2,3. POJEM SVAZU S OBĚMA ÚKONY (SPOJOVÁNÍ A PROTÍNÁNÍ) JAKO ZÁKLADNÍMI POJMY. ZÁKLADNÍ AXIOMY THEORIE SVAZŮ. PRINCIP DUALITY. POJEM ISOMORFNÍHO A HOMOMORFNÍHO ZOBRAZENÍ PRO SVAZY. POJEM ISOMORFNÍ REPRESENTACE.

Často se stává, že v daném svazu je přirozené vztah částečného (svazového) uspořádání, resp. polouspořádání (na rozdíl od prve uvedené definice svazu), považovat spíše za něco druhotného, co lze odvodit z obou pojmů spojování a protínání. Tak je tomu na př..v naznačeném geometrickém svazu, jehož prvky jsou body, přímky a roviny (spolu ještě s celým prostorem a s jeho prázdnou částí) a kde svazové spojování (protínání) se jeví rozšířením geometrického spojování (protínání). Tam je zřejmě přirozené považovat geometrické úkony spojování a protínání, resp. jejich svazové rozšíření, za prvotní pojmy, které lze zavést a charakterisovat bez výslovného užití vztahu polouspořádání „x leží na y".

Nyní půjde o to ukázat — ve smyslu úvodní poznámky k druhé části této knížky — jak svaz lze abstraktně definovat zcela podobně jako grupu. V dalším bude totiž pro nás svazem jakýkoli soubor předmětů, t. zv. prvků svazu, v němž je možno provádět (nikoli jen jeden — jako v grupě, nýbrž) jisté d v a základní ú k o n y t. zv. s p o j o v á n í a p r o t í n á n í, a to tak, že jsou splněny jisté a x i o m y, jež dílem připomínají některé axiomy theorie grup, dílem jsou zcela jiného druhu. Pojem svazového polouspořádání, resp. částečného uspořádání, se při tom jeví jako pojem druhotný, definovaný na základě obou základních svazových úkonů, spojování a protínání.

Vynecháme zde výslovné sledování abstrakčního pochodu, jímž bychom došli k vytčení axiomů svazu na dostatečně typickém příkladu konkretního svazu, podobně, jako jsme došli k axiomům grupy, vypozoorvaným na grupě zákrytových pohybů rovnostranného trojúhelníka. Čtenáři však doporučuji, aby si vzápětí po přečtení každého jednotlivého svazového axiomu důkladně ověřil jeho platnost na některém z uvedených příkladů svazů.

Zato však budiž uvedeno několik poznámek, jež usnadní čtenáři orientaci v následujících základních — a později dodatečných axiomech svazu, jichž je na první pohled odstrašující množství (ve srovnání s pouhými čtyřmi, resp. pěti axiomy theorie grup). Systém axiomů svazu se však ukáže dokonale souměrným a přehledným. (Čtenář učiní dobře, když se po přehledu axiomů k těmto poznámkám vrátí.)

Jaké jsou příbuznosti a jaké typické rozdíly mezi axiomy theorie svazu a axiomy theorie grup? První dva, druhé dva a třetí dva axiomy, t. j. axiomy jednoznačnosti a neomezené proveditelnosti, axiomy asociativnosti a axiomy komutativnosti obou úkonů (t. j. spojování a protínání) jsou nám v podstatě známy jako 1., 2. a 5. axiom theorie grup. (Viz str. 9—12.) Rovněž axiom 3 theorie grup, požadující existenci jednotkového prvku v grupě, má zde dvojí obdobu (axiom 5′, 5″). Naproti tomu není u svazů ani stopy po obdobě axiomu 4. pro grupy, tohoto typického axiomu theorie grup, požadujícího existenci inversního prvku a tím i inversní úkon ke grupovému násobení, t. j. řešitelnost jistých nejjednodušších rovnic (tvaru $ax = b$, $ya = b$). Teprve ve speciálních druzích svazů, zvláště v t. zv. Booleových algebrách (které jsme již na příkladech poznali) jsou dány, jak uvidíme, různé 4. axiom theorie grup připomínající (početní) prostředky k řešení rovnic (isolování „neznámé“).

