační kružnice bodu $t(\varphi)$, elipsu ještě v dalším bodě o parametru $t_4(\psi)$. Z podmínky (9), do níž dosadíme $t_1 = t_2 = t_3 = t$ (neboli $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$), dostaneme

$$3t + t_4 = t^3 + 3t^2 \,.\, t_4,$$

z čehož

$$t_4 = \frac{t^3 - 3t}{1 - 3t^2}, \tag{11}$$

neboli podle (10)

$$3\varphi + \psi = 0,\ 4R, 8R, \ldots \tag{11a}$$

Bodu t patří jediný bod t_4, obráceně však bodu t_4 patří tři hodnoty t dané rovnicí

$$t^3 + 3t^2 \,.\, t_4 - 3t - t_4 = 0; \tag{12}$$

bodem elipsy jdou tedy oskulační kružnice tří bodů elipsy o parametrech τ_1, τ_2, τ_3. Pro tyto tři hodnoty dostáváme z poslední rovnice

$$\Sigma\tau_1 = -3t_4,\ \Sigma\tau_1\tau_2 = -3,\ \tau_1\tau_2\tau_3 = t_4.\,[3] \tag{12a}$$

Připojíme-li k hodnotám τ_1, τ_2, τ_3 ještě t_4, dostaneme čtyři body elipsy, které jsou opět na kružnici, neboť

$$\Sigma\tau_1 + t_4 = -2t_4,\ (\Sigma\tau_1\tau_2)t_4 + \tau_1\tau_2\tau_3 = -3t_4 + t_4 = -2t_4,$$

a podmínka (9) je tedy splněna.

Je-li ψ anomalie bodu t_4, jsou anomalie příslušných tří bodů dle (11a)

$$\varphi_1 = \tfrac{1}{3}(4R - \psi),\ \varphi_2 = \tfrac{1}{3}(8R - \psi),\ \varphi_3 = \tfrac{1}{3}(12R - \psi) = = 4R - \tfrac{1}{3}\psi. \tag{13}$$

Sestrojíme-li tedy kružnici, jež jde body $\psi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, rozřešili jsme problém trisekce. Pohodlnou a zajímavou konstrukci získáme touto úvahou.

Píšeme-li opět t_1, t_2, t_3, t_4 místo dosavadního $\tau_1, \tau_2, \tau_3, t_4$, dostaneme pro symetrické funkce těchto čtyř hodnot podle (12a)

$$\Sigma t_1 = -2t_4,\ \Sigma t_1 t_2 = -3(1 + t_4^2),$$
$$\Sigma(t_1 t_2 t_3) = -2t_4,\ t_1 t_2 t_3 t_4 = t_4^2,$$

a tedy v rovnici (4) je

$$A = 2t_4,\ B = -3(1 + t_4^2),\ C = t_4^2.$$

Dosadíme do rovnic (7) a dostaneme

$$m = -\frac{e^2(t_4^2 - 1)}{4a(1 + t_4^2)} = \frac{e^2}{4a^2}x_P,\quad n = -\frac{e^2}{4b^2}y_P,$$

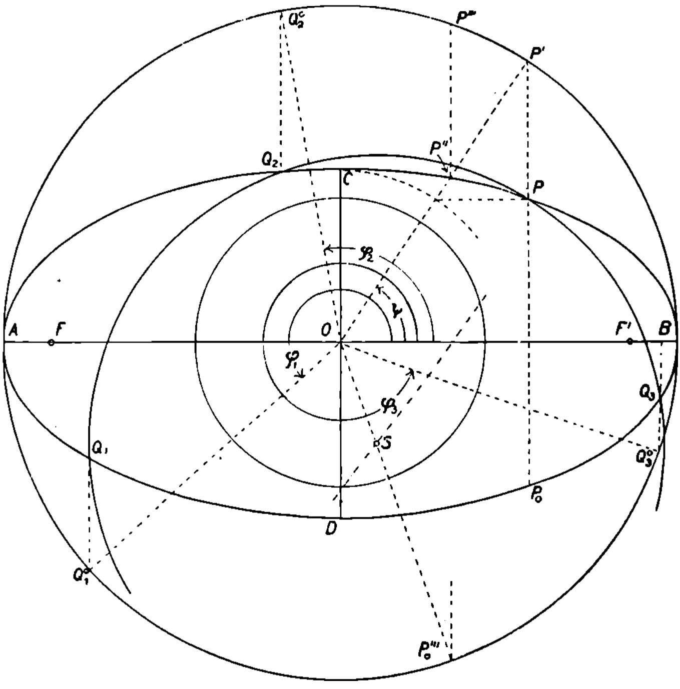
$$p = -\frac{a^2 + b^2}{2}; \tag{14}$$

x_P, y_P jsou souřadnice bodu P na elipse, jemuž patří parametr t_4 s anomalií ψ. Rovnice hledané kružnice je pak

[3] Tyto bodové trojice, zvané oskulační čili Steinerovy trojice, jsou předmětem obsáhlé studie M. Lercha v článku: Drobnosti z geometrie, Časopis pro pěstování mat. a fys., r. 45, str. 176.

$$x^2 + y^2 - \frac{2e^2}{4a^2} x_P \,.\, x + \frac{2e^2}{4b^2} y_P \,.\, y - \frac{a^2 + b^2}{2} = 0.$$

Tato kružnice jde bodem $P(x_p, y_p)$. Její střed $S(m, n)$ lze snadno sestrojit z výrazů (14) tímto obratem (obr. 27):



Obr. 27

Je

$$mx_P - ny_P = \frac{e^2}{4}\left(\frac{x_P^2}{a^2} + \frac{y_P^2}{b^2}\right) = \frac{e^2}{4}.$$

Bod $S(m, n)$ leží tedy na poláře bodu $P_0(x_P, - y_P)$ ke kružnici o středu O a poloměru $\frac{1}{2}e$, neboť rovnice této poláry je

$$xx_P - yy_P = \frac{e^2}{4}.$$

Dále je

$$\frac{n}{m} = -\frac{y_P}{x_P} \cdot \frac{a^2}{b^2} = -\frac{y_{P'}}{x_{P'}} \cdot \frac{a}{b} = -\frac{y_{P''}}{x_{P''}} \cdot \frac{a}{b} = -\frac{y_{P'''}}{x_{P'''}};$$

při tom, jak je patrno z obrázku, je bod P' na kružnici (O, a), bod P'' na elipse a na spojnici OP', P''' opět na kružnici (O, a), neboť $y_P \,.\, a/b = y_{P'}$, $y_{P''} \,.\, a/b = y_{P'''}$. Dále nechť je P_0''' bod symetricky položený s P''' podle hlavní osy elipsy. Bod S je pak na OP_0''' a na dříve nalezené poláře bodu P_0. Kružnice o středu S jdoucí bodem P dává s elipsou tři průsečíky Q_1, Q_2, Q_3. Jim patří na kružnici body Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0 a jejich anomalie jsou postupně $\frac{1}{3}(8R - \psi)$, $\frac{1}{3}(4R - \psi)$, $\frac{1}{3}(12R - \psi)$. Je tedy absolutní hodnota úhlu $BOQ_3^0 = \frac{1}{3}\psi$.

11,3. Podobnou úvahu lze provést, je-li dána hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Parametrické vyjádření je

$$x = a\,\frac{1 + t^2}{1 - t^2},\; y = b\,\frac{2t}{1 - t^2}; \tag{1a}$$

význam parametru t je patrný, píšeme-li rovnici přímky jdoucí vrcholem hyperboly $(-a, 0)$ ve tvaru

$$\frac{y}{b} = t\left(\frac{x}{a} + 1.\right)$$

Další průsečík s hyperbolou má pak souřadnice (1a). Pro průsečíky kružnice

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0$$

s hyperbolou dostaneme rovnici

$$(a^2 + 2am + p)t^4 + 4bnt^3 + (2a^2 + 4b^2 - 2p)t^2 -$$
$$- 4bnt + a^2 - 2am + p = 0,$$

ve které se koeficienty při t a t^3 liší jen znaménkem. Chceme-li s touto rovnicí srovnat obecnou rovnici

$$x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d = 0,$$

musíme ji napřed převést substitucí $x = x' + \alpha$ na tvar, v němž a', c' mají různá znaménka, což jako v předešlém odstavci je vždy možné, a pak užít substituce $x = \sqrt{-\frac{c'}{a'}} \, . \, t$.

Tím přijdeme k rovnici tvaru

$$t^4 + At^3 + Bt^2 - At + C = 0.$$

Srovnáním rovnic dostaneme pc jednoduchém výpočtu

$$m = -\frac{e^2(C-1)}{a(1+B+C)}, \quad n = \frac{Ae^2}{b(1+B+C)},$$

$$p = -a^2 + \frac{2e^2(C+1)}{1+B+C}.$$

Rovnice příslušné kružnice je tedy

$$x^2 + y^2 - 2e^2 \frac{b(C-1)x - Aay - ab(C+1)}{ab(1+B+C)} = a^2.$$

Případ elipsy se převede na případ hyperboly, zaměníme-li t za ti, b za $-bi$ a A za Ai.

11,4. Descartes, který po prvé jasně vyslovil, že k řešení kubických a bikvadratických úloh stačí jedna narýsovaná kuželosečka, vyslovil i poznatek, že není třeba celé kuželosečky, nýbrž že stačí sebe menší oblouk, ovšem konečné délky. Geometricky to plyne z toho, že lze vždy nalézt kolineaci, jež kuželosečku převádí v sebe a bod mimo daný oblouk do bodu na tomto oblouku.

