Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu

VI. Neurčitý integrál

In: Karel Hruša (author): Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 107–119.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403349

čení. Platí věta: Existuje-li integrál $\int_a^b f(t)\,dt$ a je-li c libovolný bod z J, potom

a) funkce $F(x) = \int_x^c f(t)\,dt$ proměnné x je spojitá v intervalu J;

b) je-li funkce f spojitá ve vnitřním bodě x z J, je $F'(x) = -f(x)$. Dokažte.

50. Písmeno J znamená totéž jako ve cvič. 48. Existuje-li integrál $\int_a^b f(t)\,dt$ a je-li $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, kde c a x jsou libovolné body z J, platí $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$. Dokažte.

VI. NEURČITÝ INTEGRÁL

Nechť je dána funkce f definovaná v jakémsi otevřeném intervalu J_x; hledáme funkci F, která má tu vlastnost, že pro všecka x z J_x je

$$F'(x) = f(x). \tag{a}$$

Funkce F se jmenuje *primitivní funkce* k funkci f v intervalu J_x. Často jí říkáme také *neurčitý integrál* funkce f v intervalu J_x. Pro primitivní funkci budeme užívat označení

$$F(x) = \int f(x)\,dx, \tag{b}$$

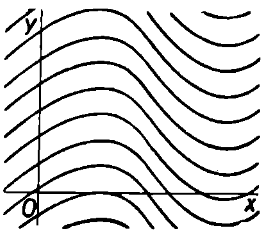
při čemž rovnost (b) značí přesně totéž jako rovnost (a). Symbol $\int f(x)\,dx$ čteme zpravidla slovy „integrál $f(x)\,dx$". Funkce f se nazývá *funkce integrovaná* a proměnná x se jmenuje *integrační proměnná*. Nevadí, že volíme tytéž názvy jako u určitého integrálu, neboť mezi oběma integrály je, jak ihned uvidíme, úzká souvislost.

Úloha nalézt primitivní funkci F k dané funkci f je tedy obrácená úloha k úloze nalézt derivaci f dané funkce F.

Především je zřejmé, že primitivní funkce je vždy spojitá v J_x, neboť má-li funkce F derivaci v bodě x, je v tomto bodě spojitá podle věty 23.

Věta **39.** Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu J_x, je $F(x) + c$, kde c je libovolná konstanta, také primitivní funkce k funkci $f(x)$ v témže intervalu. Žádná jiná primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu J_x již neexistuje.

Důkaz. Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu J_x, znamená to, že pro všecka x z J_x platí $F'(x) = f(x)$. Avšak podle vzorce (23) je $[F(x) + c]' = F'(x)$, takže také $F(x) + c$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$.



Obr. 54

Je třeba ještě dokázat, že tvarem $F(x) + c$ jsou vyčerpány všecky primitivní funkce. Nechť tedy $F(x)$ a $G(x)$ jsou dvě primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu J_x, t. j. nechť $F'(x) = f(x)$ a $G'(x) = f(x)$ pro všecka x z J_x. Pak podle vzorce (22) je

$$[G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

pro všecka x z J_x. Derivace funkce $G(x) - F(x)$ je tedy rovna nule pro všecka x z J_x, a proto podle důsledku věty 31 o přírůstku funkce je $G(x) - F(x) = c$, čili $G(x) = F(x) + c$ pro všecka x z J_x.

Existuje-li tedy k dané funkci $f(x)$ jedna primitivní funkce $F(x)$, existuje jich nekonečně mnoho a všecky mají tvar $F(x) + c$, t. j. všecky se liší od funkce $F(x)$ pouze o aditivní konstantu (viz obr. 54). Proto se také může stát, že výsledky výpočtů neurčitých integrálů, k nimž dojdeme různými cestami, se liší o aditivní konstantu. Tuto konstantu zpravidla označujeme názvem *integrační konstanta.*

Ke každé funkci však neexistuje primitivní funkce. Ukážeme to na příkladě.