Za to však je pro svazy charakteristická úzká souvislost a podobnost mezi oběma základními svazovými úkony, spojováním a protínáním, která ovšem nemá obdoby v theorii grup. Tato souvislost je dána především t. zv. principem duality. Princip duality theorie svazů znamená toto: Jestliže v jakékoli identitě, t. j. rovnosti, platící v každém svazu jistého druhu a pro libovolné prvky nahradíme každé spojení průsekem a každý průsek spojením, pak obdržíme opět správnou identitu (t. zv. identitu duální k první), platnou opět pro libovolné prvky. Jádro principu duality je uloženo přímo v základních axiomech, jak následují. Tyto axiomy theorie svazu se totiž právě vyskytují ve dvojicích vzájemně duálních axiomů, zvlášť pro spojování a pro protínání. (Je zřejmé, že kdybychom uvedli princip duality předem jako výchozí předpoklad, stačilo by vždy uvést jen jeden z obou duálních axiomů. Je však vhodnější vtělit princip duality přímo do tvaru axiomů.) Čtenář znalý základních pojmů t. zv. *projektivní geometrie* ví, že v projektivní geometrii roviny se pod t. zv. principem duality rozumí tato zásada: Každá správná geometrická poučka přejde opět ve správnou poučku, jestliže pojem: přímka nahradíme pojmem: bod, pojem: bod pojmem: přímka, výraz: je spojením výrazem: je průsečíkem a výraz: je průsečíkem výrazem: je spojením - (a provedeme ovšem příslušné gramatické úpravy věty).

Při pozdějším doplnění základních axiomů svazu dalšími axiomy podléhá ovšem také princip duality odpovídajícímu doplnění. Tak je tomu ve svazech geometrického spojování a protínání. Princip duality projektivní geometrie je pak *důsledkem* vhodně doplněného *principu duality theorie svazů* (ve smyslu svazové povahy geometrického úkonu spojování a protínání).

Jednotlivé základní axiomy, definující pojem svazu, jsou tyto: Neprázdný soubor S jakýchkoli předmětů, t. zv. prvků, je svaz, jestliže platí:

(1′)	(1″)
Ke každým dvěma prvkům a, b svazu S je určen jediný prvek c z S, který se nazývá spojením prvků a s prvkem b a označuje se jako $a \cup b$.	Ke každým dvěma prvkům a, b svazu S je určen jediný prvek d z S, který se nazývá průnikem prvku a s prvkem b a označuje se jako $a \cap b$.

(Oba duální axiomy jednoznačnosti a neomezené proveditelnosti spojování a protínání.)

Pro libovolné prvky a, b, c z S platí

(2′)	(2″)
$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$.	$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$.

(Oba duální axiomy asociativnosti pro spojování a protínání.)

Pro libovolné prvky a, b z S platí

(3′)	(3″)
$a \cup b = b \cup a$.	$a \cap b = b \cap a$.

(Oba duální axiomy komutativity pro spojování a protínání.)

Pro libovolné prvky a, b, c z S platí

(4′)	(4″)
$a \cup (a \cap b) = a$.	$a \cap (a \cup b) = a$.

(Oba duální axiomy absorbce („pohlcování“).)

Jak již řečeno, oba dva poslední axiomy jsou typické pro svazy. Kdežto není třeba zvláště vykládat smysl axiomů (1′) až (3″), neškodí popsat několika slovy význam axiomů absorbce (4′) a (4″). Tyto axiomy říkají: Spojení (průnik) daného prvku s průsekem (spojením) tohoto prvku a libovolného dalšího prvku dá zpět daný prvek. Jako by tedy vskutku průsek dvou prvků byl pohlcován každým ze svých činitelů, t. j. jako by průsek zanikal ve spojení se svým činitelem; duálně k tomu jako by vskutku spojení zanikalo (bylo pohlceno) jsouc protťato svým činitelem.

Co se týče početního významu axiomů absorbce, je jasné, že tkví v zjednodušování složených výrazů pro prvky svazu. Svou ryze početní úlohou tedy axiomy absorbce připomínají pravidla o vytýkání, resp. o krácení (čísel). Jako těchto pravidel — i oněch se dá někdy použít k takové úpravě rovnosti ve svazu, po níž žádaný prvek zůstane isolován na jedné straně („řešení rovnice“). Nahlédneme, jak se užívá axiomu absorbce na důkazu jisté dvojice duálních zásad, která je důsledkem uvedených základních svazových axiomů (1′)—(4′) a kterou se tak ostře odlišují svazy od grup.