Také analyticky to snadno vychází. Budiž dána na př. elipsa parametrickými rovnicemi

$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}, y = b\frac{2t}{1+t^2}$$

a na ní oblouk, jehož body odpovídají hodnotám t v intervalu $t' < t''$. Danou rovnici

$$x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d = 0$$

lze vždy převést transformací $x = \alpha + \beta t$ (11,2) na takový tvar, že je řešitelna užitím dané elipsy a kružidla. Dosazením a porovnáním koeficientů při t^3 a t, jež mají být stejné, dostáváme

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha + c}{a + \alpha}}.$$

Záleží tedy na tom, jak zvolíme α, aby příslušné t bylo v intervalu $t' < t''$.

Budiž x_1 reálný kořen dané rovnice a t_1 příslušná hodnota parametru t. Pak je

$$x_1 = \alpha + \beta t_1$$

čili, dosadíme-li za β hořejší hodnotu,

$$(a + \alpha)(x_1 - \alpha)^2 = t_1^2(\alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha + c).$$

To je vztah mezi α, t_1. Vezmeme-li za t_1 hodnotu τ z intervalu $t' < t''$, máme pro α rovnici třetího stupně. Budiž α_1 přibližná racionální hodnota reálného kořene této rovnice a t_1' příslušná hodnota t_1, která se málo liší od zvolené hodnoty τ. Ke zvolenému α_1 dostaneme β_1 a v transformované rovnici odpovídá kořenu x_1 kořen t_1 v daném intervalu.

12. PROJEKTIVNÍ ÚLOHY TŘETÍHO A ČTVRTÉHO STUPNĚ

Základní projektivní úlohou čtvrtého stupně je nalézt společné body dvou dostatečně určených kuželoseček (na př. pěti body) nebo sestrojit jejich společný polární trojúhelník. Jedna úloha souvisí s druhou. Konstrukce společného polárního trojúhelníka záleží v sestrojení tří společných bodů dvou kuželoseček, jejichž jeden společný bod je dán. Tato poslední úloha bývá často označována za základní kubickou projektivní úlohu.

V této úvaze musíme předpokládat znalost základních konstrukcí projektivní geometrie, zejména:

1. Jak se ke třem bodům na přímce sestrojí čtvrtý harmonický.

2. Jak se sestrojí další body kuželosečky dané pěti body nebo pěti tečnami (věta Pascalova a Brianchonova).

3. Jak se sestrojí polára bodu ke kuželosečce dané pěti body nebo pól dané přímky.

4. Jak se sestrojí průsečíky přímky s kuželosečkou nebo dvojné body involuce.

Poslední úloha je kvadratická, ostatní jsou lineární.

Při těchto projektivních konstrukcích hraje důležitou úlohu *kvadratická transformace*, kterou zavedli Poncelet, Chasles a Steiner a jež se obyčejně nazývá Steinerovou transformací.*

Dvě kuželosečky K_1, K_2 v rovině určují svazek kuželoseček. Předpokládejme, že čtyři společné body jsou od sebe různé. Pak jsou ve svazku tři kuželosečky degenerované v dvojici přímek. Dvojné body X, Y, Z těchto degenerovaných kuželoseček tvoří společný polární trojúhelník všech kuželoseček svazku. Obecně bodu P v rovině patří ke K_1, K_2 poláry p_1, p_2 a jejich průsečík P' je s P sdružen podle všech kuželoseček svazku. Takové body nazýváme prostě sdružené.

* Tato transformace je nejjednodušším případem t. zv. biracionální involutorní transformace dvou rovin. Tyto transformace jsou jedno-jednoznačné, bodu obecně odpovídá bod. Výjimku činí základní elementy. Přímce jedné roviny odpovídá v druhé rovině racionální křivka. Řadě bodové na přímce odpovídá projektivní řada bodová na příslušné křivce, involuci involuce atp. Pro další studium těchto transformací viz **Bydžovský**, Úvod do algebraické geometrie, str. 620.

Pohybuje-li se P po přímce a, opisují poláry p_1, p_2 ke kuželosečkám K_1, K_2 projektivní svazky. P' tedy opisuje kuželosečku, která jde vrcholy X, Y, Z společného polárního trojúhelníka [na př. bodu p . (YZ) je sdružen vrchol X]. Tak je každé přímce a přiřazena kuželosečka K_a opsaná trojúhelníku XYZ. Tato kuželosečka je současně geometrickým místem pólů přímky a ke kuželosečkám svazku. Nevlastní přímce je přiřazena kuželosečka K_∞, která obsahuje středy všech kuželoseček svazku.

Vrcholy a strany trojúhelníka XYZ jsou singulární elementy uvažované kvadratické korespondence. Jde-li přímka a jedním vrcholem, na př. X, rozpadne se odpovídající kuželosečka v přímku YZ a přímku a', která jde také vrcholem X a odděluje s a harmonicky dvojici stran XY, XZ (a' považujeme za poláru libovolného bodu na a vzhledem k degenerované kuželosečce XY, XZ).

Z toho je patrno, že známe-li jeden vrchol X společného polárního trojúhelníka dvou kuželoseček, lze ihned sestrojit společné sečny x_1, x_2 obou kuželoseček, které jím procházejí. Stačí jen vzít dva páry bodů sdružených ke kuželosečkám svazku, na př. M, M' a N, N'. Sečny x_1, x_2 jsou dvojné elementy involuce určené dvojicemi XM, XM'; XN, XN'. Společné body kuželoseček se pak sestrojí jako průsečíky těchto sečen s jednou kuželosečkou. *Úloha sestrojit společné body dvou kuželoseček je tak převedena na sestrojení společného polárního trojúhelníka.*

Volíme tedy dvě přímky m, n, které mají společný bod S; v uvedené kvadratické transformaci jim odpovídají kuželosečky K_m, K_n, které jdou bodem S' sdruženým s S. Zbývající tři společné body jsou hledané vrcholy X, Y, Z. Vhodnou volbou přímek m, n lze dosáhnout toho, že jedna z kuželoseček bude kružnicí; za druhou volíme nejraději rovnostrannou hyperbolu nebo parabolu.

Nechť jsou dány dvě kuželosečky K_1, K_2, každá na př. pěti body. Určíme kuželosečku K_∞, jejíž body jsou bod za bodem přiřazeny bodům nevlastní přímky. Označíme A^∞, A_1^∞ dva body v nekonečnu ve směrech kolmých, A', A_1' body s nimi sdružené a ležící na K_∞. Přímce $A'A_1'$ je v kvadratické transformaci naopak přiřazena rovnoosá hyperbola jdoucí body A^∞, A_1^∞.

Přímce t, která se dotýká kuželosečky K_∞ v bodě T, je přiřazena parabola, která se dotýká nevlastní přímky v bodě T'^∞.

Přímku, které odpovídá kružnice, lze sestrojit takto: Nechť jsou A^∞, A_1^∞ dva body ve směrech kolmých, B^∞, B_1^∞ jiné dva body ve směrech kolmých. Těmito dvěma dvojicemi je na nevlastní přímce určena involuce a její dvojné elementy jsou kruhové body I^∞, I_1^∞. Přidružené dvojice $A'A_1'$, $B'B_1'$ na K^∞ určují involuci na K^∞ a její dvojné elementy I', I_1' (imaginární) odpovídají kruhovým bodům. Jejich spojnice $m \equiv I'I_1'$ je osa involuce určené páry $A'A_1'$, $B'B_1'$ a snadno se sestrojí; přímce m je přiřazena kružnice K_m. Na přímce m je involuce indukovaná kuželosečkou K_∞ s dvojnými body I', I_1' a této opět odpovídá na kružnici K_m involuce s dvojnými body I^∞, I_1^∞, a tudíž se středem ve středu kružnice K_m. Je-li tedy na př. Q, R jeden pár involuce na m, jsou Q', R' koncové body průměru kružnice K_m. Takový pár na m tvoří body $Q \equiv (A'B' . A_1'B_1')$, $R \equiv (A'B_1' . A_1'B')$.

Nyní jde o to, provést konstrukci bodů X, Y, Z s danou narýsovanou kuželosečkou K. Mimo kružnici určíme ještě kuželosečku L, která jde body X, Y, Z a je podobná kuželosečce K, t. j. má tytéž body v nekonečnu. Křivkami K, L je dána podobnost, která kružnici převede v kružnici, jež s L dává body X', Y', Z', a těm naopak odpovídají hledané body X, Y, Z.

Nejsnáze se tyto konstrukce provedou, je-li daná kuželosečka parabolou. Popíšeme zde postup konstrukce.

V rovině budiž dána parabola P, jejíž pomocí provádíme konstrukci, a dvě kuželosečky K_1, K_2, každá dostatečným počtem bodů. Hledaný společný polární trojúhelník budiž

XYZ. Najdeme nejprve přímku m, se kterou je sdružena kružnice K_m opsaná polárnímu trojúhelníku. Buďtež A^∞, A_1^∞ dva body v nekonečnu ve směrech kolmých, A', A_1' body sdružené, a přímka jimi určená. Podobně buďtež B^∞, B_1^∞ dva body ve směrech kolmých, B', B_1' body sdružené a b jimi určená přímka. Průsečík obou je $M \equiv (a, b)$. Jeho polára ke kuželosečce K_∞, jež odpovídá nevlastní přímce a jde body A', A_1', B', B_1', je určena body $Q \equiv$ $\equiv (A'B', A_1'B_1')$ a $R \equiv (A'B_1', A_1'B')$. To je hledaná přímka m, jíž odpovídá kružnice K_m. Poznamenejme mimochodem: Přímce a je přidružena rovnoosá hyperbola, která jde body A^∞, A_1^∞, podobně přímce b, bodu M je přiřazen bod M', kterým jdou obě a tedy všechny rovnoosé hyperboly opsané trojúhelníku XYZ.

