Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu

VII. Funkce složené

In: Karel Hruša (author): Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 120–131.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403350

Mějme dvě funkce f a g. Každému x z jistého oboru nechť odpovídá hodnota $t = g(x)$. Tomuto číslu přiřadíme hodnotu $y = f(t)$, pokud ovšem je $f(t)$ pro toto t definováno. Tím je ke každému x přiřazena určitá hodnota y, takže y je funkcí proměnné x. Píšeme to obyčejně rovnicí

$$y = f[g(x)].$$

Funkce tohoto tvaru nazýváme *funkce složené*. Funkci f jmenujeme někdy vnější a funkci g vnitřní funkcí složené funkce $f[g(x)]$.

Je-li na příklad vnější funkce $y = \sin t$ a vnitřní funkce $t = x^2 + 1$, pak složená funkce je $y = \sin(x^2 + 1)$ pro každé x. Je-li však vnější funkce $y = t^2 + 1$ a vnitřní funkce $t = \sin x$, je složená funkce $y = \sin^2 x + 1$ opět pro každé x.

Je vidět, že se název složená funkce týká pouze formy, jíž je funkce vyjádřena, a nikoli její podstaty; zavádíme jej pouze proto, že vyjádření pomocí složené funkce je často dosti pohodlné. Na složenou funkci $y = f[g(x)]$ můžeme nahlížet také tak, jako bychom do funkce $y = f(t)$ proměnné t zavedli za t novou proměnnou x rovnicí $t = g(x)$.

Věta **41**. **Je-li funkce f spojitá v bodě b a funkce g spojitá v bodě a, při čemž $g(a) = b$, je funkce $f[g(x)]$ spojitá v bodě a.**

Důkaz. Poněvadž funkce f je spojitá v bodě b, můžeme zvolit libovolné okolí J_y bodu $f(b)$ a k němu dovedeme nalézt takové okolí J_t bodu b, že pro všechna t z J_t hodnota $f(t)$ padne do J_y (viz definici spojitosti na str. 51). Poněvadž je funkce g spojitá v bodě a, dovedeme nalézt k právě nalezenému okolí J_t bodu $b = g(a)$ takové okolí J_x bodu a, že pro všechna x z J_x hodnota $g(x)$ padne do J_t. Tím jsme však k libovolně zvolenému okolí J_y bodu $f(b) = f[g(a)]$ sestrojili takové okolí J_x bodu a, že pro všecka x z J_x hodnota $t = g(x)$

padne do J_t, a tedy hodnota $f(t) = f[g(x)]$ padne do J_y. To však značí, že funkce $f[g(x)]$ je spojitá v bodě a, a to jsme měli dokázat.

Tato věta nám umožní rozhodnout o mnohých funkcích, že jsou spojité. Na příklad funkce $\sin(ax + b)$ je spojitá v každém bodě, neboť funkce $t = ax + b$ je spojitá pro každé x a funkce $\sin t$ je spojitá pro každé t.

Větu 41 můžeme vzhledem k definici spojitosti vyslovit takto:

Je-li $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$ a $\lim\limits_{t\to b} f(t) = f(b)$, při čemž $b = g(a)$, je $\lim\limits_{x\to a} f[g(x)] = f[g(a)]$.

Nyní si všimneme derivace složených funkcí. Nejprve odvodíme důležitou větu, které budeme často používat.

Věta **42**. Má-li funkce g derivaci v bodě x a funkce f derivaci v bodě $t = g(x)$, má funkce $f[g(x)]$ v bodě x derivaci $f'(t) \,.\, g'(x)$.

Důkaz. Předpokládáme, že existují (vlastní) limity

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = g'(x), \quad \lim_{k\to 0} \frac{f(t + k) - f(t)}{k} = f'(t),$$

a máme dokázat, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{f[g(x + h)] - f[g(x)]}{h} = f'(t) \,.\, g'(x),$$

při čemž $t = g(x)$.