Věta:

Pro každý prvek a svazu S platí

$$a \cup a = a, \quad a \cap a = a.$$

(T. zv. zásada idempotentnosti spojování a protínání.[36])

Důkaz:

Položme (při libovolně daném prvku a z S) $a \cup a = c$. (Užito axiomu (1′). Položme $b = c$ v axiomu (4′). Dostáváme

$$a = a \cup (a \cap c) = a \cup (a \cap (a \cup a)) \ldots (+).$$

Z axiomu (4″) (porovnáním prvního se třetím členem v rovnostech (+) plyne

[36] Někdy bývá tato zásada považována za axiom (v jiných systémech axiomů theorie svazů).

$$a \cap (a \cup a) = a.$$

Nahrazením a za $a \cap (a \cup a)$ v $(+)$ vskutku plyne

$$a = a \cup a.$$

Rovnost $a = a \cap a$ se dokáže duálním způsobem, což přenechávám čtenáři jako cvičení.

Zásada idempotentnosti říká, že ačkoli bychom na podkladě axiomů asociativnosti mohli (podobně jako v grupách) definovat

$$a \cup a = a^2, \; a \cup a \cup a = a^3, \; \ldots$$

(a duálně pro opakované protínání namísto spojování), k ničemu by to nebylo, protože bychom měli

$$a = a^2 = a^3 = \ldots$$

Vraťme se k základním svazovým axiomům (1′) až (4″); nelze již odkládat splacení dluhu z předchozího paragrafu, v němž byl pojem svazu zaveden na podkladě částečného uspořádání. Je třeba ukázat, že jde o jeden a týž pojem svazu, t. j. předně: *Platí-li* (v souboru S) *axiomy* (1′) *až* (4″), *pak je tím již jednoznačně určen jistý vztah částečného uspořádání* $\subset$ (ve smyslu zásad I, II+, III), resp. odpovídající vztah polouspořádání $\subseteq$ (ve smyslu I′, II′, III) *a to tak, že výsledky spojování a protínání, zavedeného tímto částečným uspořádáním podle podmínek* (I $\cup$), (II $\cup$), (I $\cap$), (II $\cap$), *jsou tytéž, jako při spojování a protínání původně daném.* A za druhé, obráceně: *Jakmile je spojování a protínání zavedeno pomocí částečného uspořádání podle podmínek* I, II+, III, (I $\cup$), (II $\cup$), (I $\cap$), (II $\cap$), *pak jsou již splněny axiomy* (1′) až (4″) — *a navíc, pak částečné uspořádání definované pomocí právě zavedeného spojování* (*nebo protínání*) *je totožné s tím, z něhož jsme vyšli.*

Důkaz první poloviny tvrzení:

Zaveďme tento dvojčlenný vztah „$\subset$“: Pro prvky a, b svazu S (svazu ve smyslu axiomů (1′)—(4″)), budiž $a \subset b$, když a jen když je

$$a \cup b = b, \; a \neq b.$$

Máme ukázat, že tento vztah „$\subset$“ je hledaným částečným uspořádáním. Pro „$\subset$“ je zřejmě splněna zásada irreflexivity I. Dokažme, že je pro „$\subset$“ splněna i zásada asymetrie II+. Skutečně, kdyby bylo současně $a \cup b = b$, $a \neq b$ čili $a \subset b$ a $b \cup a = a$, $b \neq a$ čili $b \subset a$, pak dle axiomu komutativity (3′), $a \cup b = b \cup a$ by bylo $a = b$, což jsme (předpokladem) vyloučili.

Konečně ukažme splnění zásady transitivnosti (III) naším vztahem $\subset$. Nechť je tedy $a \subset b$ a $b \subset c$ čili nechť platí $a \cup b = b$, $b \cup c = c$, $a \neq b$, $b \neq c$. Máme odvodit $a \subset c$. Dosazením z dané první rovnosti do druhé máme $(a \cup b) \cup$ $\cup\, c = c$ a užitím axiomu asociativnosti (2′) a druhé z daných rovností máme $a \cup c = c$. Při tom nemůže být $a = c$, protože jinak bychom z daných rovností měli $a = b$ proti předpokladu. Tedy je skutečně $a \subset c$.

Že výsledky jak spojování tak protínání, zavedeného pomocí právě určeného vztahu částečného uspořádání čili jím daného polouspořádání jsou totožné s původně (přímo) daným spojováním a protínáním, to je již nyní bezprostředním důsledkem definice našeho částečného uspořádání. (Radím však čtenáři, aby nedůvěřoval tomuto ujištění a sám se přesvědčil.) — Tím je první polovina tvrzení dokázána.