Budiž nyní U^∞ nekonečně vzdálený bod pevné paraboly P, U' bod sdružený, který s A', A_1', B', B_1' leží na křivce K_∞. Tečna této křivky v bodě U' budiž u. Přímce u odpovídá parabola K_u s nevlastním bodem U^∞.

Paraboly P a K_u mají rovnoběžné osy (společný bod U^∞), jsou tedy podobně položené podle jistého středu O. Použijme této podobnosti a sestrojme podobnou a podobně položenou kružnici s K_m. Označme ji K_m'. Přímky u, m se protínaly v bodě S, jemu v kvadratické transformaci patřil S', společný bod kuželoseček K_m, K_u. V podobnosti mu náleží bod S_0 na P, kterým prochází i K_m'. Ostatní tři průsečíky P s K_m' označme X_0, Y_0, Z_0. Obráceně jim jsou zase v podobnosti přiřazeny hledané body X, Y, Z.

Vidíme, že všechny užité konstrukce jsou lineární až na poslední, kde jde o průsečíky kružnice s kuželosečkou P.

13. ŘEŠENÍ KUBICKÝCH ÚLOH UŽITÍM KŘIVKY TŘETÍHO STUPNĚ NEBO JINÝMI PROSTŘEDKY

Úloha, která má n řešení a není transcendentní, dá se převést na sestrojení průsečíků křivky stupně n s přímkou, na př. paraboly n-tého stupně

$$y = a + bx + cx^2 + .. + mx^n$$

s přímkou $y = 0$. Podle toho se dá řešení úlohy třetího nebo čtvrtého stupně převést na sestrojení průsečíků přímky s křivkou třetího nebo čtvrtého stupně. Také konstrukce společných bodů dvou kuželoseček nebo společného polárního trojúhelníka vede na rovnici třetího nebo čtvrtého stupně a lze ji řešit užitím kubické křivky. Vždy však byla dávána přednost řešení užitím pevné kuželosečky, neboť se zdá jednodušší a přirozenější. Starší geometři považovali dokonce užití vyšších křivek v tomto případě za methodicky vadné (Chasles). Skutečně užitím kuželosečky ve spojení s pravítkem a kružidlem lze řešit jen úlohy třetího a čtvrtého stupně a nikoli úlohy stupně vyššího. Užitím křivky třetího stupně ve spojení s kružidlem lze však řešit i některé úlohy až šestého stupně. Máme-li přístroj k mechanickému rýsování křivky třetího stupně, lze řešit i některé úlohy devátého stupně, kdežto přístroji k rýsování kuželoseček lze řešit jen kubické a bikvadratické úlohy. Proto se zdá tato methoda nejpřirozenější.

Užitím křivek vyšších stupňů použitím pravítka a kružidla řešil kubické a bikvadratické úlohy již Newton a Maclaurin. V novější době pojednal o tomto předmětu London.[1] Podobně jako o kvadratických konstrukcích platí, že je lze provést pouhým pravítkem, je-li dána v rovině pevná kružnice a po případě i její střed, jde-li o úlohu metrickou, platí i o úlohách kubických, že je lze provést pravítkem, je-li

[1] London, Die geom. Konstruktionen 3. u. 4. Gr. etc., Zeitschrift f. Math. u. Phys. (Schlömilch), r. 41, str. 129.

dána racionální křivka třetího stupně. Jde-li o úlohu metrickou, musí být ještě dán čtverec nebo kružnice se středem; nejlépe je volit Diokletovu cissoidu a připojit k ní vytvořující kružnici.

Volme napřed kubickou parabolu

$$y = x^3.$$

Máme-li řešit rovnici

$$x^3 - px - q = 0,$$

sestrojíme průsečíky přímky

$$y = px + q$$

s parabolou. Souřadnice x dají hledané řešení.

Nejvhodnější se zdá použití cissoidy

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}; \tag{1}$$

parametrické vyjádření zní

$$x = \frac{2rt^2}{1 + t^2}, \; y = \frac{2rt^3}{1 + t^2}. \tag{1a}$$

Dosazením do rovnice přímky

$$y = ax + b \tag{2}$$

dostaneme pro parametry průsečíků rovnici

$$2rt^3 - (2ar + b)t^2 - b = 0. \tag{3}$$

Nyní je nutno ukázat, že rovnici

$$\alpha t^3 + \beta t + \gamma = 0$$

lze uvést racionální substitucí na tvar, kde je člen s t^2 a nikoli člen s t. To se stane jednoduše substitucí $t = 1/t'$ a vychází

$$\gamma t'^3 + \beta t'^2 + \alpha = 0.$$

Jak lze provést zdvojení krychle danou D. cissoidou, bylo ukázáno již v odst. 4,6.

Chceme-li provést trisekci úhlu φ, vyjdeme z rovnice

$$4t^3 - 3t + \lambda = 0,$$

v níž $\lambda = \sin\varphi$ a jež má kořeny $t_1 = \sin\frac{1}{3}\varphi$, $t_2 = \sin\frac{1}{3}(\varphi + 2\pi)$, $t_3 = \sin\frac{1}{3}(\varphi + 4\pi)$ (odst. 3).

Substitucí $t = 1 : t'$ přejde uvažovaná rovnice v rovnici

$$\lambda t'^3 - 3t'^2 + 4 = 0$$

a srovnáním s (3) vychází

$$a = \frac{7}{\lambda}, \quad b = -\frac{8r}{\lambda}.$$

Přímka

$$\lambda y - 7x + 8r = 0$$

protíná tedy cissoidu v bodech, kterým patří parametry t_1, t_2, t_3. Podle geometrického významu je $t = \frac{y}{x}$, tedy $\frac{y}{x} = t_1$ je rovnice přímky, která spojuje počátek O s prvním průsečíkem. Volme $x = 1$; pak je $y = t_1 = \sin\frac{1}{3}\varphi$. Sestrojme pravoúhlý trojúhelník s přeponou $= 1$, odvěsnou $= t_1$ a úhel proti ní je $\frac{1}{3}\varphi$.

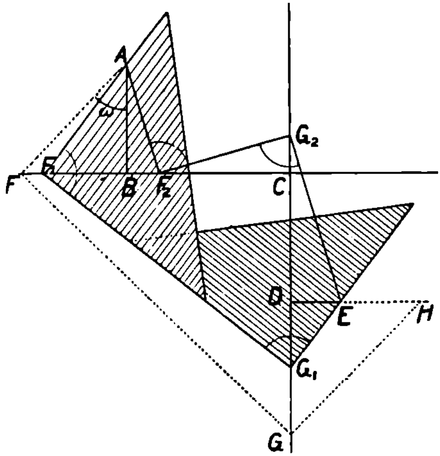
14. ŘEŠENÍ KUBICKÉ ROVNICE DVĚMA PRAVÝMI ÚHLY

Toto je jen zvláštní případ grafického řešení algebraické rovnice užitím pravoúhlého polygonu. Budiž dána rovnice

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

Sestrojme lomenou čáru $ABCDE$ o stranách a_0, a_1, a_2, a_3, jejíž sousední strany jsou k sobě kolmé (obr. 28). $AB = a_0$, $BC = a_1$ lze volit libovolně, $CD = a_2$ je rovnoběžno s AB

a téhož směru, mají-li a_2, a_0 různá znaménka; mají-li a_2, a_0 znaménko souhlasné, učiňme $CD \parallel AB$, avšak opačného směru. Totéž učiňme s veličinou $a_3 = DE$. Volme nyní



Obr. 28

libovolně úhel ω a narýsujme lomenou čáru $AFGH$; potom platí, píšeme-li $\operatorname{tg}\omega = x$:

$$\begin{aligned}
FB &= a_0 \operatorname{tg}\omega = a_0 x, \\
FC &= a_0 x + a_1, \\
CG &= (a_0 x + a_1) x, \\
DG &= CG + a_2 = a_0 x^2 + a_1 x + a_2
\end{aligned}$$

(a_2 je v obraze záporné),

$$EH = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3.$$

Padne-li H do E, je $EH = 0$ a $x = \operatorname{tg}\omega$ je řešení dané rovnice.

Lomenou čáru AF_1Q_1E, která podává řešení, lze snadno sestrojit užitím dvou pravoúhlých trojúhelníků, nejlépe průhledných (celuloidových nebo skleněných), nebo jednoho plného, druhého s výřezem. Podle obrázku je $x_1 = \frac{BF_1}{AB}$.

Podobně druhá lomená čára AF_2G_2E dává druhé řešení $x_2 = \frac{BF_2}{AB}$.

Z toho je zřejmé, že dva pravoúhlé trojúhelníky jsou nástroji většího rozsahu než kružidlo. Ani několika kružidly nelze řešit kubické úlohy. Užitím dvou pravých úhlů lze však řešit kubické problémy i bez pevné kuželosečky.

Cvičení: Řešte tímto způsobem rovnice:

a) $\lambda x^3 - 3x^2 + 4 = 0$, která dává trisekci (viz předešlý odstavec);

b) $x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0$, na niž vede konstrukce pravidelného sedmiúhelníka (viz další odstavec);

c) $y^3 - 3y + 1 = 0$ (pravidelný devítiúhelník).