Nejprve utvoříme funkci

$$\varphi(k) = \frac{f(t + k) - f(t)}{k} - f'(t)$$

proměnné k. Pro $k = 0$ není $\varphi(k)$ definováno; položme tedy

$$\varphi(0) = 0.$$

Poněvadž $\lim\limits_{k\to 0} \frac{f(t+k) - f(t)}{k} = f'(t)$, je funkce $\varphi(k)$ podle věty 5 nekonečně malá v okolí bodu 0, t. j. $\lim\limits_{k\to 0} \varphi(k) = 0$. Je tedy funkce $\varphi(k)$ spojitá v bodě 0. Pro $k \neq 0$ je $\frac{f(t+k) - f(t)}{k} = f'(t) + \varphi(k)$ čili

$$f(t+k) - f(t) = [f'(t) + \varphi(k)] \, . \, k. \tag{a}$$

Rovnice (a) je však správná i pro $k = 0$, jak se snadno přesvědčíme.

Položme nyní $t = g(x)$, $t + k = g(x + h)$, takže

$$k = g(x+h) - g(x). \tag{b}$$

Přírůstek k je tedy jakousi funkcí přírůstku h. Funkce g je spojitá v bodě x, neboť má v tomto bodě derivaci (věta 23); je tedy také funkce $g(x + h)$ spojitá pro $h = 0$ a k je pak spojitá funkce přírůstku h v bodě $h = 0$. Při tom $\lim\limits_{h\to 0} k = 0$. Pak podle věty 41 je také $\varphi(k)$ spojitá funkce přírůstku h v bodě $h = 0$, při čemž $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(k) = 0$.

Dosadíme-li podle (b) do (a), dostaneme

$$f(t+k) - f(t) = [f'(t) + \varphi(k)][g(x+h) - g(x)]$$

a odtud

$$\frac{f[g(x+h)] - f[g(x)]}{h} = [f'(t) + \varphi(k)] \, . \, \frac{g(x+h) - g(x)}{h},$$

takže

$$\lim_{h\to 0} \frac{f[g(x+h)] - f[g(x)]}{h} =$$

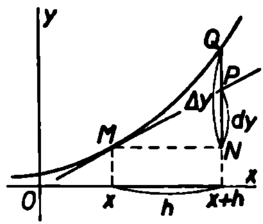
$$= \lim_{h\to 0} [f'(t) + \varphi(k)] \, . \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(t) \, . \, g'(x),$$

a to jsme měli dokázat.

Dokázaná věta praví toto: Máme-li stanovit derivaci složené funkce $y = f[g(x)]$ v bodě x, derivujeme nejprve vnější funkci f podle proměnné $t = g(x)$ a tuto derivaci násobíme derivací vnitřní funkce g podle proměnné x.

K snazšímu pochopení dalšího výkladu zavedeme si nyní pojem diferenciálu.

Budiž dána funkce f, která má v bodě x derivaci. Tato funkce je znázorněna jakousi křivkou; derivace funkce f v bodě x vyjadřuje směrnici tečny v bodě M (obr. 55). Zvětší-li se souřadnice x bodu M o h, odpovídá přírůstku h na tečně přírůstek NP druhé souřadnice. Tento přírůstek, který je ovšem funkcí přírůstku h, označujeme znakem $\mathrm{d}y$ nebo $\mathrm{d}f(x)$ a nazýváme jej *diferenciálem* funkce $y = f(x)$ v bodě x. Něco jiného je přírůstek funkce, který je na obr. 55 znázorněn úsečkou NQ a pro nějž užíváme znaku Δy nebo $\Delta f(x)$.



Obr. 55

Vzhledem k definici směrnice tečny (str. 66) možno položit $\frac{\mathrm{d}y}{h} = y'$. Odtud dostáváme $\mathrm{d}y = y' \cdot h$ čili

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x) \cdot h. \tag{c}$$

Je-li ve zvláštním případě $f(x) = x$, označíme ovšem $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}x$. Protože však $f'(x) = 1$, vychází ze vzorce (c) $\mathrm{d}x = 1 \cdot h = h$. Přírůstek h proměnné nazýváme proto zpravidla diferenciálem proměnné a označujeme jej $\mathrm{d}x$. Pak rovnice (c) nabývá tvaru

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x) \cdot \mathrm{d}x. \tag{41}$$

Odtud pak vyplývá

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Derivaci $f'(x)$ funkce f v bodě x můžeme tedy považovat za podíl dvou diferenciálů. Proto místo $f'(x)$ nebo y' píšeme často $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ nebo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Výhoda tohoto označení tkví v tom, že je z něho jasně vidět, kterého písmene se derivování týká.