Příklad 37. Hledejme primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \leqq 0, \\ -1 & \text{pro } x > 0, \end{cases}$$

která je definována pro každé x. Tato funkce musí mít v intervalu $(-\infty, 0)$ za primitivní funkci funkci $F(x) = x + c$, neboť $(x + c)' = 1$. Podobně v intervalu $(0, \infty)$ musí mít za primitivní funkci funkci $F(x) = -x + c_1$, neboť $(-x + c_1)' = -1$. Poněvadž $F(x)$ je spojitá pro každé x, musí

$$\lim_{x\to 0-} F(x) = \lim_{x\to 0+} F(x) = F(0).$$

Avšak $\lim\limits_{x\to 0-} F(x) = c$, $\lim\limits_{x\to 0+} F(x) = c_1$, proto musí $c_1 = c$. Hledaná primitivní funkce musí tedy splňovat vztahy

$$F(x) = \begin{cases} x + c & \text{pro } x \leqq 0, \\ -x + c & \text{pro } x > 0 \end{cases}$$

a v bodě 0 musí mít derivaci rovnu jedné, neboť $f(0) = 1$. To však není možné; naše funkce F nemá v bodě 0 derivaci, neboť

$$\lim_{h\to 0-} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{h + c - c}{h} = 1,$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{-h + c - c}{h} = -1.$$

Z vět odvozených v kapitole V však plyne, že **ke každé funkci $f(x)$, která je v (otevřeném) intervalu J_x spojitá, existuje v tomto intervalu aspoň jedna primitivní funkce $F(x)$.** Zvolme si dva vnitřní body c, x z (otevřeného) intervalu J_x. Je-li $c < x$, existuje podle věty 33 integrál $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, jehož derivace v bodě x splňuje podle věty 38 rovnici $F'(x) = f(x)$. Při tom je $\lim_{x \to c+} F(x) = 0$ (důkaz věty 37) a $\lim_{x \to c+} F'(x) = f(c)$. Je-li $x < c$, existuje integrál $\int_x^c f(x)\,dt$ a také integrál $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt = -\int_x^c f(t)\,dt$. Je-li a libovolné číslo z J_x, pro něž platí $a < x$, je $F(x) = \int_c^a f(t)\,dt +$

$+ \int_a^x f(t)\,dt$. Potom $F'(x) = f(x)$, $\lim_{x \to c-} F(x) = \int_c^a f(t)\,dt +$

$+ \int_a^c f(t)\,dt = 0$, $\lim_{x \to c-} F'(x) = f(c)$. Položíme-li ještě $F(c) = 0$, je funkce $F(x)$ spojitá v J_x a pro každé x z J_x má derivaci $F'(x) = f(x)$. Je tedy $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu J_x. Interval J_x nemusí být omezený; jeho omezenost jsme k důkazu nepotřebovali.

Věta **40**. Existuje-li integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ a je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v (otevřeném) intervalu J_x, který obsahuje body a, b, pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{33}$$

Důkaz. Budiž předně $a < b$. Je-li D nějaké rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$, je funkce F v jeho k-tém dílčím intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ spojitá a má ve všech jeho vnitřních bodech derivaci $f(x)$. Jsou tedy pro funkci F v tomto intervalu splněny podmínky věty 31 o přírůstku funkce, takže existuje takový vnitřní bod ξ_k intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$, že

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1}) \,.\, F'(\xi_k) = f(\xi_k) \,.\, \Delta x_k, \tag{c}$$

neboť $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$ a $F'(\xi_k) = f(\xi_k)$. Napíšeme-li rovnici (c) pro všecky dílčí intervaly, t. j. pro $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, a sečteme, pak dostaneme (vzhledem k tomu, že $x_0 = a$, $x_n = b$)

$$F(b) - F(a) = f(\xi_1) \,.\, \Delta x_1 + f(\xi_2) \,.\, \Delta x_2 + f(\xi_3) \,.\, \Delta x_3 + \\ + \ldots + f(\xi_n) \,.\, \Delta x_n.$$