15. PRAVIDELNÝ SEDMIÚHELNÍK A DEVÍTIÚHELNÍK

Konstrukce některých pravidelných mnohoúhelníků vede na rovnici třetího stupně. Všimněme si znovu obrázku, který se vyskytl při trisekci (obr. 29). Předpokládejme poloměr kružnice rovný jedné a také $PA = 1$. Napišme rovnici pro délku $OP = x$. Z obrázku velmi snadno vychází

$$\frac{\frac{1}{2}x}{1} = \frac{x + a}{1 + 2y} = \frac{1 + y}{x},$$

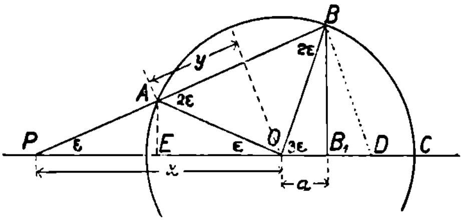
z čehož

$$2 + 2y = x^2,\ 1 + 2y = \frac{2(x + a)}{x} \qquad (1)$$

a vyloučením y

$$x^3 - 3x - 2a = 0. \qquad (2)$$

Tato rovnice vyjadřuje závislost mezi veličinami a, x. Je-li dán úhel BOC, tedy i délka $OB = a$, sestrojíme délku $x = OP$, spojíme P s B a dostaneme $OPB = \varepsilon = \frac{1}{3} \sphericalangle BOC$.



Obr. 29

Užijme toho ke konstrukci *strany pravidelného sedmiúhelníka.* Je-li poloměr opsané kružnice $r = 1$, je délka strany $s_7 = 2 \sin \frac{1}{7} 180°$, poloměr vepsané kružnice $\varrho_7 = \cos \frac{1}{7} 180°$. Sestrojíme v obrázku ještě bod D tak, že $BD = BO = 1$ Trojúhelník OBD je rovnoramenný Je-li $\varepsilon = \frac{1}{7} 180°$, je $3\varepsilon = \frac{1}{7} 540°$, $\sphericalangle OBD = 180° - 6\varepsilon = \frac{1}{7} 180° = \varepsilon$ a trojúhelník PBD je také rovnoramenný. Máme tedy ještě rovnici

$$1 + 2y = x + 2a. \qquad (3)$$

Eliminace y a a z první rovnice (1), (2) a (3) dá

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0. \qquad (4)$$

Její jedno řešení je délka $x = OP$. Pak AE je $\frac{1}{2} s_7$.

Pro *pravidelný devítiúhelník* je $s_9 = 2 \sin \frac{1}{9} 180° = 2 \sin 20°$. Pak je v obrázku $\varepsilon = 20°$, $3\varepsilon = 60°$, $a = \frac{1}{2}$ a z (2) máme pro x rovnici

$$x^3 - 3x - 1 = 0. \qquad (5)$$

Rovnice (4) a (5) jsou, jak vidno, irreducibilní. Nelze tedy přesně sestrojit pravidelný sedmi- a devítiúhelník kružidlem a pravítkem.

Strana vepsaného sedmiúhelníka je, jak známo, přibližně rovna polovině strany vepsaného trojúhelníka.

Značně složitější jsou úvahy, které vedou k řešení dalších pravidelných mnohoúhelníků, jež lze převést na trisekci (13, 19, 37 úhelník) a jež proto neuvádíme.

Zajímavá je konstrukce pravidelného sedmiúhelníka vepsaného do kružnice

$$x^2 + y^2 = a^2$$

užitím elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b < a).$$

Vrcholy sedmiúhelníka zvolíme po řadě A $(a, 0)$, A_1, A_2, ..., A_6. Promítneme je na elipsu kolmo k její hlavní ose. Dostaneme tak na elipse body

$A(a, 0)$, $B_1(a \cos\frac{2}{7}\pi,\ b \sin\frac{2}{7}\pi)$, $B_2(a \cos 2\,.\,\frac{2}{7}\pi,\ b \sin 2\,.\,\frac{2}{7}\pi)$, ... Body A, B_1, B_2, B_4 jsou pak na kružnici (součet anomalií je 2π), právě tak body A, B_3. B_5 B_6. Rovnice těchto kružnic se snadno najdou ve tvaru[1]

$$(x - a)^2 + y^2 + \left(2a - \frac{e^2}{4a}\right)(x - a) \pm \frac{e^2\sqrt{7}}{4b}\, y = 0.$$

Podobně pro pravidelný třináctiúhelník do téže kružnice vepsaný. Vrcholy jeho buďtež A, A_1, A_2, ..., A_{12}; příslušné body elipsy A, B_1, B_2, ..., B_{12} mají souřadnice

$$x_k = a \cos \frac{2k\pi}{13},\ y_k = b \sin \frac{2k\pi}{13} \quad (k = 0, 1, \ldots, 12).$$

Na kružnici jsou body $AB_1B_3B_9$, $AB_2B_5B_6$, $AB_4B_{10}B_{12}$, $AB_7B_8B_{11}$ a rovnice těchto kružnic jsou

$$x^2 + y^2 - \frac{e^2}{4a} \cdot \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}\, x \pm \frac{e^2}{4b}\sqrt{\frac{13 \mp 3\sqrt{13}}{2}} - \frac{a^2 + b^2}{2} = 0.$$

[1] Vahlen, Archiv der Mathematik, ř. 3., sv. 3.

16,1. Sestrojení normál bodem ke kuželosečce je problém, kterým se zabýval již starověký Apollonius a od té doby mnoho jiných. Dnes má tento problém vlastní rozsáhlou literaturu. Paty normál vedených bodem ke kuželosečce leží na hyperbole, jež se nazývá Apolloniovou. Lze k ní dospět takto: Budiž dána elipsa

$$E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0;$$

její normála v bodě $M(x_1, y_1)$ má rovnici*

$$a^2y_1x - b^2x_1y - c^2x_1y_1 = 0 \quad (c^2 = a^2 - b^2).$$

Považujme v této rovnici x, y za pevné a označme je x_0, y_0; x_1, y_1 považujme za běžné (vypustíme index) a dostaneme rovnici A. hyperboly patřící bodu $P(x_0, y_0)$

$$A \equiv a^2x_0y - b^2y_0x - c^2xy = 0.$$

Její průsečíky s elipsou jsou paty hledaných normál. Geometrickou úvahou lze k A. hyperbole dojít takto: Budiž p libovolný průměr elipsy, p' průměr sdružený a q kolmice spuštěná z P na p. Otáčí-li se p kolem O, vytvářejí p' a q dva projektivní svazky a průsečík (p', q) opisuje A. hyperbolu. Je to rovnoosá hyperbola a je určena středem elipsy O, bodem P a tečnou v tomto bodě, která je kolmá k průměru sdruženému se směrem OP.

Jde tedy o průsečíky dvou kuželoseček. Ve spojení s řešením rovnice čtvrtého stupně se tímto problémem zabývali de la Hirste a Legendre, kteří vesměs používají kromě dané kuželosečky ještě A. hyperboly, tedy dvou kuželoseček. Klasické jsou úvahy Joachimsthalovy. Geometrickým způsobem řeší nejprve úlohu: Jsou-li dány dva body A, B kuželosečky a jejich normály, mají se sestrojit body C, D,

* V této kapitole budeme označovat excentricitu písmenem c místo obvyklého e.

jejichž normály jdou průsečíkem prvních dvou normál. Dále řeší úlohu kubickou: Na normále bodu A je dán bod M. Mají se z něho vést další tři normály. Konečně přistupuje k obecnému případu — vést normály daným bodem. Úvahy Joachimsthalovy daly popud k četným dalším pracím geometrického i analytického rázu. Z českých autorů uveďme zejména Pelze, Weyra, Sobotku, Šolína, Junga a Klímu. Poslední používá methody deskriptivní geometrie. Elegantní analytickou methodou odvozuje věty Joachimsthalovy a četné jiné M. Lerch.[2]

16,2. Řešme nejprve problém normál u paraboly. Budiž dána parabola

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

Normála bodu (x_1, y_1) je

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1). \tag{2}$$

Považujeme-li x, y za pevný bod a označíme-li jeho souřadnice x_0, y_0, x_1, y_1 za běžné souřadnice, je (2) rovnicí A. hyperboly

$$xy + y(p - x_0) - py_0 = 0.$$

Její střed je $S(x_0 - p, 0)$, jedna asymptota $y = 0$ a hyperbola jde bodem (x_0, y_0), čímž je určena. Mimo bod v nekonečnu mají obě křivky společné tři body, což jsou paty normál jdoucích bodem P. Jimi prochází kružnice, ke které lze dospět takto: Podle rovnice (1) je

---

[2] Pelz, Zum Normalenproblem der Kegelschnitte, Sitzungsberichte der Akad. in Wien (1882, 1887).

Šolín, Kterak sestrojiti normály elipsy bodem mimo křivku, Časopis, r. 15 (1885).

Weyr, Věstník Král. č. společnosti nauk, 1902.

Sobotka, Zprávy Král. č. společnosti nauk, 1903.

Jung, Časopis, r. 34.

Klíma, Časopis, r. 42.