Pomocí diferenciálů můžeme větu 42 zapsat jednoduchým vzorcem, který se snadno pamatuje:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}. \tag{42}$$

Uvedeme si příklady, jak se tohoto vzorce používá.

Příklad 44. Hledáme derivaci funkce $y = \sin(ax + b)$. Položíme $ax + b = t$; pak je $y = \sin t$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = a$, takže podle vzorce (42) máme $[\sin(ax + b)]' = a\cos(ax + b)$ pro každé x.

Příklad 45. $(\sin^5 x)' = 5 \sin^4 x \cos x$ pro každé x. Tu bylo položeno $t = \sin x$, $y = t^5$.

Příklad 46. $\left(\frac{1}{\cos 2x + 1}\right)' = \frac{2 \sin 2x}{(\cos 2x + 1)^2}$, pokud $\cos 2x + 1 \neq 0$, t. j. pokud $x \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$, kde k je celé číslo. Danou funkci považujeme za funkci dvojnásobně složenou a položíme $y = t^{-1}$, $t = \cos u + 1$, $u = 2x$. Pak podle dvakrát použitého vzorce (42) je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

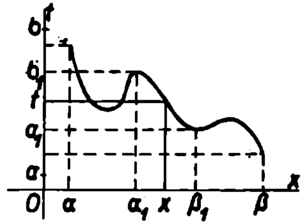
t. j.

$$\left(\frac{1}{\cos 2x + 1}\right)' = [(\cos 2x + 1)^{-1}]' =$$

$$= -(\cos 2x + 1)^{-2}(-\sin 2x) \cdot 2 = \frac{2 \sin 2x}{(\cos 2x + 1)^2}.$$

Z pravidla pro derivování složené funkce odvodíme důležitou methodu pro výpočet některých integrálů.

Nechť k funkci $f(t)$ existuje v intervalu (a, b) primitivní funkce $F(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t$, takže $F'(t) = f(t)$ pro každé t z (a, b). Vezmeme funkci $t = g(x)$, která má derivaci pro každé x z jakéhosi intervalu (α, β) a jejíž hodnota $g(x)$ pro každé x z (α, β) padne do (a, b) (obr. 56). Dosadíme-li do funkce $F(t)$ za t hodnotu $g(x)$, dostaneme složenou funkci $F[g(x)]$. Pak podle vzorce (42) je



Obr. 56

$$\frac{\mathrm{d}F[g(x)]}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = f(t) \cdot g'(x) = f[g(x)] \cdot g'(x)$$

pro každé x z (α, β). To však znamená, že $F[g(x)]$ je primitivní funkce k funkci $f[g(x)] \cdot g'(x)$, t. j.

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F[g(x)]$$

v intervalu (α, β). Avšak na pravé straně není nic jiného než funkce $F(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t$, do níž je dosazeno $t = g(x)$. Nalezenou rovnost píšeme zpravidla ve tvaru

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{43}$$

při čemž rovnosti jest rozuměti tak, že dostaneme touž funkci, když do primitivní funkce na pravé straně dosadíme $t = g(x)$ (nejvýše až na integrační konstantu).

Rovnice (43) užíváme k výpočtu primitivních funkcí, podaří-li se nám funkci, kterou máme integrovat, rozložit ve dva činitele, z nichž jeden obsahuje proměnnou x jako jakousi funkci jiné funkce $g(x)$ a druhý je derivací funkce g. Pak dosadíme novou proměnnou $g(x) = t$. Z této rovnice podle (41) plyne $g'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, takže také za diferenciál funkce g, t. j. za výraz $g'(x)\,\mathrm{d}x$, můžeme formálně dosadit diferenciál $\mathrm{d}t$ nové proměnné t. Postup právě popsaný a vyjádřený rovnicí (43) se nazývá *substituční methoda* pro výpočet integrálů.