Důkaz druhé poloviny tvrzení:

Když je svaz definován pomocí částečného uspořádání (zásadami I, II*, III, (I $\cup$), (II $\cup$), (I $\cap$), (II $\cap$), pak předně jsou splněny axiomy (1′), (1″), (3′, (3″). Dále axiomy asociativnosti (2′) a (2″) odvodíme dále takto: Jsou-li a, b, c prvky svazu, definovaného pomocí částečného uspořádání, položme

$$(a \cup b) \cup c = h, \; a \cup (b \cup c) = k.$$

Dle zásady (I $\cup$) je (dle druhé rovnosti) $a \subseteq k$ a $b \cup c \subseteq k$. Poslední však (dle téže zásady) má za následek $b \subseteq k$ a $c \subseteq k$. Avšak $a \subseteq k$ a $b \subseteq k$ dává $a \cup b \subseteq k$ dle zásady (II $\cup$). Toto spolu s $c \subseteq k$ dává $h \subseteq k$ opět dle zásady (II $\cup$). Zcela stejným způsobem se odvodí $k \subseteq h$. Dohromady tedy $k = h$, dle zásady ztotožňování II', což se mělo dokázat.

Konečně axiomy (4'), (4") absorpce odvodíme takto:

Označme $d = a \cup (a \cap b)$. Pak je dle ($\mathrm{I} \cup$) $a \subseteq d$. Dále dle ($\mathrm{I} \cap$) je $a \cap b \subseteq a$. Z posledního však pomocí I' přes $a \subseteq a$ již dostáváme dle zásady ($\mathrm{II} \cup$) $d \subseteq a$. Dohromady tedy (dle zásady ztotožňování II') $a = d$, což je axiom (4'). Axiom (4") se odvodí duálním způsobem, což přenechávám čtenáři.

Tím je dokončen důkaz celého tvrzení o logické rovnocennosti obou definic svazu, totiž dříve uvedené, názornější definice pomocí pojmu částečného uspořádání a později uvedené definice pomocí axiomů pro úkony spojování a protínání.

A ještě jedna často užitečná *poznámka*:

Z počítání číselnými nerovninami známe toto pravidlo o „sečítání nerovnin": Když je $a \leqq b$ a $c \leqq d$, pak je i $a + c \leqq b + d$.

Zcela obdobné — a sice hned (následkem principu duality) dvojí pravidlo (pro „spojování nerovnin" a pro „protínání nerovnin" máme i ve svazech.

Čtenář si sám ověří (viz cvič. 3), že ze dvou „nerovnin" $a \subseteq b$ a $c \subseteq d$ v libovolném svazu plyne jednak „nerovnina" $a \cup c \subseteq b \cup d$ a jednak nerovnina $a \cap c \subseteq b \cap d$.

Doplňme věc ještě poznámkou, že stejné částečné uspořádání $\subset$ o němž byla právě řeč, možno ve svazu, daném přímo pomocí spojování a protínání zavést podmínkou: $a \subset b$ tehdy a jen tehdy, když $a \cap b = a$, $a \neq b$. To již není třeba dokazovat, protože plyne z principu duality, o němž byla řeč svrchu. (Čtenáři však neuškodí, provede-li si ze cvičných důvodů podrobně celé odvození zvlášť pro tento duální případ.)

Abychom měli na očích alespoň jeden příklad na užití právě dokázaných souvislostí, připomeňme si znova již zhruba naznačený geometrický svaz, daný všemi body, přímkami a rovinami (včetně celého prostoru a jeho prázdné části). Zde nám právě dokázané tvrzení ukazuje, jak geometrický vztah „x leží na y“ je *odvozeným vztahem*, který je (jako jediný možný) určen za pomoci spojování předpisem „spojení x s y je samo y“. — Stejně tak dobře možno však říci pomocí protínání duálně: „x leží na y“ znamená právě tolik, co „x se s y protíná v samém x“ (viz cvič. 3).

Probrali jsme základní axiomy theorie svazů (1′) až (4″) a jejich souvislost s pojmem částečného uspořádání. Uvedené čtyři dvojice základních axiomů však ještě necharakterisují dostatečně na př. geometrické spojování a protínání, což kritický čtenář musel shledávat neuspokojivým. Ty druhy svazového spojování (a protínání), které byly dosud v příkladech uvedeny, jsme pomocí axiomů 1′ až 4″ charakterisovali jen velmi nedokonale. Kdyby axiomatická abstraktní methoda theorie svazů nebyla s to na př. vystihnout z podstaty spojování a protínání částí (množin) či z úkonů geometrického spojování a protínání více než to, co jsme vytkli shora, byl by pojem svazu pouhou abstraktní ilustrací známých matematických pojmů bez většího samostatného významu. Na štěstí však jednotlivé zvláštní a častěji se vyskytující druhy svazů dovedeme dobře vystihnout a odlišit. Ovšem k přesnějšímu vystižení toho či onoho druhu svazových úkonů je potřeba *dalších axiomů*. I v tom je tedy rozdíl oproti theorii grup: Kdežto abstraktní theorie grup je s to podat hluboké matematické poznatky na podkladě pouhých čtyř (po případě pěti, pokud jde o Abelovy grupy) axiomů, základní axiomy theorie svazů (alespoň při současném stavu matematiky) tvoří ještě příliš všeobecný a málo uzavřený systém, který (za současného stavu theorie) sám nestačí jako podklad hlubších úvah.