Lerch, Časopis, r. 45.

$$\frac{y_1}{2p} = \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_1 y_1}{p} = \frac{2x_1^2}{y_1}.$$

Rovnici (2) lze tedy psát

$$y = -\frac{y_1}{p}x + \frac{2x_1^2}{y_1} + y_1.$$

Píšeme-li opět x_0, y_0 místo x, y a vypustíme index, přejde tato rovnice v

$$2x^2 + y^2 - y^2\frac{x_0}{p} - yy_0 = 0. \tag{3}$$

Hledané paty jsou průsečíky křivek (1) a (3) a jimi jde celý svazek křivek

$$y^2 - 2px + \lambda\left[2x^2 + y^2 - y^2\frac{x_0}{p} - yy_0\right] = 0.$$

Ve svazku je kružnice při

$$2\lambda = 1 + \lambda - \lambda\frac{x_0}{p},$$

z čehož

$$\lambda = \frac{p}{p + x_0};$$

rovnice této kružnice je

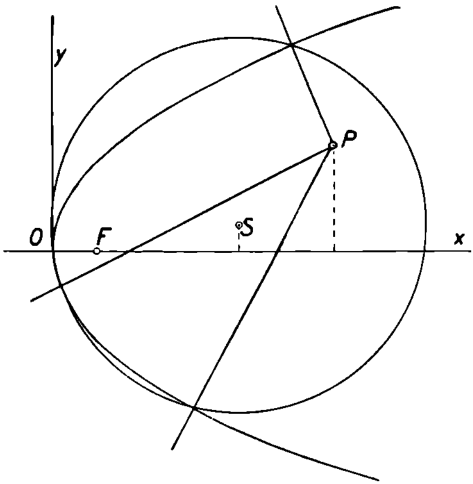
$$x^2 + y^2 - x(p + x_0) - \tfrac{1}{2}yy_0 = 0;$$

protíná parabolu (1) ve vrcholu a ve třech bodech, jež jsou patami hledaných normál. Konstrukce kružnice je snadná; její střed je $S[\frac{1}{2}(p + x_0), \frac{1}{4}y_0]$ a prochází vrcholem paraboly (obr. 30). Při této konstrukci se používá jen jedné narýsované kuželosečky, totiž dané paraboly.

16,3. U středových kuželoseček jsou konstrukce složitější. Šolín a Jung transformují centrální afinitou svazek kuželoseček, určený elipsou E a A. hyperbolou A, ve svazek, který obsahuje kružnici, při čemž elipsa E přejde sama v sebe.

Šolínova úvaha je synthetická, Jungova analytická. Budeme sledovat úvahu Jungovu.

Uvedenou afinitu určíme takto: Zvolíme x, y za souřadnice



Obr. 30

původního bodu, ξ, η za souřadnice bodu odpovídajícího, směr afinity je ν; pak je

$$\frac{y-\eta}{x-\xi}=\nu. \tag{1}$$

Poněvadž elipsa E má odpovídat sama sobě, musí být

$$b^2\xi^2+a^2\eta^2-a^2b^2=k(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2); \tag{2}$$

k je konstanta, kterou můžeme položit rovnou jedné, a pak je

$$b^2(x^2-\xi^2)+a^2(y^2-\eta^2)=0$$

čili dle (1)

$$b^2x+\nu a^2y=-b^2\xi-\nu a^2\eta. \tag{3}$$

Z rovnic (1) a (3) vychází transformační vzorce

$$x = \frac{(\nu^2a^2 - b^2)\xi - 2\nu a^2\eta}{\nu^2a^2 + b^2}, y = \frac{-2\nu b^2\xi - (\nu^2a^2 - b^2)\eta}{\nu^2a^2 + b^2}. \quad (4)$$

Nyní zvolíme konstantu ν tak, aby nový svazek obsahoval kružnici. Elipsa E přechází sama v sebe, hyperbola A musí tedy přejít v jinou hyperbolu A', jež není rovnoosá; musíme však dosáhnout toho, aby nový svazek $\mu E + A' = 0$ vytínal na nevlastní přímce involuci, jež obsahuje dvojici kruhových bodů ($y = \pm ix$, $t = 0$) a má tedy dvojné elementy k sobě kolmé. To se stane, budou-li osy hyperboly A' rovnoběžné s osami elipsy E. Dosaďme z rovnic (4) za x, y do rovnice A. hyperboly

$$A \equiv a^2x_0y - b^2y_0x - c_2xy = 0$$

a dostaneme rovnici hyperboly A'; v této však musí vymizet koeficient při $\xi\eta$, mají-li být osy rovnoběžné s osami elipsy, t. j.

$$(\nu^2a^2 - b^2)^2 - 4\nu^2a^2b^2 = 0$$

čili

$$a^4\nu^4 - 6a^2b^2\nu^2 + b^4 = 0.$$

Odtud

$$\nu^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 (3 \pm 2\sqrt{2}) = \left[\frac{b}{a}(1 \pm \sqrt{2})\right]^2$$

a tedy

$$\nu_{1,2} = +\frac{b}{a}(1 \pm \sqrt{2}), \ \nu_{3,4} = -\frac{b}{a}(1 \pm \sqrt{2}).$$

Každý z těchto směrů dostaneme, spojíme-li některý z bodů $\left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, t. j. koncový bod jednoho z obou sdružených průměrů, které jsou stejně dlouhé a stejně nakloněné k osám, s některým vrcholem hlavní nebo vedlejší osy. Volme směr *DR* (obr. 31), t. j.

$$\nu = \frac{b}{a}(1 + \sqrt{2}),$$

a máme afinní transformaci

$$x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left(-\xi + \frac{a}{b}\eta\right),\ y = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{b}{a}\xi + \eta\right).$$

Touto afinní transformací přejde E samo v sebe a hyperbola A v hyperbolu

$$A' \equiv -\frac{bc^2}{a}\xi^2 + \frac{ac^2}{b}\eta^2 + \sqrt{2}(abx_0 + b^2y_0)\xi +$$
$$+ \sqrt{2}(a^2x_0 - aby_0)\eta = 0.$$

Ve svazku $\mu E + A' = 0$ je kružnice; je třeba jen napsat podmínku, aby koeficienty při ξ^2 a η^2 byly stejné, t. j.

$$\mu b^2 - \frac{bc^2}{a} = \mu a^2 + \frac{ac^2}{b},$$

z čehož

$$\mu = -\frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

Dosadíme-li za μ, dostaneme rovnici kružnice

$$K \equiv \xi^2 + \eta^2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left(x_0 + \frac{b}{a}y_0\right)\xi - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{a}{b}x_0 - y_0\right)\eta -$$
$$- \frac{a^2 + b^2}{2} = 0.$$

Jsou tedy souřadnice středu a poloměr

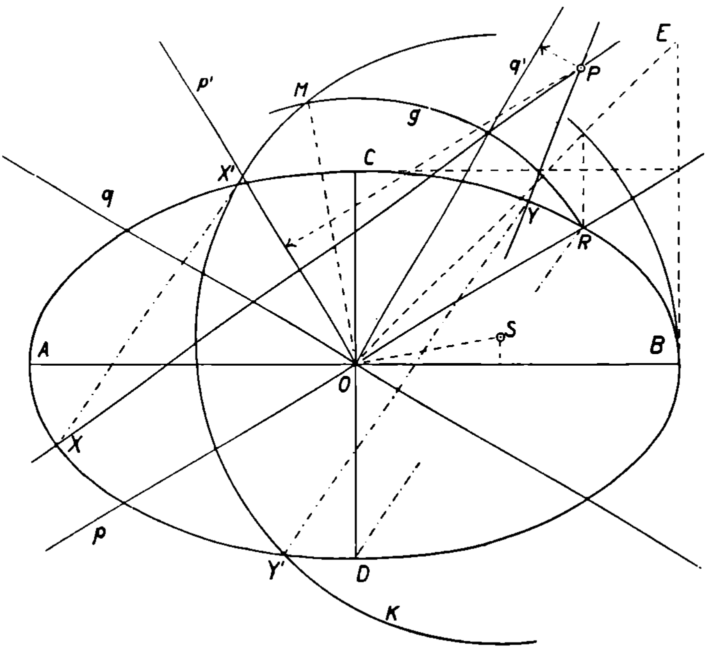
$$x_k = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\left(x_0 + \frac{b}{a}y_0\right),\ y_k = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\left(\frac{a}{b}x_0 - y_0\right),$$
$$r^2 = x_k^2 + y_k^2 ++ \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

což jsou výrazy, které lze velmi snadno sestrojit.

Kružnice K protíná elipsu E v bodech X', Y', Z', U'; vedeme-li jimi rovnoběžky se směrem afinity, dostaneme body X, Y, Z, U.

Při tomto postupu se opět použilo jen jedné kuželosečky, a to dané elipsy.

V obr. 31 je konstrukce provedena pro bod P a upravena takto: p, q jsou průměry elipsy, sdružené a stejně dlouhé



Obr. 31

o rovnicích $y/x = \pm b/a$, OE půlí úhel os. Budiž dále p' přímka bodem O kolmá k p, jejíž rovnice je $ax + by = 0$, d_1 vzdálenost bodu P od ní, tedy $d_1\sqrt{a^2 + b^2} = ax_0 + by_0$. Pak je

$$x_k = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{d_1\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{d_1\varrho}{2a}, \text{kde } \varrho = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}},$$

a podobně

$$y_k = \frac{d_2\varrho}{2b},$$

kde d_2 je vzdálenost bodu P od přímky $q' \perp q$.

Nejprve sestrojíme délku $\varrho = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}} = \overline{OR}$. Poloměrem ϱ opíšeme kružnici g. Nato sestrojíme x_k z úměry $x_k : \varrho = d_1 : 2a$ a podobně y_k z úměry $y_k : \varrho = d_2 : 2b$. Tím dostáváme souřadnice středu S. Dále je $OM \perp OS$ a bodem M na kružnici g jde kružnice K. Ta protíná v našem případě elipsu v bodech X', Y', kterým v uvažované afinitě patří hledané body X, Y ($X'X \parallel Y'Y \parallel DR$).

16,4. Odvození vět, jež jsou spojeny s jménem Joachimsthalovým, podáváme analytickou cestou, jak je uvádí M. Lerch.