Příklad 47. Máme stanovit integrál $\int \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x$, který je definován v intervalu $(-\infty, \infty)$, neboť $\sin x$ i $\cos x$ jsou spojité pro každé x. Ihned vidíme, že $(\sin x)' = \cos x$; proto dosadíme $\sin x = t$, při čemž hodnota t náleží do intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Pak je $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, takže máme $\int \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}\sin^3 x + c$, kde c je integrační konstanta. Integrál $\int t^2\,\mathrm{d}t$ je definován v intervalu $(-\infty, \infty)$, můžeme jej tedy utvořit pro kterékoliv t, jež je vnitřním bodem intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

Příklad 48. Chceme určit integrál

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2},$$

definovaný v intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$. Je $(x^3 + 1)' = 3x^2$; je tedy čitatel (až na faktor 3) derivací výrazu $x^3 + 1$, jehož druhá mocnina je ve jmenovateli. Proto dosadíme $x^3 + 1 = t$, $3x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, takže

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2} = \int \frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{3}\int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}t^{-1} = \frac{-1}{3(x^3+1)} + c.$$

Je-li x v intervalu $(-\infty, -1)$, je t v intervalu $(-\infty, 0)$; je-li x v intervalu $(-1, \infty)$, je t v intervalu $(0, \infty)$. Pro všecka tato t je integrál $\int t^{-2}\,\mathrm{d}t$ definován.

Někdy je možné dosáhnout toho, že rovnice $t = g(x)$, která každému x přiřazuje jediné t, přiřazuje také naopak každému t jediné x, t. j. číslo x můžeme vyjádřit jako funkci proměnné t a psát $x = h(t)$. Pak můžeme rovnici (43) číst i v opačném směru, t. j. integrál $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ můžeme vyjádřit integrálem $\int f[g(x)]\,.\,g'(x)\,\mathrm{d}x$, do něhož je však třeba dosadit $x = h(t)$. Jednoznačného vyjádření dosáhneme často tím, že z původního intervalu (a, b), v němž byla definována funkce $f(t)$, ponecháme jen část (a_1, b_1) a také z intervalu (α, β), v němž byla definována funkce $g(x)$, ponecháme část (α_1, β_1) odpovídající intervalu (a_1, b_1) (viz obr. 56). Pak ovšem primitivní funkce $\int f(t)\,\mathrm{d}x$, kterou takto dostaneme, je stanovena pouze v intervalu (a_1, b_1).

Příklad 49. Máme integrovat $\int \sin(at + b)\,\mathrm{d}t$, kde $a \neq 0$. Tento integrál je definován v intervalu $(-\infty, \infty)$, neboť $\sin(at + b)$ je spojitá funkce v intervalu $(-\infty, \infty)$. Volíme substituci $at + b = x$, z níž plyne jednoznačně $t = \dfrac{x - b}{a}$ pro každé x. Pak $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{a}$, takže

$$\int \sin(at + b)\,\mathrm{d}t = \int \sin x \frac{\mathrm{d}x}{a} = \frac{1}{a}\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos x =$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(at + b) + c \quad \text{v intervalu } (-\infty, \infty).$$

Příklad 50. Abychom stanovili integrál $\int \sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$,*) který je definován v intervalu $(0, \infty)$, dosadíme $t = x^2$. Z této rovnice plyne buď $x = \sqrt{t}$, nebo $x = -\sqrt{t}$; z obou těchto hodnot zvolíme třeba hodnotu $x = \sqrt{t}$, takže x je v intervalu $(0, \infty)$. Dále z rovnice $t = x^2$ plyne $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$. Dostáváme tedy integrál

$$\int \sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = 2\int x \sin x\,\mathrm{d}x,$$

který je definován v intervalu $(0, \infty)$. Vzniklý integrál jsme již vypočetli v příkladě 41, takže je celkem

---

*) Znak $\sqrt{t}$ značí nezáporné číslo.

$$\int \sin\sqrt{t}\,dt = 2\int x \sin x\,dx = 2(-x\cos x + \sin x) =$$
$$= 2(\sin\sqrt{t} - \sqrt{t}\cos\sqrt{t}) + c$$

v intervalu $(0, \infty)$.