Předně doplňme ještě základní a všeobecné axiomy theorie svazů jistou dvojicí vzájemně duálních axiomů 5′ a 5″, které jsou naprostou obdobou 3. axiomu theorie grup (o jednotkovém prvku), třebaže nemají té zásadní důležitosti.

Pojem jednotky a nuly svazu:

5′

Existuje jediný prvek j, t. zv. jednotkový prvek svazu, či stručněji jednotka svazu tak, že je

$$j \cap a = a, \; j \cup a = j$$

pro každý prvek a ze svazu.

5″

Existuje jediný prvek n, t. zv. nulový prvek svazu, či stručněji nula svazu tak, že je

$$n \cup a = a, \; n \cap a = n$$

pro každý prvek a ze svazu.

Na příklad ve svazu (Booleově algebře) všech částí (konečného) souboru (viz na př. obr. 14) je jednotkovým prvkem celý (plný) soubor, nulovým prvkem prázdný částečný soubor. Podobně ve svazu geometrického spojování a protínání je jednotkovým prvkem celým prostor a nulovým prvkem jeho prázdná část. Existují ovšem svazy, které postrádají buď jednotky nebo nuly nebo obojího. Na př. ve svazu všech celých kladných čísel, jehož svazovým polouspořádáním je vztah dělitelnosti, je nulovým prvkem číslo 1, kdežto jednotkový prvek neexistuje. Když zavedeme vztah x je dělitelem y — pišme opět $x \subseteq y$ — mezi kladná racionální čísla tak, že klademe $x \subseteq y$ tehdy a jen tehdy, když existuje celé kladné číslo z tak, že $z \, . \, x = y$, pak takovýto vztah dělitelnosti je opět svazovým polouspořádáním. Daný svaz racionálních čísel postrádá jak jednotky, tak i nuly. Takový nedostatek však (na rozdíl od theorie grup), není ve svazech žádným neštěstím. Chybějící jednotku (nulu) svazu možno prostě uměle přidat, aniž bychom jinak byli nuceni měnit již stávající úkony spojování a protínání. Tak na př. chceme-li, aby shora zmíněný svaz všech celých kladných čísel ve smyslu vztahu dělitelnosti se změnil ve svaz s jednotkovým prvkem, můžeme přidat t. zv. „kladné nekonečno“ $+\infty$ jako nový prvek, stanovíce (pro úplnost), že „číslo“ $+\infty$ je dělitelno každým číslem celým; pak zřejmě bude $+\infty = j$ jednotkovým prvkem takto pozměněného (rozšířeného) svazu celých čísel (kde spojení = nejmenší spol. násobek, průnik = největší spol. dělitel tak, jako dříve).

Je obecně zřejmo, že jednotka svazu je vždy nejvyšším („největším“), nula svazu nejnižším („nejmenším“) prvkem ve smyslu svazového částečného uspořádání — pokud obě existují. Zřejmě každý konečný svaz má nulu i jednotku, jakožto průnik, resp. spojení všech svých (t. j. konečně mnoha) prvků. (Je třeba si uvědomit, že se tu opíráme o oba axiomy asociativnosti 2′, 2″ pro svazové spojování a protínání, které nám teprve umožňují jednoznačně zavádět spojení a průnik libovolného konečného počtu prvků svazu „najednou“.)

Isomorfní a homomorfní zobrazení v theorii svazů.