Nechť je elipsa dána parametrickými rovnicemi

$$x = a\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi. \tag{1}$$

Normála bodu φ má rovnici

$$ax\sin\varphi - by\cos\varphi = c^2\sin\varphi\cos\varphi, \tag{2}$$

kde $c^2 = a^2 - b^2$. Srovnejme s obecnou rovnicí přímky

$$ux + vy + 1 = 0$$

a vidíme, že Plückerovy souřadnice normály jsou

$$u = -\frac{a}{c^2\cos\varphi},\ v = \frac{b}{c^2\sin\varphi}.$$

Vyloučením φ dostaneme rovnici

$$\frac{a^2}{u^2} + \frac{b^2}{v^2} = c^4, \tag{3}$$

což je v přímkových souřadnicích rovnice evoluty obalené normálami. Je to křivka čtvrté třídy, bodem jdou čtyři normály.

Místo parametru φ zavádí Lerch imaginární parametr

$$z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi;$$

pak je

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}, \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz},$$

$$\left.\begin{aligned} x &= a\frac{z^2+1}{2z}, y = b\,\frac{z^2-1}{2iz}, \\ u &= -\frac{2az}{c^2(z^2+1)}, v = \frac{2ibz}{c^2(z^2-1)}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Považujme $ux + vy + 1 = 0$ za rovnici bodu $P(x, y)$ (x, y jsou stálé, u, v běžné souřadnice), dosaďme za u, v hodnoty (4) a dostaneme pro parametry pat normál z bodu P rovnici

$$c^2z^4 - (2ax - 2biy)z^3 + (2ax + 2biy)z - c^2 = 0. \quad (5)$$

Kořeny této rovnice označíme z_1, z_2, z_3, z_4; pro jejich symetrické funkce platí

$$\begin{aligned} s_2 &= z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4 = 0, \\ s_4 &= z_1z_2z_3z_4 = -1. \end{aligned} \quad (6)$$

Tyto dvě rovnice vyjadřují nutnou a postačující podmínku, aby normály čtyř bodů šly jedním bodem. Dále je

$$s_1 = \frac{2ax - 2biy}{c^2}, s_3 = -\frac{2ax + 2biy}{c^2}. \quad (7)$$

Máme-li čtyři body elipsy, jejichž parametry z_i vyhovují rovnicím (6), vypočteme $s_1 = \Sigma z_i$, $s_3 = \Sigma z_1z_2z_3$ a dostaneme pak z rovnic (7) souřadnice průsečíku normál

$$x_0 = \frac{c^2}{4a}(s_1 - s_3), \ y_0 = \frac{c^2 i}{4b}(s_1 + s_3). \quad (8)$$

Pro směrnici tětivy, která spojuje body parametrů z, z_1, vychází

$$k = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{b}{ai} \cdot \frac{zz_1 - 1}{zz_1 + 1}.$$

Tětivy zz_1, $z'z_1'$ jsou tedy rovnoběžné, vyhovují-li parametry podmínce $zz_1 = z'z_1'$.

Nechť tětiva zz_1 přejde v tečnu bodu z ($z_1 = z$), rovnoběžná sečna ať jde vrcholem $A(a, 0)$; pro tento vrchol je $\varphi = 0$, tedy $z_1' = 1$. Máme pak $z^2 = z'$.

Přímka vedená vrcholem A elipsy rovnoběžně s tečnou bodu z čili kolmá na jeho normálu protíná elipsu v bodě o parametru z^2.

Hledejme podmínku, aby čtyři body elipsy o parametrech z_i byly na kružnici

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + n = 0 \quad (n = p^2 + q^2 - r^2). \tag{9}$$

Po dosazení hodnot (4) vychází rovnice

$$(a^2 - b^2)z^4 - 4(ap + bqi)z^3 + 2(a^2 + b^2 + 2n)z^2 - \\ - 4(ap - bqi)z + a^2 - b^2 = 0.$$

Pro symetrické funkce kořenů dostáváme

$$s_1 = \frac{4(ap + bqi)}{c^2}, \quad s_2 = \frac{2(a^2 + b^2 + 2n)}{c^2}, \quad s_3 = \frac{4(ap - bqi)}{c^2},$$

$$s_4 = 1. \tag{10}$$

Nutná a postačující podmínka, aby čtyři body elipsy o parametrech z_1, z_2, z_3, z_4 byly na kružnici, je tedy

$$z_1 z_2 z_3 z_4 = 1. \tag{11}$$

Jsou-li dány čtyři body, které této podmínce vyhovují, vypočteme s_1, s_2, s_3, a pak dostaneme z rovnic (10)

$$p = \frac{c^2}{8a}(s_1 + s_3), \quad q = \frac{c^2 i}{8b}(s_1 - s_3), \quad n = \frac{c^2}{4}s_2 - \frac{a^2 + b^2}{2}. \tag{12}$$

Tím je určena kružnice, která jimi prochází.

Jedna z podmínek, aby normály bodů z_i šly jedním bodem, byla $z_1 z_2 z_3 z_4 = -1$. Podle toho leží body $z_i' = z_i^2$ na kružnici, neboť $z_1' z_2' z_3' z_4' = 1$. Odtud plyne *věta Joachimsthalova:*

Spustíme-li z vrcholu A hlavní osy elipsy kolmice na normály vycházející z bodu P, leží další čtyři průsečíky těchto kolmic s elipsou na kružnici. (Platí také o vrcholu malé osy.)

Symetrické funkce veličin z_i' jsou

$$
\begin{aligned}
s_1' &= \Sigma z_i' = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = s_1^2 - 2s_2 = s_1^2,\\
s_2' &= \Sigma z_1' z_2' = \Sigma z_1^2 z_2^2 = s_2^2 + 2s_4 - 2s_1 s_3 = -2 - 2s_1 s_3,\\
s_3' &= \Sigma z_1' z_2' z_3' = s_3^2 - 2s_2 s_4 = s_3^2,\\
s_4' &= s_4^2 = 1;
\end{aligned}
$$

s_i jsou při tom symetrické funkce původních veličin z_i.

Střed kružnice (C) určené čtveřicí z_i' má souřadnice (dle rovnic (12))

$$p = \frac{c^2}{8a}(s_1^2 + s_3^2), \quad q = \frac{c^2 i}{8b}(s_1^2 - s_3^2).$$

Je-li bod $P(x_0, y_0)$ průsečíkem normál, je (dle (8))

$$s_1 + s_3 = -\frac{4bi}{c^2} y_0, \quad s_1 - s_3 = \frac{4ax_0}{c^2},$$

z čehož

$$s_1 = \frac{2(ax_0 - iby_0)}{c^2}, \quad s_3 = -\frac{2}{c^2}(ax_0 + iby_0). \tag{8a}$$

Střed kružnice (C) má tedy souřadnice

$$p = \frac{a^2 x_0^2 - b^2 y_0^2}{ac^2}, \quad q = \frac{2ax_0 y_0}{c^2}, \tag{13}$$

absolutní člen je

$$n = \frac{c^2}{4} s_2' - \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{2}{c^2}(a^2 x_0^2 + b^2 y_0^2) - a^2. \tag{14}$$

Tím je kružnice (C) určena. Abychom dospěli k pohodlnější konstrukci, uvažujme dále: Nechť průsečík normál $P(x_0, y_0)$ opisuje průměr elipsy g (obr. 32); pišme jeho rovnici ve tvaru

$$y = \frac{a}{b} \operatorname{tg}\Theta \, . \, x. \tag{15}$$

Bodu tohoto průměru

$$x_0 = \lambda \, b \cos\Theta, \; y_0 = \lambda a \sin\Theta$$

náleží kružnice (C) jdoucí čtveřicí z_i^2 a její rovnice je podle (13) a (14)

$$x^2 + y^2 - a^2 - \frac{2ab\lambda^2}{c^2} (bx \cos2\Theta + ay \sin2\Theta - ab) = 0. \tag{16}$$

Tyto kružnice tvoří svazek s chordálou

$$bx \cos2\Theta + ay \sin2\Theta - ab = 0,$$

což je tečna t v bodě $T(a \cos2\Theta, b \sin2\Theta)$. Průměrem jedné kružnice svazku ($\lambda = 0$) je velká osa elipsy. Bod T dostaneme, vedeme-li vrcholem A kolmici na průměr g. Spojnice AT má skutečně směrnici

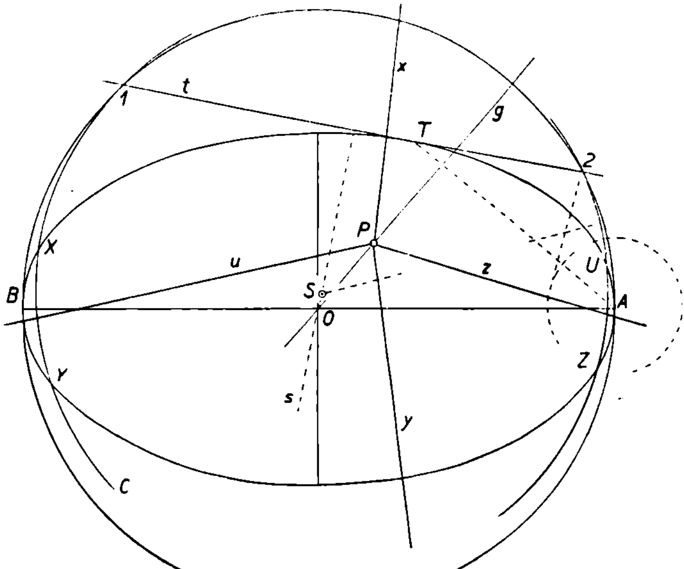
$$\frac{b \sin2\Theta}{a \cos2\Theta - a} = -\frac{b}{a} \operatorname{cotg}\Theta.$$

Pro kružnici (C) máme tedy dva body 1, 2, střed je na přímce s jdoucí středem O kolmo k t. Střed S této kružnice můžeme sestrojit užitím pořadnice

$$q = \frac{2ax_0y_0}{c^2}$$

nebo z okolnosti, že na př. vrchol $A(a, 0)$ má ke kružnici (C) mocnost $2b^2y_0^2 : c^2$. Snadno se také vyjádří mocnost bodu O. Z toho vyplývá Joachimsthalova konstrukce normál vedených bodem P k elipse (obr. 32):

Spojíme P s O, vrcholem A vedeme kolmici k OP a najdeme její průsečík T s elipsou. Tečna t v T protíná kružnici sestrojenou nad hlavní osou AB ve dvou bodech 1, 2. Sestrojíme dále kružnici (C), která jde body 1, 2 a protíná kolmo kružnici se středem A a poloměrem $\frac{by_0}{c}\sqrt{2}$. Kružnice (C) protíná elipsu v bodech X, Y, Z, U a hledané normály jdou bodem P kolmo k přímkám AX, AY, AZ, AU. Pata normály je vždy bod, v němž je tečna rovnoběžná s AX, AY, AZ, AU.