Označíme-li jako na počátku kapitoly V supremum hodnot $f(x)$ z k-tého dílčího intervalu znakem M_k a infimum týchž hodnot znakem m_k, je

$$M_k \geqq f(\xi_k) \geqq m_k.$$

Poněvadž čísla Δx_k jsou kladná, neboť $x_{k-1} < x_k$, proto

$$S(D) \geqq f(\xi_1) \,.\, \Delta x_1 + f(\xi_2) \,.\, \Delta x_2 + f(\xi_3) \,.\, \Delta x_3 + \ldots + \\ + f(\xi_n) \,.\, \Delta x_n \geqq s(D).$$

Číslo $F(b) - F(a)$ tedy není větší než žádný horní součet a nemůže být ani větší než infimum horních součtů čili

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq F(b) - F(a).$$

Číslo $F(b) - F(a)$ není však také menší než žádný dolní součet a nemůže být proto menší než supremum dolních součtů, t. j.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq F(b) - F(a).$$

Spojením obojího dostáváme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Je-li $a > b$, je podle vzorce (32) a podle toho, co již bylo dokázáno,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\,[F(a) - F(b)] = F(b) - \\ - F(a).$$

Je-li konečně $a = b$, je $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ podle (31) a $F(a) - F(a) = 0$, takže vzorec (33) je také splněn.

Poznamenejme ještě, že výsledek nezávisí na tom, kterou primitivní funkci vezmeme ve vzorci (33), neboť $F(b) - F(a) = [F(b) + c] - [F(a) - c]$.

Věta 40 popisuje souvislost mezi určitým integrálem a neurčitým integrálem (primitivní funkcí) ovšem za předpokladu, že obojí existuje. Tato věta nám umožní vypočítat hodnotu mnohých určitých integrálů.

Příklad 38. Spočtěme podle toho $\int_a^b x\,dx$, který jsme již jednou stanovili dosti pracným způsobem v příkladě 35. Poněvadž funkce $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ má derivaci $F'(x) = x$ pro každé x, je $\frac{1}{2}x^2$ primitivní funkcí k funkci $f(x) = x$. Pak podle věty 40 je

$$\int_a^b x\,dx = \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}a^2$$

v souhlasu s výsledkem příkladu 35.

Nyní se soustředíme na methody, podle nichž se hledají primitivní funkce. Poněvadž hledání primitivní funkce je úloha obrácená k úloze najít derivaci dané funkce, můžeme rovnice (21) až (29) z kapitoly IV přepsat pomocí primitivních funkcí.

Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou dvě funkce, k nimž existují primitivní funkce $F(x)$ a $G(x)$, t. j. nechť platí $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. Pak podle (21)

$$[k_1 F(x) + k_2 G(x)]' = k_1 F'(x) + k_2 G'(x) = k_1 f(x) + k_2 g(x).$$

To však znamená, že funkce $k_1 F(x) + k_2 G(x)$ je primitivní funkce k funkci $k_1 f(x) + k_2 g(x)$, t. j.

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\,\mathrm{d}x = k_1 F(x) + k_2 G(x)$$

čili

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\,\mathrm{d}x = k_1 \int f(x)\,\mathrm{d}x + k_2 \int g(x)\,\mathrm{d}x. \quad (34)$$

Ve zvláštním případě pro $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ nebo $k_2 = -1$ dostáváme

$$\left.\begin{aligned} \int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x, \\ \int [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}\right. \quad (35)$$

Dále podle rovnice (24) je

$$[F(x) \,.\, G(x)]' = F'(x) \,.\, G(x) + F(x) \,.\, G'(x),$$

t. j. funkce $F(x) \,.\, G(x)$ je primitivní funkcí k funkci $F'(x)\, G(x) + F(x) \,.\, G'(x)$. Je tedy

$$\begin{aligned} F(x) \,.\, G(x) &= \int [F'(x) \,.\, G(x) + F(x) \,.\, G'(x)]\,\mathrm{d}x = \\ &= \int F'(x) \,.\, G(x)\,\mathrm{d}x + \int F(x) \,.\, G'(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

pokud ovšem integrály $\int F'(x) \,.\, G(x)\,\mathrm{d}x$, $\int F(x) \,.\, G'(x)\,\mathrm{d}x$ existují. Označíme-li krátce $F(x) = u$, $G(x) = v$, psává se tato formule nejčastěji ve tvaru