Všeobecné pojmy z theorie svazů je třeba dále doplnit přenesením pojmů *isomorfní*, (*homomorfní*) *zobrazení* a „abstraktní“ svaz, lépe: typ isomorfismu svazu — z theorie grup, kde jsou nám známy — na *theorii svazů.*

Stejně, jako v theorii grup i v theorii svazů isomorfním zobrazením svazu S na svaz S^* rozumíme takové vzájemně jednoznačné přiřazení φ prvků z S prvkům z S^*, že platí

$$\varphi(x \cup y) = \varphi(x) \cup \varphi(y),$$
$$\varphi(x \cap y) = \varphi(x) \cap \varphi(y).$$

(Zobrazení φ přenáší spojení i průnik z S na S^*; zhruba řečeno, ve svazech S a S^* se spojuje a protíná „v podstatě“ stejně.) Jako v grupách pak říkáme, že svazy S a S^* jsou (navzájem) *isomorfní.*

Prostý příklad isomorfního zobrazení svazu na svaz je toto: (Bohatší příklady viz na konci odst. 2,8.)

S budiž svaz všech částí daného, konečného počtu n předmětů, pro jednoduchost na př. přirozených čísel, $1, 2, 3, \ldots, n$. (Viz str. 125—7.)

S^* budiž svaz všech dělitelů čísla $2 . 3 . 5 \ldots p_n = N$ (prvních n po sobě (dle velikosti) následujících prvočísel) — ve smyslu svazového polouspořádání dle vztahu dělitelnosti.

φ nechť přiřazuje dané skupině k různých čísel, t. j. prvku ($x = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ ze svazu S součin těch prvočísel, jejichž místa v posloupnosti prvočísel (dle velikosti) jsou právě celá kladná čísla $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Toto číslo tedy označíme jako $x^* = \varphi(x)$.

Čtenář si sám snadno uvědomí, že zobrazení φ je isomorfním zobrazením svazu S na svaz S^*. (Nejmenší společný násobek $x^* \cup y^*$ dvou dělitelů x^* a y^* čísla $2 . 3 . 5 \dots p_n$ tvoříme patrně totiž tak, že shrneme prostě prvočíselné činitele obou čísel x^* a y^* v jeden součin; podobně největší společný dělitel $x^* \cap y^*$ dvou dělitelů čísla $2 . 3 . 5 \dots p_n$ se utvoří jako součin těch prvočísel, jež jsou činiteli zároveň v x^* i v y^*.) Další příklady na isomorfní zobrazení svazu na svaz najde čtenář ve cvičeních (viz též obr. 14). Je-li φ isomorfní zobrazení svazu S na svaz S^*, pak je $x \subseteq y$ v S (ve smyslu svazového polouspořádání) tehdy a jen tehdy, když je $\varphi(x) \subseteq \varphi(y)$ v S^*, protože je $x \cup y = y$ v S tehdy a jen tehdy, když je $\varphi(x) \cup \varphi(y) = \varphi(y)$ v S^*. Z toho vyplývá, že jednotce a nule j a n svazu S odpovídají jednotka a nula j^* a n^* svazu S^*, t. j. $\varphi(j) = j^*$, $\varphi(n) = n^*$ při každém isomorfním zobrazení φ svazu S na svaz S^*. Tak v předchozím příkladě $n = \emptyset$ (prázdná část), $\varphi(\emptyset) = 1$,[37] $j = (1,2, \dots n)$ φ (j)$=N$

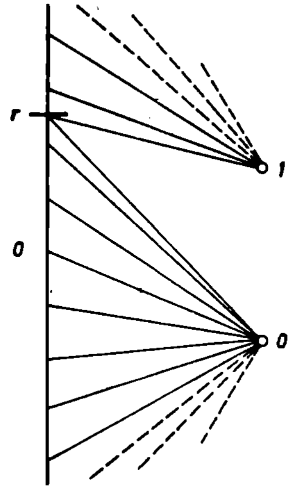
Jestliže od zobrazení svazu S na svaz S^* požadujeme vše, co prve, jenom nikoli nutně to, aby přiřazení bylo vzájemně jednoznačné, t. j. jestliže připustíme, že některý prvek z S^* může být obrazem více než jednoho prvku z S, pak říkáme, že zobrazení S na S^* je homomorfní. Homomorfní zobrazení svazu na svaz je tedy, stejně jako při grupách, jakési promítnutí svazu na svaz, které rovněž přenáší spojování a protínání (z S na S^*), ale jen v jednom směru, tedy nikoli věrně.