Kdybychom byli volili $x = -\sqrt{t}$, byli bychom dostali $\int \sin\sqrt{t}\,dt = 2\int x \sin(-x)\,dx = -2\int x \sin x\,dx = 2(x\cos x - \sin x) = 2[-\sqrt{t}\cos(-\sqrt{t}) - \sin(-\sqrt{t})] = 2(\sin\sqrt{t} - \sqrt{t}\cos\sqrt{t}) + c$ jako dříve.

Ještě se zmíníme o tom, jak se počítají určité integrály substituční methodou. Tu je možný dvojí způsob výpočtu. Jedna cesta spočívá v tom, že určíme příslušnou primitivní funkci tak, jak to bylo právě popsáno, a potom použijeme vzorce (33). Druhá cesta, která bývá zpravidla početně jednodušší, je ta, že počítáme určitý integrál přímo. Máme-li počítat integrál

$$I = \int_c^d f[g(x)]\,.\,g'(x)\,dx = F[g(d)] - F[g(c)],$$

kde c, d jsou dvě čísla z intervalu $\langle a, b\rangle$, zavedeme substituci $g(x) = t$, $g'(x)\,dx = dt$. Je-li $g(c) = \gamma$, $g(d) = \delta$, kde γ, δ jsou čísla z intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, je jasné, že $I = F(\delta) - F(\gamma)$, ale F je primitivní funkce k funkci f, proto $I = \int_\gamma^\delta f(t)\,dt$. Je tedy celkem

$$\int_c^d f[g(x)]\,.\,g'(x)\,dx = \int_\gamma^\delta f(t)\,dt.$$

Této rovnice možno ovšem používat v obou směrech.

Příklad 51. Jde-li o integrál $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$, který existuje, neboť funkce integrovaná je spojitá pro každé x, položíme

$x^2 + 1 = t$, $2x\,dx = dt$. Poněvadž $0^2 + 1 = 1$, $1^2 + 1 = 2$, máme

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{4}.$$

Příklad 52. Máme vypočísti $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$,*) který má smysl, neboť funkce integrovaná je spojitá v intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Položíme $t = \cos x$, $dt = -\sin x\,dx$, při čemž je třeba omezit proměnnou x na takový interval, aby bylo možno z rovnice $t = \cos x$ určit číslo x jednoznačně. Poněvadž $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$, $\cos 0 = 1$, vezmeme x třeba z intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$. V tomto intervalu je $\sin x \geqq 0$, $\sqrt{1-\cos^2 x} = \sin x$, takže

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = -\int_{\frac{1}{2}\pi}^0 \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x\,dx =$$
$$= [\tfrac{1}{2}(x - \sin x\cos x)]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \tfrac{1}{4}\pi.$$

K výpočtu posledního integrálu jsme užili výsledku příkladu 42.

Mohli jsme ovšem vzít proměnnou x i z jiného intervalu, třeba z intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, 0\rangle$, neboť $\cos(-\frac{1}{2}\pi) = 0$, $\cos 0 = 1$. V tomto intervalu je však $\sin x \leqq 0$, takže $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\cos^2 x} = -\sin x$. Pak

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^0 \sin^2 x\,dx = [\tfrac{1}{2}(x - \sin x\cos x)]_{-\frac{1}{2}\pi}^0 =$$
$$= 0 - (-\tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Cvičení.

61. Stanovte derivace funkcí: a) $(x^2-1)^5$, b) $\dfrac{1}{(x^2-x-2)^3}$, c) $\cos 3x$, d) $\cos^3 x$, e) $\cos x^3$,**) f) $\sin(a-x)\sin x$, g) $\mathrm{tg}^2 x$, h) $\mathrm{tg}\,2x$.