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x. \quad (36)$$

Z rovnice (25) plyne $[k\,F(x)]' = k\,F'(x)$, t. j. funkce $k\,F(x)$ je primitivní funkce k funkci $k\,F'(x) = k\,f(x)$ čili

$$\int k\,f(x)\,\mathrm{d}x = k \int f(x)\,\mathrm{d}x. \quad (37)$$

Lze tedy podobně jako při derivování „vytknout" multiplikativní konstantu před znak integrálu.

Z rovnice (27) plyne, že $(x^{n+1})' = (n + 1)\,x^n$, kde n je celé. Je tedy funkce x^{n+1} primitivní funkcí k funkci $(n + 1)\,x^n$, t. j.

$$x^{n+1} = \int (n + 1)\,x^n\,\mathrm{d}x = (n + 1) \int x^n\,\mathrm{d}x,$$

takže

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n + 1}, \text{ pokud } n \neq -1.$$

Tato rovnost platí jen v takových intervalech, v nichž je x^n definováno, neboť jen v takových intervalech je funkce x^n spojitá. Je-li n celé, je to při $n \geqq 0$ pro každé x a při $n < 0$ pro $x \neq 0$ (viz str. 24). Máme tedy výsledek:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{38}$$

pro $n \geqq 0$ celé v intervalu $(-\infty, \infty)$ a
pro $n < -1$ celé v intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$.

Speciálně pro $n = 0$ je $\int dx = x$.

Prvá z rovnic (28) říká, že $(\sin x)' = \cos x$, t. j. $\sin x$ je primitivní funkce k funkci $\cos x$ čili $\int \cos x \, dx = \sin x$. Podobně druhá rovnice (28) praví, že $(\cos x)' = -\sin x$, t. j. $\cos x$ je primitivní funkcí k funkci $-\sin x$ čili $\cos x = \int(-\sin x) \, dx = -\int \sin x \, dx$. Dostáváme tedy

$$\int \sin x \, dx = -\cos x, \quad \int \cos x \, dx = \sin x \quad \text{v intervalu } (-\infty, \infty). \tag{39}$$

Konečně prvou rovnici (29), která zní $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, je možno přepsat ve tvaru $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$, což je správné v každém intervalu, v němž je funkce $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ spojitá, t. j. ve všech intervalech $(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, kde k je libovolné číslo celé. Místo $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$ píšeme však častěji $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x}$. Podobně druhou rovnici (29) přepíšeme ve tvaru $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x$. To platí v těch intervalech, v nichž je funkce $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ spojitá, t. j. v intervalech $(k\pi, (k+1)\pi)$, kde k je opět libovolné číslo celé. Dostáváme tedy

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x \\ &\text{v intervalech } (k\pi, (k+1)\pi), \\ &\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \\ &\text{v intervalech } (\tfrac{1}{2}(2k-1)\pi, \tfrac{1}{2}(2k+1)\pi), \end{aligned}\right\} k \text{ celé.} \qquad (40)$$

Poznamenejme ještě, že na pravých stranách rovnic (34) až (40) můžeme připsat libovolnou integrační konstantu, která v nich není uvedena. Odvozených vzorců se používá při výpočtu neurčitých integrálů. Ukážeme to na příkladech.

Příklad 39. $\int(2x^2 - 3x + 5)\,\mathrm{d}x = 2\int x^2\,\mathrm{d}x - 3\int x\,\mathrm{d}x + 5\int \mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + c$ v intervalu $(-\infty, \infty)$. Bylo užito vzorců (34) a (38); c je integrační konstanta.