Abychom měli jednoduchý a dosti známý příklad, vezměme si za svaz S dle velikosti uspořádaný soubor všech racionálních čísel, seřazených podle velikosti na svislé číselné ose (záporná část budiž dole, kladná nahoře), za svaz S^* (v šech obrazů) si vezměme nejjednodušší uspořádaný soubor (obsahující více než jediný předmět), totiž soubor čísel 1 a 0. Budiž r nějaké pevně zvolené reálné číslo (t. j. desetinný zlomek, jehož jednotlivé číslice na libovolném místě desetinného

[37] Čtenáře nesmí mást, že „nulou“ svazu S^* je tu číslo 1.

rozvoje lze vždy určit, aniž se však nutně jakékoli cifry musí periodicky opakovat). Jako homomorfní zobrazení svazu S na svaz S^* pak máme toto přiřazení φ_r:

Všem racionálním číslům, větším nebo rovným reálnému číslu r, přiřadíme číslo 1, t. j. $\varphi_r(x) = 1$ pro $x \geqq r$. A všem racionálním číslům ostatním přiřadíme číslo 0, t. j. $\varphi_r(x) = 0$ pro $x < r$. Pak φ_r je homomorfní zobrazení svazu S na svaz S^*, které lze znázornit skutečným geometrickým promítáním (viz obr. 15). Přenechávám čtenáři jako lehké a užitečné cvičení podrobný důkaz, že shora vytčené podmínky pro to, aby dané zobrazení bylo homomorfní, jsou skutečně splněny.



Obr. 15.

(Dá se dokonce ukázat, že každé homomorfní zobrazení právě uvedeného svazu S na svaz S^* je vytvořeno podobným způsobem jistým reálným číslem. Reálná čísla bychom mohli přímo definovat jako homomorfní zobrazení uspořádaného svazu S racionálních čísel na uspořádaný svaz $S^* = (0, 1)$. To je v podstatě známá t. zv. Dedekindova definice reálného čísla řezem.)

Dodejme ještě k pojmu homomorfního zobrazení svazu na svaz, s nímž se čtenář setká ještě v dalších výkladech a ve cvičení toto:

Kdežto u grup nás pojem homomorfního zobrazení vedl k důležitému pojmu normální podgrupy, při čemž se ukázalo, že znát všechny normální podgrupy dané grupy je rovnocenné se znalostí všech homomorfních obrazů dané grupy (až na isomorfismus ovšem, viz 1. věta o isomorfismu theorie grup, str. 72), není žel nic podobného u svazů v obecném případě. Definujeme sice pojem podsvazu daného svazu (stejně jako pojem podgrupy) jakožto (neprázdný) soubor prvků z daného svazu vybraných, do něhož se dvěma prvky náleží i jejich spojení a průnik. (V případě, že daný svaz má jednotku, resp. nulu, žádáme zpravidla, aby je i podsvaz obsahoval.) Ale obdoba normální podgrupy tu chybí, s výjimkou některých zvláštních druhů svazů (na př. zmíněných Booleových algeber).

A ještě dvě srovnání abstraktní theorie grup s abstraktní theorií svazů.

Stejně jako v abstraktní theorii grup jsou naším vlastním předmětem v abstraktní theorii svazů nikoli přímo jednotlivé svazy, nýbrž hned celé *typy* (třídy) *svazů vzájemně isomorfních*. To znamená, že — podobně jako v abstraktní theorii grup — nezáleží ani na konkretní povaze (definicích) jednotlivých prvků svazu, ani na tom, jakým způsobem se uskutečňuje (vyhledává) spojení a průnik daných dvou prvků svazu. Záleží jen na počtu od sebe odlišených prvků a na pouhých výsledcích svazových úkonů, to jest na tom, co se pomocí isomorfního zobrazení přenáší z jednoho svazu na druhý. Dva isomorfní svazy považujeme ve smyslu abstraktní theorie svazů za naprosto rovnocenné — se všemi výhodami logické přesnosti a obecnosti takovéhoto pojímání, jak to bylo zdůrazněno na příslušném místě při grupách.

Stejně jako v abstraktní theorii grup hledíme však i v theorii svazů vyvažovat a doplňovat methody abstrakce (axiomatisace) obráceným postupem konkretisace. To jest, hledáme isomorfní representace všech možných abstraktních svazů axiomaticky charakterisovaného druhu vhodným konkretním svazem, hledáme uskutečnění logicky možných svazových úkonů určitým způsobem jejich skutečného provádění. Avšak ani v případě konečných svazů, následkem jejich příliš veliké rozmanitosti, nemáme dostatečně universální a při tom dostatečně konkretní druh svazového spojování a protínání, který by hrál obdobnou úlohu, jako násobení matic při vystihování grupového násobení. Prostředky a způsob representace svazů jsou dosti složité a vzájemně se značně liší podle dodatečných axiomů, charakterisujících jednotlivé druhy svazů. Seznámíme se později s nejjednoduššími z nich, to jest s t. zv. množinovou representací konečné Booleovy algebry.