Obr. 32

16,5. Podmínka, aby body z_1, z_2, z_3, z_4 byly patami normál nějakého bodu, je $z_1z_2z_3z_4 = -1$. Nahradíme-li z_1 bodem diametrálně protilehlým $z' = -z_4$, je $z_1z_2z_3z' = 1$ a máme čtyři body na kružnici (soukružné). Paty tří normál vedených bodem P a bod diametrálně protilehlý s patou čtvrtou jsou na kružnici (*Joachimsthalova kružnice*).

Můžeme tedy snadno řešit kubickou úlohu: *Z bodu na normále bodu M ($z_4 = e^{i\Theta}$) sestrojit další tři normály.* Je třeba jen určit kružnici body z_1, z_2, z_3, z'. Abychom ji určili, označme h_i symetrické funkce veličin z_1, z_2, z_3, z' a zaveďme prozatím označení

$$g_1 = z_1 + z_2 + z_3, \quad g_2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3, \quad g_3 = z_1z_2z_3.$$

Z podmínek pro paty normál, $s_4 = -1$, $s_2 = 0$, vychází

$$g_3 = -\frac{1}{z_4}, g_2 = -g_1z_4;$$

veličina g_1 se určí z rovnice (8a) odst. 16,4

$$s_1 = g_1 + z_4 = \frac{2ax_0 - 2biy_0}{c^2}$$

ve tvaru

$$g_1 = \frac{2ax_0 - 2biy_0 - c^2z_4}{c^2}.$$

Pro J. kružnici máme ze vzorců (12) odst. 16,4

$$p = \frac{c^2}{8a}(h_1 + h_3), q = \frac{c^2 i}{8b}(h_1 - h_3), \quad n = \frac{c^2}{4}h_2 - \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Snadno nalezneme

$$h_1 = g_1 - z_4,$$
$$h_2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 - z_4(z_1 + z_2 + z_3) = g_2 - g_1z_4 =$$
$$= -2g_1z_4,$$
$$h_3 = z_1z_2z_3 - z_4(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) = g_3 - g_2z_4 =$$
$$= -1/z_4 + g_1z_4^2$$

a odtud

$$h_1 + h_3 = (1 + z_4^2)\left(g_1 - \frac{1}{z_4}\right), h_1 - h_3 = (1 - z_4^2)\left(g_1 - \frac{1}{z_4}\right).$$

Podobně najdeme

$$s_1 = g_1 + z_4, \ s_3 = g_3 + g_2 z_4 = -\frac{1}{z_4} - g_1 z_4^2$$

a

$$s_1 + s_3 = (1 - z_4^2)\left(g_1 - \frac{1}{z_4}\right), \ s_1 - s_3 = (1 + z_4^2)\left(g_1 + \frac{1}{z_4}\right).$$

Odtud vychází podle rovnic (8a) odst. 16,4

$$\frac{h_1 + h_3}{s_1 + s_3} = \frac{1 + z_4^2}{1 - z_4^2} = \mathrm{i}\,\mathrm{cotg}\Theta, \ \frac{h_1 - h_3}{s_1 - s_3} = -\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\Theta,$$

$$h_1 + h_3 = \mathrm{i}\,\mathrm{cotg}\Theta(s_1 + s_3) = \frac{4y_0 b}{c^2}\mathrm{cotg}\Theta,$$

$$h_1 - h_3 = -\frac{4x_0 a}{c^2}\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\Theta,$$

dále

$$p = \frac{by_0}{2a}\mathrm{cotg}\Theta, \ q = \frac{ax_0}{2b}\mathrm{tg}\Theta.$$

Pro stanovení n potřebujeme

$$h_2 = -2g_1 z_4,$$

je však

$$-\frac{1}{2}h_2 = g_1 z_4 = \frac{2ax_0 z_4 - 2b\mathrm{i}y_0 z_4 - c^2 z_4^2}{c^2}.$$

Po dosazení $z_4 = e^{i\Theta} = \cos\Theta + \mathrm{i}\sin\Theta$ vidíme snadno, že imaginární část tohoto výrazu

$$2ax_0 \sin\Theta - 2by_0 \cos\Theta - c^2 \sin 2\Theta$$

vymizí, poněvadž (x_0, y_0) je na normále bodu M, a dostaneme

$$-n = ax_0 \cos\Theta + by_0 \sin\Theta + a^2 \sin^2\Theta + b^2 \cos^2\Theta.$$

Veličiny p, q, n určují J. kružnici.

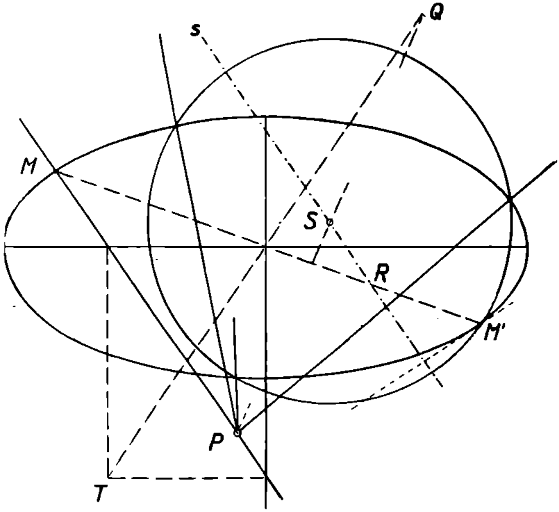
Nechť bod (x_0, y_0) probíhá normálu bodu $M(z_4 = e^{i\Theta})$. Na této normále je

$$\frac{x_0 - a\cos\Theta}{b\cos\Theta} = \frac{y_0 - b\sin\Theta}{a\sin\Theta} = \lambda,$$

tedy

$$x_0 = a\cos\Theta + \lambda b\cos\Theta,\ y_0 = b\sin\Theta + \lambda a\sin\Theta \qquad (1)$$

a po dosazení



Obr. 33

$$2p = \frac{b^2}{a}\cos\Theta + \lambda b\cos\Theta,\ 2q = \frac{a^2}{b}\sin\Theta + \lambda a\sin\Theta, \qquad (2)$$

$$-n = a^2 + b^2 + \lambda ab.$$

Probíhá-li bod $P(x_0, y_0)$ normálu bodu M na elipse, probíhá příslušná J. kružnice svazek

$$x^2 + y^2 - \frac{b^2x}{a}\cos\Theta - \frac{a^2y}{b}\sin\Theta - (a^2 + b^2) +$$
$$+ \lambda(bx\cos\Theta + ay\sin\Theta + ab) = 0.$$

Chordála

$$bx\cos\Theta + ay\sin\Theta + ab = 0$$

je tečnou v bodě $\Theta + \pi$ ($x = -a\cos\Theta$, $y = -b\sin\Theta$), t. j. v bodě M' diametrálně protilehlém s bodem M. Tento bod je i jedním vrcholem svazku. Středná s, kterou probíhá bod (p, q), má rovnici

$$\frac{2a}{\cos\Theta}x - \frac{2b}{\sin\Theta}y + c^2 = 0,$$

je tedy rovnoběžná s normálou bodu M a jde bodem R,

$$x_R = \tfrac{1}{2}a\cos\Theta,\ y_R = -\tfrac{1}{2}b\sin\Theta,$$

který půlí poloměr bodu $M'(\Theta + \pi)$.

Pohybuje-li se bod $P(x_0, y_0)$ po normále bodu M, pohybuje se střed $S(p, q)$ J. kružnice po centrále poloviční rychlostí. Řady (P), (S) jsou podobné a spojnice PS jde pevným bodem Q. Podle rov. (1) a (2) je

$$x_Q = \frac{x_0 - 2p}{1 - 2} = -\frac{c^2\cos\Theta}{a},\ y_Q = \frac{y_0 - 2p}{1 - 2} =$$

$$= \frac{c^2\sin\Theta}{b}.$$

Tento bod je diametrálně protilehlý s bodem T (obr. 33).

Chceme-li tedy sestrojit normály z bodu P ležícího na normále bodu M, spojíme P s Q, dostaneme střed S kružnice, jež jde bodem M' a protíná elipsu v patách hledaných normál.

17. SESTROJENÍ OS KUŽELOVÉ PLOCHY

Budiž dán kvadratický kužel; jeho základnou ať je kuželosečka k v rovině $z = 0$, vrchol $V(m, n, v)$. Osy kužele nechť mají na základně stopníky X, Y, Z. Přímky VX, VY, VZ tvoří pravoúhlý polární trojhran daného kužele a stopy X, Y, Z tvoří polární trojúhelník kuželosečky k. Avšak pravoúhlý trojhran je zároveň polární trojhran isotropického kužele

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - v)^2 = 0.$$

Stopa tohoto kužele na $z = 0$ je imaginární kružnice

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + v^2 = 0$$

a trojúhelník XYZ je také polárním trojúhelníkem této kružnice o středu $V_1(m, n)$ a poloměru vi ($i = \sqrt{-1}$). Jde tedy o sestrojení společného polárního trojúhelníka dvou kuželoseček.