Příklad 40. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$

$$= \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} - \int \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + c$$

v intervalech $(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, kde k je číslo celé. Výpočet byl proveden podle vzorců (35) a (40).

Zejména často užíváme vzorce (36). Postup jím vyjádřený se nejčastěji nazývá *integrace po částech* (per partes) a spočívá v tom, že integrovanou funkci $f(x)$ rozložíme v součin dvou funkcí uv', z nichž druhou volíme tak, abychom ji dovedli integrovat a aby byl integrál $\int u'v\,\mathrm{d}x$ na pravé straně vzorce (36) jednodušší než integrál na levé straně. Uvedeme na to příklady.

Příklad 41. Abychom vypočetli integrál $\int x \sin x\,\mathrm{d}x$, položíme $u = x$, $v' = \sin x$; pak je $u' = 1$, $v = -\cos x$ podle (39), takže

$$\int x \sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x - \int 1 \,.\, (-\cos x)\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + c \text{ v intervalu } (-\infty, \infty).$$

Příklad 42. Podobně užijeme integrace po částech k výpočtu integrálu $\int \sin^2 x \, dx$. Položíme $u = \sin x$, $v' = \sin x$; pak je $u' = \cos x$, $v = -\cos x$, takže

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \\ + \int (1 - \sin^2 x) \, dx = -\sin x \cos x + \int dx - \int \sin^2 x \, dx = \\ = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx.$$

Zdánlivě jsme nepokročili, neboť jsme dospěli k témuž integrálu, od něhož jsme vyšli. Avšak nalezený vztah

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

je rovnice, v níž je neznámou integrál $\int \sin^2 x \, dx$. Z ní určíme

$$\int \sin^2 x \, dx = \tfrac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c$$

v intervalu $(-\infty, \infty)$. Tu jsme ještě připsali integrační konstantu c.

Chceme-li se přesvědčit o tom, byl-li výpočet proveden správně, derivujeme nalezený výsledek. Bylo-li počítáno správně, musí být tato derivace podle definice primitivní funkce rovna dané funkci, kterou jsme integrovali. Tak třeba v příkladě 42 máme

$$[\tfrac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c]' = \tfrac{1}{2}(1 - \cos^2 x + \sin^2 x) = \sin^2 x$$

a to je skutečně funkce integrovaná.

Počítáme-li určitý integrál, můžeme nejdříve určit příslušnou primitivní funkci $F(x) = \int f(x) \, dx$ a pak užít věty 40, podle níž je

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Značka $[F(x)]_a^b$ nebo určitěji $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$ značí, že máme určit hodnotu funkce $F(x)$ nejprve pro $x = b$ a potom pro $x = a$ a druhý výraz odečíst od prvého. Počítáme-li methodou po částech, můžeme výpočet urychlit tím, že obě meze dosadíme ihned, jakmile dostaneme nějakou funkci, obsahující integrační proměnnou. Bude tedy

$$\int_a^b uv'\,dx = [uv]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'v\,dx.$$

Příklad 43. Abychom určili $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3 x\,dx$, položíme $u = \cos^2 x$, $v' = \cos x$. Pak je $u' = -2\sin x\cos x$ (viz cvič. 36; lze také počítat podle vzorce (24), neboť $u = \cos x \cos x$), $v = \sin x$. Je tedy

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3 x\,dx = [\cos^2 x \sin x]_0^{\frac{1}{2}\pi} + 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x \cos x\,dx.$$

Avšak $[\cos^2 x \sin x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \cos^2 \frac{1}{2}\pi \sin \frac{1}{2}\pi - \cos^2 0 \sin 0 = 0$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, takže

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3 x\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - \cos^2 x)\cos x\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x\,dx - 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3 x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3 x\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x\,dx = \frac{2}{3}[\sin x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2}{3}.$$

Podle věty 40 však nelze počítat zcela mechanicky. Vzorec (33) platí za předpokladu, že existuje integrál na jeho levé straně, a o tom se vždy předem musíme přesvědčit. Je známa řada vět, podle nichž lze rozhodnout o tom, zda nějaký integrál existuje. My jsme dokázali pouze jednu, podle níž integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje tehdy, je-li f funkce spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ (věta 33). V tomto případě existuje také primitivní funkce na pravé straně vzorce (33), jak bylo dokázáno na str. 109.