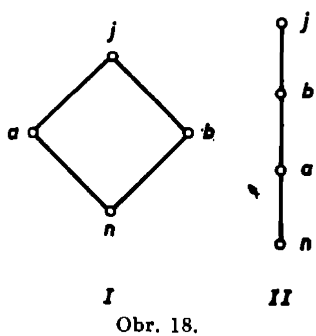
Společné je všem representacím v theorii svazů toto: Prvky representujících svazů jsou *zpravidla* jisté soubory čili množiny matematických předmětů, při čemž, je-li $x \subseteq y$ ve smyslu representovaného svazu, je množina, representující prvek svazu x obsažena v množině, representující prvek svazu y.[38] (Avšak za matematické prostředky, kterých je třeba užít k definici representujících *svazových úkonů* spojování a protínání se obecně nikterak nehodí jednoduché t. zv. sjednocování a pronikání množin (viz 2,4). Jsou to prostředky někdy poněkud složité. (Patří buď do abstraktní algebry nebo do t. zv. množinové topologie a vymykají se z rámce této knížky.)

S hlediska abstraktní theorie svazů bychom mohli výsledky svazového spojování a protínání (alespoň především u konečných svazů o nepříliš velikém množství prvků) zanášet do tabulky, podobně jako jsme to činili u grup. (Viz str. 8.) (Tabulky by byly ovšem dvě, zvlášť pro spojování a zvlášť pro protínání.)

Užíváme však raději přehlednějšího grafického znázorňování, o němž jsme již hovořili. Na obr. 16, 17, 18, 19 jsou znázorněny všechny abstraktní svazy o 2, 3, 4 a 5 prvcích. (T. j.

Obr. 16.

Obr. 17.



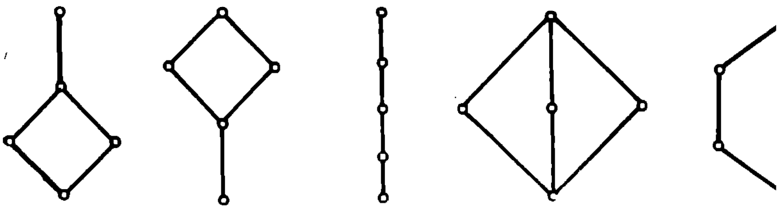
Obr. 18.

[38] Polouspořádání representovaného svazu přechází tedy v *množinovou inklusi*, což ale nijak neznamená, že by spojování a protínání svazu přešlo v pouhé množinové spojování a protínání.

každá třída vzájemně isomorfních svazů je vlastně representována jedním konkretním (ve smyslu grafické geometrické representace svazem).

Počet vzájemně neisomorfních svazů o daném počtu prvků silně stoupá. (Je již 15 svazů o 6 prvcích: radím čtenáři, aby si nakreslil graf aspoň některého z nich. (Cvič. 5.))

Tím jsme skončili část, jednající o obecném pojmu svazu. Dále si blíže všimněme jen jednoho důležitého zvláštního druhu svazů: t. zv. *Booleových algeber.*



I *II* *III* *IV* *V*

Ob. 19.

Cvičení k 2,3.

1. Dokažte zásadu idempotentnosti pro průnik.

2. Odvoďte axiom 4″ (druhý axiom absorbce) ve svazu, daném částečným uspořádáním, t. j. daném požadavky I, II$^+$, III, (I $\cup$), (I $\cap$), (II $\cup$), (II $\cap$).

3. Ukažte, že ve svazu ve smyslu axiomů 1′ až 4″ lze částečné uspořádání zavést definicí:

$$a \subset b, \text{ když } a \cap b = a, \ a \neq b.$$

(Ukažte, že toto částečné uspořádání je totožné se svazovým částečným uspořádáním, daným stanovením v textu.)

4. Položme pro dvě *racionální* čísla x, y *kladná* $x \subseteq y$ tehdy a jen tehdy, když existuje *celé* kladné číslo z tak, že je $x \cdot z = y$. Dokažte, že tento vztah „$\subseteq$" je svazovým polouspořádáním (že tedy racionální kladná čísla tvoří (nekonečný) svaz v polouspořádání podle dělitelnosti).

Znázorněte toto svazové částečné uspořádání graficky pro podsvaz racionálních čísel tvaru $2^k 3^l$ ($k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

5.* Udejte všech 15 typů svazů o 6 prvcích (ve formě grafu).