Tato úloha, která zároveň podává konstrukci os plochy druhého stupně a konstrukci kruhových průseků, byla často řešena, nejprve použitím dvou kuželoseček, později jen jedné. Mezi nejstarší řešení nutno počítat řešení Chaslesovo a Fiedlerovo. Z řešení, v nichž se používá jen jedné kuželosečky, je pozoruhodné řešení Pelzovo, ve kterém je použito vlastností paraboly, kterou podle Sobotky nazýváme Steiner-Pelzovou parabolou.

Podáváme zde řešení, při němž je dána základna kužele, již však netřeba rýsovat, a při němž se používá narýsované rovnoosé hyperboly. Toto řešení bývá uvedeno v učebnicích deskriptivní geometrie a je skutečně konstruktivně nejvýhodnější.

Volme za základnu kužele elipsu

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \tag{1}$$

v rovině $z = 0$, vrchol $V(m, n, v)$. Jde pak o společný polární trojúhelník elipsy (1) a kružnice (imaginární)

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + v^2 = 0. \tag{2}$$

Bodu $P(\xi, \eta)$ v rovině $z = 0$ patří k těmto kuželosečkám bod sdružený, který dostaneme jako průsečík polár

$$b^2\xi x + a^2\eta y - a^2b^2 = 0,$$

$$x\xi + y\eta - m(\xi + x) - n(\eta + y) + v^2 = 0. \qquad (3)$$

Rovnice (3) jsou symetrické podle dvojic (ξ, η), (x, y), mezi body P, P' je tedy Steinerova příbuznost (odst. 12). Opisuje-li jeden přímku, opisuje druhý kuželosečku. Všechny tyto kuželosečky jdou společným polárním trojúhelníkem kuželoseček (1) a (2). Zvolíme tedy takové dvě přímky, aby přidružené kuželosečky byly rovnoosá hyperbola a kružnice.

Řešením rovnic (3) vychází

$$\xi = \frac{a^2b^2(y - n) - a^2y(mx + ny - v^2)}{b^2x(y - n) - a^2y(x - m)},$$

$$\eta = \frac{b^2x(mx + ny - v^2) - a^2b^2(x - m)}{b^2x(y - n) - a^2y(x - m)}. \qquad (4)$$

V těchto výsledcích lze zaměnit (ξ, η) za (x, y). Je okamžitě vidět, že nevlastní přímce (ξ, η roste do nekonečna) odpovídá rovnoosá hyperbola

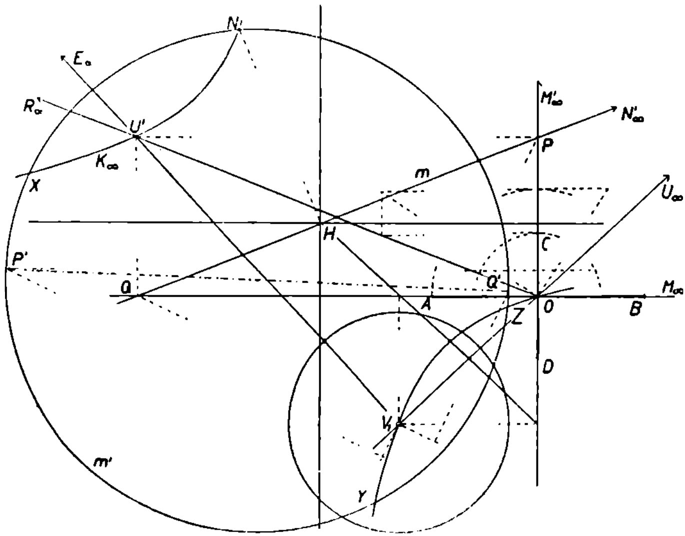
$$K^\infty \equiv (a^2 - b^2)xy + b^2\,nx - a^2my = 0, \qquad (5)$$

která jde středem O eliptické základny, bodem $V_1(m, n)$ a jejíž střed lze snadno sestrojit. Chceme-li sestrojit přímku, jíž odpovídá kružnice, dosadíme z rovnic (4) do

$$u\xi + v\eta + 1 = 0$$

a dostaneme pro u, v dvě rovnice, napíšeme-li, že se koeficient při xy rovná nule, koeficienty při x^2, y^2 jsou stejné. Pro střed a poloměr dostaneme výrazy racionální a druhé odmocniny.

Skoro rychleji však vede k cíli geometrická úvaha. Pohybuje-li se bod P po nevlastní přímce, otáčí se jeho polára k elipse (1) kolem středu O, polára ke kružnici (2) kolem středu V_1 (obr. 34). Tyto dva projektivní svazky průměrů vytvářejí rovnoosou hyperbolu K^∞ (5). Neboť nevlastnímu bodu M^∞ osy AB patří osa CD v elipse a v kružnici průměr kolmý k AB; průsečík je tedy nevlastní bod M'_∞ osy CD. Obdobně patří tomuto nevlastnímu bodu osy CD nevlastní bod osy AB. Tím je dán směr asymptot. V konečnu jsou středy obou svazků O, V_1 a snadno lze sestrojit další bod, který odpovídá nevlastnímu bodu U^∞ přímky OV_1. U' dostaneme jako průsečík přidružených průměrů. OU' je sestrojen afinní kružnicí nad průměrem AB, V_1U' je kolmý k OV_1. Tím je hyperbola K^∞ dána směrem asymptot a body O, V_1, U'. Střed H dostaneme snadno z vlastnosti, že úhel sdružených průměrů rovnoosé hyperboly je půlen asymptotami. Sestrojme tedy obdélník o úhlopříčce OU' a stranách v osách elipsy. Jeho druhá úhlopříčka PQ je průměr sdružený s OU'. Podobně obdélník s úhlopříčkou OV_1 dává průměr sdružený, který se s prvním protíná v hledaném středu hyperboly H.



Obr. 34

Abychom dostali přímku m, které odpovídá kružnice m', uvažme, že kružnice jde absolutními kruhovými body roviny $I_1{}^\infty$, $I_2{}^\infty$, které jsou dvojnými body involuce na nevlastní přímce roviny, jež se promítá z libovolného bodu roviny pravoúhlou involucí. Této involuci odpovídá na rovnoosé hyperbole K^∞ involuce a její dvojné body I_1', I_2' odpovídají absolutním bodům roviny I_1^∞, I_2^∞. Přímce $m \equiv I_1'I_2'$, ose této involuce na hyperbole, odpovídá kuželosečka body I_1^∞, I_2^∞, t. j. kružnice. Involuci na přímce m, která má dvojné body I_1', I_2', odpovídá involuce na kružnici s dvojnými body I_1^∞, I_2^∞, t. j. se středem ve středu kružnice m'.

Podle toho je provedena konstrukce v obr. 34. Involuce na u^∞ je dána bodovými páry M_∞, M'_∞ a U^∞, E^∞, kde U^∞ je nevlastní bod na OV_1, E^∞ na V_1U'. Těmto dvojicím odpovídají na hyperbole K^∞ dvojice M_∞, M'_∞ a U', O. Střed involuce je tedy $R^\infty = (M_\infty\ M'_\infty, U'O)$, t. j. nevlastní bod přímky OU'. Osa involuce je polára bodu R^∞, t. j. průměr hyperboly PQ. PQ je tedy hledaná přímka m, jíž odpovídá kružnice. Na ní jsou imaginární body I_1', I_2' a take body P, Q, jež je oddělují harmonicky (čtyřroh $M_\infty M'_\infty OU'$ je do hyperboly vepsán, jeho diagonální trojúhelník je PQR^∞). Přidružené body P', Q' jsou koncové body průměru kružnice m'. Křivky K^∞, m' mají společný bod N a kromě toho hledané body X, Y, Z. Průsečík výšek trojúhelníka XYZ je V_1. K sestrojení polár bodů P, Q k imaginární kružnici se použilo reálné kružnice o středu V_1 a poloměru v.

O této úloze a různých způsobech řešení nalezne čtenář obsáhlou stať v díle B. Procházky, Vybrané statě z deskriptivní geometrie, str. 51. Upozorňuji zejména na Šolínovo řešení, které je též uveřejněno v Časopise, r. 16.

18. NĚKTERÉ DALŠÍ KUBICKÉ A BIKVADRATICKÉ ÚLOHY

1. Na průměru koule určete bod tak, aby rovina kolmá v tomto bodě rozdělovala kouli v daném poměru (tuto úlohu řešil již Archimedes).

2. Je dán ostrý úhel. Mezi jeho ramena zasuňte úsečku dané délky d tak, aby její osa symetrie procházela daným bodem.

3. Dána je kolineace dvou soumístných rovinných polí tak, že bodům A, B, C, D jsou přiřazeny body A', B', C', D' (žádné tři nejsou na jedné přímce). Sestrojte samodružné body. Viz Kadeřávek-Klíma-Kounovský, Deskriptivní geometrie, díl I.

4. Sestrojte průsečíky přímky s křivkou třetího stupně danou devíti nebo s křivkou čtvrtého stupně danou čtrnácti body.

5. Dvě křivky třetího stupně v rovině nechť mají šest společných bodů; mimo to je každá dána dalšími třemi body. Sestrojte zbývající tři společné body obou křivek. Viz Smith, Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques, Annali di matematica, ř. 2., r. 3 (1870).

6. Je-li dáno 13 bodů společných dvěma křivkám čtvrtého stupně, jež jsou dostatečně určeny, sestrojte zbývající tři společné body. Viz rovněž Smith, Mémoire atd.