Chybný by tedy byl tento výpočet:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 + (-1) = -2,$$

neboť funkce $f(x) = 1 : x^2$ není v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ spojitá (není totiž definována pro $x = 0$).

Cvičení.

51. Vypočtěte integrály:

$$\text{a)}\ \int x^4\,\mathrm{d}x,\ \text{b)}\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3},\ \text{c)}\ \int (3x - 2)\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{d)}\ \int (\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{2}{3}x + 1)\,\mathrm{d}x,\ \text{e)}\ \int x^2(1 - x^2)\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{f)}\ \int (x^2 - 1)^2\,\mathrm{d}x,\ \text{g)}\ \int \frac{x^2 - 2}{x^2}\,\mathrm{d}x,\ \text{h)} \int \frac{x^3 + x - 5}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

52. Vypočtěte integrály:

$$\text{a)}\ \int (a \sin x + b \cos x)\,\mathrm{d}x,\ \text{b)}\ \int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \cos 2x},\ \text{c)}\ \int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{d)}\ \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x,\ \text{e)}\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

53. Integrací po částech určete: a) $\int x \cos x\,\mathrm{d}x$, b) $\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$, c) $\int x^3 \sin x\,\mathrm{d}x$, d) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$, e) $\int \sin x \cos x\,\mathrm{d}x$, f) $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$.

54. Užitím integrace po částech dokažte, že pro $n \geqq 1$ celé v intervalu $(-\infty, \infty)$ platí

$$\int x^n \sin x\,\mathrm{d}x = -x^n \cos x + n\int x^{n-1} \cos x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int x^n \cos x\,\mathrm{d}x = x^n \sin x - n\int x^{n-1} \sin x\,\mathrm{d}x.$$

Odtud odvoďte, že pro $n \geqq 2$ celé v témže intervalu je

$$\int x^n \sin x\,\mathrm{d}x = -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1)\int x^{n-2} \sin x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int x^n \cos x\,\mathrm{d}x = x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1)\int x^{n-2} \cos x\,\mathrm{d}x.$$

55. Methodou integrace po částech dokažte, že pro $n \geqq 2$ celé platí

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-2} x \, dx,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{n-2} x \, dx.$$

56. Udejte takovou primitivní funkci k funkci $f(x) = (3x - 2)^2$, která a) pro $x = 0$ nabývá hodnoty 7, b) pro $x = 3$ nabývá hodnoty 7.

57. Jsou-li $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ funkce, k nimž existují v intervalu J_x primitivní funkce, a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ konstanty, dokažte, že v intervalu J_x platí: $\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x)] \, dx = k_1 \int f_1(x) \, dx + k_2 \int f_2(x) \, dx + \ldots + k_n \int f_n(x) \, dx$.

58. Užitím výsledku cvič. 36 dokažte, že pro funkci f, která má v (otevřeném) intervalu J_x všude derivaci, platí

$$\int f^n(x) \, . \, f'(x) \, dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1}$$

pro každé celé $n > 0$ v intervalu J_x a pro každé celé $n < -1$ v těch částech intervalu J_x, v nichž $f(x) \neq 0$.

59. Okamžitá rychlost pohybujícího se tělesa je úměrná času. Stanovte, jak závisí dráha na čase.

60. Rovinná křivka má tu vlastnost, že směrnice její tečny je přímo úměrná souřadnici x dotykového bodu. Určete rovnici této křivky tak, aby křivka procházela a) počátkem a bodem A o souřadnicích 1, 1, b) bodem A o souřadnicích 1, 1 a bodem B o souřadnicích 2, 3.