---

*) $\sqrt{1-t^2}$ a rovněž tak i $\sqrt{1-\cos^2 x}$ značí opět nezáporné číslo.

**) $\cos^3 x$ značí $(\cos x)^3$, $\cos x^3$ značí $\cos(x^3)$.

62. Stanovte derivace funkcí (m, n celá čísla, $a \neq 0$):
a) $(ax + b)^n$, b) $x^m(1 - x)^n$, c) $\dfrac{(1 + x^m)^2}{(1 + x^2)^m}$, d) $\sin^n(ax + b)$.

63. Podle pravidla o derivování funkce složené odvoďte znovu výsledek cvič. 36.

64. Dráha kmitavého pohybu je dána vzorcem $s = a \sin(\omega t + k)$, kde $a > 0$, $\omega > 0$, k jsou konstanty. a) Stanovte okamžitou rychlost pohybu v okamžiku t. b) Kterou polohu má kmitající těleso v těch okamžicích, v nichž je okamžitá rychlost rovna nule?

65. Lze dokázat, že platí

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{1}{2}nx \sin\frac{1}{2}(n+1)\, x}{\sin\frac{1}{2}x},$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\frac{1}{2}nx \cos\frac{1}{2}(n+1)\, x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

Derivováním z toho odvoďte

$$\sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \ldots + n \sin nx = \frac{(n+1) \sin nx - n \sin(n+1)\, x}{2(1 - \cos x)},$$

$$\cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + \ldots + n \cos nx = \frac{(n+1) \cos nx - n \cos(n+1)\, x - 1}{2(1 - \cos x)}.$$

66. Vypočtěte integrály: a) $\int (3 - 2x^3)^4 x^2 \, dx$, b) $\int \dfrac{x \, dx}{(x^2 - 1)^2}$,

c) $\int \sin^2 x \cos x \, dx$, d) $\int \sin x \cos^3 x \, dx$, e) $\int \dfrac{\sin x \, dx}{\cos^2 x}$,

f) $\int \sin^3 x \, dx$, g) $\int \sin^3 x \cos^5 x \, dx$, h) $\int \dfrac{\cos^3 x \, dx}{\sin^4 x}$.

67. Vypočtěte integrály: a) $\int (ax + b)^3 \, \mathrm{d}x, \quad a \neq 0,$

b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a - x)^2}$, c) $\int \sin 2x \, \mathrm{d}x$, d) $\int \cos(3x - 5) \, \mathrm{d}x$,

e) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 3x}$, f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(4x + 1)}$, g) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \cos x}$.

68. Vypočtěte integrály: a) $\int_0^1 (x^2 - 1)\, x \, \mathrm{d}x$, b) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(3x + 1)^2}$,

c) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x \, \mathrm{d}x}{(\cos x + 1)^2}$, d) $\int_0^{\pi} \sin 3x \, \mathrm{d}x$, e) $\int_{\frac{1}{8}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 - \cos 4x}$.

69. Výsledek cvič. 58 dokažte přímo methodou substituční.

70. Na základě toho, že $\mathrm{tg}^n x = \mathrm{tg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)$, dokažte, že v intervalech $(\frac{1}{2}(2k - 1)\,\pi, \frac{1}{2}(2k + 1)\,\pi)$ (k celé) platí pro $n \neq -1$

$$\int \mathrm{tg}^n x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n - 1} \mathrm{tg}^{n-1} x - \int \mathrm{tg}^{n-2} x \, \mathrm{d}x.$$

VIII. FUNKCE INVERSNÍ

Již na str. 74 jsme zavedli pojem funkce rostoucí a klesající v intervalu. Tyto funkce nazýváme společným jménem funkce monotonní. Mají některé jednoduché vlastnosti a proto se jimi nyní budeme zabývat soustavněji, ačkoli jsme se s nimi již dříve několikrát při různých příležitostech setkali.

Víme na příklad, že pro n celé kladné z nerovností $0 \leq$